Milan Práger

Об одном принципе сходимости в пространстве Гильберта

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 2, 271–282

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100409`

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

МИЛАН ПРАГЕР (Milan Práger), Прага

(Поступило в редакцию 16/V 1959 г.)

Доказывается сходимость некоторых последовательностей операторов, полученных последовательным сложением проекторов. Приведенные теоремы могут быть использованы для доказательства сходимости различных приближенных методов; применение иллюстрируется на примере решения системы линейных уравнений.

Много математических задач можно сформулировать так, что в подходящем пространстве Гильберта H мы ищем проекцию данного элемента x на данное подпространство H_0. К задачам этого типа относятся, например, краевые задачи для самосопряженных дифференциальных уравнений эллиптического типа в частных производных, решение системы алгебраических линейных уравнений с положительно определенной матрицей и т. под.

Различные приближенные методы решения этих задач можно истолковать как приближенное построение искомой проекции. Так, например, известный метод Ритца приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой, по существу, следующий ход решения: возьмем последовательность подпространств H_n конечных размерностей так, чтобы $H_n \subset H_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = H_0$; тогда последовательность приближенных решений будет последовательностью проекций $P_n x$ на эти подпостранства, ибо, очевидно, имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ (P_0 — проектор на H_0). Аналогичным образом можно истолковать и итерационный метод Зайделя для системы линейных алгебраических уравнений и т. д.

Другой метод приближенного построения искомой проекции был выведен (см. [1] и [2]) при помощи анализа известного альтернирующего алгорифма Шварца для дифференциальных уравнений в частных производных. Этот процесс можно истолковать как построение проекции $P_0 x$ последовательным попеременным проектированием на два подпространства H_1

и H_2, пересечением которых является подпространство H_0. Дело в том, что последовательность $(P_1P_2)^n x$ сходится к $P_0 x$ для любого элемента $x \in H$, т. е. последовательность операторов $(P_1P_2)^n$ сходится к проектору P_0 сильно. Темой настоящей статьи являются некоторые теоремы, обобщающие этот принцип сходимости. При помощи этих теорем можно, например, доказать сходимость алгорифма Шварца для более чем двух областей, но их можно использовать и в других случаях. В качестве примера применения дается доказательство сходимости общего группового метода релаксаций для системы линейных алгебраических уравнений с положительно определенной матрицей. Оказывается, что достаточным условием сходимости этого метода является применение релаксации к каждому неизвестному бесконечное число раз, безразлично в группе ли оно или самостоятельно.

1. ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

Под пространством Гильберта мы всюду понимаем вещественное пространство Гильберта со скалярным произведением (u, v); мы воспользуемся терминологией из [3].

Теорема 1.1. *Пусть A — ограниченный линейный оператор в пространстве Гильберта H, обладающий следующими свойствами:*

1. *A — симметрический оператор,* 2. *A — положительный оператор,* 3. *$Ax = x \Rightarrow x = O$,* 4. *$\|A\| \leqq 1$ (O есть нулевой элемент пространства H).*

Тогда последовательность операторов A^n сходится сильно к нулевому элементу пространства H, т. е. для любого элемента $x \in H$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n x\| = 0$.

Доказательство.[1]) Оператор A^k является для любого k положительным оператором, и ввиду свойства 4 будет

$$|(A^k x, x)| \leqq \|A^k x\| \,.\, \|x\| \leqq \|x\|^2 \,.$$

Обозначив через I тождественный оператор, получаем

$$((I - A^k)\, x, x) = \|x\|^2 - (A^k x, x) \geqq 0 \,.$$

Итак, $I - A^k$ является для каждого k положительным оператором.

Возьмем теперь какой-либо элемент $x \in H$. Тогда последовательность $(A_n x, x)$ сходится. Действительно, для $n > m$ будет

$$(A^m x, x) \geqq (A^n x, x) \,,$$

так как

$$(A^m(I - A^{n-m})\, x, x) \geqq 0 \,,$$

[1]) Доказательство проведено по методу, аналогичному использованному при доказательстве теоремы I в [1].

потому что оператор $A^m(I - A^{n-m})$, будучи произведением двух положительных коммутативных операторов, также положителен (см., напр., [3]).

