Ivo Babuška

Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости, II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 2, 165,166–167,168–203

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100453

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБЛАСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ОСНОВНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ГЛАВНЫМ ОБРАЗОМ В СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ УПРУГОСТИ, II

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага

(Поступило в редакцию 3/X 1959 г.)

Работа является продолжением [1]. Исследуются области определения в зависимости от того, приводит ли их малое изменение лишь к малым же изменениям решений эллиптических дифференциальных уравнений или нет. Далее исследуются некоторые связи теории аппроксимаций и т. под. с указанными вопросами. Приводятся и применения, главным образом к математической теории упругости.

V. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОЙ ПРОБЛЕМЫ

В этом параграфе мы будем разбирать вопрос, связанный с понятием устойчивости решения. Введем прежде всего понятие устойчивости.

Определение 5,1. *Пусть дана область* $\Omega \in \mathfrak{N}$ (*см. определение* 4,4) $\overline{\Omega} \subset K_r \subset \subset E_m$. Пусть A — *регулярный оператор порядка* $2l$ *на* K_r (*см. определение* 3,1). *Обозначим через* Ω_ε ε-*окрестность области* Ω *и пусть* $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\overline{\Omega}_{\varepsilon_0} \subset K_r$. *Пусть* $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$, и $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$. *Пусть* ${}^*H_{\Omega_{\varepsilon_i}}$ — *соответствующее подпространство пространства* $H(A)$ (*см. определение* 3,3). *Обозначим* $\operatorname*{Lim}\limits_{i\to\infty} {}^*H_{\Omega_{\varepsilon_i}} = {}_{\Omega}^{*}H$.[1]) *Область* Ω *мы назовем устойчивой относительно оператора* A, *если* ${}^*H_\Omega = {}_{\Omega}^{*}H$. *Если же будет* ${}^*H^\Omega \neq {}_{\Omega}^{*}H$, *мы будем говорить, что область* Ω *неустойчива.*

Замечание. Нетрудно видеть, что пространство ${}_{\Omega}^{*}H$ не зависит от выбора последовательности ε_i.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 5,1. *Пусть дана область* $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$. *Область* Ω *будет устойчивой, если и только если для каждой финкции* $\psi \in H(A)$, $u_\psi = u^\psi$, *где через*

[1]) Указанный предел имеет смысл, ибо ${}^*H_{\Omega\varepsilon_i} \subset {}^*H_{\Omega\varepsilon_{i+1}}$.

u_ψ и u^ψ мы обозначили соответственно внутреннее и внешнее решение Винера (*ср. опр.* 4,5 *и* 4,6).

Доказательство вытекает почти непосредственно из теорем 4,3 и 4,4.

Замечание 1. Из теоремы 5,1 явствует, что наше определение 5,1 весьма тесно связано со способом, которым М. В. Келдыш вводит понятие устойчивости области относительно оператора Лапласа (см. [2]).

Замечание 2. Внутреннее решение Винера, определенное нами в определении 4.5 является, собственно говоря, решением на открытом множестве. Внешнее же решение можно в значительной мере истолковать как решение на замкнутом множестве. Итак, при помощи внешнего решения можно вводить решение на произвольном замкнутом множестве.

Замечание 3. Понятие устойчивости мы ввели про помощи равенства внешнего и внутреннего решений. В случае, когда граница имеет меру нуль, в виду того, что равенство мы понимаем в интегральном смысле, устойчивость выражает, собственно говоря, непрерывную зависимость решения от области определения. Однако, в случае, когда граница имеет положительную меру, в понятии устойчивости заключается собственно несколько больше, чем только непрерывная зависимость решения от области определения. Отсюда видно, что естественнее всего будет исследовать области с границей меры нуль. Эти области и имеют самое большое практическое значение.

Замечание 4. Понятие устойчивости области мы определили при помощи равенства функций $u_\psi = u^\psi$ для каждой функции $\psi \in H(A)$. Если ограничиться лишь функциями $\psi \in H_1(A) \subset H(A)$, то мы получим понятие относительной устойчивости по отношению к $H_1(A)$. Можно, конечно, обнаружить, что гладкость функции ψ не является решающим фактором для справедливости равенства $u_\psi = u^\psi$, т. е. если Ω неустойчиво, то всегда существует и $\psi \in M$ так, что $u_\psi \neq u^\psi$. Кроме теоретического значения относительная устойчивость имеет и практическое значение. Дело в том, что иногда случается, что, напр., в теории упругости существуют группы рабочих нагрузок, имеющих специфический хатактер, напр., нагрузка от давления воды. В таком случае можно практически удовлетвориться требованием относительной устойчивости по отношению к этой группе нагрузок.

Замечание 5. С понятием относительной устойчивости связан ряд совершенно нерешенных проблем, напр., размерность пространства функций $\psi \in H(A)$, для которых $u_\psi \neq u^\psi$, равно как и связь этой размерности со свойствами множества Ω.

Замечание 6. Решения u_ψ и u^ψ не зависят от пробегания функции ψ во всем K_r, а только от пробегания функции на $\dot{\Omega}$. Однако мы всегда предполагаем, что существует продолжение краевого условия на все K_r так, что это расширение принадлежит пространству $H(A)$. При данном краевом условии вопрос о возможности его продолжения на K_r, которое принадлежит $H(A)$, отличается, вообще говоря, значительной сложностью (некоторые результаты можно найти, напр., в [3], [4], [5]). В технической практике, однако, по причинам технического или физического характера всегда дано не только краевое условие, но и соответственное продолжение, выражающее, напр., в теории упругости, изменение внешней нагрузки при незначительном изменении области.

Замечание 7. В замечании 6 мы уже упомянули о том, что продолжение краевых условий собственно известно из физических соображений. Нужно, однако, заменить, что иногда изменение области определения влечет за собой такое изменение нагрузки, т. е. такое изменение краевых условий, которое нельзя выразить никаким продолжением краевого условия в том смысле, как указывалось выше. Приведем пример. Рассмотрим напряженное состояние гравитационной плотины, вызванное давлением воды наполненного озера на наводной стороне плотины. При вычислениях нельзя пренебрегать возрастанием гидростатического давления с глубиной. Так как в этом случае речь идет о плоском напряженном состоянии, то исследование напряженного состояния сводится к решению бигармонической проблемы. С физической точки зрения ясно, что при любом изменении (поверхности) области определения напряжение на поверхности остается неизменно нормальным, т. е. касательная составляющая поверхностного напряжения равна нулю. Ввиду того, что составляющие тензора напряжений при переходе к бигармонической проблеме выражаются как вторые производные соответственной бигармонической функции Эри, этот вид внешней нагрузки и ее изменения, вызванные изменениями области определения, нельзя уже представить в виде какого-либо продолжения краевого условия.

Нетрудно убедиться в справедливости теоремы об инвариантности понятия устойчивости по отношению ко всем операторам одного и того же порядка.

Теорема 5,2. *Область $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$ будет устойчивой по отношению к регулярному оператору A порядка $2l$ на K_r, если и только если она устойчива по отношению к l-гармоническому оператору B.*

Замечание 1. При доказательстве теоремы используется то обстоятельство, что множества $H_\Omega(A)$ и $H_\Omega(B)$, соответственно, ${}_\Omega H(A)$ и ${}_\Omega H(B)$ содержат одни и те же элементы. Однако, ввиду того, что операторы A и B индуцируют различные скалярные произведения, в общем случае будет $^*H_\Omega(A) \neq {}^*H_\Omega(B)$.

Замечание 2. Теорема 5,2 выражает инвариантность понятия устойчивости по отношению ко всем операторам одного и того же порядка.

Замечание 3. Подобно тому, как в заключительных замечаниях пар. IV, наше утверждение об инвариантности можно распространить и на несимметрические операторы с положительно определенной симметрической частью.

Теорема 5,3. *Пусть $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$, Ω — область, устойчивая по отношению к регулярному оператору A порядка $2l$. Пусть, далее, $\Omega_n^{(1)} \in \mathfrak{P}$, $\Omega_n^{(2)} \in \mathfrak{P}$ — последовательность областей, обладающих следующими свойствами:*

а) 1. $\Omega_{n+1}^{(1)} \supset \overline{\Omega}_n^{(1)}$; 2. $\Omega_n^{(1)} \subset \Omega$; 3. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{(1)} = \Omega$.

б) 1. $\overline{\Omega}_{n+1}^{(2)} \subset \Omega_n^{(2)} \subset K_r$; 2. $\overline{\Omega} \subset \Omega_n^{(2)}$; 3. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{(2)} = \overline{\Omega}$.

Пусть, далее, дана последовательность открытых множеств Ω_n таких, что $\Omega_n \subset K_r$, $\Omega_n^{(1)} \subset \Omega_n \subset \Omega_n^{(2)}$ Пусть $\psi \in H(A)$. Обозначим через P_n проектор на ${}^*H_{\Omega_n}$ и через P_0 — проектор на ${}^*H_\Omega = {}_\Omega^*H$. Тогда $P_n\psi \to P_0\psi$.

Доказательство. Обозначим через $P_n^{(1)}$ и $P_n^{(2)}$ проекторы соответственно на ${}^*H_{\Omega_n^{(1)}}$ и ${}^*H_{\Omega_n^{(2)}}$. В силу устойчивости области Ω будет $P_n^{(2)}\psi \to P_0\psi$, $P_n^{(1)}\psi \to P_0\psi$; далее имеем ${}^*H_{\Omega_n^{(2)}} \subset {}^*H_{\Omega_n} \subset {}^*H_{\Omega_n^{(1)}}$, откуда следует $\|(P_n^{(2)} - P_n)\psi\| \leqq \|(P_n^{(2)} - P_n^{(1)})\psi\|$. Поэтому получим $(P_n^{(2)} - P_n)\psi \to 0$. ч. т. д.

Замечание 1. В теоремах 4,3 и 4,4 мы, собственно, показали, что в случае последовательности решений на монотонной последовательности областей эти решения сходятся к решению на множестве, являющемся пределом последовательности областей. Другими словами, мы показали, что каждая область устойчива снутри и снаружи. В случае, если последовательность областей не монотонна, общие решения не обязательно образуют сходящуюся последовательность. Однако, эти решения ее образуют всегда, если только область устойчива. Итак, ясно, что понятие устойчивости тесно связано с непрерывной зависимостью решения от области определения.

Для задач математической физики наибольшее значение имеют именно устойчивые области; поэтому мы и будем таким областям уделять главное внимание.

Определение 5,2. *Область Ω мы назовем звездообразной относительно точки $x_0 \in \Omega$, если для $0 < \alpha_0 < \alpha < 1$ будет $\Omega(\alpha) \supset \overline{\Omega}$ и $\Omega(\alpha) = E[\mathbf{x}, \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 \in \Omega]$.*

Замечание. Понятие звездообразности по определению 5,4, очевидно, отличается от обычного понятия звездообразности. Дело в том, что большею частью требуется лишь $\Omega(\alpha) \supset \Omega$. Однако, если, напр., область звездообразна относительно сферы (этим пользуется, напр., С. Л. Соболев, ср. [6]), то эта область звездообразна и в смысле определения 5,2.

Теорема 5,4. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\overline{\Omega} \subset K_r$. Пусть, далее, Ω — область, звездообразная относительно какой-либо из своих точек. Тогда Ω — устойчивая область.*

Доказательство. Без ограничения общности можно допустить, что Ω — область, звездообразная относительно начала, и по теореме 5,2 можно далее предположить, что A есть l-гармонический оператор. Возьмем последовательность α_i, $i = 1, 2, \ldots$ так, что $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha_i \to 1$ и $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, и покажем, что $H_\Omega = \operatorname*{Lim}_{i\to\infty} H_{\Omega(\alpha_i)})$. Пусть $\psi \in \operatorname*{Lim}_{i\to\infty} H_{\Omega(\alpha_i)}$. Обозначим $\psi_\alpha(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}/\alpha)$. Нетрудно убедиться, что $\psi_\alpha(x) \subset H_\Omega$ для любого $\alpha < 1$ и $\|\psi(\mathbf{x}) - \psi_\alpha(\mathbf{x})\| \to 0$ для $\alpha \to 1$. Отсюда уже следует, что $H_\Omega = \operatorname*{Lim}_{i\to\infty} H_{\Omega(\alpha_i)} = {}_\Omega H$, ч. т. д.

При достаточно гладком преобразовании окрестности области Ω устойчивость или неустойчивость облатси не изменяется. Это замечание вместе с теоремой 5,4 дает нам возможность в большинстве практических случаев решить вопрос об устойчивости области.

Определение 5,3. *Мы будем говорить, что область* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$ *обладает свойством* σ, *если для каждой точки* $P \in \dot{\Omega}$ *существует открытая сфера* $K_P \subset \overline{K}_P \subset K_r$ *с центром в* P *и вектор* $\mathbf{v}_P \neq 0$ *так, что множество* $\overline{(K_P \cap \Omega)_{\Delta v_P}} \supset \Omega$ *для любого* $\Delta \leqq 1$; *притом мы обозначили* $(K_P \cap \Omega)_{\Delta v_P} = E[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \Delta \mathbf{v}_P \in K_P \cap \Omega]$.

Теорема 5,5. *Пусть дана область* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, *пусть* Ω *обладает свойством* σ. *Пусть, далее,* A *есть* l-*гармонический оператор на* K_r. *Тогда* Ω *будет устойчивой относительно* A.

Доказательство. Возьмем конечное число шаров $K^i_{\varrho_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, с радиусами $\rho_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$ и центрами в $\overline{\Omega}$, а также векторы $\mathbf{v}_i \neq$ о так, чтобы для $i = 1, 2, \ldots, s$ и для каждого $0 < \Delta \leqq 1$ было

$$1.\quad \overline{(K^i_{\varrho_i})_{\Delta \mathbf{v}_i}} \subset K_r; \qquad 2.\quad \overline{(K^i_{\varrho_i} \cap \Omega)_{\Delta \mathbf{v}_i}} \subset \Omega; \qquad 3.\quad \bigcup_{s=1}^{s} K^i_{\frac{1}{2}\varrho_i} \supset \overline{\Omega}\,,$$

где $K_{\frac{1}{2}\varrho_i}$ — сфера, концентричная с K^1, с радиусом $\frac{1}{2}\rho_i$. Ввиду того, что Ω обладает свойством σ, такие сферы существуют. Теперь можно без труда построить функции ϕ_i на E_m, $i = 1, \ldots, s$, обладающие следующими свойствами:

1. Функции ϕ_i обладают всеми производными.
2. На $K_r - K^i_{\varrho_i}$ имеет место $\phi_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$.
3. $\sum_{i=1}^{s} \phi_i = 1$ на $K^i_{\frac{1}{2}\varrho_i}$ $i = 1, 2, \ldots, s$.

Допустим теперь, что Ω не является устойчивой областью. Тогда ${}^*H_\Omega \neq {}^*_\Omega H$. Так как ${}^*_\Omega H \subset {}^*H_\Omega$, существует $\psi \in {}_\Omega H$, $\psi \in {}^*H_\Omega$, $\|\psi\| = 1$. Построив теперь $\chi \in H_\Omega$ так, что $\|\psi - \chi\| < 1$, мы получим противоречие, которое и доказывает наше утверждение.

