Jiří Jelínek

Sur un théorème concernant les courbes de Jordan

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 4, 596–613

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100434

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

SUR UN THÉORÈME CONCERNANT LES COURBES DE JORDAN

JIŘÍ JELÍNEK, Praha

(Reçu le 19 décembre 1959)

Ce Mémoire a pour but de démontrer d'une manière élémentaire qu'à l'intérieur d'une courbe de Jordan $\mathscr{C}$ une autre courbe de Jordan $\mathscr{C}'$ existe, juissant de ces propriétés: La distance de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est assez petite et la longueur de $\mathscr{C}'$ est plus petite que celle de $\mathscr{C}$. Le problème de trouver une démonstration élémentaire de ce théorème était posé par M. E. ČECH.

1. Introduction. Nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème. *Soit $\mathscr{C}$ une courbe simple et fermée et de longueur finie, $\mathscr{C} \subset E_2$. Si M est un point à l'intérieur de $\mathscr{C}$ et δ un nombre positif, il y a une courbe $\mathscr{C}'$ qui est simple et fermée et de longueur finie, juissant de ces propriétés: $\mathscr{C}' \subset \Omega(\mathscr{C}, \delta)$, $s(\mathscr{C}') < s(\mathscr{C})$, $\mathscr{C}'$ est à l'intérieur de $\mathscr{C}$, M est à l'intérieur de $\mathscr{C}'$.*

Ici le symbole $s(\mathscr{C})$ désigne la longueur de $\mathscr{C}$ et $\Omega(\mathscr{C}, \delta)$ désigne l'entourage sphérique ouvert de l'ensemble $\mathscr{C}$, ayant δ pour rayon.

La démonstration élémentaire, contenue dans ce Mémoire, est basée sur l'idée suivante: On inscrit dans la courbe $\mathscr{C}$ un polygone $\mathscr{P}_1$ qui donne naissance, après quelques modifications, au polygone $\mathscr{P}_3$. À l'intérieur de $\mathscr{P}_3$ on peut déjà construire la courbe simple $\mathscr{C}'$ cherchée, qui sera composée de segments et d'arcs de circonférence. Les modifications du polygone sont les suivantes: La première modification donne naissance à un polygone $\mathscr{P}_2$, dont tous les côtés sont de longueur $< \delta$ et dont les diagonales sont de longueur $\geqq \delta$. La seconde modification mène à un polygone $\mathscr{P}_3$, dont chacun des deux côtés voisins, qui forment un angle convexe, est de longueur $\geqq \frac{1}{3}\delta$ et qui jouit encore d'autres propriétés „convenables" qui permettent de construire la courbe $\mathscr{C}'$.

2. Notations et théorèmes auxiliaires. On fera l'usage des notions habituelles de la géometrie du plan, telles que segment, droite, angle etc. Segments, droites etc. sont des ensembles de points. Par *segment* nous entendrons toujours un segment ouvert (auquel n'appartiennent pas les extrémités). Dans le cas contraire, nous dirons *segment fermé*. Si A et B sont les extrémités du segment, on le désignera par *segment* AB (ou *segment* A, B). La demi-droite, ayant B pour origine et contenant le point C, sera appelée *demi-droite* BC ou par *demi-droite* $B\mathbf{v}$ où $\mathbf{v}$ désigne le vecteur $C - B$. Nous supposerons que l'origine n'appartient pas à la demi-droite. Nous appellerons *demi-plan* ABC ou demi-plan pC ou demi-plan $AB\mathbf{v}$ ou encore demi-plan $A\mathbf{uv}$ le demi-plan qui contient le point C et qui a pour frontière la droite $AB = p$ et pour lequel $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - B$.

Par contre une ligne brisée, une ligne brisée fermée ou un polygone ne sera pas un ensemble de points mais un complexe formé de points (sommets), de segments (côtés), de domaines (l'intérieur d'un polygone) etc. On fera encore l'usage des notations telles que polygone $A_1 \dots A_n$, ligne brisée $A_1 \dots A_n$ etc.[1])

Définition. La demi-droite $X\mathbf{u}$, dont l'origine est un point de la frontière du polygone $\mathscr{L}$ sera dite *demi-droite intérieure du polygone* $\mathscr{L}$, s'il existe un nombre $a > 0$ tel, que le segment $X, X + a\mathbf{u}$ appartient à l'intérieur du polygone $\mathscr{P}$. On définit d'une manière analogue le *demi-plan intérieur du polygone* $\mathscr{P}$, *appartenant au côté* AB *du polygone*.

Le théorème suivant peut jouer aussi le rôle d'une définition de l' angle.

Théorème I. *Un angle est soit un demi-plan (angle plat), soit l'intersection de deux demi-plans, dont les frontières se coupent (angle convexe), soit la réunion d'un tel couple de demi-plans (angle concave). Chacune de ces trois possibilités exclue les deux autres. Si* $B\mathbf{u}$, $B\mathbf{v}$ *sont les côtés de l'angle, alors l'angle convexe est l'intersection des demi-plans* $B\mathbf{uv}$, $B\mathbf{vu}$, *tandis que l'angle concave est la réunion des demi-plans* $B\mathbf{v}$, $-\mathbf{u}$, $B\mathbf{u}$, $-\mathbf{v}$.

Remarque. Il est aisé de définir un angle intérieur du polygone $\mathscr{P}$ d'une manière analogue à la définition d'une demi-droite intérieure. Le théorème I reste vrai, si on y remplace angle par angle intérieure du polygone $\mathscr{P}$ et demi-plan par demi-plan intérieur du polygone $\mathscr{P}$ (il est clair à quel côté appartient ce demi-plan).

Théorème II. *La somme des mesures de tous les angles intérieurs d'un polygone est égale à* $(n - 2)\,\pi$, *où* n *est le nombre de ces sommets.*

Notation. Par $|\mathbf{u}|$ nous désignerons le module du vecteur $\mathbf{u}$. Le symbole $|B - A|$ désigne alors la distance des points A, B de même que $\varrho(A, B)$, tandis que $\varrho(A, \mathscr{C})$ désigne la distance du point A de l'ensemble $\mathscr{C}$.

Théorème III. (*sur la monotonie de la distance*). *Soient* P, Q *deux points et* $\mathbf{u}$ *un vecteur non nul. La relation* $|P - Q| \leqq |P - (Q + \mathbf{u})|$ *entraîne* $|P - Q| < < |P - (Q + \alpha\mathbf{u})|$, *où* $\alpha > 1$.

[1]) Si $\mathscr{L}$ est la ligne brisée $A_1 \dots A_n$ ayant les points $A_1, \dots, A_n$ et les segments A_1A_2, $A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ pour cellules, nous désignerons la réunion de ces cellules aussi par $\mathscr{L}$. De même pour un polygone. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ sont des polygones, les propositions suivantes ont un sens bien défini: $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}_2$, le polygone est un ensemble fermé, la ligne brisée est un ensemble fermé etc.

Théorème IV. *Le triangle ABC (polygone aux trois sommets A, B, C) est un ensemble convexe. Si donc* $|C - B| < 1$, $|A - B| < 1$, *on a* $|V - B| < 1$ *pour un point intérieur* V.

Théorème V. (*Théorème de Pasch.*) *Supposons que le segment UV contienne un point intérieur du triangle $\mathscr{P}$. Si les points U, V n'appartiennent pas à l'intérieur de $\mathscr{P}$, le segment fermé UV a exactement deux points en commun avec la frontière de $\mathscr{P}$.*

Nous démontrons maintenant le théorème suivant:

Théorème VI. *Soit $\mathscr{L}$ une ligne brisée qui ne contient aucun point des côtés AB et BC du triangle $\mathscr{P}$ et ne passe pas par le sommet B. Si $\mathscr{L}$ contient A et C, supposons que ces points n'appartiennent pas à un même côté de $\mathscr{L}$. Si un point (désignons-le par N) de $\mathscr{L}$ appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}$ ou au segment AC, il existe alors un sommet V de $\mathscr{L}$ tel que le segment VB appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}$ et ne contient aucun point de $\mathscr{L}$.*