Итак, последовательность $(A^n x, x)$ монотонна и ограничена. Пусть $d = \lim_{n\to\infty} (A^n x, x)$. Рассмотрим, далее, выражение $\|A^k x - A^l x\|$. Очевидно,

$$\begin{aligned}\|A^k x - A^l x\|^2 &= (A^k x - A^l x, A^k x - A^l x) = \\ &= (A^k x, A^k x) - 2(A^k x, A^l x) + (A^l x, A^l x) = \\ &= (A^{2k} x, x) - 2(A^{k+l} x, x) + (A^{2l} x, x)\,.\end{aligned}$$

Если взять k и l достаточно большими, то будет $(A^{2k}x, x) < d + \varepsilon$, $(A^{2l}x, x) < d + \varepsilon$ и, конечно, $(A^{k+l}x, x) \geqq d$, а следовательно и

$$\|A^k x - A^l x\|^2 < d + \varepsilon - 2d + d + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

Итак, $A^n x$ есть сходящаяся в себе последовательность, и ввиду полноты она сходится. Пусть $y = \lim_{n\to\infty} A^n x$. Так как $y = Ay$, получаем $y = O$ согласно свойству 3 оператора A, ч. и т. д.

Отсюда нетрудно вывести следующий принцип сходимости.

Теорема 1.2. *Пусть H — гильбертово пространство, $H_i (i = 1, \ldots, k)$ — подпространства пространства H. Пусть P_i — проектор на подпространство H_i. Пусть, далее, $H_0 = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$ и пусть P_0 — проектор на подпространство H_0. Тогда последовательность операторов $(P_1 P_2 \ldots P_{k-1} P_k P_{k-1} \ldots P_2 P_1)^n$ сходится к проектору P_0 сильно, т. е. для любого элемента $x \in H$*

$$\lim_{n\to\infty} \|(P_1 P_2 \ldots P_{k-1} P_k P_{k-1} \ldots P_2 P_1)^n x - P_0 x\| = 0\,.$$

Доказательство. Теорему докажем прежде всего для случая, когда H_0 — нулевое подпространство. В этом случае наше утверждение вытекает из теоремы 1,1 так как оператор $P_1 P_2 \ldots P_{k-1} P_k P_{k-1} \ldots P_2 P_1$ обладает, как нетрудно обнаружить, свойствами 1, 2 и 4 оператора A теоремы **1.1.** Свойство 3 можно проверить так: если элемент x не лежит в $\bigcap_{i=1}^{k} H_i$, то обязательно будет $\|P_1 P_2 \ldots P_k \ldots P_2 P_1 x\| < \|x\|$ и, следовательно, не может быть $P_1 P_2 \ldots P_k \ldots P_2 P_1 x = x$.

Итак, пусть H_0 не является нулевым подпространством. Положим $H_i = H_0 + H_{i0}^*$, где H_{i0}^* — ортогональное дополнение H_0 в H_i. Пусть P_{i0}^* — проектор на H_{i0}. Теперь $\bigcap_{i=1}^{k} H_{i0}^* = O$. Далее нетрудно убедиться, что для любого элемента $x \in H$ будет

$$P_1 P_2 \ldots P_k \ldots P_2 P_1 x = P_0 x + P_{10}^* P_{20}^* \ldots P_{k0}^* \ldots P_{20}^* P_{10}^*\,,$$

а также

$$(P_1P_2\dots P_k\dots P_2P_1)^nx = P_0x + (P_{10}^*P_{20}^*\dots P_{k0}^*\dots P_{20}^*P_{10}^*)^nx\,.$$

Так как $\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_{i0}^* = O$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (P_{10}^*P_{20}^*\dots P_{k0}^*\dots P_{20}^*P_{10}^*)^nx = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} (P_1P_2\dots P_k\dots P_2P_1)^nx = P_0x$, ч. и т. д.

Замечание. Таким же образом можно было бы получить другую теорему о сходимости, применив теорему 1.1 к оператору $A = \frac{1}{n}(P_1 + \dots + P_n)$. Однако, приближенные решения, построенные при помощи такой теоремы, сходятся обычно медленнее, чем приближенные решения, построенные по теореме 1.2.

Теперь можно поставить вопрос о сходимости последовательности A^nx для $n\to\infty$, если A будет другим произведением проекторов $P_1, \dots, P_k$, или, более общо, вопрос о сходимости последовательности $P_{i_n}\dots P_{i_2}P_{i_1}x$ для $n\to\infty$. Частичные ответы содержатся в дальнейших теоремах.