Так как $\psi \in H(A)$, мы видим (в силу теорем о вложении), что ψ со всеми производными до порядка l интегрируема с квадратом. Поэтому будет и $\psi_i = \phi_i \psi \in H(A)$. Итак, для доказательства нашей теоремы достаточно показать, что существуют функции $\chi_i \in H_\Omega$ так, что $\|\psi_i - \chi_i\| < 1/s$. Положим $\chi_i(x) = \psi_i(x + \Delta \mathbf{v}_i)$; притом число $0 < \Delta < 1$ мы подберем так, чтобы было $\|\psi_i -$

$- \chi_i\| < 1/s$, что, однако, всегда возможно (ср., например, [6], стр. 16). Так как по условию $(K^i_{\varrho_i} \cap \Omega)_{\Delta \mathbf{v}_i} \subset \Omega$ и $\chi_i = 0$ на $\Omega - (K^i_{\varrho_i} \cap \Omega)$, будет $\chi_i \in H_\Omega$. Это и доказывает нашу теорему.

Замечание 1. Свойство σ является достаточным для устойчивости области. Аналогично свойству σ можно определить и другие свойства, являющиеся достаточными для устойчивости области. Например, можно потребовать, чтобы множество $K_P \cap \Omega$ было звездообразным относительно какой-либо точки в смысле определения 5,2.

Замечание 2. Для решения вопроса об устойчивости в большинстве практических случаев достаточно воспользоваться теоремой 5,4 и теоремой 5,5.

Замечание 3. Область Ω обладает, очевидно, свойством σ, если граница локально представима функцией.

Очевидно, справедлива лемма:

Лемма 5,1. *Пусть $\Omega_i \in \mathfrak{N}$, $i = 1,2$. Тогда для каждой составляющей $Q = \Omega_1 \cap \Omega_2$ будет $Q \in \mathfrak{N}$.*

Поэтому теперь имеет смысл теорема:

Теорема 5,5. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $\Omega_i \in \mathfrak{N}$, $i = 1, 2$; $\overline{\Omega}_i \subset K_r$, Ω_i — устойчивые области. Тогда каждая составляющая множества $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ устойчива.*

Доказательсво. Можно предположить, что A является l-гармоническим оператором. Однако $H_\Omega = H_{\Omega_1} \cap H_{\Omega_2}$ и ${}_\Omega H = {}_{\Omega_1}H \cap {}_{\Omega_2}H$, откуда уже следует утверждение нашей теоремы.

Теорема 5,7. *Пусть A — регулярный оператор порядка $2l$ на $K_r \subset E_m$. Пусть $\Omega_i \in \mathfrak{N}$, $i = 1, 2$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset K_r \subset E_m$ и пусть Ω_1 и Ω_2 суть звездообразные области относительно точки $\mathbf{x}_0 \in K_r$. Тогда будет и $\Omega = \Omega_2 - \overline{\Omega}_1 \in \mathfrak{N}$ и Ω — устойчива.*

Доказательство. Прежде всего ясно, что $\Omega \in \mathfrak{N}$. Действительно, $\Omega = \Omega_2 \cap (E - \overline{\Omega}_1)$ и $E - \overline{\Omega}_1 \in \mathfrak{N}$. Так как $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, существуют функции $\psi_1 \in M$ и $\psi_2 \in M$, $\psi_1 + \psi_2 = 1$ на некоторой окрестности $\overline{\Omega}_2$, притом $\psi_1 = 0$ на некоторой окрестности $K_r - \overline{\Omega}_2$ и $\psi_2 = 0$ на некоторой окрестности множества $\overline{\Omega}_1$. Обозначим теперь

$$H_\Omega \subset H^{(1)}_\Omega = E[\varphi \in H;\ \varphi = \psi_1 g,\ g \in H_\Omega],$$

$$H_\Omega \subset H^{(2)}_\Omega = E[\varphi \in H;\ \varphi = \psi_2 g,\ g \in H_\Omega].$$

Аналогично введем ${}_\Omega H^{(1)}$ и ${}_\Omega H^{(2)}$. Теперь имеем $H_\Omega = H^{(1)}_\Omega + H^{(2)}_\Omega$ и ${}_\Omega H = {}_\Omega H^{(1)} + {}_\Omega H^{(2)}$. Однако, так же, как и в теореме 5,4, имеем $H^{(1)}_\Omega = {}_\Omega H^1$ и $H^{(2)}_\Omega = {}_\Omega H^{(2)}$ Поэтому $H_\Omega = {}_\Omega H$, ч. т. д.

Рассмотрим теперь вопрос, существуютли вообще неустойчивые области.

Теорема 5,8. *Пусть $K_\psi \subset E_2$ и A — оператор Лапласа. Тогда существует $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_1 \subset E_2$ и Ω неустойчиво.*

Доказательство. Пусть K_1 — единичная открытая сфера с центром в начале (так как речь идет о E_2, K_1 является единичным кругом), а $K_{\frac{1}{2}}$ — открытая сфера радиуса $\frac{1}{2}$. Обозначим $S = E[x, y;\ |x| < \frac{1}{4}, y < \frac{1}{4}]$. Имеем $\bar{S} \subset K_{\frac{1}{2}}$. Теперь, очевидно, существует функция $\psi \in M$ так, что $\psi = 1$ на S и $\psi = 0$ на $K_1 - K_{\frac{1}{2}}$. Обозначим через P_0 проектор на $^*H_{K_{\frac{1}{2}}}$. Очевидно, $P_0\psi = 0$. Далее, пусть, $Q = E[x, y;\ x = 0,\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4}]$ и обозначим через $\tilde{P}_0$ проектор на $^*H_{K_{\frac{1}{2}}-Q}$. Так как $Q \subset \bar{S}$ и $Q \notin \mathfrak{M}$ (ср. теорему 3,7) и $\psi = 1$ на Q, будет $a = \|\tilde{P}_0\psi\| > 0$. Обозначим далее через $z_j^{(n)}$ $j = 3, 4, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots, j - 1$ последовательность точек с координатами $(1/2j, n/4j)$. Для любого j и $n < j - 1$ будет $z_j^{(n)} \in S$. Построим теперь следующую последовательность областей Ω_i, $i = 1, 2, \ldots$ и чисел $\alpha_i > 0$ $i = 2, 3, 4, \ldots$ $\Omega_1 = K_{\frac{1}{2}}$; $\Omega_i = \Omega_{i-1} - \bigcup_{n=1}^{i-1} {}^{\alpha_i}\bar{S}_i^{(n)}$. Притом мы обозначили через ${}^{\alpha_i}S_i^{(n)}$ α_i — окрестность (круговую) точки $z_{i+1}^{(n)}$. Числа $\alpha_i > 0$ мы строим следующим образом:

1. $\alpha_i < 1/[8(i + 1)^3]$.

2. Числа α_i возьмем так, чтобы $\|P_i\psi\| \leqq \frac{1}{2}a(1 - 1/2^i)$ где P_i — проектор на $^*H_{\Omega_i}$. Покажем теперь, что такие числа α_i существуют. Прежде всего множество $s_j = \bigcap_{n=1}^{j-1} z_{j+1}^{(n)}$, $j = 2, 3, \ldots$, есть множество нулевой емкости, т. е. $s_j \in \mathfrak{M}(A)$ (ср. теоремы 3,6 и 3,10). Для $i = 1$ будет $\|P_1\psi\| = 0 \leqq \frac{1}{2}a(1 - \frac{1}{2})$. Допустим, что уже $\|P_{j-1}\psi\| \leqq \frac{1}{2}a(1 - 1/2^{j-1})$. Построим теперь последовательность областей $\Omega_0^k = \Omega_{j-1} - \bigcup_{n=1}^{j-1} {}^{1/(8(k+1)^3)}\bar{S}_j^{(n)}$, $k = 1, 2 \ldots$. Так как $s_j \in \mathfrak{M}(A)$, то $\operatorname{Lim}_{k\to\infty} H_{\Omega_j^k} = H_{\Omega_{j-1}}$ и, следовательно, по лемме 4,1

$$\|\lim_{k\to\infty} P_{j,k}\psi\| = \|P_{j-1}\psi\| \leqq \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{j-1}}\right).$$

Притом мы обозначили через $P_{j,k}$ проектор на $^*H_{\Omega_j^k}$. Поэтому для любого $k \geqq k_0$ при достаточно большом k_0 будет $\|P_{j,k}\psi\| \leqq \frac{1}{2}a(1 - 1/2^j)$. Положим далее $\alpha_j = \max(k_0, j)$.Ввиду того, что $\alpha_j < 1/[8(j + 1)^3]$, все ${}^{\alpha}_{j}\bar{S}_j^{(n)}$ $j = 2, 3, \ldots,$ $n = 1, \ldots, j - 1$ взаимно дизъюнктны. Обозначим теперь $V = \bigcup_{i=2}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{i-1} {}^{\alpha_i}\bar{S}_j^{(n)}$ и положим $\Omega = K_{\frac{1}{2}} - \bar{V}$. Мы утверждаем, что $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\bar{\Omega} \subset K_1 \subset E_2$, и Ω не является устойчивой областью. Очевидно, $\bar{\Omega} \subset K_1 \subset E_2$. Покажем теперь, что $\Omega \in \mathfrak{N}$. Нужно показать, что $\dot{\Omega} = (\bar{\Omega})^{\cdot}$ (см. определение 4,4). Итак, пусть $w \in \dot{\Omega}$. Если $w \in \dot{K}_{\frac{1}{2}}$, то очевидно и $w \in (\bar{\Omega})^{\cdot}$. Пусть поэтому $w \in \dot{\Omega}$ и $w \in \bar{V}$ и пусть $w \equiv (x_0, y_0)$. Теперь мы будем различать два случая, $x_0 > 0$ и $x_0 = 0$. Если $x_0 > 0$, то w обязательно лежит на границе какой-нибудь из окрестностей ${}^{\alpha_i}S_i^{(n)}$ и, следовательно, $w \in (\bar{\Omega})^{\cdot}$. Пусть поэтому $x_0 = 0$. Но в таком случае, очевидно, существует последовательность точек $z_j^{n_j}$ такая, что $z_j^{n_j} \to w$. Однако, $z_j^{n_j} \in E_2 - \bar{\Omega}$; и, следовательно, $w \in (\bar{\Omega})^{\cdot}$. Так как поэтому $(\bar{\Omega})^{\cdot} \subset \dot{\Omega}$, будет $\Omega \in \mathfrak{N}$. Покажем теперь, что действительно Ω — неустойчивая область. Пусть P — проектор на $^*H_\Omega$. Так как $\Omega \subset K_{\frac{1}{2}} - Q$, будет $^*H_{K_{\frac{1}{2}}-Q} \subset {}^*H_\Omega$ и, следовательно,

$$\|P\psi\| \geqq \|\tilde{P}_0\psi\| = a > 0 .$$

Далее будет

$${}^*_\Omega H = \operatorname{Lim} {}^*H_{\Omega_i{}^i}, \quad \text{где} \quad \Omega_i^i = K_{\frac{1}{2}} - \bigcap_{j=2}^{i} \bigcap_{n=1}^{j-1} {}^{\alpha_j((i-1)/i)}S_i^n .$$

Так как $\Omega_i^{(i)} \supset \Omega_i$, будет $^*H_{\Omega_i{}^i} \subset {}^*H_{\Omega_i}$ и поэтому, обозначив через P_i^i проектор на $^*H_{\Omega_i{}^i}$, мы получим

$$\|P_i^i\psi\| \leqq \|P_i\psi\| \leqq \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{2^i}\right).$$

Поэтому $\lim P_i^i\psi = \hat{P}\psi$, где $\hat{P}$ — проектор на ${}^*_\Omega H$, и $\|\hat{P}\psi\| = \lim \|P_i^i\psi\| \leqq \frac{1}{2}a$. Итак, ${}_\Omega H \neq H_\Omega$, ч. т. д.

Замечание 1. Мы построили неустойчивую область в E_2 для оператора Лапласа. Нетрудно убедиться, что не только граница этой области имеет меру нуль, но, более того, и длина границы конечна.

Замечание 2. Существенно, что область Ω бесконечно многосвязна. В пар. VI мы увидим, что каждая конечносвязная область Каратеодори $\Omega \in \mathfrak{R}$ в плоскости устойчива относительно оператора Лапласа.

Подобно тому, как мы доказали теорему 5,8, можно доказать и теорему 5,9.

Теорема 5,9. *Пусть $K_1 \subset E_5$ и пусть A — бигармонический оператор. Тогда существует $\Omega \in \mathfrak{R}$, $\bar{\Omega} \subset K_1 \subset E_5$ и Ω не является устойчивой относительно A.*

Замечание 1. Главную идею доказательства теоремы 5,8 можно использовать при построении неустойчивой области, если существуют множества нулевой емкости. Если же такие множества не существуют, то эту идею нельзя использовать. Остается открытым вопрос, существуютли вообще неустойчивые области, если не существуют множества нулевой емкости. Согласно теореме 3,9 в E_3 не существуют для бигармонического оператора множества нулевой емкости. Итак, вопрос о существовании в E_2 и E_3 неустойчивых областей для бигармонического оператора является полностью неразрешенным.

Замечание 2. Мы доказали существование неустойчивой области для бигармонического оператора в E_5. Граница этой области имеет конечную четырехмерную меру. Незначительным и довольно понятным видоизменением можно достичь того, чтобы дополнение области Ω было связным. В том случае, если бы мы построили область в E_4, мы бы не могли указанным способом достичь того, чтобы дополнение области Ω было связным, так как дуга уже не имеет нулевую емкость.

Замечание 3. Можно показать, что устойчивость относительно оператора низшего порядка не влечет за собой устойчивость относительно оператора высшего порядка. Остается, однако, и далее открытым вопрос, не следует ли из устойчивости относительно оператора высшего порядка устойчивость той же области для оператора низшего порядка.

Во всей этой главе мы будем в дальнейшем иметь в виду оператор Лапласа; регулярный оператор A будет всегда означать оператор Лапласа. Говоря о емкости, мы бдуем подразумевать емкость в смысле Винера (ср., напр., [2], [7]). Если e — данное множество, то мы будем обозначать через $\operatorname{cap} e$ его внешнюю емкость.[2]) Мы будем пользоваться выражением „имеет место C-почти всюду“ вместо высказывания „имеет место всюду за исключением самое большее множества внешней емкости нуль в смысле Винера“. Далее мы будем говорить, что $R \subset K_r \subset E_m$ есть множество типа Брело[3]) (короче B-множество) в точке O, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \rho^k$ сходится, причем c_k означает внешнюю емкость множества

$$R \cap E[\mathbf{x} \in K_r; \rho^k < h(\overline{O\mathbf{x}}) \leqq \rho^{k-1}],^4)$$

где ρ — фиксированное число, большее 1, а $h(r)$ есть фундаментальное решение гармонического уравнения (т. е. $h(r) = r^{2-m}$ $(r > 0)$ для $m > 2$ и $h(r) = \lg(1/r)$ для $m = 2$; символ $\overline{O\mathbf{x}}$ означает евклидово расстояние между точками O и $\mathbf{x}$.

