Czechoslovak Mathematical Journal

Ludvík Janoš

Однородные функционалы на локально компактных конусах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 3, 380–399

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100421

ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ КОНУСАХ

ЛЮДВИК ЯНОШ (Ludvík Janoš), Прага

(Поступило в редакцию 27/X 1959 г.)

Главным результатом предлагаемой работы является построение наилучшего линейного приближения субаддитивного функционала.

I. ВВЕДЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Если $\varphi(x)$ — непрерывный положительный субаддитивный функционал на локально компактном конусе $\mathfrak{S}$ с некоторыми алгебраическо-топологическими свойствами, то функционал $\psi(x)$, определенный соотношением

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x)\,, \qquad \text{где} \qquad \varphi^n(x) = \sup_{\sum_1^n y_i = x} \sum_1^n \varphi(y_i)\,,$$

будет линейным на некотором конусе $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$, плотном в $\mathfrak{S}$. Расширением его на $\mathfrak{S}$ получим наилучшее линейное приближение функционала $\varphi(x)$ в смысле метрики ϱ, определенной на классах положительных функционалов следующим образом:

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \log \left[\max_{x\in\mathfrak{S}} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \max_{x\in\mathfrak{S}} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \right].$$

Определение 1. Под *конусом* $\mathfrak{S}$ мы будем понимать подмножество топологического линейного пространства $\mathfrak{L}$ со следующими свойствами:

1. $x, y \in \mathfrak{S} \subset \mathfrak{L} \Rightarrow x + y \in \mathfrak{S}$,
2. $\alpha \geqq 0,\ x \in \mathfrak{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathfrak{S}$,
3. $x, y \in \mathfrak{S},\ x + y = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$,
4. $\mathfrak{S}$ замкнуто в $\mathfrak{L} : \overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$.

В продолжение всей работы мы ограничимся случаем, когда конус $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ как подпространство топологического пространства $\mathfrak{L}$ является метризуемым.

Определение 2. Под *носителем конуса* $\mathfrak{S}$ мы будем понимать наименьшее линейное подпространство $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$, содержащее этот конус. Очевидно, что

$$z \in \mathfrak{L}' \Leftrightarrow z = x - y\,; \quad x, y \in \mathfrak{S}\,.$$

Определение 3. В конусе $\mathfrak{S}$ можно ввести частичное упорядочение $\leqq$ следующим образом:

$$x \leqq y \Leftrightarrow x + z = y\,; \quad x, y, z \in \mathfrak{S}\,.$$

Из определения 1 следует, что отношение $\leqq$ является рефлексивным, несимметрическим и транзитивным.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{A}$ — какое-либо подмножество конуса $\mathfrak{S}$; тогда $[\mathfrak{A}]$ будет обозначать *комбинаторное замыкание*. Итак,

$$y \in [\mathfrak{A}] \Leftrightarrow y \leqq x \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}\,.$$

В частности, для одноточечного множества $\{x\}$ будет

$$y \in [x] \Leftrightarrow y \leqq x\,.$$

Определение 5. *Подконусом* $\mathfrak{S}'$ конуса $\mathfrak{S}$ назовем конус, который является подмножеством $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$. *Полный подконус* $\mathfrak{S}'$ удовлетворяет, кроме того, условию $[\mathfrak{S}'] = \mathfrak{S}'$.

В работе мы ограничимся лишь конусами, имеющими определенные свойства. Главное утверждение будет доказано только для конусов с этими свойствами. Некоторые вспомогательные теоремы будут, однако, справедливы при более общих условиях, поэтому мы каждый раз приведем предположения, сделанные относительно конуса $\mathfrak{S}$.

На протяжении всей работы мы будем предполагать локальную компактность конуса $\mathfrak{S}$, введенную при помощи.

Определения 6. Конус $\mathfrak{S}$ называем *локально компактным*, если он обладает компактным замыканием относительной окрестности нулевого элемента, т. е. если существует открытое множество $\mathfrak{U}$ со следующими свойствами:

1. $0 \in \mathfrak{U} \subset \mathfrak{L}$; $\mathfrak{U}$ открыто в $\mathfrak{L}$.
2. $\overline{\mathfrak{U} \cap \mathfrak{S}}$ компактно.

Определение 7. Мы будем говорить, что конус $\mathfrak{S}$ имеет свойство A или что он является A-конусом, если справедливо утверждение:

Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathfrak{S}$ таковы, что

$$x_1 + x_2 = \sum_1^n y_i\,.$$

Тогда существуют элементы $u_1, u_2, \ldots u_r \in \mathfrak{S}$ такие, что при надлежащем подборе индексов имеют место утверждения:

1. $\sum\limits_{1}^{s} u_i = x_1$; $\quad \sum\limits_{s+1}^{r} u_i = x_2$.

2. Существует дизъюнктное разложение $R_1, R_2, \ldots, R_n$ множества R индексов $\{1, 2, 3, \ldots, r\}$ такое, что

$$y_i = \sum_{j \in R_i} u_j , \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Как видно, свойство A является алгебраическим свойством конуса. Оно обеспечивает существование общего уплотнения двух данных разложений данного элемента. Обобщая, получим свойство B, введенное при помощи

Определения 8. Мы будем говорить, что конус $\mathfrak{S}$ является B-конусом, если существует возрастающая последовательность полных A-подконусов $\mathfrak{S}_i$:

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3 \subset \ldots \subset \mathfrak{S}_i \ldots \subset \mathfrak{S} , \qquad \mathfrak{S}_j \text{ — полные в } \mathfrak{S} ,$$

так что $\mathfrak{S} = \overline{\bigcup\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{S}_i}$.

Во всей работе мы будем говорить только об однородных функционалах на $\mathfrak{S}$, т. е. о таких действительных функциях $\varphi(x)$ на $\mathfrak{S}$, что

$$\alpha \geqq 0 , \quad x \in \mathfrak{S} \Rightarrow \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x) .$$

Слово однородный мы будем поэтому для краткости опускать.

Определение 9. Мы будем говорить, что функционал $\varphi(x)$

неотрицателен, если	$\varphi(x) \geqq 0$	для	$x \in \mathfrak{S}$,
положителен, если	$\varphi(x) > 0$	для	$x \neq \emptyset$,
субаддитивный, если	$\varphi(x + y) \leqq \varphi(x) + \varphi(y)$,		
линейный, если	$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,		
супераддитивный, если	$\varphi(x + y) \geqq \varphi(x) + \varphi(y)$;		

притом $x, y \in \mathfrak{S}$.

Образуем теперь множество всех положительных функционалов на локально компактном конусе $\mathfrak{S}$. Введем на этом множестве отношение эквивалентности $\equiv$ так, что два функционала эквивалентны, если и только если они отличаются только положительным множителем; итак,

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \alpha \varphi_2(x) ; \qquad \alpha > 0 .$$

Множество классов эквивалентных друг другу функционалов обозначим через P и назовем его пространством классов положительных функционалов на $\mathfrak{S}$. Пространство P мы сделаем метрическим пространством, введя в него метрику ϱ посредством

Определения 10. Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \in P$,

$$\varrho(\Phi_1, \Phi_2) = \log \left[\max_{x \in \mathfrak{S}} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \cdot \max_{x \in \mathfrak{S}} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \right] ,$$

где $\varphi_1 \in \Phi_1$; $\varphi_2 \in \Phi_2$.

Без риска недоразумения мы не будем различать между функционалом $\varphi(x)$ и классом Φ, в который он входит. Поэтому мы будем писать, напр., просто $\varrho(\varphi_1, \varphi_2)$ и т. д.