Определение 1.1. Пусть k — данное натуральное число. Мы будем говорить, что последовательность натуральных чисел $\{j_n\}$ *обладает свойстом* (А), если

1. $1 \leqq j_n \leqq k$ для $n = 1, 2, \dots,$

2. каждое из чисел $1, \dots, k$ встречается в последовательности $\{j_n\}$ бесконечное число раз,

3. существует постоянная K так, что для любого i, $(1 \leqq i \leqq k)$ имеет место утверждение: если $j_s = i$, $j_t = i$, $s < t$, $j_p \neq i$ для $s < p < t$, то $t - s < K$.

Теорема 1.3. *Пусть мы имеем пространство Гильберта H и в нем конечное количество подпространств H_i $(i = 1, 2, \dots, k)$. Пусть $H_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i$, и обозначим через P_i проектор на $H_i (i = 0, 1, \dots, k)$. Пусть, далее, дана последовательность натуральных чисел $\{j_n\}$ со свойством (A). Тогда последовательность операторов $A_n = P_{j_n}\dots P_{j_2}P_{j_1}$ сходится слабо к проектору P_0, т. е. для произвольных элементов $x \in H$, $y \in H$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} (A_nx, y) = (P_0x, y)$.*

Доказательство. Предположим прежде всего, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i = O$. Возьмем какой-либо элемент $x \in H$; тогда

$$A_nx = A_{n+1}x + P_{j_{n+1}}^*A_nx\,,$$

где $P_{j_{n+1}}^*$ — проектор на пространство $H_{j_{n+1}}^*$, являющееся ортогональным дополнением подпространства $H_{j_{n+1}}$.

Случай, когда $A_n x = O$ для некоторого n, тривиален. Предположим поэтому, что для всех n будет $A_n x \neq O$. Возможны два случая:

$$\text{(1,1)} \qquad \text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{\|P^*_{j_{n+1}} A_n x\|}{\|A_{n+1} x\|} = 0 \,,$$

б) существует число $\varepsilon > 0$ так, что для подпоследовательности индексов имеет место

$$\text{(1,2)} \qquad \frac{\|P^*_{n_{p+1}} A_{n_p} x\|}{\|A_{n_{p+1}} x\|} > \varepsilon \,.$$

Исследуем сначала случай б).

Так как

$$\|A_{n_p} x\|^2 = \|A_{n_p+1} x\|^2 + \|P^*_{j_{n_p+1}} A_{n_p} x\|^2 \,,$$

из неравенства (1,2) получим

$$\|A_{n_p} x\|^2 \geqq (1 + \varepsilon^2) \|A_{n_p+1} x\|^2 \,.$$

Если положить $\vartheta = \sqrt{\dfrac{1}{1+\varepsilon^2}}$, будет $0 < \vartheta < 1$ и $\|A_{n_p+1} x\| \leqq \vartheta \|A_{n_p} x\|$.

Итак,

$$\text{(1,3)} \qquad \lim_{p\to\infty} \|A_{n_p} x\| = 0 \,.$$

Так как $\|A_m x\| \leqq \|A_n x\|$ для $m > n$, то последовательность $\|A_n x\|$ сходится, но ввиду (1,3) должно быть

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = 0 \,.$$

В этом случае мы получаем даже сильную сходимость последовательности операторов A_n.

Перейдем к случаю а). Докажем, что из любой подпоследовательности последовательности $A_n x$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо к нулевому элементу постранства H. Тем самым будет доказано, что $A_n x$ сходится к O слабо для $n \to \infty$.