Далее мы будем говорить, что функция $F(\mathbf{x})$, определенная почти всюду на K_r, имеет псевдопредел l в точке $O \in K_r$, если существует множество e, являющееся B-множеством в O так, что $\lim F(\mathbf{x}) = l$, $(\mathbf{x} \to 0,\ \mathbf{x} \notin e)$. Если сверх того $l \neq \pm\infty$, то мы будем говорить, что $F(\mathbf{x})$ является в O тонко непрерывной. Далее мы будем говорить, что функция $F(\mathbf{x})$, определенная C-почти всюду на открытом множестве $\Omega \subset K_r \subset E_m$ имеет свойство $\mathfrak{P}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество ω так, что $\operatorname{cap}(\omega) < \varepsilon$ и функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна на $K_r - \omega$.

Теперь справедлива следующая теорема.

Теорема 5,10. *Пусть $f \in H(A)$*[5]) *и пусть сверх того $f(\mathbf{x})$ имеет свойство $\mathfrak{P}$. Тогда $f(\mathbf{x})$ тонко непрерывна C-почти всюду на K_r.*

Доказательство см. [8], стр. 356.

Теорема 5,11. *Пусть $f \in H(A)$. Тогда можно изменить эту финкцию на множестве меры нуль так, чтобы получить функцию, обладающую свойством $\mathfrak{P}$.*

Доказательство см. [8], стр. 354.

Из теоремы 5,11 следует, что у каждой функции $f(\in H(A)$ можно предположить выполнение свойства $\mathfrak{P}$. В дальнейшем мы его и будем всегда предполагать.

---

[2]) Как мы уже заметили раньше, в случае замкнутого множества понятие емкости нуль в смысле Винера тождественно с понятиями, введенными в гл. III.

[3]) Множества типа Брело более известны под названием „ensemble effilé“, (ср. [8], [9]).

[4]) В случае $n = 2$ мы будем рассматривать K_1, т. е. единичный круг.

[5]) И здесь мы предполагаем, что A — оператор Лапласа и $H(A)$ — соответствующее пространство (ср. опр. 3,1).

Теорема 5,12. *Пусть Ω — такая область, что $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$. Пусть $\psi \in H(A)$ на Ω и $\psi = 0$ на $K_r - \overline{\Omega}$.*[6] *Для того, чтобы было $\psi \in H_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы ψ имела псевдопредел, равный нулю С-почти во всех точках границы $\dot{\Omega}$.*

Доказательство см. [8].

Замечание 1. Теорема 5,12 утверждает также, что если $\psi \in H(A)$ на Ω и если ψ имеет C-почти всюду на Ω псевдопредел, равный нулю, то, дополнив вне Ω функцию ψ функцией, тождественно равной нулю, мы получим функцию, принадлежащую $H(A)$ на K_r и H_Ω.

Теорема 5,13. *Пусть $\Omega \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$. Пусть, далее, все точки границы $\dot{\Omega}$, для которых множество $K - \overline{\Omega}$ является B-множеством относительно этих точек, образуют множество нулевой емкости. Тогда Ω — устойчивая область.*

Доказательство. Пусть $\psi \in {}_\Omega H$. Докажем, что также $\psi \in H_\Omega$. По теоремам 5,11 и 5,10 можно предполагать, что ψ C-почти всюду тонко непрерывна. Далее, на $K_r - \overline{\Omega}$ будет тождественно $\psi = 0$. Пусть теперь $O \in \dot{\Omega}$ и пусть ψ тонко непрерывна в O. Пусть, далее, $K_r - \overline{\Omega}$ не является B-множеством относительно точки O. Ввиду того, что ψ тонко непрерывна в O, существует B-множество e так, что ψ непрерывна на $K_r - e$ в O. Так как $K_r - \overline{\Omega}$ не является B-множеством относительно O, существует последовательность $\mathbf{x}_n \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$ $\mathbf{x}_n \in K_r - \overline{\Omega} - e$. Однако, $\psi(\mathbf{x}_n) = 0$. Итак, ψ имеет в O псевдопредел, равный нулю. Из теоремы 5,12 непосредственно следует, что $\psi \in H_\Omega$ и, следовательно, $H_\Omega = {}_\Omega H$. Утверждение доказано.

Замечание 1. Для случая, когда оператор A есть оператор Лапласа, теорема 5,12 полностью выясняет структуру пространства H_Ω. Этим мы пользуемся и в теореме 5,13. Открытым ворпосом остается характеризация пространства H_Ω для регулярных операторов высших порядков. Однако, если известно, что рассматриваемая область устойчива, то можно охарактеризовать пространства H_Ω и для операторов высших порядков. Смотри следующую главу.

Определение 5.4. *Нигде не плотное замкнутое множество $F \subset K_r \subset E_m$ мы назовем множеством типа β (короче β-множеством), если оно имеет следующее свойство: Если $\psi \in H(A)$ и $\psi = 0$ на $K_r - F$, то $\|\psi\| = 0$.*

Теорема 5,14. *Пусть $F \subset K_r \subset E_m$ — нигде не плотное замкнутое множество, пусть, далее, почти для всех $O \in F$ множество $K_r - F$ не является в O B-множеством. Тогда F есть множество типа β.*

Доказательство. Так как $\psi \in H(A)$, то ψ тонко непрерывна C-почти во всех точках. Однако, в каждой точке $x \in F$, в которой ψ тонко непрерывна

[6] Мы говорим, что $\psi \in H(A)$ на Ω, если

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}\Omega < \infty.$$

и в которой $K_r - F$ не является B-множеством, обязательно должно быть $\psi(x) = 0$. Так как множество емкости нуль имеет и меру, равную нулю, теорема доказана.

Замечание. Если всякая точка имеет нулевую емкость, то всегда существует нигде не плотное замкнутое множество, не принадлежащее типу β. Остается открытым вопрос о структуре множеств, не принадлежащих типу β.

Мы уже упомянули о том, что понятие устойчивой области, определенное нами в настоящей главе, в случае оператора Лапласа тесно связано с понятием устойчивости, которое ввел М. В. Келдыш (см. [2]). Связь между нашим определением и определением Келдыша выясняется в следующей теореме.

Теорема 5,15. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$ *— устойчивая область в смысле определения* 5,1. *Тогда она устойчива и в смысле Келдыша* (*ср.* [2]).[7])

Доказательство. Пусть Ω не является устойчивой в смысле Келдыша. Тогда существует непрерывная функция ψ на K_r, такая, что ${}^1u_\psi \neq {}^2u_\psi$[8]) на Ω. Из теоремы о максимуме следует, что без ограничения общности можно предположить, что $\psi \in M$. Пусть, далее, мы имеем последовательность областей $\Omega_n^{(1)} \in \mathfrak{P}$, $\Omega_n^{(2)} \in \mathfrak{P}$ со следующими свойствами:

$$1.\quad \Omega_{n+1}^{(1)} \supset \overline{\Omega}_n^{(1)}, \qquad 2.\quad \overline{\Omega}_n^{(1)} \subset \Omega, \qquad 3.\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{(i)} = \Omega$$

и

$$4.\quad \overline{\Omega}_{n+1}^{(2)} \subset \Omega_n^{(2)}, \qquad 5.\quad \overline{\Omega} \subset \Omega_n, \qquad 6.\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \overline{\Omega}.$$

Обозначим далее через $P_n^{(1)}$ и $P_n^{(2)}$ проекторы соответственно на ${}^*H_{\Omega_n^{(1)}}$ и ${}^*H_{\Omega_n^{(2)}}$ и предположим, что Ω устойчива в смысле определения 5,1. Тогда $\|P_n^{(1)}\psi - P_n^{(2)}\psi\| \to 0$ для $n \to \infty$. Однако

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{(1)}\psi = {}^1u_\psi\,, \quad \lim P_m^{(2)}\psi = {}^2u_\psi\,.$$

Но так как ${}^1u_\varphi \neq {}^2u_\psi$, существует точка $\mathbf{x} \in \Omega$ так, что ${}^1u_\psi(\mathbf{x}) \neq {}^2u_\psi(\mathbf{x})$. Но так как, кроме того,

$$\|P_n^{(1)}\psi - P_n^{(2)}\psi\|_{L_2\Omega} \to 0 \text{ }^{9})$$

и так как функции $P_n^{(1)}\psi$ и $P_n^{(2)}\psi$ являются на Ω гармоническими, то

$$\lim_{n\to\infty} (P_n^{(1)}\psi)(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} (P_n^{(2)}\psi)(\mathbf{x}) \text{ (ср. [7], стр. 268)}\,,$$

что противоречит допущению; таким образом теорема доказана.

---

7) Мы имеем в виду устойчивость в смысле Келдыша на Ω, но не на $\overline{\Omega}$ (ср. [2]).

8) ${}^1u_\psi$ и ${}^2u_\psi$ являются, соответственно, внутренним и внешним решением Винера в смысле Келдыша.

9) Символом $\|u\|_{L_2\Omega}$ мы обозначаем норму в пространстве L_2 на Ω.

Теорема 5,15. *Пусть* $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$ *устойчива в смысле Келдыша и пусть граница области* $\dot{\Omega}$ *является* β*-множеством в смысле определения* 5,5. *Тогда* Ω *устойчива также в смысле определения* 5,1.

Доказательство. Обозначим через $\Omega_n^{(1)}$ и $\Omega_n^{(2)}$ те же множества, как и при доказательстве предыдущей теоремы, и допустим, что Ω не является устойчивой в смысле определения 5,1. Тогда

$$^*H_\Omega = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} {}^*H_{\Omega_n^{(1)}} \neq \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} {}^*H_{\Omega_n^{(2)}} = {}_{\Omega}^{*}H\,.$$

Обозначим также через $P_n^{(1)}$ и $P_n^{(2)}$ проекторы соответственно на $^*H_{\Omega_n^{(1)}}$ и $^*H_{\Omega_n^{(2)}}$. Так как $^*H_\Omega \supset {}_{\Omega}^{*}H$, существует $\psi \in M$ так, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{(1)}\psi = \psi_1\,, \quad \|\psi_1\| = 1$$

и

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{(2)}\psi = \psi_2\,, \quad \|\psi_2\| < \tfrac{1}{4}\,.$$

Так как по условию теоремы Ω устойчива в смысле Келдыша, то $\psi_3 = \psi_1 - \psi_2 = 0$ на Ω, а также, очевидно, $\psi_3 = 0$ на $K_r - \bar{\Omega}$; далее имеем $\psi_3 \in H(A)$. Следовательно, $\psi_3 = 0$ на $K_r - \dot{\Omega}$. Однако, Ω является β-множеством. Итак, $\|\psi_3\| = 0$ и одновременно $\|\psi_3\| \geqq \frac{3}{4}$, что невозможно. Теорема полностью доказана.

Из последних двух теорем следует, что понятие устойчивой области по определению 5,1 является, собственно говоря, обобщением понятия устойчивости Келдыша.

VI. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРВОЙ ПРОБЛЕМЫ И НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ЕЕ СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

В этой главе мы займемся некоторыми аспектами связи между проблемами и вопросами устойчивых областей и некоторыми проблемами теории аппроксимации.

Во всей этой главе мы будем иметь в виду исключительно области с границей, мера которой равна нулю. Докажем следующую теорему.

Теорема 6,1. *Пусть* Ω *— область,* $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\bar{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, *и пусть* A *есть* l*-гармонический оператор. Для того, чтобы область* Ω *была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции* $\psi \in H(A)$, l*-гармонической на* Ω, *и для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовала окрестность* $\Omega_{\varepsilon,\psi}$ *множества* Ω *и функция* v, l*-гармоническая на* $\Omega_{\varepsilon,\psi}$, *такая, что*

$$\int_\Omega \left[\sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^l(\psi - v)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\right)^2\right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m < \varepsilon\,.$$

Доказательство I. Докажем достаточность условия. Пусть Ω неустойчива. Тогда по определению 5,1 будет ${}^{*}_{\Omega}H \neq {}^{*}H_{\Omega}$. Так как ${}^{*}_{\Omega}H \subset {}^{*}H_{\Omega}$, существует $0 \neq \psi \in H(A)$ так, что $\psi \in {}^{*}H_{\Omega}$ и $\psi \in {}_{\Omega}H$. Без ограничения общности можно предположить, что $\|\psi\| = 1$. Возьмем теперь $\varepsilon < \frac{1}{2}$. По условию теперь существует открытая окрестность $\Omega_{\varepsilon,\psi}$ и l-гармоническая на Ω функция v так, что

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^l(\psi - v)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m < \varepsilon \,.$$

Итак, в силу предположения, что Ω имеет границу меры нуль, существует открытое множество $\Omega_{\varepsilon,\psi}$, $\bar{\Omega} \subset \Omega_{\varepsilon',\psi} \subset \bar{\Omega}_{\varepsilon',\psi} \subset \Omega_{\varepsilon,\psi}$ так, что

$$\int_{\Omega_{\varepsilon',\psi}} \left[\sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^2(\psi - v)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m < 2\varepsilon \,.$$

Ввиду аналитичности функции v существует $w \in M(A)$ так, что $v = w$ на $\Omega_{\varepsilon',\psi}$. Обозначим теперь через $\Omega^{(n)} \in \mathfrak{P}$, $n = 1,2,\ldots$ последовательность областей таких, что

$$\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}^{(n+1)} \subset \Omega^{(n)}, \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega^{(n)} = \bar{\Omega} \,;$$

обозначим кроме того через P_n проектор на $H_{\Omega^{(n)}}$. Ясно, что $P_n\psi = \psi$ (так как $\psi \in {}_{\Omega}H$), $n = 1, 2, \ldots$, и для всех достаточно больших n будет $P_n w = 0$, ибо w является на $\Omega^{(n)}$ (для достаточно больших n) l-гармонической. Итак, для достаточно больших n будет $\|P_n(\psi - w)\| \leqq \|\psi - w\| \leqq 2\varepsilon$.[10]) Но с другой стороны, $\|P_n(\psi - v)\|_{\Omega_{\varepsilon',\psi}} = \|\psi\|_{\Omega_{\varepsilon,\psi}} = 1$, что невозможно, и первая часть теоремы доказана.

