Czechoslovak Mathematical Journal

Jindřich Nečas

L'extension de l'espace des conditions aux limites du problème biharmonique pour les domaines à points anguleux

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 339–371

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100362

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

L'EXTENSION DE L'ESPACE DES CONDITIONS AUX LIMITES DU PROBLÈME BIHARMONIQUE POUR LES DOMAINES À POINTS ANGULEUX

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 28 juillet 1958)

Il est démontré, dans le présent article, que l'on peut associer à chaque domaine à deux dimensions simplement connexe Ω, dont la frontière peut contenir des points anguleux, un certain nombre $p > 1$ de telle sorte qu'il existe une et (à une constante près) une seule solution du problème biharmonique dans ce domaine, à condition que les dérivées premières de la fonction cherchée aient leur p-ième puissance sommable sur la frontière.

1. Introduction

L'existence et l'unicité de la solution du problème biharmonique dans un domaine à points anguleux ont été démontrées avec des méthodes d'Analyse fonctionelle par S. L. Sobolev dans son travail [1]. Les conditions aux limites sont données sur la frontière par les dérivées premières d'une fonction de $W_2^{(2)}(\Omega)$, c'est-à-dire d'une fonction dont les dérivées secondes ont le carré sommable dans Ω. Il s'ensuit des théorèmes de l'immersion de Sobolev que, pour chaque $p > 1$, la $p^{\text{ième}}$ puissance de ces conditions aux limites doit être sommable sur la frontière. Cette condition n'est cependant pas suffisante; en effet, on ne peut pas affirmer qu' à chaque paire de fonctions f_x, f_y dont les $p^{\text{ièmes}}$ puissances sont, pour n'importe quel p, sommables sur la frontière et qui vérifient $\int_0^l f_x \, dx + f_y \, dy = 0$ où l est la longueur de la frontière, il existe und fonction u de $W_2^{(2)}(\Omega)$ telle que l'on ait sur la frontière

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_y .$$

L'espace des conditions aux limites données par les fonctions appartenant à $W_2^{(2)}(\Omega)$ est assez étroit. On rencontre dans les applications une série d'autres conditions aux limites qui n'appartiennent pas à cet espace.

Il se pose alors d'une façon toute naturelle la question de savoir dans quelle mesure on peut généraliser les conditions aux limites pour le problème biharmonique lorsqu'on étudie un domaine à points anguleux.

Si le domaine en question ne présente pas de tels points, alors la réponse à cette question peut être donnée à l'aide de la méthode de N. I. MUSCHELIŠVILI, développée dans sa monographie [2]; elle est basée sur les équations intégrales. Au lieu de l'équation intégrale déduite par N. I. Muschelišvili on peut prendre l'équation intégrale de Šerman, établie par D. I. ŠERMAN dans [3]. Les deux équations son déduites et discutées dans la monographie [4] de I. BABUŠKA, K. REKTORYS, F. VYČICHLO. Dans cet ordre d'idées, la réponse, la plus générale dans le cas d'une frontière lisse (dérivées secondes continues) est donnée dans le travail [5] de B. PINI où l'auteur démontre l'existence et l'unicité du problème biharmonique à condition que les dérivées premières de la fonction, cherchée soient sommables sur la frontière. L'idée directrice de ce travail est la méthode des estimations.

L. G. MAGNARADZE [6] a essayé de généraliser la méthode de Muschelišvili au cas d'un domaine à points anguleux. L'espace des conditions aux limites (dérivées premières de la solution) a été étendu à l'espace des fonctions continues. Or le travail en question présente certaines insuffisances qui nous empêchent d'apprécier exactement les résultats qui y sont contenus. Il est utile de mentionner aussi la méthode de P. F. PAPKOVIČ pour les domaines rectangulaires, développée ensuite par G. A. GRINBERG dans [7]. Elle ne répond pas, il est vrai, à la question d'existence et d'unicité, mais elle montre cependant l'étroite connexion de cette question avec la notion généralisée d'orthogonalité des fonctions de Papkovič et avec la question de croissance admissible des solutions „raisonnables" du problème biharmonique au voisinage des points anguleux. Dans mon travail [8] je démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème biharmonique pour les polygones convexes. L'espace des conditions aux limites est composé de fonctions partiellement continues qui peuvent croître bien vite lorsqu'on s'approche des points anguleux de sorte qu'elles ne sont pas nécessairement sommables sur la frontière.