В правильности определения метрики мы убедимся в тексте.

Нетрудно проверить, что P однородно и полно. Назовем S_1, L, S_2 подпространства классов соответственно субаддитивных, линейных и супераддитивных функционалов.

$$S_1 \subset P\,; \quad L \subset P\,; \quad S_2 \subset P\,.$$

Очевидно,

$$L = S_1 \cap S_2\,.$$

Теперь сформулируем последнее требование, которому наш конус должен удовлетворять.

Определение 11. Мы будем говорить, что конус $\mathfrak{S}$ является С-конусом, если он обладает хотя бы одним положительным линейным функционалом; итак, $L \neq \emptyset$.

Пусть теперь $\varphi \in P$ — произвольный положительный функционал. Тогда число, определенное соотношением $l(\varphi) = \inf\limits_{\psi \in L} \varrho(\varphi, \psi)$, является *мерой качества линейной аппроксимации* данного функционала. Для случая, когда $\varphi \in S_1$, соотв. $\varphi \in S_2$, эта наилучшая аппроксимация будет действительно найдена. К ней приведут некоторые построения, которые мы назовем верхним и нижним.

Определение 12. Пусть $\varphi(x)$ — какой-либо непрерывный функционал на $\mathfrak{S}$. Пусть n — натуральное число. Введем функционалы $\varphi^n(x)$ и $\varphi_n(x)$:

$$\varphi^n(x) = \sup_{\sum_1^n y_i = x} \sum_1^n \varphi(y_i)\,; \qquad \varphi_n(x) = \inf_{\sum_1^n y_i = x} \sum_1^n \varphi(y_i)\,.$$

Функционалы φ^n и φ_n мы будем называть соответственно просто *верхними* и *нижними функционалами* данного функционала.

Однако, главную роль будут играть только функционалы $\psi(x)$ и $\vartheta(x)$, которые мы соответственно назовем просто *верхним предельным* и *нижним предельным* функционалом. Определяются они так:

Определение 13. $\psi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi^n(x)$; $\vartheta(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x)$.

Все доказательства будут проведены лишь для верхнего построения ввиду двойственности понятий, которую нетрудно проверить:

субаддитивный … супераддитивный,

$S_1 \ \ldots S_2\,,$

$\varphi^n \ \ldots \varphi_n\,,$

верхнее построение … нижнее построение,

$\psi(x) \ldots \vartheta(x)\,.$

Теорема 1.2. *Пусть $\varphi(x)$ — положительный непрерывный функционал на конусе $\mathfrak{S}$. Для того, чтобы конус $\mathfrak{S}$ был локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathfrak{K}$, определенное соотношением $x \in \mathfrak{K} \Leftrightarrow \varphi(x) \leqq 1$, было компактным.*

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из того, что $\mathfrak{K}$ — замкнутая окрестность нулевого элемента. Остается доказать необходимость условия. Итак, пусть $\mathfrak{S}$ локально компактно. Тогда сущесвует некоторая компактная окресность нулевого элемента $\mathfrak{K}'$. Пусть $\mathfrak{H}$ — граница $\mathfrak{K}' : \mathfrak{H} = \mathfrak{K}' \cap \overline{\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{K}'}$.

Возьмем число α, определенное соотношением $\alpha = \inf\limits_{x \in \mathfrak{H}} \varphi(x)$. Очевидно, $\alpha > 0$, так как $\emptyset \bar{\in} \mathfrak{H}$, а $\varphi(x)$ положителен. Образуем множество $\mathfrak{K}''$ так, что $x \in \mathfrak{K}'' \Leftrightarrow \varphi(x) \leqq \alpha$. Множество $\mathfrak{K}''$, очевидно, замкнуто. Покажем, что $\mathfrak{K}'' \subset \mathfrak{K}'$.

Итак, пусть $x \in \mathfrak{K}''$; тогда $\varphi(x) = \beta \leqq \alpha$. Если $x = \emptyset$, то будет также $x \in \mathfrak{K}'$ и, следовательно, можно предположить $x \neq \emptyset$. Так как $\mathfrak{K}'$ компактно, существуют числа $\gamma > 0$ такие, тчо $\gamma x \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{K}'$.

Положим $\varepsilon = \inf\limits_{\gamma x \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{K}'} \gamma$. Очевидно, $\varepsilon x \in \mathfrak{H}$ и, далее, $\varepsilon' \leqq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon' x \in \mathfrak{K}'$.

Имеем $\alpha \leqq \varphi(\varepsilon x) = \varepsilon \varphi(x) = \varepsilon \beta$. Так как $\beta \leqq \alpha$, должно быть $\varepsilon \geqq 1$, откуда $x \in \mathfrak{K}'$, что мы и хотели показать. Отсюда следует, что $\mathfrak{K}''$ компактно. Однако, теперь для $\mathfrak{K}$ имеет место $x \in \mathfrak{K} \Leftrightarrow \alpha x \in \mathfrak{K}''$, откуда вытекает компактность $\mathfrak{K}$, чем и завершается доказательство.

Из теоремы следует правильность определения метрики ϱ на P. Дело в том, что выражение $\max\limits_{x \in \mathfrak{S}} \dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ можно записать в виде

$$\max_{x \in \mathfrak{H}} \varphi_1(x), \qquad \text{где} \qquad x \in \mathfrak{H} \Leftrightarrow \varphi_2(x) = 1 .$$

Однако, множество $\mathfrak{H}$, очевидно, компактно.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{S}$ — локально компактный конус. Тогда существует подмножество $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}$ со следующими свойствами:*

1. *$\mathfrak{H}$ компактно.*
2. *Пусть $x \in \mathfrak{S}$, $x \neq \emptyset$; тогда существует $\alpha > 0$ так, что $\alpha x \in \mathfrak{H}$.*
3. *$\emptyset \bar{\in} \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Всеми тремя указанными свойствами обладает граница $\mathfrak{H}$ компактной окрестности $\mathfrak{K}'$, как видно из доказательства утверждения 1.2.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{K}$ — какое-либо компактное подмножество локально компактного конуса $\mathfrak{S}$. Тогда комбинаторное замыкание $[\mathfrak{K}]$ также компактно.*

Доказательство. Введем конус $\mathfrak{S}^-$, определив $x \in \mathfrak{S}^- \Leftrightarrow -x \in \mathfrak{S}$. Очевидно, $\mathfrak{S}^- \cap \mathfrak{S} = \{\emptyset\}$.

Прежде всего покажем, что $[\mathfrak{K}]$ замкнуто. Итак, пусть $y_i \in [\mathfrak{K}]$, $\lim y_i = y$. По определению существуют $z_i \in \mathfrak{S}$ так, что

$$y_i + z_i = u_i \in \mathfrak{K} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Из компактности $\mathfrak{K}$ следует, что существует выделенная последовательность k_i так, что $\lim u_{k_i} = v \in \mathfrak{K}$, откуда $\lim y_{k_i} + \lim z_{k_i} = v \in \mathfrak{K}$; итак, $y = \lim y_{k_i} \leqq v$; отсюда $y \in [\mathfrak{K}]$ и, следовательно, $[\mathfrak{K}]$ замкнуто.