Démonstration. Si N appartient au côté AV, supposons que ce soit un sommet de $\mathscr{L}$. Puisque $\mathscr{L}$ est un ensemble fermé et N appartient à $\mathscr{L}$, il existe dans l'ensemble de tous les points d'intersection du segment fermé NB avec $\mathscr{L}$ le point N_1 pour lequel la distance $\varrho(B_1N_1)$ est minimum. Si N_1 est un sommet de $\mathscr{L}$, posons $V = N_1$ et le théorème est démontré. Dans le cas contraire N_1 appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}$. Si a_1 est le côté de $\mathscr{L}$, auquel appartient N_1, une des extrémités de a_1 — désignons-la par V_1 — appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}$ car a_1 ne coupe ni AB ni BC et peut avoir avec AC au plus un point en commun. Considérons l'ensemble de tous les points d'intersection du segment V_1B avec $\mathscr{L}$. S'il est vide, la démonstration est terminée en posant $V = V_1$; dans le cas contraire, soit N_2 le point de cet ensemble pour lequel la distance $\varrho(B, N_2)$ est minimum. Si N_2 n'est pas un sommet de $\mathscr{L}$, N_2 appartient à un côté a_2 de $\mathscr{L}$, dont une des extrémités — désignons-la par V_2 — appartient à l'intérieur du triangle BN_1V_1, (d'après le théorème de Pasch, car a_2 ne coupe ni N_1B ni N_1V_1, deux côtés de $\mathscr{L}$ ne se coupent jamais, et parceque N_2 n'est pas un sommet, $V_1 \neq V_2$). Nous pouvons répéter nos considérations et parvenir ou à un sommet N_i de $\mathscr{L}$ tel que le segment BN_i ne coupe pas $\mathscr{L}$ ou à une suite infinie de sommets $V_1, V_2, V_3, \ldots$ qui sont tous différents entre eux, car pour $i < j$ le point V_j appartient à l'intérieur du triangle BN_iV_i, les triangles BN_iV_i formant une suite d'ensembles décroissante si i augmente. Or, le nombre de sommets de $\mathscr{L}$ étant fini, le second cas n'est pas possible. Notre théorème est donc démontré.

Théorème VII. *Soient $\mathscr{C}$ une courbe simple et fermée de longueur finie, M un point à l'intérieur de $\mathscr{C}$ et $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ($n \geqq 3$) des points qui divisent la courbe en arcs disjoints $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (α_i est l'arc H_iH_{i+1}, les indices étant réduits modulo n) dont les longueurs sont $\varrho(M, \mathscr{C})$.* Si $\mathscr{H}$ est *la réunion des segments fermés*

H_iH_{i+1}, *il y a un polygone* $\mathscr{P}$ *dont l'intérieur est cette composante de* $E_2 - \mathscr{H}$ *qui contient le point* M.

Démonstration. Si le théorème n'est pas vrai, alors, une courbe existe, ayant $\varphi(t)$, $t \in \langle 0,1)$, pour représentation paramétrique et n'ayant aucun point en commun avec $\mathscr{H}$, et telle que $\varphi(0) = M$, $|\varphi(t)| \to \infty$ pour $t \to 1$. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de toutes les régions qui ont pour frontière d'une part un arc AB faisant partie de l'arc H_iH_{i+1} et n'ayant aucun point en cummun avec le segment H_iH_{i+1} et d'autre part un segment fermé AB faisant partie du segment fermé H_iH_{i+1}. Il est aisé de voir que le diamètre d'une telle région n'est pas plus grand que la longueur de l'arc AB, et que chaque point $X \in \mathscr{C} - \mathscr{H}$ est situé sur la frontière d'un ensemble bien déterminé appartenant à $\mathfrak{M}$. Chaque point $X \in E_2 - \mathscr{C} \cup \mathscr{H}$ appartient donc au plus à un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{M}$ (car $\mathscr{C}$ est de longueur finie). Soit T l'ensemble des nombres $t \in \langle 0,1)$ pour lesquels ou $\varphi(t)$ appartient à l'intérieur de $\mathscr{C}$ et à un nombre paire d'ensembles différents de $\mathfrak{M}$ ou $\varphi(t)$ appartient à l'extérieur de $\mathscr{C}$ et à un nombre impaire d'ensembles de $\mathfrak{M}$. Nous démontrerons que $\sup T = 1$. Le point M n'appartenant à aucun des ensembles de $\mathfrak{M}$ nous avons $0 \in T$. Si $\sup T = t_0 < 1$, et si $X = \varphi(t_0)$, le point X n'appartient pas à $\mathscr{H}$ d'après l'hypothèse concernant $\varphi(t)$, mais X appartient à $\mathscr{C}$; en effet, dans le cas contraire, pour δ, $\delta > 0$ et assez petit, $\varphi(t_0 + \delta)$ appartiendrait au même nombre d'ensemble de $\mathfrak{M}$ que $\varphi(t_0 - \delta)$ etc, donc $t_0 + \delta \in T$. Désignons par α l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ qui jouit de ces propriétés: α est disjoint avec $\mathscr{H}$, $X \in \alpha$, les points extrémités de α appartiennent à $\mathscr{H}$. Soit Ω la composante de l'ensemble $\alpha \cup (E_2 - \mathscr{C} \cup \mathscr{H})$, qui contient α. La région Ω étant unicohérente, puisque Ω est une composante d'un ensemble dont la frontière est connexe, α coupe la région Ω en deux régions Ω_1 et Ω_2, dont l'une, Ω_1 par exemple, est à l'intérieur de $\mathscr{C}$ et Ω_2 donc à l'extérieur. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble, $\mathscr{M} \in \mathfrak{M}$, dont la frontière contient le point X. Il est aisé de voir que l'une des régions Ω_1, Ω_2 est contenue dans $\mathscr{M}$ tandis que l'autre est disjointe avec $\mathscr{M}$. On trouve maintenant facilement un $t > t_0$ de manière que $t \in T$. Il suffit de prendre $t > t_0$ si petit, que $\varphi(t) \in \Omega - \alpha$ (il est impossible que $\varphi(t) \in \alpha$ pour tous les $t > t_0$, car $\varphi(t) \neq C, D$, $|\varphi(t)| \to \infty$) et de prendre $t_1 < t_0$ de manière que $t_1 \in T$, $\varphi(t_1) \in \Omega - \alpha$. Puisque $t_1 \in T$, on voit d'après ce que nous venons de démontrer que $t \in T$. Nous avons donc démontré que $\sup T = 1$, ce qui est en contradiction avec le fait que la fonction φ est borné sur T; le théorème est donc démontré.

3. Démonstration élémentaire du théorème énoncé. Il va de soi qu'il suffit de démontrer le théorème énoncé en supposant que le nombre δ est assez petit. Nous supposerons donc, que δ satisfait à la condition $4\delta < \varrho(M, \mathscr{C})$.

Définition 1. Choisissons sur la courbe $\mathscr{C}$ des points $H_1, H_2, \ldots, H_n$ de telle manière que les arcs $H_1H_2, H_2H_3, \ldots, H_nH_1$, soient disjoints et de longueur

$< \delta$ et tels que $0 < s(\mathscr{C}) - \sum_{i=1}^{n} |H_{i+1} - H_i| < \frac{\delta}{20\,000}$ (les indices modulo n). Par $\mathscr{H}$ nous entendrons la réunion des segments fermés H_iH_{i+1} et par $\mathscr{P}_1$ le polygone $A_1, A_2, \ldots, A_{n_1}$ dont la frontière est contenue dans $\mathscr{H}$ et dont l'intérieur contient le point M.

Il est évident que $\varrho(M, \mathscr{H}) > \frac{7}{2}\delta$, tandis que l'existence d'un polygone $\mathscr{P}_1$ est garantie par le théorème VII.

Supposons maintenant, que la diagonale $A_{i_1}A_{i_2}$ du polygone $\mathscr{P}_1$ (c'est-à-dire le segment $A_{i_1}A_{i_2}$ appartenant à l'intérieur de $\mathscr{P}_1$ pour lequel $i_1 - i_2 \not\equiv \pm 1$, $\not\equiv 0 \bmod n_1$) est de longueur $< \delta$. Elle ne contient pas le point M. La diagonale $A_{i_1}A_{i_2}$ divise le polygone $\mathscr{P}_1$ en deux polygones $A_{i_1}A_{i_1+1} \ldots A_{i_2}$ et $A_{i_2}A_{i_2+1} \ldots \ldots A_{i_1}$ (les indices modulo n_1); désignons pour le moment par $\mathscr{Q}$ celui, dont l'intérieur contient le point M. Le nombre de sommets du polygone $\mathscr{Q}$ est évidemment plus petit que celui du polygone $\mathscr{P}_1$ donné. Ensuite nous opérons d'une manière analogue sur le polygone $\mathscr{Q}$, etc.

