Czechoslovak Mathematical Journal

Petr Vopěnka

Замечание о размерности метрических пространств

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 4, 519–522

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100378

ЗАМЕЧАНИЕ О РАЗМЕРНОСТИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

ПЕТР ВОПЕНКА (Petr Vopěnka), Прага

(Поступило в редакцию 9/X 1958 г.)

В работе доказывается, что для метрических пространств $\dim R \leqq n$, если и только если существует последовательность $\{\alpha_k\}$ открытых покрытий кратности $\leqq n + 1$ такая, что α_{k+1} вписано в α_k и т. наз. диаметры покрытий α_k стремятся к нулю.

Если R — нормальное пространство, то $\dim R$ обозначает его размерность, определенную как наименьшее r такое, что в любое конечное открытое покрытие пространства R можно вписать открытое покрытие кратности $\leqq r + 1$. В работе [1] Даукера и Гуревича было доказано, что для метрических пространств $\dim R = \mathrm{d}sR$, где $\mathrm{d}sR$ определяется, как наименьшее r, для которого существует последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ локально конечных окрытых покрытий такая, что

(1) $\operatorname{diam} \alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$, где $\operatorname{diam} \alpha_k$ означает верхнюю грань диаметров множеств $U \in \alpha_k$;

(2) каждое α_k имеет кратность $\leqq r + 1$;

(3) при $k = 1,2, \ldots$ система всех $\overline{U}$, $U \in \alpha_{k+1}$, вписана в α_k.

В настоящей заметке доказывается аналогичное утверждение, в котором однако на α_k налагаются несколько менее жесткие требования. Идея доказательства почеркнута частично из статьи М. Катетова [2].

Теорема. *Пусть R-метрическое пространство. Для того, чтобы $\dim R \leqq$ $\leqq n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность его открытых покрытий α_k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\operatorname{diam} \alpha_k$ стремится к нулю, α_{k+1} вписано в α_k, $k = 1, 2, \ldots$, и каждое α_k имеет кратность $\leqq n + 1$.*

Доказательство. I. Необходимость условия доказывается немедленно; так, напр., согласно [1], из $\dim R \leqq n$ вытекает $\mathrm{d}sR \leqq n$ и тем более выполнение нашего условия.

II. Пусть условие выполняется. Очевидно, можно предполагать (перейдя, если нужно, к подпоследовательности), что $\operatorname{diam} \alpha_k < 2^{-k}$. Пусть α_k состоит из множеств $U_{k,i}$, где $i \in N_k$; множество всех пар (k, i), где $k = 1, 2, \ldots, i \in N_k$, обозначим через N. Для $k = 2, 3, \ldots$ и для $i \in N_k$ выберем $j = f(i) \in N_{k-1}$ так, чтобы $U_{k,i} \subset U_{k-1,j}$.

Пусть теперь дано конечное открытое покрытие $\{G_q\}$ пространства R. Обозначим (для $k = 1, 2, \ldots$) через V_k множество $x \in R$ таких, что при подходящем G_q имеем $\varrho(x, R - G_q) > 2^{-k}$; положим еще $V_{-1} = V_0 = \emptyset$. Очевидно V_k открыты, $V_k \subset V_{k+1}$. Легко установить, что при любом $(k, i) \in N$ имеем:

(1) одно из множеств $U_{k,i} - V_k$, $U_{k,i} \cap V_{k-1}$ пусто. Действительно, в противном случае мы бы немедленно получили $\operatorname{diam} U_{k,i} > 2^{-k}$, что невозможно.

III. Для $(k, i) \in N$ положим $W_{k,i} = U_{k,i} \cap (V_k - \overline{V}_{k-2})$. Очевидно, $W_{k,i}$ открыты; при фиксированном k они покрывают $V_k - \overline{V}_{k-2}$, так что

(2) система всех $W_{k,i}$ покрывает R.

Разобьем теперь систему всех непустих $W_{k,i}$ на подсистемы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ следующим образом: A, B, C означает множество $(k, i) \in N$ таких, что $W_{k,i} \neq \emptyset$ и, соответственно,

$$W_{k,i} \cap V_{k-1} = \emptyset\,, \quad W_{k,i} \subset V_{k-1}\,, \quad W_{k,i} - V_{k-1} \neq \emptyset \neq W_{k,i} \cap V_{k-1}\,;$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ означает систему всех $W_{k,i}$, где (k, i) принадлежит соответственно A, B, C.

Установим следующие соотношения:

(3) если $i \in N_1$, $W_{1,i} \neq \emptyset$, то $(1, i) \in A$;

(4) если $(k, i) \in B$, то $(k - 1, f(i)) \in A \cup C$, $W_{k,i} \subset W_{k-1,f(i)}$;

(5) если $(k, i) \in C$, то $(k - 1, f(i)) \in A$.