Возьмем произвольную подпоследовательность $A_{n_p} x$. Для бесконечного количества индексов p будет $j_{n_p} = l$, где l — одно из чисел $1, \ldots, k$. Без ограничения общности можно предположить, что $l = 1$ и что $j_{n_p} = 1$ для всех p. Последовательность $A_{n_p} x$ ограничена, в силу чего из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Эту подпоследовательность мы будем для простоты опять обозначать через $A_{n_p} x$. Пусть слабый предел этой подпоследовательности будет y. Так как слабое замыкание тождественно с сильным, то $y \in H_1$. Теперь воспользуемся соотношением (1,1) и получим, ввиду ограниченности последовательности $\|A_n x\|$,

$$\text{(1,4)} \qquad \lim_{n\to\infty} \|P^*_{j_{n+1}} A_n x\| = 0 \,.$$

Ввиду того, что последовательность $\{j_n\}$ обладает свойством (А), для каждого p существует число m_p так, что $m_p < K$ и $P_{j_{n_p+m_p}} = P_2$. Следовательно, $A_{n_p+m_p}x \in H_2$ и

$$A_{n_p+m_p}x = A_{n_p}x - P^*_{j_{n_p+1}}A_{n_p}x - P^*_{j_{n_p+2}}A_{n_p+1}x - \ldots -$$
$$- P_{j_{n_p+m_p}}A_{n_p+m_p-1}x = A_{n_p}x - z_p\,,$$

где мы положили

$$z_p = P^*_{j_{n_p+1}}A_{n_p}x + \ldots + P^*_{j_{n_p+m_p}}A_{n_p+m_p-1}\,x\,.$$

В силу (1,4) будет $\lim\limits_{n\to\infty} z_p = O$; следовательно, $A_{n_p+m_p}\,x$ сходится для $p \to \infty$ слабо к y. Итак, $y \in H_2$.

Тем же путем можно доказать, что $y \in H_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$. Итак, $y = O$, так как мы предполагали $\bigcap\limits_{i+1}^{k} H_i = O$.

Случай, когда $\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i$ не является нулевым подпространством, можно перевести на этот случай, пользуясь методом, примененным при доказательстве теоремы 1.2. Таким образом теорема полностью доказана.

Возникает вопрос, нельзя ли устранить требование 3 определения 1.1, которое ограничивает „промежутки" между вхождениями одного и того же проектора. Если H — пространство конечной размерности, то оказывается, что это предположение можно устранить. Для этого докажем прежде всего следующую

Лемму 1.1. *Пусть H — пространство Гильберта конечной размерности. Пусть $H_i (i = 1, \ldots, k;\ k \geqq 2)$ — подпространства пространства H и пусть имеет место*

$$\bigcap_{i=1}^{k} H_i = O\,. \tag{1,5}$$

Пусть A — оператор, определяемый уравнением $A = P_{j_n} \ldots P_{j_2}P_{j_1}$, где $j_i \neq j_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$; $1 \leqq j_i \leqq k$, $(i = 1, \ldots, n)$, причем в конечной последовательности $j_1, \ldots, j_n$ каждое из чисел $1, \ldots, k$ встречается хотя бы один раз. Тогда существует число ϑ, $0 \leqq \vartheta < 1$ так, что

$$\|A\| = \|P_{j_n} \ldots P_{j_2}P_{j_1}\| < \vartheta\,,$$

где ϑ не зависит от n, но зависит, конечно, от k и от подпространств H_i.

Доказательство проведем по индукции относительно k: Пусть $k = 2$. Тогда оператор A имеет один из следующих двух видов

a) $A = BP_1P_2$, b) $A = BP_2P_1$, где B — оператор, для которого $\|B\| \leqq 1$.

Докажем теперь, что $\|P_1P_2\| = \vartheta < 1$. Действительно, для любого x, для которого $\|x\| = 1$, будет $\|P_1P_2x\| < 1$, так как, если $x \notin H_2$, то $\|P_2x\| < 1$, следовательно, и $\|P_1P_2x\| < 1$. Если же $x \in H_2$, то $\|P_1P_2x\| = \|P_1x\|$, следовательно, и $\|P_1x\| < 1$, так как x не может быть одновременно в H_1. Итак, для любого x, $\|x\| = 1$, будет

$$\|P_1P_2x\| = \vartheta(x) < 1 .$$

$\vartheta(x)$ является непрерывной функцией на единичной сфере, которая в конечномерном пространстве компактна. Максимум функции $\vartheta(x)$ осуществляется, следовательно, в точке $\bar{x}$ и

$$\max_{\|x\|=1} \vartheta(x) = \vartheta(\bar{x}) = \vartheta_1 < 1 .$$

Итак, $\|P_1P_2\| = \vartheta_1$. Аналогично можно доказать, что $\|P_2P_1\| = \vartheta_2 < 1$. Отсюда непосредственно следует $\|A\| \leqq \max(\vartheta_1, \vartheta_2) = \vartheta < 1$.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для $k = l - 1$, и докажем его для $k = l$.