Доказательство компактности проведем от противного. Предположим, что существует последовательность y_i $y_i \in [\mathfrak{K}]$, не имеющая предельной точки. Поэтому можно предположить, что $y_i \neq \emptyset$. Возьмем теперь множество $\mathfrak{H}$, существующее согласно (2.2). Тогда существуют $\alpha_i > 0$ так, что $\alpha_i y_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, существует выделенная последовательность k_i так, что

$$\lim \alpha_{k_i} y_{k_i} = z \in \mathfrak{H} .$$

Если бы было $\lim\inf \alpha_{k_i} = \alpha > 0$, то для некоторой далее выделенной последовательности l_i было бы $\lim \alpha_{l_i} = \alpha > 0$; $\lim \alpha_{l_i} y_{l_i} = z$, откуда $\lim y_{l_i} = \alpha^{-1} z$, что противоречит предположению о несуществовании предельной точки. Итак, $\lim\inf \alpha_{k_i} = 0$, и существует выделенная последовательность l_i так, что $\lim \alpha_{l_i} = 0$ $\lim \alpha_{l_i} y_{l_i} = z \in \mathfrak{H}$. Но так как $y_{l_i} \in [\mathfrak{K}]$, существуют элементы y'_{l_i}, $u_{l_i} \in \mathfrak{S}$ такие, что

$$y_{l_i} + y'_{l_i} = u_{l_i} \in \mathfrak{K} .$$

Однако, $\mathfrak{K}$ компактно, поэтому существует далее выделенная последовательность h_i так, что $\lim u_{h_i} = v \in \mathfrak{K}$. Можно, следовательно, написать

$$u_{h_i} - y_{h_i} = y'_{h_i} \in \mathfrak{S} .$$

Умножением на α_{h_i} и переходом к пределу получим

$$-z = \lim \alpha_{h_i} y'_{h_i} \in \mathfrak{S} .$$

Однако, так как $z \in \mathfrak{H}$, то согласно свойствам множества $\mathfrak{H}$ будет $z \neq \emptyset$; но это невозможно ввиду $\mathfrak{S}^- \cap \mathfrak{S} = \{\emptyset\}$. Этим самым и доказана компактность $[\mathfrak{K}]$.

Важным следствием является компактность множеств $[x]$ для любых $x \in \mathfrak{S}$.

Теорема 4.2. *Функционалы $\varphi^n(x)$ и $\varphi_n(x)$, введенные определением 12 для любого непрерывного функционала $\varphi(x)$ на локально компактном конусе $\mathfrak{S}$, удовлетворяют следующим функциональным соотношениям:*

$$\begin{aligned} &\varphi^{n+m}(x + y) \geqq \varphi^n(x) + \varphi^m(y) , \\ &\varphi_{n+m}(x + y) \leqq \varphi_n(x) + \varphi_m(y) \qquad \text{для} \quad x, y \in \mathfrak{S} , \\ &\varphi^n(x) \leqq \varphi^m(x) ; \quad \varphi_n(x) \geqq \varphi_m(x) \qquad \text{для} \quad m \geqq n \end{aligned}$$

(n, m — натуральные числа).

Доказательство. Ввиду упомянутой выше двойственности мы ограничимся доказательством утверждений относительно верхних функционалов.

Покажем прежде всего, что число $\varphi^n(x) = \sup\limits_{\sum\limits_1^n y_i = x} \sum\limits_1^n \varphi(y_i)$ конечно для любого $x \in \mathfrak{S}$.

Для этой цели образуем декартово произведение $[x] \underbrace{\times [x] \times [x] \times \ldots \times [x]}_{n}$.

Согласно (3.2) это будет компактное множество. Определим на нем функцию $h[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \sum\limits_1^n \varphi(y_i)$ для $[y_1, y_2, \ldots, y_n] \in [x] \times [x] \times \ldots \times [x]$. Функция $h[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, очевидно, непрерывна. Определим далее подмножество H следующим образом:

$$[y_1, y_2 \ldots, y_n] \in H \Leftrightarrow \sum_1^n y_i = x \,.$$

Множество H, очевидно, замкнуто в $[x] \times [x] \times \ldots \times [x]$ и, следовательно, компактно; поэтому непрерывная функция h достигает на нем своего максимума. Отсюда следует существование y_i таких, что

$$\varphi^n(x) = \sum_1^n \varphi(y_i) \,; \qquad \sum_1^n y_i = x \,.$$

Этим доказана правильность определения 12. Пусть теперь m, n — натуральные числа, $x, y \in \mathfrak{S}$. Тогда, согласно предыдущему, существуют подходящие разложения

$$x = u_1 + u_2 + \ldots + u_m \,; \quad y = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

так, что

$$\varphi^m(x) = \sum_1^m \varphi(u_i) \,; \qquad \varphi^n(y) = \sum_1^n \varphi(v_i) \,.$$

Складывая эти два соотношения, получаем

$$\varphi^m(x) + \varphi^n(y) = \sum_1^m \varphi(u_i) + \sum_1^n \varphi(v_i) \,.$$

Однако, так как $\sum\limits_1^m u_i + \sum\limits_1^n v_i$ есть разложение элемента $x + y$ на $n + m$ слагаемых, из определения непосредственно следует неравенство $\varphi^m(x) + \varphi^n(y) \leqq \varphi^{n+m}(x + y)$, что и требовалось доказать.

Соотношение $\varphi^m(x) \leqq \varphi^n(x)$ для $m \leqq n$ следует из того, что в разложениях $x = \sum\limits_1^k y_i$ допускается и нулевой элемент. Соотношения для нижних функционалов $\varphi_n(x)$ доказываются аналогично.

Теорема 5.2. *Функционалы $\varphi^n(x)$ и $\varphi_n(x)$ полунепрерывны в том смысле, что имеют место неравенства*

$$\liminf_{i\to\infty} \varphi^n(x_i) \leqq \varphi^n(x) ,$$

$$\limsup_{i\to\infty} \varphi_n(x_i) \geqq \varphi_n(x) \qquad \textit{для} \qquad \lim x_i = x .$$

Доказательство. Мы опять ограничимся доказательством ,,верхнего" соотношения. По предыдущей теореме из компактности множеств $[x_i]$ следует существование разложений

$$x_i = \sum_1^n y_i^k ; \qquad x = \sum_1^n y^k$$

таких, что

$$\varphi^n(x_i) = \sum_{k=1}^n \varphi(y_i^k) ; \qquad \varphi^n(x) = \sum_{k=1}^n \varphi(y^k) .$$

Возьмем теперь множество $\mathfrak{K}$, состоящее из всех элементов x_i и их предела x. Множество $\mathfrak{K}$, очевидно, компактно; следовательно, согласно (3.2) и $[\mathfrak{K}]$ компактно. Очевидно, будет

$$y_i^k \in [\mathfrak{K}] , \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots ;$$

$$y^k \in [\mathfrak{K}] , \qquad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Поэтому существует выделенная последовательность l_i так, что все последовательности $y_{l_i}^k$ сходятся. Имеем

$$\lim y_{l_i}^k = \bar{y}^k , \qquad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Так как $\sum_{k=1}^n y_{l_i}^k = x_{l_i}$, то, переходя к пределу, получаем $x = \sum_1^n \bar{y}^k$.

Таким образом мы получим результат $\lim_{i\to\infty} \varphi^n(x_{l_i}) = \sum_1^n \varphi(\bar{y}^k) \leqq \varphi^n(x)$, откуда и следует наше утверждение.

Наши предыдущие рассуждения были справедливы для любого локально компактного конуса. Теперь мы приступим к порстроению наилучшего линейного приближения субаддитивного, соотв. супераддитивного положительного функционала при условии, что конус обладает свойствами B и C (см. определения 8 и 11).