Définition 2. En appliquant un nombre convenable de fois la construction en question, le polygone $\mathscr{P}_1$ devient un polygone $\mathscr{P}_2$ qui jouit des propriétés suivantes:

1. La frontière de $\mathscr{P}_2$ est une ligne brisée fermée $B_1B_2 \ldots B_{n_2}$ simple; désignons la par $\mathscr{L}_2$.
2. Les sommets $B_1, B_2, \ldots, B_{r_2}$ sont situés sur C.
3. $0 < |B_{i+1} - B_i| < \delta$ (les indices modulo n_2).
4. Les diagonales de $\mathscr{P}_2$ sont de longueur $\geqq \delta$.
5. M appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}_2$.

Remarque. Il est toujours $\varrho(M, \mathscr{L}_2) < 3\delta$ car $\varrho(M, \mathscr{H}) > \frac{7}{2}\delta$. Donc le diamètre de $\mathscr{P}_2$ est $> 6\delta$, $n_2 > 12$. Dans la suite, on prendra toujours les indices des sommets du polygone $\mathscr{P}_2$ modulo n_2.

Théorème 1. *Si l'angle intérieur du polygone $\mathscr{P}_2$ appartenant au sommet B_i est convexe, le segment $B_{i-1}B_{i+1}$ est une diagonale et par conséquent de longueur $\geqq \delta$.*

Démonstration. Si le segment $B_{i-1}B_{i+1}$ n'est pas une diagonale, il contient un point X, qui n'appartient pas à l'intérieur de $\mathscr{P}_2$. La demi-droite B_iX est une demi-droite intérieure de $\mathscr{P}_2$, car l'angle convexe est un ensemble convexe. Il y a donc sur la frontière de $\mathscr{P}_2$ un point N situé ou à l'intérieur du triangle $B_{i-1}B_iB_{i+1}$ ou sur le segment $B_{i-1}B_{i+1}$. Le théorème VI appliqué sur le triangle $B_{i-1}B_iB_{i+1}$ (polygone $\mathscr{P}$) et la ligne brisée $B_{i+1}B_{i+2} \ldots B_{i-2}B_{i-1}$ (d'après la remarque après la définition 2 on a $n_2 > 12$) garantit l'existence d'un sommet V pour lequel le segment B_iV est une diagonale de $\mathscr{P}_2$ qui d'après le théorème IV est de longeur $< \delta$; ce fait est en contradiction avec la définition 2.

Théorème 2. *Soit V un point situé sur le côté B_iB_{i+1} du polygone $\mathscr{P}_2$. Supposons, que le segment B_jV ($j \neq i$, $j \neq i + 1$) appartient a l'intérieur de $\mathscr{P}_2$ et que*

$|B_j - V| \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$. *Alors exactement un des deux segments* B_jB_i, B_jB_{i+1} *est de longueur* $< \delta$. *Si* $|B_j - B_{i+1}| < \delta$, $|B_j - B_i| \geqq \delta$, *alors la ligne brisée* $B_{i+1}B_{i+2} \ldots$ $\ldots B_j$ *appartient au triangle* $VB_{i+1}B_j$ *et tous les angles internes appartenant aux sommets* $B_{i+2}, B_{i+3}, \ldots, B_{j-1}$ *sont concaves ou plats et le point* B_i *est à l'intérieur des demi-plans intérieurs de* $\mathscr{P}_2$ *appartenants aux côtés* $B_{i+1}B_{i+2}$, $B_{i+2}B_{i+3}, \ldots$ $\ldots, B_{j-1}B_j$. *Dans le cas contraire, un résultat analogue a lieu; on l'obtient en substituant* $B_{i+1}, B_i, \ldots, B_{j+1}, B_j$ *au lieu de* $B_i, B_{i+1}, \ldots, B_{j-1}, B_j$ *dans le résultat énoncé.*

Démonstration. Si $|B_i - B_j| \geqq \delta$, $|B_{i+1} - B_j| \geqq \delta$, alors $|V - B_j| > > \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$. Pour démontrer cette inégalité désignons par P le point d'intersection de la droite B_iB_{i+1} avec la perpendiculaire menée à cette droite par le point P_j et distinguons ces trois cas.

I. P n'appartient pas au segment B_iB_{i+1}.

II. P appartient au segment B_iB_{i+1} et $|P - B_i| < \frac{\delta}{2}$.

III. P appartient au segment B_iB_{i+1} et $|P - B_{i+1}| < \frac{\delta}{2}$.

Dans le cas I la démonstration de l'inégalité est une conséquence du théorème III sur la monotonie de la distance tandis que dans les cas II et III celle du théorème de Pythagore.

Soit maintenant $|V - B_j| \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$, donc $|V - B_j| < \delta$ et soit encore par ex. $|B_{i+1} - B_j| < \delta$. Soit $t_1 \geqq 0$ le nombre minimum tel que le segment fermé $V + t_1(B_{i+1} - V)$, B_j contienne un sommet de $\mathscr{P}_2$ différent de B_j. Puisque il ne peut pas contenir une diagonale (sa longueur serait $< \delta$) il contient un côté, par ex. B_jB_{j-1} (il sera plus tard évident qu'il ne peut contenir le côté B_jB_{j+1}). Il est aisé de voir que, si $B_{j-1} \neq B_{i+1}$, l'angle interne de $\mathscr{P}_2$ appartenant au sommet B_{j-1} est concave ou plat. Soit $t_2 \geqq t_1$ le nombre minimum tel, que le segment fermé $V + t_2(B_{i+1} - V)$, B_{j-1} contienne un sommet différent de B_{j-1} et de B_j. En continuant de la même sorte, on obtient une suite $B_j, B_{j-1}, \ldots, B_{i+1}$. Si les inégalités $|B_j - B_{i+1}| < \delta$, $|B_j - B_i| < \delta$ étaient satisfaites simultanément, le polygone $\mathscr{P}_2$ serait contenu dans le triangle $B_iB_{i+1}B_j$ dont le diamètre est $< \delta$ (la construction peut être effectuée aussi pour le point B_i au lieu de B_{i+1}) mais c'est impossible (d'après la définition 2). Le reste du théorème se vérifie facilement.

Afin de poursuivre nos constructions, nous éliminerons maintenant ceux des sommets du polygone $\mathscr{P}_2$ auxquels appartiennent des angles convexes et desquels est issu un côté de longueur $< \frac{\delta}{3}$.

Nous établirons tout d'abord quelques lemmes concernant un polygone $\mathscr{P}$ quelconque ayant pour frontière la ligne brisée $\mathscr{L}$.

Définition 3. Soient A, B, C_1, C_2, ... des sommets consécutifs du polygone $\mathscr{P}$ en envisageant une orientation quelconque de sa frontière $\mathscr{L}$. Supposons que l'angle interne appartenant au sommet B soit convexe. Soit k le nombre naturel défini de manière que pour tout nombre naturel i pour lequel $1 \leqq i \leqq k$ soient remplies ces conditions:

1. l'angle appartenant à C_i est concave ou plat,

2. le point A appartient aux demi-plans intérieurs de $\mathscr{P}$ appartenants aux côtés $C_{i-1}C_i$ et C_iC_{i+1} ($C_0 = B$),

3. les conditions 1 et 2 ne sont plus remplies pour $i = k + 1$.

Il est évident qu'un tel nombre k est défini d'une manière unique, $k \geqq 0$. Les points A, B, C_1, C_2, ..., C_{k+1} sont différents car P possède au moins trois angles convexes d'après le théorème II sur la somme des angles.