II. Докажем теперь, что условие необходимо. Пусть $\psi \in H(A)$ и пусть ψ будет l-гармонической на Ω. Поэтому $P\psi = \psi$, если P – проектор на ${}^{*}H_{\Omega}$. Пусть, далее, $\Omega^{(n)}$ – те же самые области, как и в первой части доказательства, и пусть теперь P_n проектор на ${}^{*}H_{\Omega^{(n)}}$. По условию теоремы Ω – устойчивая область. Поэтому $\lim_{n \to \infty} P_n\psi = P\psi = \psi$. Итак, если взять $\varepsilon > 0$, то для достаточно больших n будет

$$\varepsilon > \int_{Kr} \left[\sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^l(P_n\psi - \psi)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \geqq$$

$$\geqq \int_{\Omega} \left[\sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^l(P_n\psi - \psi)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \,.$$

---

[10]) Здесь мы обозначили

$$\|\psi - w\|^2_{\Omega_{\varepsilon',\psi}} = \int_{\Omega_{\varepsilon',\psi}} \left(\sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \left(\frac{\partial(\psi - w)}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m < \infty \,.$$

Функция $P_n\psi$ является, однако, l-гармонической в некоторой окрестности $\Omega_{\varepsilon,\psi}$ множества Ω, чем и доказывается полностью наше утверждение.

Замечание. При доказательстве теоремы 6,1 мы доказали несколько больше, чем собственное утверждение теоремы. Мы показали, что необходимое условие устойчивости области заключается в том, чтобы для каждой функции $\psi \in H(A)$, l-гармонической на Ω, и для $\varepsilon > 0$ существовала функция $\chi_1 \in H(A)$ так, чтобы χ_1 была l-гармонической на $\Omega_{\psi,\varepsilon} \supset \overline{\Omega}$ и $\|\psi - \chi\| < \varepsilon$.

При помощи теоремы 5,1 мы докажем утверждение о том, что в плоскости каждая область Каратеодори устойчива по отношению к оператору Лапласа.

Определение 6,1. *Область $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_2$ мы назовем областью Каратеодори, если она обладает следующими свойствами:*

1. *Имеет место $\dot{\Omega} = \bigcup\limits_{j=0}^{n} R_j$, если R_j — взаимно непересекающиеся континуумы и R_0 содержит все остальные континуумы.*

2. *Имеем $E_2 - \overline{\Omega} = \bigcup\limits_{j=0}^{m} N_j$,* где *$N_j$ — отдельные составляющие множества $E_2 - \overline{\Omega}$, а $E_2 - K_r \subset N_0$.*

3. *$R_0 = \dot{N}_0$ и $R_j = \dot{N}_{k_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Замечание 1. Вообще говоря, может быть $m > n$, ср. [10].

Замечание 2. Если $\Omega \in \mathfrak{N}$ и если $\overline{\Omega}$ односвязна, то Ω — область Каратеодори. В случае, если Ω многосвязна и если она является областью Каратеодори, то $\Omega \in \mathfrak{N}$. Обратное утверждение не обязательно справедливо.

Теорема 6,2. *Пусть Ω — область Каратеодори и пусть $\overline{\Omega} \subset K_r \subset E_2$. Тогда Ω устойчива относительно оператора Лапласа.*

Доказательство. Обозначим через N_{k_j}, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, составляющие области $E_2 - \overline{\Omega}$, и пусть $N_0 \supset E_2 - K_r$. Возьмем, далее, точки $z_j \in N_{k_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Докажем прежде всего, что система гармонических функций $u_{p,q}$, $p = 1, 2, \ldots, 2m$, $q = 0, 1, 2, \ldots$

$$u_{1,q} = \operatorname{Re} z^q\,, \quad u_{2,q} = \operatorname{Im} z^q\,, \quad q = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

$$u_{2k,q} = \operatorname{Re} \frac{1}{(z - z_k)^q}\,, \quad u_{2k+1,q} = \operatorname{Im} \frac{1}{(z - z_k)^q}\,, \quad k = 1, \ldots, n,\ q = 1, 2, \ldots\,,$$

$$u_{2k,0} = \operatorname{Re} \lg \frac{1}{z - z_k}\,, \quad u_{2k+1,0} = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

$$z = x + iy\,, \quad i = \sqrt{-1}$$

образует полную систему функций в пространстве Гильберта B всех гармонических функций, первые производные которых интегрируемы на Ω с квадратом, если определить скалярное произведение следующим образом: если $u \in B$, $v \in B$, то

$$[u, v] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Пространство B будет действительно полным пространством Гильберта, если отождествить функции, отличающиеся друг от друга на постоянную, Пусть теперь $u \in B$. Тогда существует аналитическая (вообще многозначная) функция φ комплексного переменного так, что $u = \operatorname{Re} \varphi$. Функция φ' тогда уже однозначна и интегрируема с квадратом. Действительно, $\operatorname{Re} \varphi' = \partial u / \partial x$, $\operatorname{Im} \varphi' = -(\partial u / \partial y)$.) В пространстве голоморфных функций, интегрируемых с квадратом на Ω, функции z^q, $(1/(z - z_j))]^q$, $j = 1, 2, \ldots, n$ образуют полную систему (ср. [10]). Но отсюда уже следует, что функции $u_{p,q}$ образует полную систему в B. По теореме 6,1 Ω будет, следовательно, устойчивой областью.

Замечание 1. Теоремы 6,1 и 6,2 показывают нам связь между понятием устойчивости проблемы и теорией приближений.

Замечание 2. Теорема 6,2 опирается о полноту рациональных функций в пространстве голоморфных функций, интегрируемых с квадратом. Предполагается, что области принадлежат типу Каратеодори. Известны, однако, теоремы о полноте систем функций на более общих областях. Тогда эти теоремы можно, очевидно, применять в связи с теоремой 6,1.

Замечание 3. Теория аппроксимации, конструктивная теория функций исследуют вопрос об аппроксимации при помощи многочленов и т. п. В связи с проблемами устойчивости областей определения главное значение имеют вопросы несколько иного рода, а именно проблемы приближения функций, удовлетворяющих некоторому дифференциальному уравнению, при помощи системы функций, которые удовлетворяют тому же самому дифференциальному уравнению. Эти проблемы образуют часть теории аппроксимации, которая до сих пор практически не изучалась. Притом не подлежит сомнению, что эта часть теории аппроксимации имеет большое значение для численных методов.

Лемма 6,1. *Пусть A — бигармонический оператор на K_r. Пусть, далее, $u \in H(A)$, $v \in H(A)$. Тогда будет*

$$\int_{Kr} \left[\sum_{\Sigma \alpha_i = 2} \frac{2!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^{\alpha_i} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = \int_{Kr} (\Delta u)(\Delta v) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \, .$$

Доказательство. Лемму достаточно доказать для $u \in M$, $v \in M$. Но в этом случае утверждение нетрудно получить путем двойного интегрирования по частям.

Покажем, что для бигармонического оператора теореме 6,1 можно придать еще другой вид.

Теорема 6,3. *Пусть Ω — область $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\bar{\Omega} \subset K_r \subset E_m$ и пусть A — бигармонический оператор. Для устойчивости области Ω необходимо и достаточно, чтобы для каждой на Ω гармонической и интегрируемой с квадратом функции ψ и для каждого $\varepsilon > 0$ существовала окрестность $\Omega_{\varepsilon,\psi}$ множества $\bar{\Omega}$ и функция v, гармоническая на $\Omega_{\varepsilon,\psi}$, так, что*

$$\int_\Omega (v - \psi)^2 \, dx_1 \dots dx_m < \varepsilon .$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что условие необходимо. Пусть дана гармоническая функция ψ, интегрируемая с квадратом на Ω. Дополним эту функцию вне Ω функцией, тождественно равной нулю. Тогда существует одна единственная функция w на K_r такая, что $\Delta w = \psi$ и $w = 0$ на $\dot{K}_r$. Можно показать (ср. [11] и [12]), что все вторые производные функции w интегрируемы с квадратом на K_r. (В общем случае, конечно, $w \notin H(A)$.) Из теорем С. Л. Соболева о вложении следует, что и w интегрируема с квадратом, так же как и ее первые производные. Так как $\bar{\Omega} \subset K_r$, существует $\chi \in M$ так, что $\chi = 1$ в некоторой окрестности множества $\bar{\Omega}$. Тогда функция $\chi w \in H(A)$ и на Ω будет $\Delta\chi w = \psi$. По теореме 6,1 и по замечанию к ней для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\kappa \in H(A)$ так, что $\|\kappa - \chi w\| < \varepsilon$ и κ бигармонична в некоторой окрестности множества Ω. Однако, по лемме 6,1 можно написать

$$\varepsilon > \|\kappa - \chi w\| = \int_{Kr} (\Delta\kappa - \Delta\chi w)^2 \, dx_1 \dots dx_m \geqq \int_\Omega (\Delta\kappa - \Delta\chi w)^2 \, dx_1 \dots dx_m .$$

Но $\Delta\kappa$ — гармоническая функция в некоторой окрестности множества $\bar{\Omega}$ и $\Delta\chi w = \psi$. Таким образом первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь, что условие достаточно. Итак, пусть $\psi \in H(A)$ и пусть ψ бигармонична на Ω. Обозначим $w = \Delta\psi$. Имеем $\int_{Kr} w^2 \, dx_1 \dots dx_m < \infty$ и w является на Ω гармонической. По условию существует для каждого $\varepsilon > 0$ гармоническая функция u, определенная на окрестности $\Omega_{\varepsilon,\psi}$ так, что $\int_\Omega (w - u)^2 \, dx_1 \dots dx_m < \varepsilon$. Следовательно, существуют окрестность $\Omega_{\varepsilon',\psi}$, $\bar{\Omega} \subset \Omega_{\varepsilon',\psi} \subset \Omega_{\varepsilon,\psi}$ и функциа $v = u$ на $\Omega_{\varepsilon',\psi}$ и $v = w$ на $K_r - \Omega_{\varepsilon,\psi}$ так, что $\int_{Kr} (w - v)^2 \, dx_1 \dots dx_m < 2\varepsilon$. Теперь существует одна единственная функция χ такая, что $\Delta\chi = v - w$ и $\chi \in H(B)$, если B — гармонический оператор на K_r. Притом $\chi = v_1 - \psi$, где $v_1 \in H(B)$ и $\Delta v_1 = v$. Известно, что если $\varphi \in H(B)$ и $\int_{Kr} (\Delta\varphi)^2 \, dx \, dy < \infty$, то имеет место следующее соотношение (см. [12])

$$\int_{Kr} \left[\sum_{\Sigma\alpha_i = 2} \frac{2!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] dx_1 \dots dx_m \leqq c \int_{Kr} (\Delta\varphi)^2 \, dx_1 \dots dx_m ,$$

где постоянная c не зависит ор φ. Итак, положив $\varphi = \chi$, мы получим

$$\int\limits_{Kr} \left[\sum_{\Sigma\alpha_i=2} \frac{2!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^2(v_1 - \psi)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m \leqq c \int\limits_{Kr} (v - w)^2 \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m \leqq 2c\varepsilon \,.$$

Однако, функция v_1 бигармонична на $\Omega_{\varepsilon',\psi}$. Таким образом выполняются все условия теоремы 6,1 и, следовательно, Ω устойчива. Утверждение доказано.

Замечание 1. Вполне аналогично тому, как в теореме 6,3 была выяснена связь между устойчивостью области для бигармонического оператора и гармоническими функциями, интегрируемыми на Ω с квадратом, соотв. возможностью аппроксимации этих функций, можно доказать аналогичное утверждение для l-гармонических функций в связи с устойчивостью областей для $2l$-гармонического оператора.

Замечание 2. Теорема 6,3 стоит в связи с полнотой системы гармонических многочленов или гармонических рациональных функций в пространстве гармонических функций, интегрируемых на Ω с квадратом. Так, напр., в плоскости для случая областей Каратеодори устойчивость относительно бигармонического оператора эквивалентна полноте системы гармонических многочленов в пространстве гармонических функций, интегрируемых с квадратом. В случае, если бы область Ω была того типа, что вместе с гармонической функцией была бы интегрируема с квадратом и сопряженная функция, возможность аппроксимации при помощи многочленов была бы очевидной. Вообще же сопряженная функция не обязательно интегрируема с квадратом. Некоторые достаточные условия этой интегрируемости приводятся в [13].

Замечание 3. Теорема 6,3 имеет и непосредственное практическое значение. При одном методе численного решения бигармонической проблемы в плоскости (см. [14], [15]) важную роль играет полнота системы гармонических многочленов в пространстве гармонических интегрируемых с квадратом функций. Однако, все области, встречающиеся на практике, устойчивы. Дело в том, что эти области принадлежат типу σ (ср. определение 5,3). Это нам обеспечивает устойчивость области (см. теорему 5,5).

Приведем еще одну теорему, тесно связанную с некоторыми вопросами теории приближений и имеющую самостоятельное значение. Пространство H_Ω мы построим как замыкание всех определенных на Ω функций, которые в некоторой окрестности границы области Ω равны тождественно нулю и все производные которых непрерывны. Покажем теперь, что вместо функций, тождественно равных нулю в некоторой окрестности границы, можно исходить из более широкого класса функций таких, что все их производные вплоть до порядка l непрерывны на Ω и допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$, и кроме того, функции и все производные до порядка $l - 1$ равны на $\dot{\Omega}$ нулю.

Теорема 6,4. *Пусть дана область* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$ *и пусть* ψ — *функция, определенная на* Ω, *такая, что все ее производные до порядка* l *непрерывны на* Ω *и допускают непрерывное продолжение на* $\overline{\Omega}$. *Пусть, далее, функция и все ее производные до порядка* $l - 1$ *принимают на* $\dot{\Omega}$ *нулевые значения. Дополним функцию* ψ *вне* Ω *функцией, равной тождественно нулю. Тогда* $\psi \in H_\Omega(A)$ *для* l*-гармонического оператора* A.