Итак, возьмем оператор

$$A = P_{j_n} \ldots P_{j_2}P_{j_1}, \quad 1 \leqq j_i \leqq l, \ (i = 1, \ldots, n), \ j_i \neq j_{i+1} (i = 1, \ldots, n-1) ,$$

причем в последовательности $j_1, \ldots, j_n$ каждый индекс $1, \ldots, l$ встречается хотя бы раз. Подпространства можно занумеровать так, чтобы оператор A имел вид

$$A = BP_lA^{(l-1)} \tag{1,6}$$

где B — оператор, для которого $\|B\| < 1$, оператор $A^{(l-1)}$ имеет вид

$$A^{(l-1)} = P_{j_m} \ldots P_{j_1} ,$$

$$1 \leqq j_i \leqq l - 1 , \quad (i = 1, \ldots, m) , \quad j_i \neq j_{i+1} , \quad (i = 1, \ldots, m - 1)$$

и каждый индекс встречается хотя бы раз.

Пусть теперь $H_0 = \bigcap_{k=1}^{l-1} H_i$, H_0^* — ортогональное дополнение H_0 и $H_{i0}^* = H_0^* \cap H_i$ для $i = 1, \ldots, l - 1$. Пусть P_{i0}^* — проектор на H_{i0}^*, P_0 — проектор на H_0. Нетрудно доказать (как при доказательстве теоремы 1.2), что

$$A^{(l-1)} = P_{j_m} \ldots P_{j_1} = P_0 + P_{j_m0}^* \ldots P_{j_10}^* .$$

Положим $A^{*(l-1)} = P_{j_m0}^* \ldots P_{j_10}^*$. Тогда по предположению индукции имеем $\|A^{*(l-1)}\| = \vartheta_3 < 1$, где ϑ_3 не зависит от m.

Возьмем теперь какой-либо элемент $x \in H$, $\|x\| = 1$. Пусть

$$x = x_0 + x^* \tag{1,7}$$

является его разложением на ортогональные составляющие $x_0 \in H_0$, $x^* \in H^*$ Тогда будет

$$A^{(l-1)}x = (P_0 + A^{*(l-1)})(x_0 + x^*) = x_0 + A^{*(l-1)}x^* , \tag{1,8}$$

так как ввиду ортогональности $P_0x^* = A^{*(l-1)}x_0 = O$.

Заметим далее, что для $x_0 \in H_0$, $\|x_0\| = 1$

$$\|P_l x_0\| \leqq \vartheta_4 < 1 \,. \tag{1,9}$$

Действительно, $\|P_l x_0\|$ может равняться единице лишь в том случае, когда $x_0 \in H_l$; отсюда, однако, следовало бы согласно (1,5), что $x_0 = O$, но это невозможно. Однако, единичная сфера в H_0 компактна и, следовательно, соотношение (1,9) имеет место.

Возьмем теперь x^* из разложения (1,7). Тогда возможны два случая:

$$\text{a)}\quad \|x^*\| > \frac{1-\vartheta}{2}\,, \qquad b)\quad \|x^*\| \leqq \frac{1-\vartheta}{2}$$

где ϑ есть $\max(\vartheta_3, \vartheta_4)$.

Исследуем случай а). Из уравнения (1,8) следует

$$\|P_l A^{(l-1)}x\|^2 \leqq \|A^{(l-1)}x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|A^{*(l-1)}x^*\|^2 \leqq \|x\|^2 - \|x^*\|^2 + \vartheta^2\|x^*\|^2 =$$

$$= 1 - (1-\vartheta^2)\,\|x^*\|^2 \leqq 1 - (1-\vartheta^2)\,\frac{1-\vartheta}{2} < 1\,.$$

В случае же b) соотношение (1,8) дает

$$\|P_l A^{(l-1)}x\| = \|P_l(x_0 + A^{*(l-1)}x^*)\| \leqq \|P_l x_0\| + \|A^{*(l-1)}x^*\| \leqq \vartheta_4 + \frac{1-\vartheta}{2} < 1\,.$$

Итак, в обоих случаях существует число $\vartheta_5 < 1$ такое, что

$$\|P_5 A^{(l-1)}x\| < \vartheta_5$$

для любого x, $\|x\| = 1$. Следовательно, и $\|P_l A^{(l-1)}\| < \vartheta_5$. Из выражения (1,6) непосредственно видно, что тогда будет и $\|A\| < \vartheta_5$, ч. и т. д.