Dans le présent article je démontre que les conditions aux limites peuvent être des fonctions à $p^{\text{ième}}$ puissance sommable, d'ailleurs quelconques, où $p > 1$ est un nombre ne dépendant que des angles figurant sur la frontière. Les résultats de mes travaux antérieurs [9], [10], [11] sont exploités de manière essentielle.

2. Lemmes

Définition 2.1. *Nous disons d'un domaine Ω du plan qu'il appartient à $\mathfrak{N}_3$ s'il est simplement connexe, et que sa frontière $\dot{\Omega}$ soit composée d'un nombre fini d'arcs finis, ayant trois dérivées continues. Les arcs ayant pour leur extrémité un* *point non-régulier* $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *forment un angle intérieur non-nul* ω_i $(0 < \omega_i < 2\pi$, ω_i *peut être égal à* $\pi)$. Ici x, y sont les coordonnées cartésiennes. (Voir Fig. 1.)

Définition 2.2. *Une fonction* f *de deux variables sera dite appartenir à* $W_2^{(2)}(\Omega)$, *si ses dérivées secondes (les dérivées étant prises au sens de la théorie des distributions) vérifient*

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega < \infty .$$

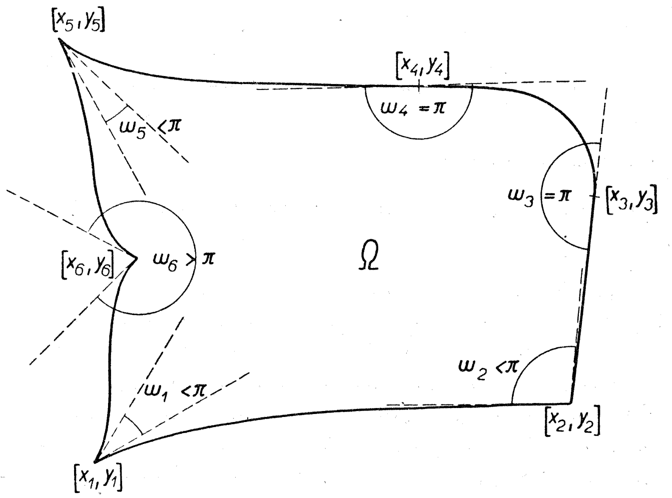

Fig. 1.

Alors il s'ensuit du théorème de l'immersion cité p. 64 de [1] et des considérations faites p. 81 que le théorème suivant a lieu.

Théorème 2.1. *Si* $\Omega \in \mathfrak{N}_3$, *alors* $f \in W_2^{(2)}(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega f^2(x, y)\, \mathrm{d}\Omega < \infty$. *Si l'on introduit dans* $W_2^{(2)}(\Omega)$ *le produit scalaire par la formule*

$$(u, v) = \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right] \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega u \,.\, v\, \mathrm{d}\Omega\,, \quad (2.1)$$

alors $W_2^{(2)}(\Omega)$ *devient espace hilbertien réel.* (Dans la suite, nous travaillerons toujours avec cet espace-ci.)

Nous allons introduire maintenant dans nos considérations l'espace des conditions aux limites L_p.

Définition 2.3. *L' espace des conditions aux limites* L_p $(p > 1)$ *est composé de paires de fonctions réelles* $F = [f_x, f_y]$ *définies sur la frontière* $\dot{\Omega}$ *et vérifiant*

$\int_0^l |f_x(s)|^p \, ds + \int_0^l |f_y(s)|^p ds < \infty$. (Ici s désigne l'arc, et l la longueur de la frontière.)

Ensuit on a $\int_0^l f_x(s) \, dx + f_y(s) \, dy = 0$. *La norme dans* L_p *sera constituée par l'expression*

$$|F|_{L_p} = [\int_0^l |f_x(s)|^p \, ds]^{\frac{1}{p}} + [\int_0^l |f_y(s)|^p \, ds]^{\frac{1}{p}} .$$

Le théorème de l'immersion cité ci-dessus entraîne alors immédiatement le

Théorème 2.2. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}_3$. *Alors il existe une transformation homogène, additive et continue* T *de l'espace* $W_2^{(2)}(\Omega)$ *dans* L_p, *avec*

$$f_x(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s), y(s)) , \quad f_y(s) = \frac{\partial f}{\partial y}(x(s), y(s)) ,$$

si $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* $\overline{\Omega}$.

Le théorème suivant, démontré dans [1], pp. 111—132, est d'une importance fondamentale.