Lemme 1. *La demi-droite $C_i, C_i - C_{i+1}$ ($1 \leqq i \leqq k$) coupe le segment fermé AB. Désignons par X_i le point de rencontre. Les points B, X_1, X_2, ..., X_k, A sont situés sur une même droite dans l'ordre indiqué (quelques uns des points pouvent coïncider).*

Démonstration. Le lemme se démontre par récurrence. Si l'angle interne appartenant à C_i est plat, notre assertion est évidente, car la demi-droite contient alors la demi-droite C_{i-1}, $C_{i-1} - C_i$. Supposons donc que cet angle soit concave. La droite C_iC_{i+1} coupe le segment fermé AX_{i-1}, car dans le cas contraire le point X_{i-1} appartiendrait lui-aussi au demi-plan intérieur appartenant à C_iC_{i+1} (déf. 3, propriété 2). Le point C_{i-1} n'y appartenant pas (théorème I avec la remarque) la droite C_iC_{i+1} couperait le segment fermé $X_{i-1}C_{i-1}$, mais les droites C_iC_{i+1} et $X_{i-1}C_{i-1}$ ne concurrent qu'au point C_i qui selon l'hypothèse de récurrence n'appartient pas à la demi-droite $C_{i-1}X_{i-1}$. La seconde partie du lemme est ainsi démontrée. Si la demi-droite inverse, c'est-à-dire C_iC_{i+1}, couperait le segment AX_{i-1} au point $X_i \neq X_{i-1}$ (si l'angle appartenant au point C_i n'est pas plat), le point A ne serait pas situé sur le demi-plan intérieur appartenant à $C_{i-1}C_i$, car le point X_i n'y appartiendrait pas (selon le théorème I et la seconde partie de ce lemme). Pour $i = 0$ on a $C_i = B$ et notre assertion est alors évidente.

Lemme 2. *La ligne brisée $B, C_1, C_2, \ldots, C_j$ ($j \leqq k$) appartient au triangle $X_{j-1}BC_j$. Si l'angle interne appartenant à C_l ($l < j$) est concave, alors les points C_1, C_2, ..., C_l ne sont pas situés sur le côté BC_j.*

Démonstration (par récurrence). Le point C_j appartient au triangle. S'il y appartient le point C_i lui-aussi, il en est de même pour C_{i-1} selon le lemme 1. Le reste est évident.

Lemme 3. L'inégalité $|C_1 - A| \geqq |B - A|$ implique les inégalités $|C_j - A| \geqq |C_1 - A|$ pour $j = 1, 2, \ldots, k$.

Démonstration. Le segment fermé AC_j coupe la demi-droite $C_1, C_1 - B$ au point N. En effet, supposons que les angles appartenants aux sommets $C_1, \ldots, C_{j-1}$ ne soie pas tous plats, car dans le cas contraire l'assertion est évidente (th. III). Alors $X_{j-1} \neq B$ et la demi-droite BC_1 est une demi-droite intérieure du triangle $X_{j-1}BC_j$ (selon le lemme 2) et par conséquent aussi celle du triangle ABC_j qui contient le triangle $X_{j-1}BC_j$. D'après le théorème de Pasch le segment AC_j coupe la demi-droite BC_1 au point N et selon le lemme 2 ne coupe le segment BC_1 en aucun point. Le reste est une conséquence du théorème III sur la monotonie de la distance.

Définition 4. Désignons par φ la correspondance qui à chaque point du segment fermé BA fait correspondre un des points $C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}$ de la manière suivante: $\varphi(X) = C_i$ si X est un point du segment $X_{i-1}X_i$ ou si $X = X_i \neq X_{i-1}$, en désignant $B = X_0$ et $A = X_{k+1}$. D'après cette définition $\varphi(B) = B$, $\varphi(A) = C_{k+1}$.

Lemme 4. *Si $X \neq B$, le segment $X, \varphi(X)$ ne coupe la ligne brisée $BC_1C_2 \ldots \varphi(X)$ en aucun point.*

La démonstration est une conséquence immédiate du lemme 2.

Définition 5. Supposons, faisant l'usage de la même notation concernant le polygone $\mathscr{P}$ comme à la définition 3, que $|B - C_1| < \frac{\delta}{3}$, $|A - B| \geqq \frac{\delta}{3}$, $|A - C_1| \geqq |A - B|$ (supposition du lemme 3). Désignons par D le point du segment AB jouissant de ces deux propriétés:

1. la distance $|D - B|$ est maximum,
2. $|X - \varphi(X)| < \frac{1}{3}\delta$ pour tout point X appartenant au segment BD.

Remarque. L'existence d'un tel point D sur le segment AB est une conséquence du lemme 3. La continuité unilatérale de la fonction $|X-\varphi(X)|$ (c'est-à-dire le fait que $|X_n - \varphi(X_n)| \to |X - \varphi(X)|$ pour $X_n \to X$ où X_n ne sort pas de la demi-droite XB) a pour conséquence l'inégalité $|D - \varphi(D)| \leqq \frac{1}{3}\delta$. Si en plus $|D - \varphi(D)| < \frac{1}{3}\delta$, il existe un nombre naturel j tel que les points $D = X_i, \varphi(D) = C_i, C_{i+1}, \ldots, C_j$ $(j > i)$ sont situés sur une même droite et que $|D - C_j| \geqq \frac{1}{3}\delta$.

Lemme 5. *Les inégalités $|A - B| < \delta$, $|A - C_1| \geqq \delta$, $|B - C_1| \geqq \frac{1}{3}\delta$ ont pour conséquence l'inégalité $|C_1 - Y| > \frac{\sqrt{8}}{9}\delta$ pour tout point Y du segment AB.*

Démonstration. Soit P le point d'intersection de la perpendiculaire menée par le point C_1 à la droite AB avec cette droite. Si P n'appartient pas au segment AB, l'assertion découle du théorème III sur la monotonie de la distance.

Si P appartient à AB, le point P satisfait ou à l'inégalité $|P - B| < \frac{1}{9}\delta$ ou à $|P - A| < \frac{8}{9}\delta$ et l'assertion se démontre à l'aide du théorème de Pythagore.

Les lemmes 1—5 appliqués au polygone $\mathscr{P}_2$ nous permettent de tirer la conclusion qui suit, où la notation et les suppositions sont les mêmes que dans les définitions 3—5 (on pose $\mathscr{P}_2$ à la place de $\mathscr{P}$). Remarquons encore, que toutes les suppositions de la définition 5 outre l'inégalité $|B - C_1| < \frac{1}{3}\delta$ sont superflues par suite du théorème 1 et de la définition 2.

Conclusion. $|C_1 - A| \geqq \delta$ (théorème 1). $|C_1 - B| < \frac{1}{3}\delta$ (déf. 3), donc $|B - A| > \frac{2}{3}\delta$, $|A - \varphi(D)| \geqq \delta$ (lemme 3), $|D - \varphi(D)| \leqq \frac{1}{3}\delta$ (déf. 5), donc $|A - D| \geqq \frac{2}{3}\delta$, $|B - D| < \frac{1}{3}\delta$, car $|B - A| < \delta$ (théorème 1); $|C_l - C_{l+1}| < < \frac{1}{3}\delta$ pour $l < i$ ($C_i = \varphi(D)$), car le segment C_lC_{l+1} est contenu dans le segment X_lC_h (pour un certain nombre $h \leqq i$) dont la longueur est $< \frac{1}{3}\delta$ (déf. 5).

Théorème 3. *Si $X = D$ ou si X appartient au segment DB, le segment $X\varphi(X)$ appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}_2$.*

Démonstration par récurrence, effectuée sur l'indice j, pour lequel $C_j = \varphi(X)$. Le lemme 2 et le fait que le demi-plan intérieur du polygone $\mathscr{P}_2$ appartenant au côté AB contient le point C_1 (l'angle appartenant à B est convexe) ont pour conséquence que le segment $X\varphi(X)$ appartient à ce demi--plan. Il suffit de démontrer que ce segment ne coupe pas la frontière de $\mathscr{P}_2$. Supposons, que le segment $X_{j-1}\varphi(X_{j-1})$ ne coupe pas la frontière. Si le segment XC_j où $C_j = \varphi(X)$ coupe la frontière de $\mathscr{P}_2$, il y a un sommet V de $\mathscr{P}_2$ (selon le théorème VI) à l'intérieur du triangle C_jXX_{j-1} ou sur le segment C_jX différent de A, B, $C_1, \ldots, C_j$ (selon le lemme 2) pour lequel le segment $X_{j-1}V$ appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}_2$ et sa longueur est alors $\leqq \frac{2}{3}\delta$ (théorème IV). Il est évident que le segment VB coupe le segment C_jX_{j-1}. Il est $|V - B| < \delta$ puisque $|X_{j-1} - B| < \frac{1}{3}\delta$ d'où, d'après le théorème 2, la ligne brisée $BC_1C_2 \ldots \ldots C_j \ldots V$ appartient au triangle $X_{j-1}BV$ et les segments VB et C_jX_{j-1} ne se coupent donc pas, ce qui est une contradiction.