При помощи этой леммы нетрудно получить следующую

Теорему 1.4. *Пусть H — пространство Гильбетра конечной размерности. Пусть $H_i (i = 1, \ldots, k)$ — подпространства пространства H и пусть P_i — проекторы на $H_i (i = 1, \ldots, k)$. Возьмем бесконечную последовательность индексов $\{j_n\}$ со следующими свойствами:*

1. $1 \leqq j_n \leqq k$,
2. *каждое из чисел $1, \ldots, k$ встречается в последовательности $\{j_n\}$ бесконечное число раз.*

Определим операторы A_n уравнением $A_n = P_{j_n} \ldots P_{j_2} P_{j_1}$. Тогда последовательность операторов A_n равномерно сходится к проектору P_0, где P_0 — проектор на $H_0 = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$.

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 1.2 достаточно ограничиться случаем, когда $H_0 = O$. Ввиду требования 2), наложенного на последовательность $\{j_n\}$, можно найти такую последовательность натуральных чисел n_l, что в каждой конечной последовательности

$$j_1, \ldots, j_{n_1}; \quad j_{n_l+1}, \ldots, j_{n_{l+1}} \quad l = 1, 2, \ldots$$

каждое из чисел $1, \ldots, k$ встречается хотя бы раз.

Выделим теперь из последовательности A_n подпоследовательность A_{n_l} и положим

$$A_{n_{l+1}} = B_l \,.\, A_{n_l}, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

где

$$B_l = P_{j_{n_{l+1}}} \ldots P_{j_{n_l+1}}, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

По предыдущей лемме имеем

$$\|B_l\| \leqq \vartheta < 1, \quad l = 1, 2, \ldots$$

откуда непосредственно следует

$$\|A_{n_{l+1}}\| \leqq \vartheta^l .$$

Итак, $\lim\limits_{l\to\infty} \|A_{n_l}\| = 0$, а так как последовательность $\|A_n\|$ не возрастает, будет и $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\| = 0$, ч. и т. д.

До сих пор мы имели дело лишь с конечным числом подпространств. Можно поставить вопрос, сходятся ли аналогичные последовательности операторов, являющихся произведением проекторов, и в том случае, когда в нашем распоряжении имеется бесконечное число подпространств. Ответ дает следующая тоерема, в которой предполагается, что „проектирование" производится по определенному специальному порядку.

Теорема 1.5. *Пусть H — пространство Гильберта, $H_i (i = 1, 2, \ldots)$ — — его подпространства, P_i — проектор на H_i. Пусть $H_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} H_i$ и P_0 — — проектор на H_0. Обозначим, далее,*

$$S_n = P_1 P_2 \ldots P_{n-1} P_n P_{n-1} \ldots P_2 P_1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

и положим

$$A_1 = P_1; \quad A_n = A_{n-1} S_n A_{n-1}, \quad n > 1 .$$

Тогда последовательность операторов A_n сходится для $n \to \infty$ сильно к проектору P_0.

Доказательство. Ограничимся опять случаем, когда H_0 — нулевое подрпространство. Докажем прежде всего, что последовательность A_n — — ограниченная монотонная последовательность симметрических операторов.

Ясно, что A_n — симметрический оператор и что $I \geqq A_n \geqq o$, где I — тождественный оператор, а o — нулевой оператор. Докажем еще, что $A_n \geqq A_{n+1}$

т. е. что $A_n - A_{n+1}$ есть положительный оператор. Возьмем какой-либо элемент $x \in H$ и получим

$$\begin{aligned}((A_n - A_{n+1})\, x, x) &= (A_n x, x) - (A_{n+1} x, x) = \\ &= (P_n \dots P_1 A_{n-1} x, P_n \dots P_1 A_{n-1} x) - (P_{n+1} \dots P_1 A_n x, P_{n+1} \dots P_1 A_n x) = \\ &= \|P_n \dots P_1 A_{n-1} x\|^2 - \|P_{n+1} \dots P_1 A_n x\|^2 .\end{aligned}$$

Однако,

$$\|P_{n+1} \dots P_1 A_n x\| = \|P_{n+1} \dots P_1 A_{n-1} S_n A_{n-1} x\| \leqq \|P_n \dots P_1 A_{n-1} x\|$$

и, следовательно, в общем

$$((A_n - A_{n+1})\, x, x) \geqq 0 .$$

Ограниченная монотонная последовательность симметрических операторов сходится сильно к некоторому симметрическому оператору A (см. [3], стр. 261).