III. ПОСТРОЕНИЕ НАИЛУЧШЕЙ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СУБАДДИТИВНОГО И СУПЕРАДДИТИВНОГО ФУНКЦИОНАЛОВ НА B—C-КОНУСАХ

Теорема 1.3. *Пусть $\varphi(x)$ — положительный непрерывный функционал на локально компактном C-конусе $\mathfrak{S}$. Тогда функционал $\psi(x)$, определенный соотношением $\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x)$ будет ограниченным положительным (не обязательно непрерывным) супераддитивным функционалом.*

Доказательство. По условию существует положительный линейный функционал $g(x)$. Положим $\sup\limits_{x \in \mathfrak{S}} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = M$.

Рассмотрим теперь верхний предел дроби $\frac{\sum\limits_1^n \varphi(y_i)}{\sum\limits_1^n g(y_i)}$ при любом натуральном n, при любых y_i и при единственном условии: $\sum\limits_1^n y_i \neq \emptyset$.

Очевидно, независимо от n справедливо:

$$\frac{\sum\limits_1^n \varphi(y_i)}{\sum\limits_1^n g(y_i)} \leqq M .$$

Пусть теперь n — произвольное число, а $x \neq \emptyset$; тогда согласно (4.2) существует разложение $x = \sum\limits_1^n y_i$ так, что $\varphi^n(x) = \sum\limits_1^n \varphi(y_i)$, откуда $\varphi^n(x) \leqq \leqq Mg(x)$; переходя к пределу, получаем $\psi(x) \leqq Mg(x)$, что и доказывает ограниченность.

Согласно (4.2) имеем $\varphi^{n+m}(x + y) \geqq \varphi^n(x) + \varphi^m(y)$, откуда предельным переходом получаем $\psi(x + y) \geqq \psi(x) + \psi(y)$; поэтому $\psi(x)$ — супераддитивный и ограниченный функционал, что и требовалось доказать.

Аналогично можно было бы доказать, что функционал, определенный соотношением $\vartheta(x) = \lim \varphi_n(x)$, является субаддитивным и положительным, и что существует число $m > 0$ так, что $\vartheta(x) \geqq mg(x)$.

Теорема 2.3. *Пусть $\varphi(x)$ — положительный субаддитивный функционал на А—С-конусе $\mathfrak{S}$. Тогда функционал $\psi(x)$: $\psi(x) = \lim \varphi^n(x)$ будет даже положительным линейным и ограниченным на $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathfrak{S}$. Для $\varphi^n(x_1 + x_2)$ можно найти представление $\varphi^n(x_1 + x_2) = \sum\limits_1^n \varphi(y_i)$ такое, что y_i образуют подходящее разложение элемента $x_1 + x_2$, т. е. $x_1 + x_2 = \sum\limits_1^n y_i$.

Однако, согласно свойству A существуют элементы $u_1, u_2, \dots u_r$ такие, что $x_1 = \sum\limits_1^s u_i$, $x_2 = \sum\limits_{s+1}^r u_i$, и дизъюнктное разложение $R_1, R_2, \dots, R_n$ множества индексов $R = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ такое, что

$$y_i = \sum_{j \in R_i} u_j , \qquad i = 1, 2, \dots, n .$$

Но теперь ввиду субаддитивности $\varphi(x)$ будет

$$\varphi(y_i) \leqq \sum_{j \in R_i} \varphi(u_j)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Суммируя все эти неравенства по i, получим

$$\sum_1^n \varphi(y_i) \leqq \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j \in R_i} \varphi(u_j) = \sum_1^r \varphi(u_i)$$

и, следовательно,

$$\varphi^n(x_1 + x_2) \leqq \sum_1^r \varphi(u_i) = \sum_1^s \varphi(u_i) + \sum_{s+1}^r \varphi(u_i) \leqq \varphi^s(x_1) + \varphi^{r-s}(x_2)\,;$$

поэтому тем более будет

$$\varphi^n(x_1 + x_2) \leqq \varphi^r(x_1) + \varphi^r(x_2) \leqq \psi(x_1) + \psi(x_2)$$

независимо от n и, наконец, $\psi(x_1 + x_2) \leqq \psi(x_1) + \psi(x_2)$, а это значит, что $\psi(x)$ является субаддитивным; вместе с результатом предыдущей теоремы это доказывает наше утверждение. Приступим теперь к доказательству главной теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть $\varphi(x)$ — положительный субаддитивный функционал на* B—C-*конусе* $\mathfrak{S}$. *Тогда в пространстве P существует самый близкий линейный функционал $\bar{\psi}(x)$; итак, $\varrho(\varphi, \bar{\psi}) = \inf\limits_{g \in L} \varrho(\varphi, g)$; $\bar{\psi} \in L$, где $L \subset P$ означает подпространство классов положительных линейных функционалов на P.*

Доказательство. Утверждение мы докажем путем непосредственного построения линейного функционала.

Возьмем какой-либо положительный линейный функционал $g(x)$ (свойство C) и образуем множество $\mathfrak{H}$:

$$x \in \mathfrak{H} \Leftrightarrow g(x) = 1\,; \qquad \text{положим} \quad \sup_{x \in \mathfrak{H}} \varphi(x) = M\,; \quad \inf_{x \in \mathfrak{H}} \varphi(x) = m\,.$$

Возьмем опять функцию $\psi(x) = \lim \varphi^n(x)$. Согласно (1.3) будет $\psi(x) \leqq M$ для $x \in \mathfrak{H}$, а так как $\varphi(x) \leqq \psi(x)$, должно быть $\sup\limits_{x \in \mathfrak{H}} \psi(x) = M$.

Из непрерывности $\varphi(x)$ и компактности $\mathfrak{H}$ следует существование элементов x_0, x_1 так, что $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = M$; $\varphi(x_1) = m$.

Теперь мы можем писать

$$\varrho(\varphi, g) = \log\left[\max_{x \in \mathfrak{S}} \frac{\varphi(x)}{g(x)} \max_{x \in \mathfrak{S}} \frac{g(x)}{\varphi(x)}\right] = \left[\max_{x \in \mathfrak{H}} \varphi(x) \Big/ \min_{x \in \mathfrak{H}} \varphi(x)\right] = \log\left(\frac{M}{m}\right).$$

Согласно (2.3) $\psi(x)$ будет линейным, положительным и ограниченным на некотором конусе $\mathfrak{S}'$, плотном в $\mathfrak{S}$, так как если x_1, $x_2 \in \mathfrak{S}'$, то в возрастающей последовательности A-конусов существует некоторый конус $\mathfrak{S}_i$, который их содержит; отсюда x_1, $x_2 \in \mathfrak{S}_i$.

Из полноты $\mathfrak{S}_i$ следует, что все разложения элементов $x_1, x_2, x_1 + x_2$, а следовательно, и множества $[x_1]$, $[x_2]$, $[x_1 + x_2]$ лежат в $\mathfrak{S}_i$, откуда вытекает, что можно повторить рассуждения из (3.2) и доказать линейность функционала $\psi(x)$ на $\mathfrak{S}' = \bigcup\limits_1^\infty \mathfrak{S}_i$.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ — носитель конуса $\mathfrak{S}$, значит, $z \in \mathfrak{L} \Leftrightarrow z = x - y$; $x, y \in \mathfrak{S}$. Подпространство $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$, определенное соотношением $z \in \mathfrak{L}' \Leftrightarrow z = x - y$; $x, y \in \mathfrak{S}'$ будет, очевидно, плотным в $\mathfrak{L}$.