Définition 6. Le segment $D\,\varphi(D)$ (en supposant le point B fixe) divise le polygone $\mathscr{P}_2$ suivant le théorème 3 en deux polygones: le polygone $\mathscr{P}_B$ limité par la ligne brisée fermée $D, B, C_1, C_2, \ldots, \varphi(D)$ et le polygone $\mathscr{Q}$ limité par la ligne brisée fermée $A, D, \varphi(D) = C_i, C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots$. Dans ce qui suit, nous envisagerons seulement ceux des sommets du polygone $\mathscr{Q}$ auxquels n'appartiennent que des angles internes non plats; nous substituerons donc à chaque couple de côtés voisins qui forment un angle plat un seul côté, la réunion des deux segments en question. La frontière du polygone $\mathscr{Q}$ qui résulte de cette simplification, sera la ligne brisée $\mathscr{K}$.

Le polygone $\mathscr{P}_B$ ne contient pas le point M, son diamètre étant, suivant le lemme 2 et le définition 5, au plus $\frac{2}{3}\delta$ ($|D - B| \leqq \frac{1}{3}\delta$ d'après la Conclusion). Suivant la remarque à la définition 5, au sommet D du polygone $\mathscr{Q}$ appartiennent un angle convexe et deux côtés dont la longueur est au moins $\frac{1}{3}\delta$ ($|A - D| \geqq \frac{2}{3}\delta$ d'après la Conclusion).

Le théorème suivant n'est qu'une récapitulation de ce qui précède:

Théorème 4. *Le polygone $\mathscr{Q}$ dont la frontière est $\mathscr{K}$ jouit des propriétés suivantes:*

0. *Aucun des angles internes de $\mathscr{Q}$ n'est plat.*

1. *Chaque sommet de $\mathscr{Q}$ appartient à $\mathscr{L}_2$.*

2. *Chaque côté de $\mathscr{Q}$ de longueur $< \frac{1}{3}\delta$ est situé sur $\mathscr{L}_2$ et ses extrémités sont des sommets de $\mathscr{P}_2$.*

3. *Si l'un des côtés de $\mathscr{K}$ qui appartient à un angle convexe est de longueur $< \frac{1}{3}\delta$, l'autre côté appartenant à cet angle est de longueur $\geqq \frac{2}{3}\delta$.*

4. $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}_2$, $M \in \mathscr{Q}$.

5. *Si l'angle interne appartenant au sommet E du polygone $\mathscr{Q}$ est convexe et si E est aussi un sommet de $\mathscr{P}_2$, il y a alors un segment YE de longueur au moins $\frac{1}{3}\delta$ qui est situé et sur $\mathscr{K}$ et sur $\mathscr{L}_2$.*

6. *Si les parties non vides des côtés a, b du polygone $\mathscr{Q}$ sont situées sur des côtés voisins de $\mathscr{P}_2$, alors a et b sont des côtés voisins de $\mathscr{Q}$.*

7. *Si un segment situé sur $\mathscr{K}$ n'a avec $\mathscr{L}_2$ que les extrémités en commun, on peut toujours désigner l'une de ces extrémités par C et l'autre par D de manière que C est un sommet de $\mathscr{P}_2$, D n'est pas un sommet de $\mathscr{P}_2$ mais un sommet de $\mathscr{Q}$, $|C - D| \leqq \frac{1}{3}\delta$, l'angle appartenant à D est convexe.*

Pour pousser plus loin la démonstration de notre théorème principal, nous construirons un polygone jouissant des propriétés 0—7 énoncées au théorème 4 et jouissant en plus de la propriété suivante: le polygone ne contient aucun angle inopportun, en entendant par angle inopportun un angle intérieur convexe, au sommet duquel appartient un côté de longueur $< \frac{1}{3}\delta$. Cette construction s'exécute par récurrence: en partant d'un polygone $\mathscr{R}$ jouissant des propriétés énoncées au théorème 4 et possédant un certain nombre d'angles inopportuns nous construirons d'après une certaine méthode un autre polygone $\mathscr{R}'$ qui de nouveau jouit des propriétés énoncées au théorème 4 mais qui possède un nombre plus petit d'angles inopporrtuns.

Soit donc $\mathscr{R}$ un polygone qui jouit des propriétés énoncées au théorème 4 et supposons qu'au sommet B appartiennent et un angle interne convexe et un côté BC_1 de longueur $< \frac{1}{3}\delta$. L'autre côté $A'B$ du polygone $\mathscr{R}$ appartenant à B est de longueur $\geqq \frac{2}{3}\delta$ (selon la propriété 3 du théorème 4). Soient k le nombre naturel et $A'BC_1C_2 \ldots C_kC_{k+1}$ la ligne brisée déterminés par la définition 3, soit φ la correspondance entre le segment fermé BA' et l'ensemble $\{C_1, C_2, \ldots \ldots, C_{k+1}\}$ déterminée par la définition 4 et soit enfin D le point déterminé par la définition 5.

Le point B est un sommet de $\mathscr{P}_2$ d'après la propriété 2 énoncée au théorème 4. Soit AB l'autre côté de $\mathscr{P}_2$, différent de BC_1. Selon la propriété 5 ou $A'B$ est contenu dans AB ou AB contenu dans $A'B$. Soit $A''B$ la partie commune de ces deux segments. La ligne brisée $A''BC_1C_2 \ldots \varphi(D)$ est située sur $\mathscr{L}_2$. En effet, d'après la Conclusion on a l'inégalité $|C_{l+1} - C_l| < \frac{1}{3}\delta$ et d'après l'hypothèse on a $|C_1 - B| < \frac{1}{3}\delta$ (voir la propriété 2). Donc la distance du point B au point D qui est déterminé par la déf. 5 pour le polygone $\mathscr{R}$ n'est pas plus grande que celle au point D déterminé pour le polygone $\mathscr{P}_2$. C'est pourquoi $|D - B| < \frac{1}{3}\delta$, donc D est situé sur le côté $A'B$. D'après le théorème 3 le segment $D\varphi(D)$ appartient alors à l'intérieur de $\mathscr{P}_2$. Ce segment appartient aussi à l'intérieur de $\mathscr{R}$. En effet, si ce segment avait un point en commun avec la frontière de $\mathscr{R}$, il y aurait un sommet de $\mathscr{R}$ ou à l'intérieur du polygone $D, B, C_1, C_2, \ldots, \varphi(D)$ ou sur le segment $D\varphi(D)$ et le segment $D, \varphi(D)$ aurait donc un point en commun avec $\mathscr{L}_2$ (voir propriété 1).

Définissons donc le polygone $\mathscr{R}_B$ à l'aide de la définition 6 d'une manière analogue comme nous avons défini $\mathscr{P}_B$, c'est-à-dire en remplaçant dans la déf. 6 $\mathscr{P}_2$ par $\mathscr{R}$ et D par le point déterminé par la déf. 5 en y remplaçant aussi $\mathscr{P}$ par $\mathscr{R}$. En même temps, on obtient le polygone $\mathscr{R}'$ (au lieu de $\mathscr{Q}$) qui ne possède pas d'angles plats. Au sommet D appartiennent l'angle interne convexe de $\mathscr{R}'$ et les deux côtés de $\mathscr{R}'$ de longueur $\geqq \frac{1}{3}\delta$. Donc $\mathscr{R}'$ possède un nombre plus petit d'angles ,,inopportuns" que $\mathscr{R}$. Il reste à démontrer que $\mathscr{R}$ jouit des propriétés énoncées au théorème 4. Tous les côtés de $\mathscr{R}'$ sont ceux de $\mathscr{R}$ exception faite de $A'D$ et DC_j (notation C_j selon déf. 5) dont les longueurs sont $\geqq \frac{1}{3}\delta$. On tire de là immédiatement, la propriété 2 (d'après l'hypothèse $\mathscr{R}$ satisfaite au théorème 4). La propriété 0 est déjà démontrée, la propriété 1 est évidente (D est le seul sommet nouveau). Propriété 3: si l'angle interne appartenant à A' est convexe, le côté $A'D$ contient le segment AD qui est à son tour contenu dans le côté AB du polygone $\mathscr{P}_2$. S'il n'en était pas ainsi, $A'D$ serait contenu dans AD, mais A' est un sommet de $\mathscr{P}_2$ d'après la propriété 2; $|A - D| \geqq \frac{2}{3}\delta$ d'après la Conclusion, car le point D défini par la définition 5 n'a pas une distance de A plus grande que notre point D. Au sommet C_j appartient un angle convexe seulement si l'angle du polygone $\mathscr{R}$ appartenant à C_j l'est aussi (conséquence de la déf. 4). Les autres sommets ne présentent aucune difficulté. Les autres propriétés sont évidentes.