Théorème 2.3. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}_3$. *Alors il existe une transformation continue* S *de l'espace* $W_2^{(2)}(\Omega)$ *dans lui-même telle que* $S(f) = u$, *où* u *est une fonction biharmonique (c'est-à-dire quatre fois continûment dérivable et vérifiant* $\Delta^2 u = 0$*) et telle que* $u(0, 0) = 0$ *et* $T(u) = T(f)$. (Nous supposons que l'origine des axes de coordonnées cartésiennes se trouve dans Ω.) *Pour une fonction* $f \in W_2^{(2)}(\Omega)$ *donnée,* u *est la seule fonction biharmonique aux propriétés citées.*

Soit maintenant Γ un cercle centré à l'origine et de tel rayon que $\overline{\Omega} \subset \Gamma$. Définissons les fonctions de $W_2^{(2)}(\Gamma)$ s'annulant sur le périmètre de Γ.

Définition 2.4. *Soit* $D(\Gamma)$ *l'espace des fonctions* $\varphi(x, y)$, *indéfiniment dérivables et s'annulant à l'extérieur d'un ensemble fermé contenu dans* Γ. *Introduisons dans* $W_2^{(2)}(\Gamma)$ *le produit scalaire par* (2.1). *Posons* $W_{20}^{(2)}(\Omega) = \overline{D(\Gamma)}$. (L'adhérence est définie moyennant la norme de $W_2^{(2)}(\Gamma)$.)

Certaines fonctions de $W_2^{(2)}(\Omega)$ peuvent être élargies en fonctions de $W_{20}^{(2)}(\Gamma)$; cela a lieu p. ex. pour tous les polynômes. Ces fonctions-là seront donc „suffisamment denses“ dans $W_2^{(2)}(\Omega)$, la notion de „densité suffisante“ étant à préciser dans la suite. On remarquera ici qu'il y a là toute une série de questions intéressantes qui y sont attachées, p. ex. celle de savoir si „suffisamment dense“ est la même chose que dense par rapport à la norme dans $W_2^{(2)}(\Omega)$.

Nous allons démontrer maintenant le théorème simple suivant, dit „théorème de densité“.

Théorème 2.4. *Soient* $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *des points dans* Γ. *Soit* $D_c(\Gamma)$ *l'espace des fonctions* φ *de* $D(\Gamma)$ *qui sont constantes au voisinage des points* $[x_i, y_i]$

(*ces voisinages étant différents pour différentes fonctions*). *Alors* $\overline{D}_c(\Gamma) = W_{20}^{(2)}(\Gamma)$. (Adhérence par rapport à la norme de l'espace $W_2^{(2)}(\Gamma)$.)

Démonstration. Supposons d'abord que nous ayons $n = 1$, $[x_1, y_1] = [0, 0]$ et que le rayon de Γ soit égal à 1. Une norme dans l'espace $W_{20}^{(2)}(\Gamma)$ équivalente à la norme (2.1) est celle donnée par le produit scalaire

$$(u, v)_2 = \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right] \mathrm{d}\Omega\,. \tag{2.2}$$

En effet, il s'ensuit de l'inégalité de Schwarz pour $\varphi \in D(\Gamma)$

$$\int_\Gamma \varphi^2 \,\mathrm{d}\Omega \leq C \int_\Gamma \left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega\,,$$

C étant une constante. Soit donc $W_{20}^{(2)}(\Gamma)$ l'espace hilbertien où le produit scalaire est défini par (2.2). Supposons que nous ayons $\overline{D_c(\Gamma)} \neq W_{20}^{(2)}(\Gamma)$. Il existe alors $f \neq 0$, $f \in W_{20}^{(2)}(\Gamma)$ tel que $\varphi \in D_c(\Gamma) \Rightarrow (\varphi, f)_2 = 0$. Il s'ensuit $\Delta^2 f = 0$.

Les théorèmes de l'immersion impliquent donc la continuité de f dans $\overline{\Gamma}$. Soit maintenant

$$f_1(x, y) = f(0, 0)[1 + r^2(\lg r^2 - 1)]\,.$$

La fonction $f_1 \in W_{20}^{(2)}(\Gamma)$ est biharmonique et à l'origine on a $f_1(0, 0) = f(0, 0)$; la fonction f_1 vérifie donc dans le domaine $\Gamma - [0, 0]$ les mêmes conditions aux limites comme f. L'unicité de la solution de Sobolev implique $f_1 = f$.