Доказательство. Пусть $\vartheta > 0$; обозначим через F_δ δ-окрестность границы $\dot{\Omega}$ и $\Omega_\delta = \Omega - F_\delta$. Пусть $f^{\Omega_{\delta/2}}$ — характеристическая функция множества $\Omega_{\delta/2}$

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\kappa}\frac{1}{(\delta/6)^m}\int_{Em}\omega\left(\mathbf{x} - \xi, \frac{\delta}{6}\right) f_{\Omega_{\delta/2}}(\xi)\, \mathrm{d}\xi_1 \dots \mathrm{d}\xi_m ,$$

где $\omega(\mathbf{x}, h)$ — определенная в лемме 3,1 функция, а $\kappa = \int_{Em}\omega(\mathbf{x}, 1)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m$. Очевидно, $f_\delta \in M_\Omega$, $0 \leqq f_\delta \leqq 1$ и так же, как и в лемме 3,2 имеем

$$\left|\frac{\partial^s f_\delta}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right| < c_s \frac{1}{\delta^s}, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = s .$$

Положим теперь $\varphi_\delta = \psi f_\delta$. Ясно, что φ_δ обладает непрерывными производными на Ω и что все производные до порядка l допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$. Кроме того на $F_{\delta/6}$ функция φ_δ равна тождественно нулю. Обозначим теперь $\chi_\delta = \psi - \varphi_\delta = \psi(1 - f_\delta)$. Имеем

$$\frac{\partial^l \chi_\delta}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} = \sum_{p=0}^{l} \sum_{\substack{\Sigma\alpha_i p = p \\ \Sigma\beta_i p = l-p}} \frac{\partial^p \psi}{\partial x_1^{\alpha_1 p} \dots \partial x_m^{\alpha_m p}} \frac{\partial^{l-p}(1 - f_\delta)}{\partial x_1^{\beta_i p} \dots \partial x_m^{\beta_m p}} c_{\alpha p_1, \dots, \alpha p_m, \beta p_1 \dots \beta p_m} ,$$

где $c_{\alpha p_1, \dots, \alpha p_m, \beta p_1 \dots \beta p_m}$ — некоторые постоянные. Так как $(1 - f_\delta) = 0$ на Ω_δ, можно для достаточно малых ϑ сделать выражение

$$\int\left(\frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(1 - f_\delta)\right)^2 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m$$

сколь угодно малым. Далее, так как для каждой точки $\mathbf{x} \in F_\delta \cap \Omega$ существует точка $\mathbf{y} \in \dot{\Omega}$ так, что $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqq \vartheta$ и отрезок, соединяющий точки x, y лежит внутри $\overline{\Omega}$, то для $0 \leqq p \leqq l - 1$ на $F_\delta \cap \Omega$ будет

$$\frac{\partial^p \psi}{\partial x_1^{\alpha_1 p} \dots \partial x_m^{\alpha_m p}} > \vartheta^{l-p} c ,$$

причем c не зависит от ϑ (но зависит, конечно, от функции ψ). Поэтому для $p < l$ будет

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^p \psi}{\partial x_1^{\alpha_1 p} \dots \partial x_m^{\alpha_m p}} \frac{\partial^{l-p}(1 - f_\delta)}{\partial x_1^{\beta p_1} \dots \partial x_m^{\beta_m p}}\right)^2 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m \leqq$$

$$\leqq c^2 c^{*2} \int_{F_\delta \cap \Omega} \left(\partial^{l-p} \frac{1}{\vartheta^{l-p}}\right)^2 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m = c^2 c^{*2} \int_{F_\delta \cap \Omega} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m .$$

Притом мы обозначили $c^* = \max [c_s]$. Ввиду того, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \int_{F_\delta \cap \Omega} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m = 0$, можно для достаточно малых ϑ достичь того, чтобы было

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial^p \psi}{\partial x_1^{\alpha_1 p} \dots \partial x_m^{\alpha_m p}} \frac{\partial^{l-p}(1 - f_\delta)}{\partial x_1^{\beta_1 p} \dots \partial x_m^{\beta_m p}} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m < \varepsilon$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и любого $0 \leqq p \leqq l$. Так как постоянные $c_{\alpha_1 p, \dots \alpha_m p, \beta_1 p \dots \beta_m p}$ не зависят от ϑ, ясно, что для достаточно малых ϑ можно сделать выражение

$$\int\limits_\Omega \left[\sum_{\Sigma \alpha_1 = l} \frac{l!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^l (\psi - \varphi_\delta)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m$$

сколь угодно малым. Отсюда уже следует наше утверждение, так как $\psi \in H(A)$.

Замечание 1. Теорема 6,4 решает вопрос, который исследует также С. Г. Михлин [16], § 27. Михлин требует, однако, чтобы граница была достаточно гладкой. Для нашей теоремы это требование излишне.

Замечание 2. Теорема 6,4 доказывает эквивалентность пространств, образованных как полные оболочки функций, равных тождественно нулю в окрестности границы, и функций, все производные которых до порядка $l - 1$ равны нулю на границе. Об этой эквивалентности мы уже упоминали в гл. II.

Замечание 3. В теореме 6,4 было существенно, что рассматриваемые функции обладали ограниченными производными до порядка l. В случае устойчивых областей это условие можно несколько ослабить: достаточно потребовать, чтобы $\psi \in H(A)$ и $\psi = 0$ на $K_r - \overline{\Omega}$.

VII. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Вопросами устойчивости первой проблемы для полигармонического уравнения мы занимались в предыдущих главах. Поэтому мы прежде всего рассмотрим проблему устойчивости области по отношению к первой основной задаче математической теории упругости, т. е. к задаче напряженного состояния в случае предписанных перемещений на границе.

Первой основной задачей математической теории упругости мы называем задачу нахождения функций u_i, $i = 1, \dots, n$ $n = 2, 3$, определенных на области $\Omega \subset E_n$, принимающих на $\dot{\Omega}$ предписанные значения и таких, что при обозначениях

$$\varepsilon_{i,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad i, k = 1, \dots, n, \qquad \tau_{i,k} = \sum_{l,m=1}^{n} c_{i,k,l,m,} \varepsilon_{l,m}$$

имеем

$$(7,1) \qquad \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tau_{i,k}}{\partial x_k} = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Притом коэффициенты $c_{i,k,l,m}$ представляют собой коэффициенты упругости, удовлетворяющие следующим соотношениям (см., напр., [16]): $c_{i,k,l,m} = c_{l,m,i,k} = c_{k,i,l,m}$ и неравенству

$$\sum_{i,k,l,m} c_{i,k,l,m}\varepsilon_{i,k}\varepsilon_{l,m} \geqq \mu_0 \sum_{i,k=1}^{n} \varepsilon_{i,k}^2\,, \quad \mu_0 > 0$$

для всех $\varepsilon_{i,k}$. Коэффицинты $c_{i,k,l,m}$ могут быть, вообще, функциями, которые мы для простоты предполагаем непрерывными.[11] Встречающиеся в уравнениях производные нужно понимать в смысле обобщенных функций.

Докажем теперь лемму:

Лемма 7,1. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_n$ $(n = 2, 3)$ *— данная область и пусть* M *— модуль, как в определении* 3,1. *Тогда для каждых* n *функций* $u_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$ *имеют место соотношения*

$$c_1 \int_{Kr} \sum_{i,k,l,m}^{n} c_{i,k,l,m}\varepsilon_{i,k}\varepsilon_{l,m}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \leqq \int_{Kr} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \leqq$$

$$\leqq c_2 \int_{Kr} \sum_{i,k,l,m} c_{i,k,l,m}\varepsilon_{i,k}\varepsilon_{l,m}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\,.$$

Притом c_1 *и* c_2 *— подходящие положительные постоянные, а*

$$\varepsilon_{i,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Доказательство. См. [16], § 41.

Лемма 7,2. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_n$ $(n = 2, 3)$ *и пусть* M *— модуль функций, как в определении* 3,1. *Пусть, далее,* $M_n = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n\ \text{раз}}$. *На* M_n *введем скалярное произведение следующим образом. Если* $u \in M_n$, $v \in M_n$, *то*

$$[u, v] = \int_{Kr} \sum_{i,k,l,m} c_{i,k,l,m}\varepsilon_{i,k}(u)\,\varepsilon_{l,m}(v)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n\,,$$

где мы обозначили $\varepsilon_{i,k}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial u_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$, *и пусть* H_n *— полная оболочка модуля* M_n *по норме* $\|u\|^2 = [u, u]$;[12] *далее мы расширим скалярное произведение*

[11]) Во всей этой главе мы предполагаем, что коэффициенты $c_{i,k,l,m}$ удовлетворяют указанным условиям.

[12]) Нетрудно видеть, что определенное таким образом произведение выполняет все аксиомы скалярного произведения.

$[u, v]$ на H_n. Пространство H_n является гильбертовым пространством, соответствующим первой задаче теории упругости. Тогда, если $u \equiv (u_1, \ldots, u_n) \in H_n$, то $u_i \in H$, $i = 1, \ldots, n$, где H — соответственное гильбертово пространство по отношении к оператору Лапласа на K_r (ср. определение 3,1) и наоборот, если $v_i \in H$, $i = 1, \ldots, n$, то $v = (v_1, \ldots, v_n) \in H_n$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 7,1.

По аналогии с определениями 4,5 и 4,6 в которых мы ввели для регулярного оператора A внутреннее и внешнее решения Винера, можно ввести внутреннее и внешнее решения Винера для первой основной проблемы теории упругости. Оператор A будет здесь выражен левой частью уравнения 7,1.

Дадим теперь следующее определение:

Определение 7,1. *Пусть дана область $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_n$ $n = 2, 3$ и пусть $\Omega \in \mathfrak{N}$. Пусть H_n — гильбертово пространство,соответствующее первой задаче теории упругости, и пусть $\psi \in H_n$. Обозначим через $H_{n,\Omega}$ замыкание всех $u = (u_1, \ldots, u_n) \in M_n$ таких, что $u_i \in M_\Omega$ (ср. определение 3,2), и аналогично ${}_\Omega H_n = \operatorname{Lim}_{q \to \infty} H_{n,\Omega q}$, $q = 1, 2, \ldots$, если Ω_q — последовательность областей таких, что $\overline{\Omega} \subset \Omega_{n+1} \subset \overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega_n$ и $\bigcap \Omega_n = \overline{\Omega}$. Далее мы обозначим через ${}^*_\Omega H_n$ и ${}^*H_{n,\Omega}$ ортогональные дополнения в H_n относительно пространств ${}_\Omega H_n$ и $H_{n,\Omega}$, а через P_1 и P_2 проекторы соответственно на ${}^*H_{n,\Omega}$ и ${}_\Omega H_n$. Тогда $P_1\psi$ и $P_2\psi$ будит соответственно внутренним и внешним решениями данной задачи для краевых условий, определенных соотношением $\psi \in H_n$.*

В случае гладких областей внутреннее и внешнее решения отождествляются, давая классическое решение первой задачи теории упругости.

По аналогии с гл. V можно ввести понятие устойчивой и неустойчивой областей. Из лемм 7,1 и 7,2 теперь непосредственно следует

Теорема 7,1. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_n$. Тогда Ω будет устойчивой относительно первой задачи теории упругости, если и только если Ω устойчива для уравнения Лапласа.*

Замечание 1. Ввиду того, что в предыдущих главах были приведены различные условия для устойчивости областей относительно задачи Дирихле для уравнения Лапласа, напр., была указана связь между устойчивостью в смысле Келдыша и в нашем смысле, далее доказаны и другие теоремы, касающиеся проблемы устойчивости относительно оператора Лапласа, является решенной и проблема устойчивости относительно основной задачи теории упругости. Так, напр., справедливо утверждение, что каждая конечносвязная область Каратеодори в плоскости устойчива и т. п.

Замечание 2. Из доказанных теорем следует, что понятие устойчивости инвариантно по отношению к неоднородности и анизотропности среды.

Замечание 3. Уравнения теории упругости являются частным случаем сильно эллиптических систем. Теперь видно, каким образом наши рассуждения можно перенести и на эти сильно эллиптические системы.

Докажем теперь утверждение, касающиеся единственности решения полигармонической проблемы.

Теорема 7,3. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{N}$, $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$[13]). Пусть, далее, Ω — область, устойчивая относительно l-гармонического оператора. Пусть, далее, ψ — функция, определенная на Ω, обладающая $2l$ непрерывными производными и такая, что $\underbrace{\Delta \ldots \Delta}_{l\text{-раз}}\psi = 0$. Далее пусть все производные до порядка l интегрируемы с квадратом и пусть финкция ψ и все ее производные до порядка $l-1$ допускают тонко непрерывное продолжение к нулю (т. е. их псевдопредел равен нулю) C-почти во всех точках границы $\dot{\Omega}$. Тогда $\psi = 0$.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что $\psi_0 \in H_\Omega(A_l)$ если A_l есть l-гармонический оператор, где $\psi_0 = \psi$ на Ω и $\psi_0 = 0$ на $K_r - \overline{\Omega}$. Действительно, по теореме 5,12 имеем $\psi_0 \in H(A_1)$. По той же причине и все производные до порядка $l-1$ принадлежат пространству $H(A_1)$. Итак, $\psi_0 \in H(A_l)$. Так как $\psi_0 = 0$ на $K_r - \overline{\Omega}$, очевидно, $\psi_0 \in {}_\Omega H(A_l)$. Так как по условию область Ω устойчива, будет ${}_\Omega H = H_\Omega$. Итак, $\psi_0 \in H_\Omega$. По условию ψ_0 есть l-гармоническая на Ω функция. Итак, $\psi_0 \in {}^*H_\Omega(A_l)$. Так как $\psi_0 \in H_\Omega$ и $\psi \in {}^*H_\Omega$, будет $\psi = 0$, ч. т. д.

Замечание 1. Предположение об устойчивости существенно. Если бы область Ω не была устойчивой, как, напр., в случае области, построенной в теореме 5,8, утверждение было бы неверным.

Замечание 2. Теорема 7,3 является, собственно говоря, теоремой о единственности решения полигармонической проблемы. Но еще неизвестно, всегда ли решение для неоднородных краевых условий обладает производными до порядка $l-1$, допускающими тонко непрерывное продолжение. Однако, на протяжении всей настоящей работы краевые условия определяются функцией $\psi \in H$ (функция ψ определена, следовательно, во всем K_r). Решение полигармонической проблемы для краевых условий, определенных функцией ψ, можно, следовательно, продолжить вне Ω при помощи функции ψ, причем эта продолженная функция остается в пространстве H. Итак, в смысле теорем 5,9 и 5,10 можно достичь того, чтобы все производные до порядка $l-1$ тонко непрерывные на K_r C-почти всюду. Мы видим, что в этом классе решений теорема 7,3 является, действительно, теоремой единственности.

Замечание 3. Теорема 7,3, и ее доказательство тесно связаны также с тем, принадлежитли функция ψ пространству H_Ω. Следовательно, речь идет об описании пространства, обозначаемого в литературе символом $\overset{\circ}{W}{}^l_p$.

Для основной проблемы теории упругости можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 7,3.

[13]) В случае, когда $m = 2$, пусть K есть единичная сфера.

Теорема 7,4. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_n$, $n = 2, 3$. *Пусть на* Ω *определены функции* u_i, $i = 1, \ldots, n$, *интегрируемые с квадратом вместе со своими первыми производными и удовлетворяющие уравнениям* 7,1. *Пусть, далее, финкции* u_i *C-почти всюду допускают тонко непрерывное продолжение на* $\dot{\Omega}$ *к нулю. Тогда* $u_i = 0$ *тождественно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7,3.

Замечание. Замечание 2 к теореме 7,3 справедливо в основном и для теоремы 7,4.

VIII. О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

В предыдущих главах мы показали, что все области устойчивы изнутри и снаружи по отношению к первой проблеме, то есть имеет смысл говорить о внутреннем и внешнем решениях. Далее мы показали, что практически все важные для приложений области устойчивы по отношению к первой проблеме.

В этой главе мы покажем, что совершенно иначе обстоит дело в случае второй проблемы. Для простоты мы притом ограничимся плоской бигармонической проблемой, так как этот случай наиболее важен для приложений. Мы покажем, что вообще нельзя и говорить о внутреннем решении, то есть и в случае монотонной последовательности областей предел решений не является решением на предельной области; это имеет место и в случае таких областей, как круг.

Докажем прежде всего несколько вспомогательных утверждений:

Лемма 8,1. *Пусть* $\Omega_{n,r} \subset E_2$ — *правильный открытый n-угольник* ($n \geqq 3$) *с центром в начале координат, вписанный в круг* K_r *радиуса* r. *Обозначим далее через* a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *его вершины. Пусть, далее, на* Ω_n *определена гармоническая функция и такая, что*

1. $\int_{\Omega_{n,r}} u^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \leqq A^2 < \infty$.