Définition 7. En appliquant un nombre convenable de fois la construction en question le polygone $\mathscr{P}_2$ devient un polygone $\mathscr{P}_3$ dont la frontière $\mathscr{L}_3$ est une ligne brisée jouissant de ces propriétés:

1. Aucun des angles internes de $\mathscr{P}_3$ n'est plat.

2. A aucun des angles internes de $\mathscr{P}_3$ qui sont convexes n'appartient un côté de longueur $< \frac{1}{3}\delta$.

3. $\mathscr{P}_3 \subset \mathscr{P}_2$, $M \in \mathscr{P}_3$ et chaque sommet de $\mathscr{L}_3$ appartient aussi à $\mathscr{L}_2$.

4. Si l'angle interne appartenant au sommet E est convexe, alors un certain segment YE dont la longueur est au moins $\frac{1}{3}\delta$ est situé et sur $\mathscr{L}_2$ et sur $\mathscr{L}_3$.

5. Si des parties non vides des côtés a, b du polygone $\mathscr{P}_3$ sont situées sur des côtés voisins de $\mathscr{P}_2$, alors a et b sont des côtés voisins de $\mathscr{P}_3$.

6. Si un segment situé sur $\mathscr{L}_3$ n'a avec $\mathscr{L}_2$ que les extrémités en commun, on peut toujours désigner l'une de ces extrémités par C et l'autre par D de manière que C est un sommet de $\mathscr{P}_2$, D n'est pas un sommet de P_2 mais un sommet de $\mathscr{P}_3$, $|C - D| \leqq \frac{1}{3}\delta$ et l'angle appartenant à D est convexe.

Remarque. Il est aisé de voir, que M appartient à l'intérieur de P_3 et que sa distance de la frontière de $\mathscr{P}_3$ est au moins 2δ (d'après la propriété 6).

Theorème 5. *Soient A et B deux points situés sur deux côtés fermés non voisins de $\mathscr{P}_3$ et tels que le segment AB appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}_3$. Alors $|B - A| \geqq \geqq \frac{1}{40}\delta$. Outre cela, si les points A, B sont situés sur $\mathscr{L}_2$, alors $|B - A| \geqq \frac{1}{12}\delta$.*

Démonstration. Il faut distinguer quelques cas différents:

I. Les points A et B sont situés sur $\mathscr{L}_2$ sur les côtés fermés A_1A_2, B_1B_2 de $\mathscr{L}_2$ non voisins. Supposons, que $|A - B| < \frac{1}{12}\delta$. Le segment AB appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}_2$ (propriété 3, déf. 7). Désignons les polygones et leur sommets de manière que A_1, A_2, B_1, B_2 soit l'ordre cyclique de ces points sur $\mathscr{L}_2$. Désignons, pour le moment, par V_1V_2 celui des deux arcs de $\mathscr{L}_2$ définis par le couple $V_1, V_2 \in \mathscr{L}_2$ dont le point-origine défini par notre ordre cyclique est V_1.

Soient $B(t) = B_1 + t(B_2 - B_1)$ un point variable défini pour $t \in \langle 0,1 \rangle$ et $t_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ un nombre pour lequel $B(t_0) = B$. Soient t_1 le nombre minimum et t_2 le nombre maximum de l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ jouissant de la propriété que pour $t \in (t_1, t_0)$ resp. $t \in (t_0, t_2)$ le segment $A, B(t)$ soit situé à l'intérieur de $\mathscr{P}_2$. Donc l'intérieur du triangle $A\, B(t_1)\, B(t_2)$ appartient à l'intérieur de $\mathscr{P}_2$. Parce que la somme de deux côtés d'un triangle est plus grande que le troisième côté, on a l'inégalité $2|A - B| + |B(t_2) - B(t_1)| \geqq |A - B(t_2)| + |A - B(t_1)|$. C'est-à-dire que l'une des deux distances $|A - B(t_2)|$, $|A - B(t_1)|$, par example la première, est $< \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$.

Envisageons tout d'abord le cas où $t_2 = 1$, $B(t_2) = B_2$. Parceque $|A - B_2| < < \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$, le théorème 2 nous dit que deux éventualités se présentent: ou l'arc AB_2 appartient au triangle AA_2B_2 ou l'arc B_2A appartient au triangle AA_1B_2. Nous prouverons que pour la première éventualité une inégalité plus forte a lieu, à savoir $|A - B| > \frac{\sqrt{8}}{9}\delta$. (Pour la seconde éventualité le raisonnement serait analogue au cas $t_2 < 1$.) Soit $ADC \ldots BB_2$ la ligne brisée située sur $\mathscr{L}_3$ qui appartient au triangle AA_2B_2 (voir propr. 3 déf. 7), où D est un point du segment AA_2, (s'il n'y a pas un sommet de $\mathscr{L}_3$ au segment AA_2, soit

$D = A$). On a $|D - C| \geqq \frac{1}{3}\delta$ d'après la propriété 2 énoncée par le définition 7. D'après le lemme 5 on a $|A - C| > \frac{\sqrt{8}}{9}\delta$. L'inégalité $|B - A| \geqq \frac{\sqrt{8}}{9}\,\delta$ est une conséquence du lemme 3.

Envisageons maintenant le second cas $t_2 < 1$. Il est aisé de voir, qu'il y a un sommet V du polygone $\mathscr{P}_2$ qui est situé sur le segment $A\,B(t_2)$. Si, en plus, l'inégalité $|B(t_2) - A| < \frac{\sqrt{3}}{2}\,\delta$ est satisfaite, le théorème 2 montre, que ou l'arc VA_1 appartient au triangle AVA_1 ou l'arc A_2V appartient au triangle AVA_2. Mais cette dernière possibilité ne peut pas avoir lieu parceque les sommets A_1, B_2, B et donc le sommet V lui-aussi appartiennent tous à un des deux polygones de la subdivision du polygone $\mathscr{P}_2$ effectuée par le segment AB (par exemple le point $B(t_2)$ ne peut pas appartenir à l'arc A_2V). D'une manière analogue l'arc B_2V appartient à l'intérieur du triangle $V\,B(t_2)\,B_2$. S'il était aussi $|B(t_1) - A| < \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$, $t_1 > 0$ (cas $t_1 = 0$ est analogue au cas $t_2 = 1$), la courbe $\mathscr{L}_2$ toute entière et donc tout le polygone $\mathscr{P}_2$ serait contenu dans la fermeture convexe des points A_1, A_2, B_1, B_2 et il aurait donc pour diamètre un nombre $< 2\delta + \frac{1}{12}\delta$ ce qui est en contradiction avec la remarque à la déf. 2. On a $|A - B(t_1)| \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}\,\delta$ d'où s'ensuit $|A - B_1| \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$ (th. III). Nous démontrerons que $|A - B_2| \geqq \frac{\sqrt{8}}{9}\delta$. Désignons par $A_2, A, A_1, C_1, C_2, \ldots, C_k$ la ligne brisée située sur $\mathscr{L}_2$, où $C_k = V$, et par $A, D, C, \ldots, C_k$ la ligne brisée située sur $\mathscr{L}_3$ définie de manière analogue comme dans le cas $t_2 = 1$ où D est un point du segment AA_1 resp. $D = A$.

Si $D = A_1$ il est ou $C = C_1$ (resp. $C_2, C_3, \ldots$) et nous sommes ramenés au cas précédent ou C appartient au côté BB_2 et en échangeant le notation A_1A_2 et B_2B_1 on obtient $D \neq A_1$.

Soit donc $D \neq A_1$. D'après les propriétés 6 et 3 énoncées par la déf. 7 ou le point C est un sommet de $\mathscr{P}_2$ ou un sommet de $\mathscr{P}_2$ appartient au segment DC. Ce sommet doit être nécessairement le point C_j où $j \leqq k$. Si $C = C_j$, on a $|A - V| \geqq \frac{\sqrt{8}}{9}\delta$ comme dans le cas précédent et il s'ensuit donc $|A - B(t_2)| \geqq$ $\geqq \frac{\sqrt{8}}{9}\,\delta$, $|A - B_2| \geqq \frac{\sqrt{8}}{9}\,\delta$ (th. III). Dans le cas contraire le point C appartient au segment BB_2 et $|D - C| \geqq \frac{1}{3}\delta$ (propr. 2) et d'après le lemme 5 on a l'inégalité $|A - C| \geqq \frac{\sqrt{8}}{9}\,\delta$ et donc $|A - B_2| \geqq \frac{\sqrt{8}}{9}\,\delta$.