Итак, нужно еще доказать, что оператор A, являющийся сильным пределом последовательности операторов A_n, будет нулевым оператором. Возьмем элемент $x \in H$. Для любого n будет $A_n x \in H_1$, значит, и $Ax \in H_1$.

Возьмем теперь какое-либо натуральное число k. Тогда для достаточно больших n

$$\|A_{n+1} x\| \leqq \|P_k P_{k-1} \dots P_2 A_n x\| \leqq \|A_n x\| .$$

Путем предельного перехода получим

$$\|Ax\| = \|P_k \dots P_2 A x\| .$$

Из этого последнего равенства нетрудно получить по индукции что $Ax \in H_k$ для любого k. Итак, $Ax = O$.

Замечание. В этом случае сходится не только последовательность $A_n x$, но и вся последовательность $P_1 x$, $P_2 P_1 x$, $A_2 x$, $P_2 A_2 x$, $P_3 P_2 A_2 x$, $P_2 P_3 P_2 A_2 x$, $P_1 P_2 P_3 P_2 A_2 x$, $P_2 P_1 P_2 P_3 P_2 A_2 x$, $A_3 x$, $P_2 A_3 x$ и т. д.

2. ПРИМЕНЕНИЕ К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ

При помощи теоремы 1.4 нетрудно доказать сходимость метода релаксаций для системы линейных алгебраических уравнений с симметрической положительно определенной матрицей даже в том случае, если использовать групповые релаксации. По методу проекций также доказывается сходимость итерационного метода Гаусса-Зайделя в [4].

Пусть задана система линейных уравнений

$$Ax = c\,, \tag{2,1}$$

где A — симметрическая положительно определенная матрица, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — искомый вектор, $c = (c_1, \dots, c_n)$ — данный вектор.

Пусть, далее, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ — координатные векторы n-мерного евклидова пространства E_n.

Определение 2.1. *Групповой релаксацией* в составляющих $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ($1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq n$) мы назовем оператор $A_{i_1 \ldots i_k}$, который любому вектору $y = (y_1, \ldots, y_n)$ сопоставляет вектор $y - \eta$, где $\eta = \sum_{s=1}^{k} \eta_{i_s} e_{i_s}$ причем составляющие η_{i_s} удовлетворяют системе уравнений

$$(Ae_{i_s}, y - \eta) = c_{i_s}, \quad s = 1, \ldots, k .$$

Эта система относительно неизвестных $\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_k}$ имеет одно единственное решение, так как A — положительно определенная матрица.

Покажем, что оператор групповой релаксации можно просто выразить через проекции на подпространство, определенное векторами $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$.

Введем в E_n новое скалярное произведение $[u, v] = (Au, v)$. Так как матрица A симметрична и положительно определенна, нетрудно убедиться, что $[u, v]$ обладает необходимыми свойствами скалярного произведения.

Лемма 2.1. *Пусть задана система линейных уравнений* (2,1). *Пусть x_0 — решение этой системы. Обозначим через $H_{i_1 \ldots i_k}$ подпространство, определенное векторами $e_{i_1, \ldots,} e_{i_k}$, и через $H^*_{i_1 \ldots i_k}$ подпространство, ортогональное (в смысле скалярного произведения $[u, v]$) подпространству $H_{i_1 \ldots i_k}$. Пусть $P^*_{i_1 \ldots i_k}$ и $P_{i_1 \ldots i_k}$ — соответственные проекторы (опять в смысле нового скалярного произведения). Пусть y — произвольный вектор.*

Тогда для оператора групповой релаксации $A_{i_1 \ldots i_k}$ имеет место

$$y - A_{i_1 \ldots i_k} y = P_{i_1 \ldots i_k}(y - x_0) , \quad A_{i_1 \ldots i_k} y - x_0 = P^*_{i_1 \ldots i_k}(y - x_0) .$$

Доказательство. Положим $\bar{y} = A_{i_1 \ldots i_k} y$. Тогда $A(\bar{y} - x_0)$ будет вектор, у которого i_1-я, i_2-я, $\ldots$, i_k-я составляющие равны нулю, и для любого вектора $v \in H_{i_1 \ldots i_k}$ будет $[\bar{y} - x_0, v] = (A(\bar{y} - x_0), v) = 0$. Так как справедливо разложение $y - x_0 = (\bar{y} - x_0) + (y - \bar{y})$ и $y - \bar{y} \in H_{i_1 \ldots i_k}$, утверждение доказано.