2. *Функция* u *допускает непрерывное продолжение к нулю на* $\overline{\Omega}_{n,r} - \bigcup_{i=1}^{n} a_i$.

Тогда $u = 0$ *тождественно.*

Доказательство. Так как по условию $u = 0$ на каждой стороне многоугольника $\Omega_{n,r}$ (за исключением вершин), эту функцию можно локально антисимметрически продолжить через эту сторону (ср., напр., [17], стр. 408). Возьмем число $0 < D < 1$ так, что в окрестности каждой из вершин a_i функция u будет гармонической на каждом круге $K^P_{Dr_p}$ с центром в точке $P \in \overline{\Omega}_{n,r} - \bigcup_{i=1}^{n} a_i$ и с радиусом $r_P D$. Притом мы обозначили через r_P расстояние точки $\mathbf{P}$ от вершины $\mathbf{P}'$. Поэтому можно предположить, что $\iint\limits_{K^P_{Dr_P}} u^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 2A^2$.

Имеем

$$u(\mathbf{P}) = \frac{1}{\pi r_P^2 D^2} \iint\limits_{K^P_{Dr_P}} u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,;$$

поэтому

$$u(\mathbf{P}) \leqq \frac{1}{\pi r_P^2 D^2} \sqrt{\iint\limits_{K^P_{Dr_P}} u^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \sqrt{\iint\limits_{K^P_{Dr_P}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \leqq \frac{1}{\pi r_P^2 D^2} 2A\sqrt{\pi} r_P D \leqq \frac{\text{konst}}{r_P}\,.$$

Так как углы при вершинах многоугольника $\Omega_{n,r}$ тупые, функция u ограничена на $\Omega_{n,r}$ (ср. [18], теорема 1,1 или [19]). Итак, функция u ограничена в $\Omega_{n,r}$ и равна всюду нулю за исключением конечного числа точек на границе. Поэтому в силу теоремы Заремба она равна тождественно нулю (ср. также [20]), и лемма доказана.

Докажем теперь теорему 8,1:

Теорема 8,1. *Пусть* $\Omega_{n,r_0} \subset E_2$ *— правильный открытый n-угольник* ($n \geqq 3$) *с центром в начале координат, вписанный в круг* K_{r_0} *радиуса* r_0, *и пусть* a_i *— его вершины* ($i = 1, \ldots, n$). *Обозначим далее через* K_{r_1} $0 < r_1 < r_0/4$ *круг радиуса* r_1 *с центром в начале. Пусть, далее, на* Ω_{n,r_0} *определена финкция* $f = \omega(r, r_1)$ (*ср. лемму* 3,1).[14]) *Пусть* w *— решение второй проблемы для бигармонического уравнения и для функции* f (ср. опр. 2,2) *на* Ω_{n,r_0}. *Тогда*

1. *Функцию* $v = \Delta w$ *можно непрерывно продолжить к нулю на* $\dot{\Omega}_{n,r_0}$.

2. *Функция* $v = \Delta w$ *обладает на* Ω_{n,r_0} *двумя непрерывными производными, причем* $\Delta v = f$.

3. *Функция* w *ограничена на* Ω_{n,r_0}.

4. *Функцию* w *можно непрерывно продолжить к нулю на* $\dot{\Omega}_{n,r_0}$.

5. *Функция* w *обладает на* Ω_{n,r_0} *двумя непрерывными производными.*

Доказательство. По определению 2,2 функция w минимализирует функционал

$$\iint\limits_{\Omega n,r_0} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\iint\limits_{\Omega n,r_0} fw \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

на ${}^1W_2^2$. Итак, для любого $v \in {}^1W_2^2$ будет

$$\iint\limits_{\Omega n,r_0} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega n,r_0} vf \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{8.1}$$

[14]) Мы обозначили $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как $f = 0$ на $\Omega_{n,r_1} - K_{r_1}$, из (8,1) следует, что w бигармонична на $\Omega_{n,r_0} - K_{r_1}$ Продолжим эту функцию w антисимметрически локально через каждую сторону многоугольника Ω_{n,r_0} и покажем, что продолженная таким образом функция будет бигармонической. Итак, пусть $\boldsymbol{P} \in \dot{\Omega}_{n,r_0}$, $\boldsymbol{P} \notin \bigcup_{i=1}^{n} a_i$ и пусть K_P — открытая (круговая) окрестность точки $\boldsymbol{P}$ так, что $K_P \cap \bigcup_{i=1}^{n} a_i = 0 = K_P \cap K_{r_1}$. Бигармоничность продолженной функции w на K_P докажем, если для любой функции u со всеми производными и с компактным носителем $N \subset K_P$ будет

$$I = \iint_{K_P} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{\Omega n, r_0 \cap K_P} [\cdot] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{(E_2 - \Omega n, r_0) \cap K_P} [\cdot] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0 \, .$$

Разложим функцию u на сумму функций симметрической и антисимметрической по отношению к рассматриваемой стороне многоугольника, содержащей точку $\boldsymbol{P}$. Итак, $u = u_S + u_A$, где u_S и u_A означают соответстенно симметрическую и антисимметрическую части функции u. Итак, мы теперь получаем

$$I = \iint_{\Omega n, r_0} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y +$$

$$+ \iint_{(E_2 - \Omega n, r_0) \cap K_P} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y} \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y +$$

$$+ \iint_{\Omega n, r_0 \cap K_P} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_A}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 u_A}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y +$$

$$+ \iint_{(E - \Omega n, r_0) \cap K_P} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_A}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 u_A}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \, .$$

Ввиду антисимметрии функции w и ввиду симметрии и антисимметрии функции соответственно u_s и u_A, будет $I_1 = I_2$; $I_3 = I_4$. Следовательно, $I = 2I_3$. Но так как на Ω_{n,r_0} имеет место $u_A \in {}^1W_2^2$, а w есть решение второй задачи, будет $I_3 = 0$. Итак, $I = 0$, откуда уже следует бигармоничность продолженной функции w. Так как бигармоническая функция является аналитической функцией, все производные функции w можно продолжить на $\dot{\Omega}_{n,r_0} - \bigcup_{i=1}^{n} a_i$, Следовательно, выполняются все условия теоремы 2,5. Поэтому будет $\partial^2 w / \partial n^2 = w = 0$ на

$\dot{\Omega}_{n,r_0} - \bigcup\limits_{i=1}^{n} a_i$, а следовательно, и $\Delta w = 0$. Ввиду того, что f обладает всеми производными, w обладает на Ω_{n,r_0} четырьмя непрерывными производными имеем $\Delta\Delta w = f$. Обозначив $v = \Delta w$, мы видим, что действительно $\Delta v = f$. Ввиду того, что $w \in {}^1W_2^2$, будет $\int\limits_{\Omega n, r0} v^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty$. Обозначим теперь через v_1 классическое решение проблемы $\Delta v_1 = f$, причем $v_1 = 0$ на $\dot{\Omega}_{n,r_0}$. Такое решение, очевидно, существует и является ограниченным. Итак, функция $v_1 = v = v_2$ гармонична, $\iint\limits_{n,r_0} v_2^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty$ и на $\dot{\Omega}_{n\kappa r_0} - \bigcup\limits_{i=1}^{n} a_i$ будет $v_2 = 0$. Поэтому по лемме 8.1 будет $v_2 = 0$; итак, $v_1 = v$. Слеовательно, функцию v можно непрерывно продолжить к нулю на $\dot{\Omega}_{n,r_0}$ и она ограничена. Так как $w \in {}^1W_2^2$, w непрерывна на $\overline{\Omega}_{n,r_0}$ и $w = 0$ на $\dot{\Omega}_{n,r_0}$. Кроме того, $\Delta w = v$ на Ω_{n,r_0}. Поэтому w является классическим решением проблены $\Delta w = v$ с краевыми условиями $w = 0$ на $\dot{\Omega}_{n,r_0}$. Это уже доказывает теорему 8,1.

Теорема 8,2. *Пусть K_{r_0} — открытый круг радиуса r_0 с центром в начале. Пусть $r_1 < r_0$ и пусть $f = \omega(r, r_1)$* (ср. теорему 8,1). *Пусть w — решение второй проблемы для бигармонического уравнения и для функции f на круге K_r. Тогда w будет обладать вращательной симметрией относительно начала и все ее производные непрерывны на K_r; кроме того на $\dot{K}_r$ будет $w = \partial w^2/\partial r^2 = 0$.*

Доказательство. Нетрудно обнаружить, что функция

$$w_0 = \frac{1}{16\pi} \int\limits_{E_2} f(\xi, \eta)[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \lg [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta + D(x^2 + y^2) + E \tag{8,3}$$

определена на всем E_2, что все ее производные непрерывны, что она обладает вращательной симметрией относительно начала и что $\Delta\Delta w = f$. Поэтому можно подобрать постоянные c и D так, чтобы $w_0 = \partial^2 w_0/\partial r^2$ на K_{r_0}. Пусть мы имеем теперь функцию $u \in M_1^2(K_r)$ (ср. гл. II). Двойным интегрированием по частям нетрудно обнаружить, что

$$\iint\limits_{K_{r_0}} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{K_{r_0}} fu \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Так как ясно, что $w_0 \in {}^1W_2^2$, будет $w_0 = w$ (см. опр. 2,2). Отсюда уже следует утверждение теоремы.

Теперь мы уже можем доказать теорему о неустойчивости второй проблемы для бигармонического уравнения.

Теорема 8,3. *Пусть дана $f = \omega(r, 1)$* (ср. обозначения в теореме 8,1). *Тогда существует число r_0 и последовательность Ω_{n_i,r_i} открытых правильных n_i-*

угольников с центром в начале координат, вписанных в круг K_{r_i} радиуса r_i, которые имеют следующие свойства:

1. $\bar{K}_1 \subset \Omega_{n_i,r_i} \subset \bar{\Omega}_{n_i,r_i} \subset \Omega_{n_{i+1},r_{i+1}} \subset K_{r_0}$ *для* $i = 1, 2, \ldots$

2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_{n_i,r_i} = K_{r_0}$.

3. *Если* w_i *— решение второй проблемы для бигармонического уравнения и для функции* f *на* Ω_{n_i,r_i}, *то* $w_i \to \bar{w}$ *равномерно внутри* K_{r_0}.

4. *Если* w *— решение второй задачи для бигармонического уравнения и для функции* f *на* K_{r_0}, *то* $w \neq \bar{w}$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для $x^2 + y^2 > 1$ имеет место

$$\frac{1}{16\pi} \iint\limits_{E_2} f(\xi, \eta)[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \lg [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \, d\xi \, d\eta =$$
$$= A \lg r + Br^2 \lg r + Cr^2 + D \quad \text{и} \quad B \neq 0 \, ; \; x^2 + y^2 = r^2 \, .$$

Из того, что интеграл в левой части является функцией с вращательной симметрией относительно начала и притом функцией бигармонической, следует, что для $r > 1$ должно иметь место приведенное уравнение, ибо в правой части мы видим общей интеграл. Далее, ввиду того, что $\iint\limits_{E_2} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta > 0$, ясно, что $B > 0$. Поэтому существует достаточно большое $r_0 > 1$ так, что $B > A/r_0^2$. Теперь ясно, что существует последовательность областей $\Omega_{n_i r_i}$, выполняющая свойства 1 и 2 в утверждении теоремы. По теореме 8,1 функции w_i, $i = 1, 2, \ldots$ являются решением системы уравнений на Ω_{n_i,r_i},

$$\Delta v_i = f \, , \quad \Delta w_i = v_i$$

с краевыми условиями $v_i = w_i = 0$ на $\dot{\Omega}_{n_i,r_i}$. Так как круг — устойчивая область (см. тепрему 5,4), функции v_i и w_i сходятся локально равномерно соответственно к функциям $\bar{v}$ и $\bar{w}$, являющимся на K_{r_0} решением уравнений

$$\Delta \bar{v} = f \, , \quad \Delta \bar{w} = \bar{v}$$

с нулевыми краевыми условиями на K_{r_0}.[15]) Поэтому все производные функции $\bar{w}$ на K_{r_0} непрерывны, сама функция обладает вращательной симметрией относительно начала, имеет место $\Delta\Delta\bar{w} = f$ и на $\dot{K}_{r_0}$ будет

$$\bar{w} = \Delta\bar{w} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = 0 \, .$$

В теореме 8,2 мы, однако, показали, что и у функции w все производные не-

---

[15]) Не имеет существенного значения, что в гл. V мы доказывали устойчивость для однородной проблемы и необнородных краевых условий, а здесь исследуем устойчивость для неоднородного уравнения и однородных краевых условий.

прерывны на K_{r_0}, что эта функция обладает вращательной симметрией, имеет место $\Delta\Delta w = f$, но на $\dot{K}_r$ имеем $w = \partial^2 w/\partial r^2 = 0$. Поэтому будет

$$\bar{w} = \frac{1}{16\pi} \iint_{E_2} f(\xi, \eta)[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \lg [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \, d\xi \, d\eta + \\ + \bar{E}(x^2 + y^2) + \bar{F},$$

$$w = \frac{1}{16\pi} \iint_{E_2} f(\xi, \eta)[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \lg [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \, d\xi \, d\eta + \\ + E(x^2 + y^2) + F,$$

где постоянные $\bar{E}\bar{F}$ и EF определяются из условий, чтобы было соответственно

$$\bar{w} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = 0$$

и

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial r} = 0 \text{ на } \dot{K}_{r_0}.$$

Так как $r_0 > 0$, будет

$$\bar{w} = A \lg r + Br^2 \lg r + Cr^2 + D + \bar{E}r^2 + \bar{F},$$

$$w = A \lg r + Br^2 \lg r + Cr^2 + D + Er^2 + F.$$

Поэтому $\bar{E} = -B(\lg r + 1) - C$ и $E = -B(\lg r + 1) - C - \frac{1}{2}B + A/(2r^2)$. Но так как $B > A/r_0^2$, будет $\bar{E} \neq E$ и, следовательно, $\bar{w} \neq w$. Теорема доказана.