On a l'inégalité connue $2|A - B| + |B_2 - B_1| \geqq |A - B_1| + |A - B_2|$, c'est-à-dire

$$|A - B| \geqq \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{8}}{9} - 1\right]\delta > \frac{1}{12}\,\delta\,.$$

II. Les points A, B sont situés sur les côtés fermés A_1A_2, A_2B_2 de $\mathscr{L}_2$ voisins. On peut supposer que ni A ni B n'est un sommet de $\mathscr{P}_2$ parce que dans le cas contraire nous sommes ramenés au cas I. D'après la propriété 5 (déf. 7) la ligne brisée AA_2B est située sur $\mathscr{L}_3$, donc d'après la supposition du théorème A (resp. B) est un sommet de $\mathscr{P}_3$, $|A - A_2| \geqq \frac{1}{3}\delta$ (propr. 2). Parce que $|A_1 - A_2| < \delta$, $|A_2 - B_2| < \delta$, on établit par l'homothétie que l'inégalité $|A - B| < \frac{1}{12}\delta$ implique $|A_1 - B_2| < \delta$, ce qui démontre le théorème (voir th. 1).

III. Supposons que le point B n'appartienne pas à $\mathscr{L}_2$ tandis que A appartient à $\mathscr{L}_2$. D'après la propriété 6, le point B appartient au segment B_1B_2 qui fait partie de $\mathscr{L}_3$, l'inégalité $|B_1 - B_2| \leqq \frac{1}{3}\delta$ a lieu et B_2 est un sommet de $\mathscr{P}_2$. Soit $|B - A| < \frac{1}{40}\delta$. Il est $|A - B_2| \geqq \frac{\sqrt{8}}{9}\delta$. La démonstration et même la notation sont les mêmes comme dans le cas I; le fait que BB_2 appartient à $\mathscr{L}_2$ était irrélévant. Dans notre cas le point C ne peut pas appartenir au segment BB_2. On démontre de même l'inégalité $|A - B_1| \geqq \frac{1}{12}\delta$ en se servant du résultat de la démonstration des cas I et II: De même que là, en tenant compte de l'inégalité

$$2|A - B| + |B_2 - B_1| \geqq |A - B_1| + |A - B_2|,$$

on obtient l'inégalité $|A - B| > \frac{1}{40}\delta$.

IV. Les deux points A et B situés sur les côtés A_1A_2 resp. B_1B_2 n'appartiennent pas à $\mathscr{L}_2$. Soit $B(t) = B + \beta t(B_2 - B_1)$ et $A(t) = A + \alpha t(A_2 - A_1)$ où les nombres α, β — pas tous les deux nuls — sont choisis de manière qu'on puisse trouver un nombre λ pour lequel $\alpha(A_2 - A_1) - \beta(B_2 - B_1) = \lambda(A - B)$ (si $B_2 - B_1$ et $A_2 - A_1$ sont linéairement indépendants, on peut choisir $\lambda = 1$, s'ils sont dépendants, on peut choisir $\lambda = 0$, $\alpha = 1$). On a alors $|B(t) - A(t)| = |(B - A) + \lambda\, t(B - A)|$. N'envisageons que ceux des nombres t, pour lesquels $A(t)$ et $B(t)$ sont situés sur les segments fermés A_1A_2 resp. B_1B_2. On a alors $|B(t) - A(t)| = |1 + \lambda t| \, . \, |B - A|$, et au second membre nous avons une fonction non-croissante ou non-décroissante, car elle n'est pas égale à zéro en aucun de nos nombres t. En remplaçant t par $-t$ nous pouvons faire, que $|B(t) - A(t)|$ soit non croissante. Soit t_0 le nombre positif minimum, pour lequel le segment fermé $A(t)\,B(t)$ contient le point de $\mathscr{L}_2$ (un tel nombre existe, car A_2, B_2 etc. $\in \mathscr{L}_2$). On a $|A(t_0) - B(t_0)| \leqq |A(t) - B(t)|$ et nous sommes ainsi ramenés au cas III. Le théorème est donc complètement démontré.

Nous construirons maintenant à l'intérieur de $\mathscr{P}_3$ une courbe $\mathscr{C}'$, dont la distance de $\mathscr{L}_3$ est égalle à $\frac{1}{80}\delta$.

Soit $\mathscr{P}_3$ le polygone $E_1E_2 \ldots E_{n_3}$ et désignons le centre du segment $E_{j-1}E_j$ par S_j (les indices des sommets E_i sont toujours envisagés modulo n_3). Supposons que l'angle appartenant à E_j soit convexe. L'arc $\mathscr{C}'_i$, qui fera partie de $\mathscr{C}'$, soit la ligne brisée $S'_jE'_jS'_{j+1}$ sans ses extrémités pour laquelle sont ramplies les conditions suivantes: S'_jS_j est perpendiculaire à S_jE_j, S'_j est situé dans le demi-plan intérieur de $\mathscr{P}_3$ appartenant au côté $E_{j-1}E_j$, $|S'_j - S_j| = \frac{1}{80}\delta$ et E'_j soit le point situé à l'intérieur de l'angle intérieur de $\mathscr{P}_3$ appartenant à E_j, dont les distances des droites $E_{j-1}E_j$ et E_jE_{j+1} sont $\frac{1}{80}\delta$ (c'est le point d'intersection des droites S'_j, $E_j - S_j$ et S'_{j+1}, $E_j - S_{j+1}$).

Théorème 6. *Le point E'_j appartient au segment fermé S'_j, $E_j + S'_j - S_j$. Donc la distance entre $\mathscr{L}_3$ et chaque point du segment $S'_jE'_j$ est au plus $\frac{1}{80}\delta$ (il en est de même pour le segment $E'_jS'_{j+1}$).*

Démonstration. La distance entre le point E_j et donc entre le segment E_jE_{j+1} et le point $E_j + S'_j - S_j$ est $\leqq \frac{1}{80}\delta$. Parce que le point $E_j + S'_j - S_j$ appartient à la droite S'_j, $E_j - S_j$, il suffit de démontrer que la distance entre S'_j et le segment E_jE_{j+1} est $\geqq \frac{1}{80}\delta$. L'angle appartenant à E_j étant convexe, on a l'inégalité $|S_j - E_j| \geqq \frac{1}{6}\delta$ (déf. 7, propr. 2). Soit T_0 celui-là des points de la demi-droite E_jS_j et T_1 celui-là des points de la demi-droite E_jS_{j+1}, pour lesquels

$$(1) \qquad |T_0 - E_j| = \tfrac{1}{6}\delta\,, \quad |T_1 - E_j| = \tfrac{1}{6}\delta\,.$$

Il suffit de démontrer que la distance entre le point $T_0 + S'_j - S_j$ et le segment E_jE_{j+1} est $\geqq \frac{1}{80}\delta$. Supposons donc que, au contraire, cette distance soit $< \frac{1}{80}\delta$. Il s'ensuit que la distance entre T_0 et le segment E_jE_{j+1} est $< \frac{1}{40}\delta$ et

$$(2) \qquad |T_0 - T_1| < \tfrac{1}{24}\delta$$

(d'après le théorème de Pythagore). Nous montrerons que les relations elles mêmes ont déjà pour conséquence une contradiction; nous pouvons ainsi échanger les points E_{j-1} et E_{j+1} entre eux. Distinguons plusieurs cas.

I. Le point E_j n'est pas un sommet de $\mathscr{L}_2$. Il s'ensuit (propr. 4) que E_j appartient au côté AB du polygone $\mathscr{P}_2$, ce côté jouissant de la propriété que $B - A$ est un multiple positif de $E_j - E_{j-1}$. Le côté E_jE_{j+1} contient un sommet C du polygone $\mathscr{P}_2$, $|C - E_j| \leqq \frac{1}{3}\delta$ (propr. 6). D'après le théorème 2, on a l'inégalité $|C - A| \geqq \delta$ (si $|C - B| \geqq \delta$, le diamètre de $\mathscr{P}_3$ serait d'après le théorème 2 au plus $\delta + \frac{1}{3}\delta$, ce qui est en contradiction avec la remarque à la définition 7. On a donc $|A - E_j| \geqq \frac{2}{3}\delta$. Soit Y le point du segment AE_j, pour lequel $|Y - E_j| = |C - E_j|$. Les relations (1) et (2) ont pour conséquence l'inégalité $|T_0 - T_1| < |T_0 - E_j|$ d'où, en appliquant une homothétie, $|C - Y| < |Y - E_j|$; donc $|A - C| \leqq |A - Y| + |Y - C| \leqq$ $\leqq |A - Y| + |Y - E_j| = |A - E_j| < \delta$, mais c'est en contradiction avec $|A - C| \geqq \delta$.