Соотношение (3) очевидно. Если $(k, i) \in B$, то $k > 1$, $W_{k,i} \subset V_{k-1}$, так что

$$U_{k,i} \cap (V_{k-1} - \overline{V}_{k-2}) = W_{k,i} \neq \emptyset$$

и тем более

$$U_{k-1,f(i)} \cap (V_{k-1} - \overline{V}_{k-2}) \neq \emptyset\,;$$

следовательно, $W_{k-1,f(i)} - \overline{V}_{k-2} \neq 0$, так что $(k - 1, f(i)) \in A \cup C$; кроме того,

$$W_{k,i} = U_{k,i} \cap (V_{k-1} - \overline{V}_{k-2}) \subset U_{k-1,f(i)} \cap (V_{k-1} - \overline{V}_{k-3}) = W_{k-1,f(i)}\,.$$

Если $(k, i) \in C$, то, во-первых, $W_{k,i} \cap (V_{k-1} - \overline{V}_{k-2}) \neq \emptyset$, откуда вытекает

$$U_{k,i} \cap (V_{k-1} - \overline{V}_{k-2}) \neq \emptyset\,, \quad U_{k-1,f(i)} \cap (V_{k-1} - \overline{V}_{k-3}) \neq \emptyset\,,$$

$$W_{k-1,f(i)} \neq \emptyset\,,$$

и, во-вторых, $W_{k,i} \cap (V_k - V_{k-1}) \neq \emptyset$, откуда вытекает

$$U_{k,i} - V_{k-1} \neq \emptyset\,, \quad U_{k-1,f(i)} - V_{k-1} \neq \emptyset\,,$$

так что, согласно (1), $U_{k-1,f(i)} \cap V_{k-2} = \emptyset$, и потому $(k-1, f(i)) \in C$.

IV. Для $(k, j) \in A$ обозначим через $H_{k,j}$ объединение $W_{k,j}$ и множеств $W_{k+1,i}$, где $(k+1, i) \in C$, $f(i) = j$. Из определения множеств $H_{k,j}$ сразу вытекает, что они открыты и

(6) $H_{k,j} \subset U_{k,j}$, так что $\operatorname{diam} H_{k,j} < 2^{-k}$;

(7) $H_{k,j} \subset V_{k+1} - \overline{V}_{k-1}$.

Так как при $f(i) = j$ имеем

$$W_{k+1,i} \cap V_k = U_{k+1,i} \cap (V_k - \overline{V}_{k-1}) \subset U_{k,j} \cap (V_k - \overline{V}_{k-2})\,,$$

то получаем

(8) $H_{k,j} \cap V_k \subset W_{k,j}$.

Из (4) вытекает, что всякое множество из $\mathfrak{B}$ содержится в каком-нибудь множестве из $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{C}$, а из построения множеств $H_{k,j}$ ясно, что свякое множество из $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{C}$ содержится в подходящем $H_{k,j}$. Итак, ввиду (2), $H_{k,j}$ покрывают R. — Для любого $H_{k,j}$ возьмем теперь $x \in W_{k,j}$; тогда $x \in V_k$, так что при подходящем G_q имеем $\varrho(x, R - G_q) < 2^{-k}$. Так как $x \in H_{k,j}$, то из (6) теперь вытекает $H_{k,j} \subset G_q$. Итак, система всех $H_{k,j}$ вписана в $\{G_q\}$.

Остается доказать, что кратность системы всех $H_{k,j}$ не превышает $n+1$. Пусть $x \in R$; найдем r так, чтобы $x \in V_r - V_{r-1}$. Согласно (7), x может лежать в $H_{k,j}$ только при $k = r$ или $k = r - 1$; пусть x принадлежит (a) множествам $H_{r-1,j}$ при p различных индексах j, (b) множествам $H_{r,j}$ при q различных индексах j. Так как, ввиду $W_{r-1,j} \subset V_{r-1}$, x не может лежать в множествах $W_{r-1,j}$, то из (a) получаем, по построению множеств $H_{k,j}$, что $x \in W_{r,i}$ для не менее чем p различных i и притом таких, что $(r, i) \in C$. С другой стороны, из (b) и (8) вытекает, что $x \in W_{r,i}$ для не менее чем q индексов i таких, что $(r, i) \in A$, Итак, имеем $x \in W_{r,i} \subset U_{r,i}$ для не менее чем $p + q$ индексов i. Так как кратность $\{U_{r,i}\}$ не превышает $n + 1$, то получаем $p + q \leqq n + 1$, так что x лежит не более чем в $n + 1$ множествах $H_{k,j}$. Итак, мы доказали, что в $\{G_q\}$ можно вписать открытое покрытие кратности $\leqq n + 1$, чем и завершено доказательство всей теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1], *C. H. Dowker* and *W. Hurewicz*: Dimension of metric spaces, Fundam. Math., *43*, no. 1, 1956, 83—88.

[2] *М. Катетов*: О соотношении между метрической и топологической размерностью, Чехосл. мат. ж., *8* (*83*), 1958, 163—166.

Summary

REMARK ON THE DIMENSION OF METRIC SPACES

PETR VOPĚNKA, Praha

(Received October 9, 1958)

The following theorem (cf. C. N. Dowker and W. Hurewicz [1]) is proved: *Let R be a metric space. Then* $\dim R \leqq n$ *if and only if there exists a sequence* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *of open coverings of R such that mesh $\alpha_k \to 0$ for $k \to \infty$, α_{k+1} refines α_k, $k = 1, 2, \ldots$, and every α_k is of order $\leqq n$.*