Замечание 1. Вторая проблема для бигармонического уравнения соответствует случаю круговой пластины, подпертой по контуру (см. гл. II). Теорема 8,3 представляет с технической точки зрения довольно большую неожиданность. Из этой теоремы следует, что если заменить круговую пластинку пластиной очень близкой формы, а именно пластиной в виде многоугольника с большим числом сторон, то напряженные состояния этих двух пластин при одинаковой нагрузке будут значительно отличаться друг от друга. Решение для случая круговой пластины подпертой по контуру не только приводится в каждом элементарном учебнике сопротивления материалов, но на основании этого решения был спроектирован и выполнен даже ряд железобетонных конструкций. Притом нужно еще принять во внимание, что при практическом выполнении круговой железобетонной пластины под влиянием опалубки форма пластины напоминает скорее многоугольник, чем круг. Разницей между решениями w и $\bar{w}$, т. е. между решением для круговой пластины и предельным решением для многоугольников, вообще нельзя пренебречь. Например, при равномерной нагрузке разница между значениями стрелы прогиба в центре пластины составляет 40%, а для изгибающего момента разница равна 33%, чем, конечно, нельзя пренебречь. Заметим еще, что устойчивость и неустойчивость этого случая носят совершенно отличный характер по сравнению, напр., со случаем неустойчивости первой основной задачи теории упругости. Этот случай был нами исследован в предыдущих главах. Однако, там устойчивость изнутри существовала для каждой области и, кроме того, неустойчивые области содержали „бесконечно малые щелки“. Ввиду того, что вывод уравнений теории упругости основан на предположении непрерывности среды, ясно, что решение в случае области с бесконечно малыми щелями нельзя, собственно говоря, считать напряженным состоянием данного тела, ибо в таком случае предположение непрерывности среды практически уже не выполняется. Совершенно иначе обстоит дело в случае неустойчивости проблемы пластины с простой опорой. Возникает вопрос, чем вызывается этот с практической точки зрения поразительный парадокс, а также вопрос, не существуетли какой-либо более подходящей формулировки проблемы, которая в настоящее время переводится на проблему пластины с простой опорой. Итак, каким же образом нужно расчитывать и конструировать такого рода пластины? Притом хорошо известно, что экспериментальное решение обладает таким разбросом и настолько не согласуется с теорией, что некоторые авторы уже думают о пересмотре проблемы пластины.

В связи с уравнением Софи Жермен хорошо известна также проблема краевых условий, где моменты кручения заменяются соответственными срезывающими усилиями. Эти обстоятельства тогда повели, напр., к так называемому решению Рейсснера проблемы пластины.

Разъясним прежде всего внутреннюю сущность нашего результата. В случае многоугольной области, в случае выпуклых угловых точек известно, что наблюдается приподнимание углов при отрицательных реакциях в этих угловых точках. Если воспрепятствовать подниманию углов, то эти отрицательные реакции приводят в известном смысле к отрицательным опорным моментам, которые образуют, собственно говоря, своего рода упругую заделку.

В случае увеличения числа угловых точек увеличивается и число мест, в которых наблюдается эта заделка. Удивительно однако то, что сгущение угловых точек вызывает в центре пластины больший эффект, чем раскрывание углов при вершинах. Но если уже получаются эти различные решения, то тогда вполне понятно, что значения стрелки прогиба по предельному решению получаются меньше, чем по решению на круге. Итак, предельное решение соответствует случаю упруго закрепленной круговой пластины.

Рассмотрим теперь более подробно осуществление простой опоры. Типичным является случай замурованного края пластинки, причем ширина этого замурованного края невелика. Итак, случай свободной пластины, упруго уложенной (по Винклеру) на замурованной поверхности края, значительно ближе действительности, чем случай простой опоры. Конечно, в первом случае проблема пластины переходит на третью проблему для уравнения $\Delta\Delta u + \alpha u = f$. В следующем параграфе мы покажем, однако, что здесь наблюдается уже устойчивость области. Заметим еще, что случай пластины, упруго уложенной на краю, часто в известном смысле более приближается действительности, чем случай жесткого закрепления (т. е. первая проблема). Хотя с механической точки зрения все эти вопросы и заслуживают более подробного анализа, настоящая работа имеет несколько иное направление. Рассмотрение этих вопросов будет предметом одной из последующих работ.

Замечание 2. Сходимость решений была нами доказана для случая, когда области были правильными многоугольниками. Из доказательства ясно, что получатся те же предельные решения; если выпуклые многоугольники стремятся к данному кругу. Случай невыпуклых многоугольников остается пока нерешенным.

Замечание 3. При помощи теории интегральных уравнений можно показать, что решения второй проблемы на достаточно гладких областях, стремящихся к кругу вместе с производными, стремятся к решению на круге, т. е. указанная неустойчивость не имеет места.

IX. УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей главе мы подробно рассмотрим вопрос об устойчивости задачи Неймана для полигармпнического уравнения. В гл. II мы ввели понятие задачи Неймана для областей с достаточно гладкой границей. Здесь нужно перейти к общему случаю, к случаю области общего типа, что приводит, как мы увидим, к некоторым трудностям. Для простоты мы во всей этой главе ограничимся полигармоническими уравнениями, хотя в полной аналогии с предыдущими главами теоремы остаются в силе и для регулярных на K_r операторов. На протяжении всей этой главы мы будем всегда предполагать, что граница области имеет меру нуль.

Определение 9,1. *Пусть дана область $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$. Мы будем говорить, что Ω устойчива извнутри относительно задачи Неймана для l-гармонического оператора, если для всякой последовательности областей $\Omega_n \in \mathfrak{P}$, $n = 1, 2, \ldots$ такой, что $\Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, и для всякой функции, инетгрируемой с квадратом с компактным носителем на Ω_1 и такой, что*

$$\int\limits_{\Omega} f x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < l\,, \quad \alpha_i \geqq 0\,,$$

существует функция v_f на Ω независимо от Ω_n так, что

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega_n} \left[\sum_{\Sigma \alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{(\partial^l (v_f - u_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = 0\,.$$

Притом u_n — решение задачи Неймана на Ω_n для уравнения $\underbrace{\Delta \dots \Delta}_{l\text{-раз}} u = f$. Функцию v_f мы будем называть внутренним винеровским решением проблемы Неймана для уравнения $\underbrace{\Delta \dots \Delta}_{l\text{-раз}} u = f$.

Замечание 1. Нам пришлось ограничиться функциями с компактным носителем. Для областей общего типа (которые не являются т. наз. областями Никодыма) и для функции, интегрируемой с квадратом на f и такой, что $\int_\Omega f x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m = 0$, $(\sum \alpha_i < l)$, и у которой не имеется компактного носителя), решение задачи Неймана не обязательно существует.

Замечание 2. В отличие от первой задачи для l-гармонических уравнений мы исходим при исследовании устойчивости из решений с однородными краевыми условиями и неоднородной правой частью. В случае первой проблемы не представляло бы трудностей перейти к этому виду; при этом получились бы вполне равносильные результаты.

Замечание 3. Допущение, что носитель функции содержится в Ω_1, не ограничивает, очевидно, общности, поскольку мы предполагаем, что носитель компактен в Ω.

Теорема 9,1. *Каждая область $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset E_m$ устойчива изнутри относительно задачи Неймана для l-гармонического оператора.*

Доказательство. Пусть Ω_n — последовательность областей со следующими свойствами:

$$1.\ \Omega_n \in \mathfrak{P}; \quad 2.\ \Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \overline{\Omega}_{n+1} \subset \Omega; \quad 3.\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega.$$

Обозначим $\Phi_1 = \Omega_1$, $\Phi_{n+1} = \Omega_{n+1} - \overline{\Omega}_n$, $\Psi_n = \bigcup_{n+1}^{\infty} \Phi_k$. Пусть M_n — модуль функций, определенных на $\Omega_n \bigcup \Psi_n$, все производные которых до порядка l непрерывны и интегрируемы с квадратом на Ω_n и Φ_k $k \geqq n + 1, \dots$[16]) На модуле M_n введем скалярное произведение (и соответствующую норму) при помощи следующего предписания: Пусть $u \in M_n$, $v \in M_n$. Пусть, далее,

$$[u, v] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Phi_k} \left[\sum_{\Sigma \alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \frac{\partial^l v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \right] \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m \,.^{17})$$

Введенное таким образом скалярное произведение и, соответственно, норма

[16]) На границах области $\dot{\Phi}_k$, $k > n + 1$ мы ничего не предполагаем ни относительно функции, ни относительно ее производной.

[17]) Если $u_n \in M_n$, то u_n обладает производными на всем Ω_n. Ввиду того, что границы Φ_k имеют меру нуль, достаточно интегрировать по $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k$.

($\|u\|^2 = [u, u]$), удовлетворяют всем аксиомам скалярного произведения, соотв. нормы, в случае, если не различать функции, которые на каждом из Φ_k, $k = n + 1, \ldots$, отличаются друг от друга многочленами порядка не выше $l - 1$. (На каждом из Φ_k эти многочлены, вообще говоря, различны.) Пусть теперь H_n – полная оболочка модуля M_n при введенной норме; расширим скалярное произведение на все H_n. Очевидно, $H_{n+1} \subset H_n$. Обозначим $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Покажем теперь, что H не зависит от выбора последовательности Ω_n. Обозначим через κ пространство всех обобщенных функций на Ω (т. е. обобщенных функций над пространством всех функций, имеющих производные всех порядков, с носителем, содержащимся в Ω), l-е производные которых являются функциями, интегрируемыми с квадратом на Ω. Введем на κ скалярное произведение и норму так, что если $u \in \kappa$ $v \in \kappa$, то

$$[u, v] = \int_{\Omega} \left(\sum_{\Sigma \alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \frac{\partial^l v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \,.$$

Так же, как и в [8], можно показать, что это скалярное произведение удовлетворяет всем аксиомам, если отождествить функции, отличающиеся друг от друга на многочлен степени не выше $l - 1$ на Ω, что эти функции локально интегрируемы с квадратом вместе со всеми производными до порядка $l - 1$, и что κ – полное пространство Гильберта. Так же, как и в [8], можно далее показать, что модуль M всех непрерывных функций, имеющих производные всех порядков на Ω является плотным в κ. Очевидно, $M \subset M_n$ для всех n; следовательно, $\kappa \subset H$. Наоборот, очевидно также $H \subset \kappa$. Итак, $\kappa = H$. Отсюда уже следует, однако, что H не зависит от выбора последовательностей Ω_n, $n = 1, 2, \ldots$ Так как $\Omega_n \in \mathfrak{P}$, мы имеем область типа Соболева. Поэтому имеет смысл говорить о решении проблемы Неймана на Ω_n для функций f (по предположению носитель функции содержится в $\Omega_1 \subset \Omega_n$) и имеет место

$$\int_{\Omega} f x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \,, \quad \alpha_1 \geqq 0 \,, \; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leqq l - 1 \,.$$

Дополним функцию u_n на все Ω тождественно равной нулю функцией. Тогда u_n минимализирует функционал $[u, u] - 2(f, u)$ на H_n. Здесь мы обозначили

$$(f, u) = \int_{\Omega} f u \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m \,.$$

Пусть теперь P_n соотв. P означает проектор H_1 на H_n соотв. на H. Теперь имеем $u_n = P_n u_1$. По лемме 4,1 будет $u_n \to P u_1$. Если обозначить $P u_1 = v^f$, то v_f – функция, удовлетворяющая условиям теоремы 9,1, соответственно определения 9,1. Теорема доказана.

Замечание. Итак, внутреннее решение v_f минимализирует квадратический функционал $[u, u] - 2(f, u)$ на κ и функция определена с точностья до многочлена степени не выше $l - 1$.

Введем теперь понятие внешнего решения:

Определение. *Пусть дана область $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset K_r \subset E_m$ $\Omega \subset \mathfrak{N}$. Мы будем говорить, что Ω устойчива снаружи относительно задачи Неймана для l-гармонического оператора, если для каждой последовательности областей $\Omega_n \in \mathfrak{P}$, $n = 1, 2, \dots$ такой, что $\Omega_n \subset \bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \bar{\Omega}$, и для каждой функции f, интегрируемой с квадратом, обладающей компактным носителем в Ω и такой, что*

$$\int_{\Omega} f x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \, dx_1 \dots dx_m = 0 \,, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < l \,, \quad \alpha_i \geqq 0$$

существует функция v^f на Ω, не зависящая от Ω_n, $n = 1, \dots$, так, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \left[\sum_{\Sigma \alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^l (v^f - u_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 dx_1 \dots dx_m = 0 \,.$$

Притом u_n — решение задачи Неймана на Ω_n для уравнения $\underbrace{\Delta \dots \Delta}_{l\text{-раз}} u = f$. Функцию v^f мы будем называть внешним решением Винера на Ω для уравнения $\underbrace{\Delta \dots \Delta}_{l\text{-раз}} u = f$.

Теорема 9,2. *Каждая область $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$ является устойчивой снаружи относительно задачи Неймана для l-гармонического оператора.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 9,1, с той разницей, что вместо пространства κ, пространства всех обощенных функций, обладающих интегрируемыми с квадратом производными l-го порядка, мы рассматриваем пространство κ_1, замыкание всех функций, непрерывных вмёсте со своими производными l-го порядка в какой-либо окрестности множества $\bar{\Omega}$.

Замечание. Внешнее решение v^f таким образом минимализирует квадратический функционал $[u, u] - 2(f, u)$ на κ_1, и функция v^f определена с точностью до многочлена степени не выше $l - 1$.

Теперь уже можно ввести понятие устойчивости областей для задачи Неймана для l-гармонического оператора.

Определение 9,3. *Пусть дана область $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$. Мы будем говорить, что область Ω устойчива относительно задачи Неймана для l-гармо-*

нического оператора, если для каждой функции f, инетгрируемой с квадратом, обладающей компактным носителем в Ω и такой, что

$$\int_\Omega f x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m = 0 \,, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < l \,, \quad \alpha_i \geqq 0 \,,$$

имеет место $v_f = v^f$, т. е. внешнее и внутреннее решение равны друг другу.

Теорема 9,3. *Пусть дана область $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$. Тогда Ω устойчива относительно задачи Неймана для l-гармонического оператора, и только если модуль M всех функций, непрерывных вместе со своими производными l-ого порядка в какой-либо окрестности множества $\overline{\Omega}$, является плотным в пространстве всех обобщенных функций, интегрируемых с квадратом на Ω вместе со своими производными по норме*

$$\|u\|^2 = \int_\Omega \left[\sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{l!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \right)^2 \right] \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m \,.$$ [18])

Доказательство. Обозначим через κ пространство всех обобщенных функций со скалярным произведением

$$[u, v] = \int_\Omega \left[\sum_{\Sigma\alpha_1 = l} \frac{l!}{\alpha_1! \dots, \alpha_m!} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \frac{\partial^l v}{\mathrm{d}x_1^{\alpha_1} \dots \mathrm{d}x_m^{\alpha_m}} \right] \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m \,,$$

и пусть κ_1 — замыкание (в κ) всех функций, непрерывных вместе со своими производными l-го порядка в какой-либо окрестности множества $\overline{\Omega}$. Итак, $\kappa_1 = \overline{M}$. Покажем прежде всего, что плотность модуля M в κ является достаточным условием. Пусть f — интегрируемая с квадратом функция, обладающая компактным носителем на Ω и такая, что

$$\int f x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_m \,; \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < l \,, \quad \alpha_i \geqq 0 \,.$$

Согласно замечаниям за теоремами 9,1 и 9,2 функции u_f и u^f минимализируют квадратичный функционал $[u, u] - 2(f, u)$ соответственно на κ и на κ_1. Так как M плотно в κ, будет $\kappa_1 = \overline{M} = \kappa$. Итак, $u_f = u^f$.