II. L'angle intérieur de $\mathscr{P}_3$ appartenant à E_j est congruent à celui de $\mathscr{P}_2$ appartenant à E_j. La contradiction se déduit d'une manière analogue comme dans le cas I, en posant $B = E_j$. L'inégalité $|C - A| \geqq \delta$ est une conséquence du théorème 1. Si l'inégalité $|A - E_j| \geqq |C - E_j|$ n'a pas lieu, il suffit d'échanger mutuellement la notation des points A et C.

III. Soit E_j un sommet du polygone $\mathscr{P}_2$, mais supposons que les angles intérieurs de $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ appartenant à E_j ne soient pas congruents. D'après la propriété 4 par ex. le côté $E_{j-1}E_j$ contient un segment YE_j dont la longueur est au moins $\frac{1}{3}\delta$ et qui appartient à $\mathscr{L}_2$. D'après la propriété 6 le segment fermé E_jE_{j+1} contient un point $D \neq E_j$, $D \in \mathscr{L}_2$, dont la distance de E_j est au plus $\frac{1}{3}\delta$. A l'aide d'une homothétie on déduit des relations (1) et (2) le fait que la distance entre D et le segment YE est $< \frac{1}{12}\delta$, mais c'est une contradiction avec le théorème 5. Cela termine la démonstration de notre théorème.

Il est évident, que le point E'_j appartient à la bissectrice de l'angle appartenant à E_j tandis que $|S'_j - E'_j| = |S_j - E_j| - \frac{\delta}{80}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_j}{2}\right)$ où α_j est la mesure de l'angle appartenant à E_j, c'est-à-dire $|S'_j - E'_j| \leqq |S_j - E_j| - - \frac{\delta}{80}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_j}{2}\right)$,

$$s(\mathscr{C}'_j) \leqq |S_j - E_j| + |S_{j+1} - E_j| - \frac{\delta}{80}(\pi - \alpha_j)\,. \tag{3}$$

Soit maintenant l'angle appartenant à E_j un angle concave. L'arc $\mathscr{C}'_j$ sera composé de la manière suivante: du segment $S'_jE'_j$ pour lequel $E'_j - S'_j = = E_j - S_j$ (S'_j étant défini comme dans le cas de l'angle convexe), du point E'_j, de l'arc d'une circonférence $E'_jE''_j$, où $E''_j = S'_{j+1} + E_j - S_{j+1}$, de longueur $(\alpha_j - \pi)\frac{\delta}{80}$ ayant pour centre le point E_j, du point E''_j, du segment $E''_jS'_{j+1}$.

On a donc de même

$$s(\mathscr{C}'_j) \leqq |S_j - E_j)| + |S_{j+1} - E_j| - \frac{\delta}{80}(\pi - \alpha_j)\,. \tag{3'}$$

Nous composerons maintenant la courbe $\mathscr{C}'$ d'une manière évidente à l'aide des arcs $\mathscr{C}'_1, \mathscr{C}'_2, \mathscr{C}'_3, \dots$ et des points $S'_2, S'_3, S'_4, \dots$. D'après les inégalités (3) et (3') on déduit à l'aide du théorème II sur la somme des angles que

$$s(\mathscr{C}') \leqq s(\mathscr{L}_3) - \frac{\delta}{80}\sum(\pi - \alpha_j) = s(\mathscr{L}_3) - \frac{\delta}{80}\,.\,2\pi\,,$$

c'est-à-dire

$$s(\mathscr{C}') < s(\mathscr{C})\,.$$

La courbe $\mathscr{C}'$ appartient à l'intérieur de P_3 (théorème 5); il est évident que M appartient à l'intérieur de $\mathscr{C}'$, car autrement la distance de M à $\mathscr{L}_3$ serait plus petite que $\frac{1}{80}\delta$ (ce serait en contradiction avec la remarque à la définition 7). La courbe $\mathscr{C}'$ est simple et fermée d'après les théorèmes 5, 6. Ces théorèmes montrent aussi, que la distance entre $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{L}_3$ est exactement $\frac{1}{80}\delta$, c'est-à-dire la distance entre $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{L}_1$ est plus grande que $\frac{1}{80}\delta$ ($\mathscr{P}_3 \subset \mathscr{P}_1$). Il est évident que la distance entre chaque point de $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ est plus petite que $\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{6}\delta + \frac{1}{80}\delta < \delta$ (déf. 2, déf. 7). Si les courbes $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$ avaient un point N d'intersection, ce point N appartiendrait à un des arcs H_iH_{i+1} (déf. 1), qui sont définis sur la courbe $\mathscr{C}$ par les poin ts $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Désignons par q_i cet arc. Il serait $s(q_i) \geqq |H_i - N| + |H_{i+1} - N|$. Soit P le point d'intersection de H_iH_{i+1} avec la perpendiculaire menée par le point N sur cette droite. Si P n'appartient pas au segment H_iH_{i+1}, l'inégalité $s(q_i) \geqq |H_{i+1} - H_i| + \frac{\delta}{80}$ a lieu (la distance de N est $\geqq \frac{\delta}{80}$). Si P appartient au segment H_iH_{i+1}, on a l'inégalité $|P - H_i| < \delta$, car $|H_i - H_{i+1}| < \delta$ (déf. 1) et d'après le théorème de Pythagore

$$s(q_i) \geqq \sqrt{(H_i - P)^2 + \left(\frac{\delta}{80}\right)^2} + |P - H_{i+1}| \geqq |H_i - H_{i+1}| + \delta \,.$$
$$. \left(\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{80}\right)^2} - 1\right),$$

la fonction $\sqrt{x^2 + a^2} - x = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2} + x}$ étant une fonction non-croissante de x. Pour tous les cas on a l'inégalité

$$s(q_i) \geqq |H_i - H_{i+1}| + \frac{\delta}{20\,000}$$

et, puisque pour $j \neq i$ on a $s(q_i) \geqq |H_j - H_{j+1}|$, on a aussi

$$s(\mathscr{C}) \geqq \sum_i |H_i - H_{i+1}| + \frac{\delta}{20\,000}\,,$$

ce qui est en contradiction avec la définition 1. L'intérieur de $\mathscr{C}$ et celui de $\mathscr{C}'$ ayant le point M en commun, ou la courbe $\mathscr{C}'$ est à l'intérieur de $\mathscr{C}$ ou la courbe $\mathscr{C}$ est à l'intérieur de $\mathscr{C}'$. Le second cas est exclu, car $\mathscr{C}$ serait à l'intérieur de $\mathscr{P}_1$, mais l'intérieur de $\mathscr{P}_1$, qui est une composante de l'ensemble $E_2 - H$ (déf. 1), ne contient pas les points $H_1, H_2, \ldots$ appartenant à $\mathscr{C}$. Notre théorème est donc complètement démontré.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ, КАСАЮЩЕЙСЯ КРИВЫХ ЖОРДАНА

ИРЖИ ЕЛИНЕК (Jiří Jelínek), Прага

В работе доказывается следующая теорема:

Пусть $\mathscr{C}$ — простая замкнутая кривая конечной длины на плоскости. Пусть M — точка внутри кривой $\mathscr{C}$, $\delta > 0$. Тогда существует простая замкнутая кривая $\mathscr{C}'$ меньшей длины, чем $\mathscr{C}$, так, что $\mathscr{C}'$ лежит внутри $\mathscr{C}$, M лежит внутри $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}' \subset \Omega(\mathscr{C}, \delta)$.

Доказательство проводится элементарно, не требует специальных познаний и знания литературы. Наметим вкратце ход доказательства: Прежде всего в кривую $\mathscr{C}$ вписывается многоугольник $\mathscr{P}_1$, который в нескольких этапах преобразуется в многоугольник $\mathscr{P}_3$; внутри этого последнего уже можно без труда построить кривую $\mathscr{C}'$, состоящую из отрезков прямых и дуг окружностей.