Определим теперь линейный функционал $\bar{\psi}(x)$ на $\mathfrak{L}'$ таким образом:

$$\bar{\psi}(z) = \psi(x) - \psi(y)\,; \quad z = x - y\,; \quad x, y \in \mathfrak{S}'\,.$$

Независимость числа $\bar{\psi}(z)$ от способа представления очевидна, так как

$$z = x_1 - y_1 = x - y \Rightarrow x_1 + y = x + y_1$$

и следовательно, $\psi(x_1) + \psi(y) = \psi(x) + \psi(y_1)$ откуда $\psi(x_1) - \psi(y_1) = \psi(x) - - \psi(y)$.

Так как $\psi(x)$ ограничен на $\mathfrak{S}'$, то он ограничен и на $\mathfrak{L}'$; поэтому существует его расширение на $\mathfrak{L}$. Таким образом мы получим функционал $\bar{\psi}(x)$, линейный и непрерывный на $\mathfrak{L}$ и положительный на $\mathfrak{S}$. Притом $\bar{\psi}(x) = \psi(x)$ для $x \in \mathfrak{S}'$.

Найдем теперь расстояние полученного таким образом функционала $\bar{\psi}(x)$ от $\varphi(x)$:

$$\varrho(\varphi, \bar{\psi}) = \log\left[\max_{x\in\mathfrak{S}} \frac{\bar{\psi}(x)}{\varphi(x)} \max_{x\in\mathfrak{S}} \frac{\varphi(x)}{\bar{\psi}(x)}\right] = \log\left[\max_{x\in\mathfrak{S}} \frac{\bar{\psi}(x)}{\varphi(x)} \Big/ \min_{x\in\mathfrak{S}} \frac{\bar{\psi}(x)}{\varphi(x)}\right] =$$
$$= \log\left[\sup_{x\in\mathfrak{S}'} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \Big/ \inf_{x\in\mathfrak{S}'} \frac{\bar{\psi}(x)}{\varphi(x)}\right].$$

Так как $\psi(x) \geqq \varphi(x)$ для $x \in \mathfrak{S}$, то тем более будет $\psi(x) \geqq \varphi(x)$ для $x \in \mathfrak{S}'$ и, следовательно, $\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} \geqq 1$, откуда $\varrho(\varphi, \bar{\psi}) \leqq \log\left[\sup\limits_{x\in\mathfrak{S}} \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]$.

Если ввести еще $\mathfrak{H}' = \mathfrak{S}' \cap \mathfrak{H}$, то можно написать

$$\varrho(\varphi, \bar{\psi}) \leqq \log\left[\sup_{x\in\mathfrak{H}'} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right] \leqq \log\left[\sup_{x\in\mathfrak{H}'} \psi(x) \Big/ \inf_{x\in\mathfrak{H}'} \varphi(x)\right] \leqq \log\left(\frac{M}{m}\right) = \varrho(\varphi, g)\,.$$

Однако, так как функционал $g(x)$ был произвольным, то из этого следует утверждение нашей теоремы.

Простым следствием является.

Теорема 4.3. *Пусть $\varphi(x)$ — положительный субаддитивный функционал на А—С-конусе $\mathfrak{S}$. Тогда функционал $\psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(x)$ уже будет искомой наилучшей линейной аппроксимацией:*

$$\varrho(\varphi, \psi) = \inf_{g\in L} \varrho(\varphi, g)\,; \quad \psi \in L\,.$$

Доказательство следует из того, что каждый А-конус является одновременно и В-конусом.

Теорему можно сформулировать так: *Наилучшей линейной аппроксимацией субаддитивного функционала является предел его верхних функционалов.*

Аналогичная теорема имела бы место для наилучшей линейной аппроксимации супераддитивного функционала $\varphi(x)$:

$$\varrho(\varphi, \vartheta) = \inf_{g \in L} \varrho(\varphi, g)\ ; \quad \vartheta \in L\ , \qquad \text{где} \qquad \vartheta(x) = \lim \varphi_n(x)\ .$$

IV. ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть дано однородно интегральное уравнение

$$\text{(1)} \qquad \int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t) = \lambda y(x)\ ,$$

где $\Gamma(x, t)$ — непрерывное, положительно определенное положительное ядро, а $M(t)$ — какая-либо функция, неубывающая на $\langle 0, 1\rangle$ или, что то же самое, неотрицательная мера на $\langle 0, 1\rangle$. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех неотрицательных мер на $\langle 0, 1\rangle$. Очевидно, $\mathfrak{S}$ будет конусом в линейном пространстве $\mathfrak{L}$ всех функций с конечным изменением, в котором введена топология при помощи слабой сходимости

$$\text{(2)} \qquad Q_i,\, Q \in \mathfrak{L},\ \lim Q_i = Q \Leftrightarrow \lim \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{d}Q_i(x) = \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{d}Q(x)\ ,$$

для любой непрерывной функции $\varphi(x) \in C\ \langle 0, 1\rangle$. Каждое собственное значение λ_i указанного уравнения является неотрицательным однородным функционалом на $\mathfrak{S}$. Наибольшее собственное значение λ_1 будет даже положительным функционалом, и возникает вопрос о его наилучшей линейной аппроксимации. Как раз этот вопрос и послужил поводом к настоящей работе. Нашей целью ялвяется показать, что этой наилучшей линейной аппроксимацией будет „след“ уравнения, то есть $\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)$. Для этого мы докажем, что множество $\mathfrak{S}$ всех неотрицательных мер будет локально компактным конусом, имеющим свойства В и С и что функционал $\lambda_1 = \lambda(M)$ — непрерывный положительный и субаддитивный на $\mathfrak{S}$; таким образом выполняются условия теоремы (3.3).

Прежде всего докажем следующую

Теорему 1.4. *Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех неотрицательных мер на $\langle 0,1\rangle$. Тогда $\mathfrak{S}$ будет локально компактным С-конусом в пространстве всех мер $\mathfrak{L}$ на $\langle 0, 1\rangle$, топологизированным с помощью соотношения* (2).

Доказательство. Возьмем линейный функционал $g(M) = \int\limits_0^1 \mathrm{d}M$, $M \in \mathfrak{S}$; $g(M)$ будет, очевидно, положительным непрерывным и линейным на $\mathfrak{S}$; итак, $\mathfrak{S}$ обладает свойством C.

Пусть теперь $Q \in \mathfrak{L}$; Q есть мера общего вида на $\langle 0, 1 \rangle$, $Q(x)$ — функция с конечным изменением, которое мы будем обозначать через $\operatorname{Var} Q$. Возьмем множество $\mathfrak{K}^*$, определенное соотношением

$$Q \in \mathfrak{K}^* \Leftrightarrow \operatorname{Var} \leqq 1 .$$

Как видно, напр., из [1], множество $\mathfrak{K}^*$ компактно в смысле топологии, введенной соотношением (2) (слабая компактность).

Определим теперь множество $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$ так:

$$M \in \mathfrak{K} \Leftrightarrow g(M) \leqq 1 .$$

Очевидно, будет $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}^*$, ибо $\operatorname{Var} M = \int\limits_0^1 \mathrm{d}M = g(M)$. Итак, множество $\mathfrak{K}$ компактно, что согласно (1, 2) значит, что $\mathfrak{S}$ локально компактно; это и требовалось доказать.

Рассмотрим еще более подробно свойство А. Докажем

Теорему 2.4. *Свойство* А *является аддитивным свойством конуса, то есть: если конус* $\mathfrak{S}$ *является прямой суммой двух* А*-конусов* $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, *то и конус* $\mathfrak{S}$ *имеет свойство* А.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — какой-либо конус, который можно представить в виде прямой суммы подконусов $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, обладающих свойством А. Имеем $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$. Это значит, что каждый элемент $x \in \mathfrak{S}$ можно однозначно представить в виде $x = x' + x''$; $x' \in \mathfrak{S}'$; $x'' \in \mathfrak{S}''$.