Теперь мы можем доказать теорему о сходимости метода релаксаций.

Теорема 2.1. *Пусть дана система линейных уравнений* (2,1) *с симметрической положительно определенной матрицей. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность векторов, где x_1 — произвольный вектор, а каждый последующий получается из предыдущего посредством какой-либо групповой релаксации. Предположим далее, что релаксация производится в каждой составляющей бесконечное число раз.*

Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится к точному решению системы (2,1).

Доказательство. По лемме 5.1

$$x_n - x_0 = P^*_{r_n} \ldots P^*_{r_1}(x_1 - x_0) ,$$

где $P^*_{r_j}$ — проектор на какое-либо из подпространств $H^*_{i_1 \ldots i_k}$. Далее можно предположить, что если в последовательности $\{P^*_{r_j}\}_{j=1}^{\infty}$ проектор $P^*_{i_1 \ldots i_k}$ встретится, то он встретится в ней бесконечное число раз.

Пересечение соответственных подпространств $H^*_{i_i \dots i_k}$ равно нулю, так как ввиду того, что релаксация производится в каждой составляющей, для каждого элемента базиса e_i должно существовать хоть одно подпространство $H^*_{i_1 \dots i_k}$ так, что e_i ортогонально $H^*_{i_1 \dots i_k}$. Элементы пересечения подпространств $H^*_{i_1 \dots i_k}$ ортогональны, следовательно, ко всем e_i, т. е. пересечение равно нулю.

Для завершения доказательства достаточно воспользоватся теоремой 1.4, так как норма, данная скалярным произведением $[u, v]$, равносильна обычной евклидовой норме.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Бабушка:* Об алгорифме Шварца в теории дифференциальных уравнений математической физики. Чех. мат. журнал, *8* (*83*), 1958, 328—343.

[2] *D. Morgenstern:* Begründung des alternierenden Verfahrens durch Orthogonalprojektion. ZAMM, *36* (1956), 7/8.

[3] *F. Riesz, B. Sz.-Nagy:* Leçons d'analyse fonctionelle. Budapest 1952.

[4] *M. Altman:* On the Approximate Solution of Linear Algebraic Equations. Bull. Acad. Polon., Cl. III., *V* (1957), 365—370.

Zusammenfassung

ÜBER EIN KONVERGENZPRINZIP IM HILBERTSCHEN RAUM

Milan Práger, Praha

Viele Aufgaben der Mathematik können so formuliert werden, dass man in einem passend gewählten Hilbertschen Raum die Projektion eines gegebenen Elementes auf den gegebenen Unterraum sucht. Verschiedene Näherungsmethoden können dann als Näherungskonstruktion der gesuchten Projektion interpretiert werden.

Eines dieser Konvergenzprinzipien für die Näherungskonstruktion der Projektion ist durch folgenden Satz beschrieben (siehe [1] und [2]):

Wenn P_1 und P_2 zwei Projektoren im Hilbertschen Raum H sind, dann konvergiert die Folge der Operatoren $A_n = (P_1P_2)^n$ stark zum Projektor auf den Durchschnitt der zugehörigen Unterräume H_1 und H_2.

Der Artikel befasst sich mit einigen Verallgemeinerungen dieses Satzes in den Fällen, wenn wir schrittweise auf eine beliebige endliche bzw. unendliche Anzahl der Unterräume projizieren. Ein Satz ist auch dem Falle des endlichdimensionalen Raumes gewidmet. Diese Sätze sind im ersten Absatz enthalten.

Im zweiten Absatz wird dann als Anwendung die Konvergenz der allgemeinen Gruppenrelaxationmethode für das System der algebraischen linearen Gleichungen mit einer positiv-definiten symmetrischen Matrix bewiesen.