Покажем теперь, что это условие и необходимо. Допустим обратное, т. е. что $\kappa \neq \kappa_1$. Очевидно, $\kappa \supset \kappa_1$. Поэтому существует $v_0 \in \kappa$, $\|v_0\| = 1$ и $P^{(1)}(v_0) = 0$, где через $P^{(1)}$ мы обозначили проектор κ на κ_1. Итак, функция v_0 является l-гармонической на Ω. Пусть теперь Ω_n, $n = 1, \dots$ — последовательность областей таких, что

$$1. \ \Omega_n \in \mathfrak{P}; \qquad 2. \ \Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega; \qquad 3. \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega,$$

и пусть $\Phi_1 = \Omega_1$, $\Phi_{n+1} = \Omega_{n+1} - \overline{\Omega}_n$ и H_1, соотв. H_n — то же пространство,

[18]) Речь идет о норме в $\varkappa$, т. е. в фактор-пространстве относительно модуля многочленов степени ниже l.

как и в доказательстве теоремы 9,1. Мы показали, что $\kappa = H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Обозначим теперь через v_n определенную следующум образом функцию:

$$v_n = v_0 \quad \text{на} \quad \Omega_n\,, \qquad v_n = 0 \quad \text{на} \quad \Omega - \overline{\Omega}_n\,.$$

Очевидно, $v_n \to v_0$ для $n = 1, 2, \ldots$ в H_1. Итак, существует N так, что $\|v_N - v_0\| < \frac{1}{8}$. Поэтому $\|P^{(1)}v_N - Pv_N\| > \frac{3}{4}$, где P означает проектор H_1 на κ, а $P^{(1)}$ – проектор H_1 на κ_1. Обозначим теперь $w = Pv_N$. Так как $\kappa_1 \subset \kappa$, то $P^{(1)}w = P^{(1)}v_N$. Итак, $\|P^{(1)}w - w\| > \frac{3}{4}$. Функция w является l-гармонической на Ω_N и $\Omega - \overline{\Omega}_n$ пространство κ, соотв. κ_1, есть фактор-пространство относительно модуля всех многочленов степени не выше $l - 1$. Если ввести норму в κ, соотв. κ_1, то κ сделается пространством Банаха, которое мы обозначим через $\tilde{\kappa}$, соотв. $\tilde{\kappa}_1$. Норму мы введем следующим образом:

$$\|u\|_*^2 = \|u\|_\kappa^2 + \sum_{p=0}^{l=1} \sum_{\Sigma\alpha_{i,p}=p} a^2_{\alpha_i\, p;\, \ldots;\, \alpha_{m,p}}(u)\,,$$

где

$$a_{\alpha_{1,p};\, \ldots\, \alpha_{m,p}}(u) = \int_{\Omega_1} u x_1^{\alpha_1 p} \ldots x_m^{\alpha_m p}\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m\,.^{19})$$

Пусть теперь $\overline{w} = w + p$, где p – многочлен степени не выше $l - 1$ так, чтобы

$$\int_{\Omega_1} \overline{w} x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m = 0\,; \quad \sum_{l-1}^{m} \alpha_i \leqq l - 1\,.$$

Согласно [8], (стр. 312) (см. доказательство теоремы 9,1), существует последовательность функций g_n, $n = 1, 2, \ldots$, обладающих на Ω производными всех порядков и таких, что $\|w - g_n\|_\kappa \to 0$ для $n \to \infty$. Поэтому существует и последовательность функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, обладающих на Ω производными всех порядков и таких, что $\|\overline{w} - f_n\|_* \to 0$ для $n \to \infty$.

Пусть χ – функция, имеющая на Ω производные всех порядков и такая, что $\chi = 0$ на $\Omega - \overline{\Omega}_{N+3}$ и $\chi = 1$ на Ω_{N+1}. Так как Ω_{N+3} – область типа Соболева, и, следовательно, справедливы теоремы о вложении, то $\|\psi_n - \overline{w}\|_\kappa \to 0$ для $n \to \infty$, где

$$\psi_n = + \chi f_n + (1 - \chi)\,\overline{w} = w + \chi(f_n - \overline{w})\,.$$

Поэтому существует n_0 так, что $\|P^{(1)}\psi_{n_0} - \psi_{n_0}\| > \frac{1}{2}$. Действительно, имеем

$$P^{(1)}\psi_{n_0} - \psi_{n_0} = P^{(1)}(\psi_{n_0} - \overline{w}) - (\psi_{n_0} - \overline{w}) - (\overline{w} - P^{(1)}\overline{w})\,.$$

Но функция ψ_{n_0} обладает на Ω всеми производными и является l-гармонической на $\Omega - \overline{\Omega}_{N+3}$. В самом деле, f_{n_0}, соотв. $\overline{w}$, обладает по условию производными

[19]) Норму в $\tilde{\kappa}$ мы обозначаем через $|u|_*$ норму фактор-пространства символом $|u|_\kappa$ или проще $|u|$.

всех порядков на Ω_N соотв. $\Omega - \overline{\Omega}_N$. Обозначим $\varphi = \Delta^l \psi_{n_0}$. Тогда φ будет функция, обладающая производными всех порядков, с компактным носителем. Пусть теперь u^φ, u_φ — внешнее, соотв. внутреннее решение задачи Неймана. Имеем $u_\varphi = \psi_{n_0}$ и $u^\varphi = P^{(1)} u_\varphi$. Поэтому $\| u_\varphi - u^\varphi \| > \frac{1}{2}$ и, следовательно, Ω не является устойчивой областью.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 9,3 показывает нам связь между устойчивостью области для задачи Неймана и вопросом плотности гладких функций в пространстве κ. Устойчивость области для задач Дирихле и Неймана связана, следовательно, очень тесно со специаьлным вопросом теории приближений, однако в обоих случаях речь идет о различных вопросах теории приближений.

Теорема 9,3 дает нам также практический критерий для определения устойчивости, так как справедлива теорема 9,4.

Теорема 9,4. *Пусть $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset K_r \subset E_m$, $\Omega \in \mathfrak{N}$. Пусть, далее, Ω обладает свойством σ (ср. определение 5,3) и пусть Ω — область типа Никодима.*[20]) *Тогда Ω устойчива относительно задачи Неймана для l-гармонического оператора.*

Доказательство проводится на основании подобных же идей, как и при доказательстве теоремы 5,5. Предположение о том, что область является областью типа Никодима, необходимо потому, чтобы все производные до порядка $l - 1$ каждой функции из κ были интегрируемы с квадратом.

Замечание 1. Достаточное условиедля того, чтобы область была типа Никодима, даже т. наз. типа Соболева, имеет вид: область должна иметь т. наз. коническое свойство (ср. [8]). Область Ω обладает коническим свойством, если существует открытый конус K с положительным углом при вершине и высотой так, что для каждой точки $m \in \Omega$ конус можно поместить так, чтобы его вершина была в m и $K \subset \Omega$.

Замечание 2. В главе II мы показали, что для бигармонического уравнения в плоскости проблема Неймана является проблемой пластины со свободной границей. Из теорем 9,4 и 9,5 явствует, что каждая встречающаяся на практике область устойчива.

Замечание 3. Мы занимались проблемой Неймана для полигармонического уравнения. Так же как и в случае первой проблемы, эти рассуждения можно перенести на сильно эллиптические системы, в частности на уравнения теории упругости (уравнения Ламе). Проблема Неймана представляет здесь вторую основную проблему теории упругости — проблему напряженного состояния тела со свободной незагруженной границей.

Замечание 4. Во всей этой главе мы занимались проблемой Неймана для полигармонического уравнения. Аналогичными методами можно изучать

[20]) Областью Никодима Ω (ср. [8]) мы называем такую область Ω, что каждая функция, у которой первые обобщенные производные интегрируемы с квадратом, является сама интегрируемой с квадратом.

проблему Неймана и для уравнения $\Delta\Delta u + au = f$, где a — неотрицательная функция. В случае, когда, напр., $a = c > 0$ в окрестности границы $\dot{\Omega}$, мы приходим к проблеме на краю пластины с упругой (винклеровской) опорой, о которой мы говорили в связи с соображениями и замечаниями о неустойчивости второй проблемы для бигармонического уравнения. В случае звездообразной области справедлива и здесь теорема об устойчивости области. Ввиду того, что область, которую мы рассматривали в гл. VIII, представляла собой круг, это замечание дополняет замечания в конце главы VIII, касающиеся технического значения теоремы о неустойчивости второй проблемы для бигармонического уравнения.

X. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предыдущих главах мы ввели понятие основных задач для эллиптических уравнений высших порядков и исследовали вопрос изменения решения в зависимости от малых изменений областей определения.

Мы показали, что в случае первой и последней основных проблем можно говорить о внешнем и внутреннем решениях и исследовать вопрос, когда эти решения (для одного и того же краевого условия) совпадают, и когда они различны. В том случае, когда эти два решения отличны друг от друга, локально малое изменение области определения вызывает большое изменение решения, причем не только на границе, но и внутри области. Мы показали, что такого рода области — мы назвали их неустойчивыми — действительно существуют, и привели способ их построения.

Во всех практических, важных для применений случаях, мы имеем, однако, дело всегда с устойчивыми областями. В случае остальных проблем мы занимались второй проблемой для бигармонического уравнения, которая, собственно говоря, является всегда неустойчивой проблемой, напр., круг — неустойчивая область. Этот поразительный факт свидетельствует о неправильной постановке этих проблем даже и в том случае, когда ими в технической практике повседневно пользуются (пластина с простой опорой).

Нами было далее показано, что проблемы устойчивости тесно связаны с рядом других проблем, напр., с проблемами теории приближений и с проблемами плотности некоторых функциональных модулей, играющих важную роль в вариационных проблемах и т. п.

Все эти вопросы до сих пор ускользали от внимания исследователей, хотя они несомненно раскрывают широкую, интересную и весьма важную область теории дифференциальных уравнений в частных производных. В предыдущих главах были намечены лишь некоторые из этих вопросов, причем еще многие из них остаются открытыми. Наши последующие работы будут посвящены дальнейшему исследованию этих вопросов.

Литература

[1] *И. Бабушка:* Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости, I. Чех. мат. журнал *11* (*86*), 1961, 76—105.

[2] *M. B. Келдыш:* О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи мат. наук *8* (1941), 171—231.

[3] *В. М. Бабич:* К вопросу о распространении функций. Успехи мат. наук *8* : 2; 1953, 111—113.

[4] *С. М. Никольский:* О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств, Матем. сб. *40* (*82*), 1956, 243—268.

[5] *С. М. Никольский:* Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях. Матем. сб. *33* (*75*), 1953, 261—326.

[6] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.

[7] *O. D. Kellog.* Foundation of Potential Theory. 1929.

[8] *J. Deny, J. L. Lions.* Les espaces du type de Beppo Levi. Ann. de l'inst. Fourier *V*, 1953 — 1954, 305—370.

[9] *M. Brelot:* Points irrégulier et transformations continues en théorie du potentiel. Jour. de Math. *19*, 1940, 319—337.

[10] *С. Н. Мергелян:* О полноте систем аналитических функций. Успехи мат. наук *8* : *4*, (*56*), 1953, 3—63.

[11] *С. Г. Михлин:* О некоторых оценках, связанных с функцией Грина. ДАН *78* (1951), 443—446.

[12] *О. А. Ладыженская:* О замыкании эллиптического оператора. ДАН *79*, (1951), 723—725.

[13] *I. Babuška:* (И. Бабушка): Об одном свойстве гармонических функций. Чех. мат. журнал *5* (*80*), 1955, 220—233.

[14] *I. Babuška:* Poznámka k jednomu řesení biharmonického problému. Čas. pěst. mat. *79*, 1954, 41—63.

[15] *I. Babuška:* O rovinném biharmonickém problému v oblastech s úhlovými body. Čs. pěst. mat. *80*, 1955, 448—453.

[16] *С. Г. Михлин:* Проблема минимума квадратичного функционала. Москва 1952.

[17] *I. I. Privalov:* Analytické funkce. Praha 1955.

[18] *J. Fuka:* Poznámka k Phragmén-Lindelöfovu principu. Čas. pěst. mat. *84*, 1959, 64—73.

[19] *И. И. Привалов:* К общей теории гармонических и субгармонических функций. Мат. сб. 1936, 103—122.

[20] *I. Babuška, R. Výborný:* Existenz und Eindeutigkeit der Dirichletschen Aufgabe auf allgemeinen Gebieten. Чех. мат. журнал *9* (*84*), 1959, 130—153.

Zusammenfassung

STABILITÄT DES DEFINITIONSGEBIETES MIT RÜCKSICHT AUF GRUNDLEGENDE PROBLEME DER THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUCH IM ZUSAMMENHANG MIT DER ELASTIZITÄTSTHEORIE

Ivo Babuška, Praha

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass man als eine der weiteren Bedingungen für die Korrektheit einer Aufgabe der mathematischen Physik auch die stetige Ab-

hängigkeit der Lösung von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes betrachten muss.

Im zweiten Absatz werden die $l + 1$-ten grundlegenden Aufgaben für selbstadjungierte Gleichungen $2l$-ter Ordnung formuliert und einige ihrer Eigenschaften gezeigt.

In Absatz III und IV wird der Begriff einer Menge von der Kapazität Null, der aus der Potentialtheorie bekannt ist, auf Probleme welche mit Gleichungen hohener Ordnung zusammenhängen, erweitert. Es werden einige Sätze über die Struktur dieser Mengen bewiesen. In Absatz IV wird weiter der Begriff der äusseren und inneren Wienerschen Lösung des I. Problems für selbstadjungierte positiv definite Gleichungen $2l$-ter Ordnung eingeführt und einige Eigenschaften gezeigt.

In Absatz V wird der Begriff der Stabilität eines Definitionsgebietes für das I. Problem, welcher ausdrückt, dass kleine Veränderungen des Definitionsgebietes nur kleine Veränderungen der Lösung zur Folge haben, eigeführt und studiert. Es wird die Existenz nichtstabiler Gebiete bewiesen und einige hinreichende Bedingungen, welche die Stabilität des Definitionsgebietes garantieren, gezeigt.

In Abschnitt VI werden Zusammenhänge stabiler Gebiete mit Fragen der Vollständigkeit verschiedener Funktionensysteme studiert.

In Abschnitt VII wird die Frage der Stabilität für das I. Problem der Elastizitätstheorie (und die Fragen der Eindeutigkeit der Lösung eines polyharmonischen Problems auf stabilen Definitionsgebieten) behandelt.

In Absatz VIII wird bewiesen, dass für die II. Aufgabe des biharmonischen Problems (welches physikalisch einer freigelagerten Platte entspricht) auch der Kreis ein nichtstabiles Gebiet ist, genauer ausgedrückt, dass der Grenzwert der Lösung einer Folge von regelmässigen Polygonen, welche zu einem Kreis konvergiert, ein anderer ist, als die Lösung des Kreises.

In Abschnitt IX werden Probleme der Stabilität eines Definitionsgebietes für die Neumann'sche Aufgabe eines polyharmonischen Problems behandelt.