Пусть теперь $x_1 + x_2 = \sum\limits_1^n y_i$. Положим

$$x_j = x_j' + x_j'' , \quad j = 1, 2, \quad x_j' , y_i' \in \mathfrak{S}' ;$$
$$y_i = y_i' + y_i'' , \quad i = 1, 2, \ldots, n , \quad x_j'' , y_i'' \in \mathfrak{S}'' .$$

Итак, мы имеем $x_1' + x_2' = \sum\limits_1^n y_i'$; $x_1'' + x_2'' = \sum\limits_1^n y_i''$ и, следовательно, существуют элементы $u_1', u_2' \ldots, u_{r'}'$; $u_1'' , u_2'' , \ldots u_{r''}''$ такие, что:

$$x_1' = \sum_1^{s'} u_i' ; \quad x_1'' = \sum_1^{s''} u_i'' ; \quad x_2' = \sum_{s'+1}^{r'} u_i' ; \quad x_2'' = \sum_{s''+1}^{r''} u_i''$$

розложения $R_1' \ldots R_n'$; $R_1'' \ldots R_n''$ множеств R', R'' индексов $\{1', 2', \ldots, r'\}$ и $\{1'', 2'', \ldots, r''\}$ таковы, что

$$y_i' = \sum_{j \in R_i'} u_j' ; \quad y_i'' = \sum_{j \in R_i''} u_j'' ; \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Возьмем теперь $r' + r''$ элементов $u_1', u_2', \ldots, u_{r'}', u_1'' , u_2'' , \ldots, u_{r''}''$.

Очевидно, будет

$$x_1 = \sum_1^{s'} u_i' + \sum_1^{s''} u''; \quad x_2 = \sum_{s'+1}^{r'} u_i' + \sum_{s''+1}^{r''} u_i'';$$
$$y_i = \sum_{j \in R_i'} u_j' + \sum_{j \in R_i''} u_j'', \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если расположить элементы $u_1', u_2', \ldots, u_{r'}', u_1'', u_2'', \ldots, u_{r''}''$ следующим образом $u_1', u_2', \ldots, u_{s'}', u_1'', u_2'', \ldots u_{s''}'', u_{s'+1}', \ldots, u_{r'}, u_{s''+1}'', \ldots, u_{r''}''$, и если определить разложение множества $\{1', 2', \ldots, r', 1'', 2'', \ldots, r''\}$ как систему множеств $R_i = R_i' \cup R_i''$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то мы убедимся, что конус $\mathfrak{S}$ обладает свойством A. Обратим еще внимание на то, что необходимое число слагаемых $[r = r' + r'']$ обладает и аддитивным свойством.

Пусть теперь $\mathfrak{E}_k$ есть k-мерное векторное пространство. Обозначим через $\mathfrak{S}_k$ конус в $\mathfrak{E}_k$, состоящий из весх векторов с неотрицательными составляющими

$$[x_1, x_2, \ldots x_k] \in \mathfrak{S}_k \Leftrightarrow x_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Докажем, что все $\mathfrak{S}_k$ являются A-конусами.

Теорема 3.4. *Конус $\mathfrak{S}_k$ всех k-мерных векторов с неотрицательными составляющими имеет свойство* A *для всех натуральных* $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Согласно (2.4) достаточно доказать утверждение для $k = 1$, так как $\mathfrak{S}_k$ можно представить в виде прямой суммы одномерных конусов. Итак, пусть $k = 1$; тогда $\mathfrak{S}_1$ будет множеством неотрицательных чисел $\mathfrak{S}_1 = \langle 0, \infty)$. Пусть $x_1, x_2, y_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и пусть $x_1 + x_2 = \sum_1^n y_i$. Предположим, что $x_1 \leqq x_2$; $y_1 \leqq y_2 \leqq y_3 \leqq \ldots \leqq y_n$.

Если $x_1 \leqq y_1$, то $n + 1$ чисел $x_1, y_1 - x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ образуют уже искомое разложение. Пусть вообще

$$x_1 \geqq y_1, \quad x_1 \geqq y_1 + y_2, \ldots x_1 \geqq y_1 + y_2 + \ldots + y_s;$$
$$x_1 \leqq y_1 + y_2 + \ldots + y_s + y_{s+1}.$$

Тогда существует число $u \geqq 0$ так, что $x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_s + u$; так как, очевидно, $y_{s+1} \geqq u$, то существует $v \geqq 0$ так, что $y_{s+1} = u + v$.

Теперь, однако, система $n + 1$ чисел $y_1, y_2, \ldots, y_s, u, v, y_{s+2}, y_{s+3}, \ldots, y_n$ дает искомое разложение, чем и доказывается наше утверждение. Из аддитивного свойства числа нужных слагаемых r мы получим $r = k(n + 1)$.

Теперь мы покажем, что далеко не все конусы, содержащиеся в $\mathfrak{E}_k$ обладают свойством A. В этом можно убедиться следующим рассуждением:

Пусть $\mathfrak{S}$ — какой-либо C-конус и пусть

$$z = x_1 + x_2 = \sum_1^n y_i, \quad x_1, x_2, y_i \in \mathfrak{S}, \quad x_1, x_2, y_i \neq \emptyset.$$

Возьмем положительный линейный функционал $g(x)$ такой, что $g(z) = 1$.

Положим

$$x_j = x'_j g(x_j)\,, \quad j = 1, 2\,; \quad y_i = y'_i g(y_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

и образуем множество $\mathfrak{H}$ так, что

$$x \in \mathfrak{H} \Leftrightarrow g(x) = 1\,.$$

Очевидно, будет

$$x'_1, x'_2, y'_i \in \mathfrak{H}\,; \quad g(x_1) + g(x_2) = 1\,, \quad \sum_1^n g(y_i) = 1\,.$$

Множество $\mathfrak{H}$ выпукло. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathfrak{H}$; $k \geqq 2$. Введем множество $(v_1, v_2, \ldots, v_k) \subset \mathfrak{H}$ таким образом:

$$v \in (v_1, v_2, \ldots, v_k) \Leftrightarrow v = \sum_1^k t_i v_i\,, \quad \text{где} \quad t_i > 0$$

и, кроме того, $\sum_1^k t_i = 1$. Множество $(v_1, v_2, \ldots v_k)$ мы назовем *клеткой* и будем требовать $k \geqq 2$. Теперь мы будем говорить, что точка $z \in \mathfrak{H}$ является *вершиной* множества $\mathfrak{H}$, если она не лежит ни в какой клетке.

Преположим, что точки $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n \in \mathfrak{H}$ являются вершинами множества $\mathfrak{H}$. Если бы конус $\mathfrak{S}$ имел свойство A, должно было бы существовать общее разложение элемента z и, следовательно, элементы $u_1, u_2, \ldots, u_r$, $u_i \neq \emptyset$, такие, что

$$x_1 = \sum_1^s u_i\,; \quad x_2 = \sum_{s+1}^r u_i\,; \quad y_i = \sum_{j \in R_i} u_j\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — дизъюнктное разложение множества $\{1, 2, 3, \ldots, r\}$.

Положим $u_i = u'_i g(u_i)$; тогда $u'_i \in \mathfrak{H}$, $\sum_1^r g(u_i) = 1$. Но теперь будет $x'_1 g(x_1) = \sum_1^s u'_i g(u_i)$, откуда $x'_1 = \sum_1^s t_i u'_i$, где $t_1 = \dfrac{g(u_i)}{g(x_1)}$. Очевидно, $t_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$; $\sum_1^s t_i = 1$ и, следовательно, справедливо утверждение:

Если $s \geqq 2$, то x'_1 лежит в клетке, то есть $x'_1 \in (u'_1, u'_2, \ldots, u'_s)$. Но это противоречит предположению, что x'_1 — вершина. Покажем теперь, что для r имеет место неравенство $r \geqq n + 1$. Действительно, если бы было $r = n$, то элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ были бы тождественны с $y_1, y_2, \ldots, y_n$, и мы получили бы $x_1 = \sum_1^s y_i$, $x_2 = \sum_{s+1}^n y_i$, откуда

$$x'_1 g(x_1) = \sum_1^s y'_i g(y_i)\,; \quad x'_2 g(x_2) = \sum_{s+1}^n y'_i g(y_i)\,.$$

Отсюда следовало бы, однако, при условии, что элементы $x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, y_n$ отличны друг от друга, что или x_1 или x_2 лежит в клетке, что противоречит допущению, что $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$-вершины. Поэтому $r \geqq n + 1$. При условии $n \geqq 2$ будет поэтому $r \geqq 3$ и, следовательно, или $s \geqq 2$ или $r - s \geqq 2$, откуда опять следует, что или x'_1 или x'_2 лежит в клетке, и мы опять получаем противоречие. Этим самым мы показали:

Если $x_1 + x_2 = \sum_1^n y_i$, $n \geqq 2$, и если $x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, y_n \neq \emptyset$, не равны между собой и такие, что элементы $x_1 g^{-1}(x_1)$, $x_2 g^{-1}(x_2)$, $y_i g^{-1}(y_i)$ образуют вершины множества $\mathfrak{H}$, то конус $\mathfrak{S}$ не может иметь свойства А. Этот случай наступит уже в $\mathfrak{E}_3$. Действительно, возьмем четыре вектора

$$\boldsymbol{r}_1 = [1, 1, 1]\,; \quad \boldsymbol{r}_2 = [1, 0, 1]\,; \quad \boldsymbol{r}_3 = [0, 1, 1]\,; \quad \boldsymbol{r}_4 = [0, 0, 1]$$

и образуем конус $\mathfrak{S}$ как множество неотрицательных линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_4$. Теперь, очевидно, $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3$. Но так как векторы $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4$ суть вершины квадрата $\mathfrak{H}$, определенного соотношением:

$$\boldsymbol{r} \in \mathfrak{H} \Leftrightarrow \boldsymbol{r} = \sum_1^4 t_i \boldsymbol{r}_i\,; \quad \sum_1^4 t_i = 1\,; \quad t_i \geqq 0\,,$$

следует из этого, что конус $\mathfrak{S}$ не может иметь свойства А.

Теперь мы докажем важное утверждение:

Теорема 4.4. *Конус всех неотрицательных мер на* $\langle 0, 1\rangle$ *обладает свойством* В.

Доказательство. Возьмем натуральное число n и разделим интервал $\langle 0, 1\rangle$ на 2^n равных частей с делящими точками $x_r = r2^{-n}$, $r = 0, 1, 2, \ldots, 2^n$. Положим $k_n = 2^n + 1$ и образуем подконус $\mathfrak{S}_{k_n}$ конуса $\mathfrak{S}$, состоящий из тех мер, которые отличны от нуля самое больше в указанных точках деления. $\mathfrak{S}_{k_n}$, очевидно, полны в $\mathfrak{S}$, а так как они изоморфны конусам всех k_n-мерных векторов с неотрицательными составляющими, то имеют согласно (3.4) свойство А. Нетрудно показать, что $\mathfrak{S} = \overline{\bigcup_1^\infty \mathfrak{S}_{k_n}}$, так как каждую неубывающую функцию $M(x)$ можно образовать как предел ступенчатых функций, чем и доказывается свойство В конуса $\mathfrak{S}$.

Остается еще доказать

Теорему 5.4. *Пусть $\Gamma(x, t)$ — положительно определенное положительное и непрерывное ядро интегрального уравнения* (1). *Тогда первое собственное значение $\lambda(M)$ будет положительным непрерывным субаддитивным функционалом на конусе всех неотрицательных мер.*

Доказательство. Для числа $\lambda(M)$ имеет место, как известно, экстремальный принцип

$$\lambda(M) = \sup_{y \in G\langle 0,1\rangle} \frac{\int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(x)\, y(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}M(t)}{\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M}\,,$$

причем, конечно, предполагается, что непрерывная функция $y(x) \in C\langle 0, 1\rangle$ такова, что знаменатель не равен нулю. Подставив в правую часть функцию $y(x) = 1$, мы получим неравенство

$$\lambda(M) \geqq \frac{\int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}M(t)}{\int_0^1 \mathrm{d}M}\,.$$

Итак, $\lambda(M) > 0$ для $M \neq \emptyset$, так как по условию имеем $\Gamma(x, t) > 0$ для $x, t \in \langle 0, 1\rangle$; этим мы доказали, что функционал $\lambda(M)$ положителен. Непрерывность следует из работы [2].

Докажем теперь субаддитивность. Так как функционал $\lambda(M)$ непрерывен, при доказательстве субаддитивности можно ограничиться каким-либо подконусом $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$, плотным в $\mathfrak{S}$. Возьмем в качестве $\mathfrak{S}'$ множество таких нертоицательных мер, что имеет место утверждение $\mathrm{d}M(x) > 0$ для любого $x \in \langle 0, 1\rangle$. Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{S}'$ плотно в $\mathfrak{S}$.

Пусть теперь $M_1, M_2 \in \mathfrak{S}'$, $M = M_1 + M_2$. Пусть, кроме того, $y(x)$ — — собственная функция уравнения (1) для $M = M_1 + M_2$. Тогда из экстремального принципа следуют соотношения

$$\lambda(M_1 + M_2) = \frac{\int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(x)\, y(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}M(t)}{\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M}\,,$$

$$\lambda(M_1) \geqq \frac{\int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(x)\, y(t)\, \mathrm{d}M_1(x)\, \mathrm{d}M_1(t)}{\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M_1}\,,$$

$$\lambda(M_2) \geqq \frac{\int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(x)\, y(t)\, \mathrm{d}M_2(x)\, \mathrm{d}M_2(t)}{\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M_2}\,.$$

Положим для краткости $\lambda(M_1) = \lambda_1$, $\lambda(M_2) = \lambda_2$, $\lambda(M_1 + M_2) = \lambda$,

$$\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M_1 = l_1\,; \quad \int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M_2 = l_2\,,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(x)\, y(t)\, \mathrm{d}Q_1(x)\, \mathrm{d}Q_2(t) = B(Q_1, Q_2)\,,$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ — функции с конечным изменением, $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{L}$. По предположению и положительной определенности ядра $\Gamma(x, t)$ будет $B(Q, Q) \geqq 0$ для $Q \in \mathfrak{L}$. Приведенные выше соотношения можно записать в виде

$$\lambda = \frac{B[M_1 + M_2, M_1 + M_2]}{l_1 + l_2}, \quad \lambda_1 \geqq \frac{B(M_1, M_1)}{l_1}, \quad \lambda_2 \geqq \frac{B(M_2, M_2)}{l_2},$$

откуда после несложных преобразований получим

$$(\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda)(l_1 + l_2)\, l_1 l_2 \geqq l_2^2 B(M_1, M_1) - 2 l_1 l_2 B(M_1, M_2) + l_1^2 B(M_2, M_2) .$$

Однако, правая часть равна $B[(l_2 M_1 - l_1 M_2), (l_2 M_1 - l_1 M_2)]$ и имеет неотрицательное значение. Так как ввиду $M_1, M_2 \in \mathfrak{S}'$ значения l_1, l_2 не равны нулю, следует отсюда, что $\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda \geqq 0$, а из этого уже вытекает наше утверждение.

Теорема 6.4. *Пусть $\mathfrak{S}_k$ — конус k-мерных векторов с неотрицательными составляющими. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывный субаддитивный функционал на $\mathfrak{S}_k$. Тогда*

$$\varphi^n(x) = \sum_1^k x^i a_i \quad \text{для} \quad n \geqq k, \quad \text{где}$$

$$a_i = \varphi(e_i)\,; \quad x = \sum_1^k x^i e_i\,; \quad e_i = [\underbrace{0, 0, \ldots,}_{i} 1, 0, \ldots 0]\,; \quad i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{S}_k$. Существует разложение вектора $x = \sum_1^n y_i$ такое, что $\varphi^n(x) = \sum_1^n \varphi(y_i)$. Положим $y_i = \sum_{\alpha=1}^k y_i^\alpha e_\alpha$. Тогда из субаддитивности $\varphi(x)$ следует

$$\varphi^n(x) = \sum_1^n \varphi(y_i) \leqq \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^k y_i^\alpha a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k x^\alpha a_\alpha\,,$$

так как $\sum_1^n y_i^\alpha = x^\alpha$.

Итак, $\varphi^n(x) \leqq \sum_{\alpha=1}^k x^\alpha a_\alpha$ для любого натурального n.

Пусть теперь $n \geqq k$; тогда согласно (4.2) будет $\varphi^n(x) \geqq \varphi^k(x)$ и по определению имеем $\varphi^k(x) = \sum_1^k \varphi(y_i)$, где y_i — подходящее разложение $\sum_1^k y_i = x$. Однако, соотношение $\sum_1^k x_i e_i = x$ является также разложением на k слагаемых, так что $\varphi^n(x) \geqq \varphi^k(x) \geqq \sum_1^k x^i a_i$. Из этих двух неравенств уже следует наше утверждение.

Докажем теперь заключительную теорему.

Теорема 7.4. *Пусть $\Gamma(x, t)$ — положительное, непрерывное положительно определенное ядро интегрального уравнения* (1). *Тогда наилучшим линей-*

ным приближением функционала $\lambda(M)$ будет след, а именно функционал $\int\limits_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)$.

Доказательство. Прежде всего мы видим, что в случае, когда только одна единственная точка $x \in \langle 0, 1\rangle$ имеет меру m_x, отличную от нуля, имеет место равенство $\lambda = \Gamma(x, x)\, m_x$.

Согласно (4.4) конус $\mathfrak{S}$ всех неотрицательных мер является В-конусом, причем существующие А-подконусы $\mathfrak{S}_{k_n}$ являются конусами, изоморфными конусам векторов с неотрицательными составляющими размерности $k_n = 2^n + 1$. Согласно (4.4) имеем $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}'}$, где $\mathfrak{S}' = \bigcup\limits_1^\infty \mathfrak{S}_{k_n}$. Пусть теперь $M \in \mathfrak{S}'$; тогда существует такое n, что $M \in \mathfrak{S}_{k_n}$. Меру M можно представить в виде $M = \sum\limits_{r=0}^{2^n} m_r e_r$, где $e_r(x)$ — ступенчатая функция

$$e_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x > r\, 2^{-n}\,, \\ \emptyset & \text{для} \quad x \leqq r\, 2^{-n}\,, \end{cases}$$

а m_r — величина скачка функции $M(x)$ в точке $x_r = r\, 2^{-n}$.

Согласно (5.4) $\lambda(M)$ есть субаддитивный функционал и, следовательно, согласно (6.4) для $i \geqq k_n$ имеет место

$$\lambda^i(M) = \sum_{r=0}^{2^n} \lambda(e_r)\, m_r = \sum_{r=0}^{2^n} \Gamma(x_r, x_r)\, m_r\,,$$

что можно записать в виде интеграла Стильтьеса $\int\limits_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)$. Итак, мы имеем

$$\psi(M) = \lim \lambda^i(M) = \int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x) \quad \text{для} \quad M \in \mathfrak{S}'\,.$$

Расширяя этот функционал на весь конус $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}'}$, мы получим функционал $\int\limits_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)$, $M \in \mathfrak{S}$, являющийся согласно (3.3) наилучшим линейным приближением функционала $\lambda(M)$.

Литература

[1] *Л. А. Люстерник* и *В. И. Соболев:* Элементы функционального анализа. Москва-Ленинград, Гостехиздат 1951.

[2] *Л. Янош:* Вывод одного неравенства для первых собственных значений двух краевых задач. Чехосл. мат. ж. *10* (85), 1960, 68—82.

Summary

HOMOGENEOUS FUNCTIONALS ON LOCALLY COMPACT CONES

Ludvík Janoš, Praha

A cone $\mathfrak{S}$ is a subset of a topological linear space $\mathfrak{L}$ with the following properties,

1. $x_1, x_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow x_1 + x_2 \in \mathfrak{S}$,
2. $\alpha \geqq 0$, $x \in \mathfrak{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathfrak{S}$,
3. $x_1, x_2 \in \mathfrak{S}$, $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 0$,
4. $\mathfrak{S}$ is closed in $\mathfrak{L}$.

If there exists a neighbourhood U_0 of the zero element, such that $\overline{\mathfrak{S} \cap U_0}$ is compact, then the cone is said to be locally compact.

Now let $\varphi(x)$ be a continuous homogeneous functional on a locally compact cone $\mathfrak{S}$, and n a positive integer. Define functionals $\varphi^n(x)$ by

$$\varphi^n(x) = \sup_{\sum_{i=1}^{n} y_i = x} \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i) .$$

If the functional $\varphi(x)$ is continuous positive and sub-additive, then, under certain assumptions on the algebraico-topological structure of the cone $\mathfrak{S}$, the functional $\psi(x)$ defined by $\psi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi^n(x)$ is linear on a certain sub-cone $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ dense in $\mathfrak{S}$. Extending it to $\mathfrak{S}$, we obtain the best linear approximation of the functional $\varphi(x)$; best in the sense of a distance-function ϱ, defined on the set of equivalence-classes of positive homogeneous continuous functionals on $\mathfrak{S}$, thus:

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \log \left[\max_{x \in \mathfrak{S}} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \max_{x \in \mathfrak{S}} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \right] .$$

Let now $\Gamma(x, t)$ be a positive definite kernel of the integral equation

$$\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t) = \lambda y(x) ,$$

where M is any non-negative measure function on the interval $\langle 0, 1 \rangle$. The set of all non-negative measure functions is a locally compact cone $\mathfrak{S}$ in the linear space of all measure functions, topologised by weak convergence. The first eigen-value $\lambda(M)$ of the integral equation is a homogeneous continuous sub-additive functional on $\mathfrak{S}$, and is positive on $\mathfrak{S}$ if $\Gamma(x, t) > 0$ for $x, t \in \langle 0, 1 \rangle$. The best linear approximation of $\lambda(M)$ is the functional $\int_0^1 \Gamma(x, x)\, \mathrm{d}M(x)$, the trace of the integral equation.