Si maintenant $v \in D_c(\Gamma)$ et si u est une fonction indéfiniment dérivable, $u \in W_{20}^{(2)}(\Gamma)$, alors nous avons en vertu du théorème de Green

$$(u, v)_2 = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varrho\to 1}} \left[\int_\varepsilon^\varrho \int_0^{2\pi} \Delta^2 u \,.\, v \,.\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi - \varepsilon\, v(0, 0) \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\, \Delta u \,\mathrm{d}\varphi\right]. \tag{2.3}$$

Le contour d'integration de la seconde intégrale est la circonférence $r = \varepsilon$.

A partir de (2.3) nous trouvons

$$16\pi\, v(0, 0)\, f(0, 0) = \lim_{\varepsilon\to 0} v(0, 0)\, f(0, 0) \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\, \Delta f \,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

Il s'ensuit que $f(0, 0) = 0$, donc aussi $f(x, y) = 0$, en contradiction avec ce qui a été supposé.

Revenons à présent à la démonstration du théorème 2.4. Considérons des cercles Γ_i centrés aux points $[x_i, y_i]$ respectifs, et de rayon ϱ si petit que l'on ait $\overline{\Gamma}_i \subset \Gamma$, $\overline{\Gamma}_i \,.\, \overline{\Gamma}_j = 0$ pour $i \neq j$. Soient φ_i des fonctions indéfiniment dérivables s'annulant à l'extérieur de Γ_i et égales à 1 dans Γ'_i, Γ'_i étant des cercles concentriques à Γ_i, de rayon $\frac{1}{2}\varrho$. Posons $\varphi = 1 - \sum_{i=1}^n \varphi_i$. Soit alors $f \in W_{20}^{(2)}(\Gamma)$. On a

$$f = f\varphi + \sum_{i=1}^n f\varphi_i\,, \quad f\varphi \in W_{20}^{(2)}(\Gamma - \sum_{i=1}^n \overline{\Gamma}')\,,$$

on peut donc approcher $f\varphi$ par une fonction $h \in D(\Gamma - \sum_{i=1}^{n} \overline{\Gamma}_i)$ en rendant la différence, mesurée au moyen de la norme (2.1), aussi petite que l'on voudra. Ensuite on a $f\varphi_i \in W_{20}^{(2)}(\Gamma_i)$, on peut donc l'approcher aussi bien que l'on voudra par une fonction $h_i \in D(\Gamma_i)$, constante au voisinage du point $[x_i, y_i]$. La fonction $h + \sum_{i=1}^{n} h_i \in D_c(\Gamma)$ approche donc la fonction f aussi bien que l'on voudra. La démonstration est par là achevée.

La propriété d'appartenir à $W_2^{(2)}(\Omega)$ peut être conservée lors des transformations suffisamment régulières du domaine Ω. Nous allons énoncer et démontrer deux théorèmes sur les transformations.

Soit Δ le carré $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Soit Δ_d le carré „déformé" que l'on obtient en remplaçant les segments $0 < x < 1$, $y = 0$, $y = 1$ par deux arcs parallèles Λ_1, Λ_2. Les points $[x, y]$ de l'arc Λ_1 soient donnés à l'aide du paramètre x, $0 \leqq x \leqq 1$ comme $[x, f(x)]$, $f(x)$ étant deux fois continûment dérivable. On a donc

$$\Delta_d = \mathop{\mathscr{E}}_{[x',y']} (0 < x' < 1,\ f(x') < y' < f(x') + 1)\,.$$

Définissons maintenant une transformation de $\overline{\Delta}$ sur $\overline{\Delta}_d$:

$$x' = x\,, \quad y' = f(x) + y\,. \tag{2.4}$$

Cette transformation est évidemment biunivoque. Son Jacobien est égal à 1, donc la transformation (2.4) et la transformation inverse sont deux fois continûment dérivables sur $\overline{\Delta}$ ou $\overline{\Delta}_d$ respectivement. En posant $X = [x, y]$, on peut écrire (2.4) sous forme symbolique $X' = T(X)$. On démontre aisément le théorème suivant.

Théorème 2.5. *Soit $u(X) \in W_2^{(2)}(\Delta)$. Alors $V(X') = u(T^{-1}(X')) \in W_2^{(2)}(\Delta_d)$, la réciproque étant également vraie.*

Nous laisserons le Lecteur faire lui-même la démonstration en remarquant toutefois qu'il faut y exploiter un cas spécial du théorème de l'immersion de Sobolev cité; on peut le formuler de la façon suivante: *Soit $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ (ici, nous avons soit $\Omega = \Delta$, soit $\Omega = \Delta_d$). Alors $\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}\Omega \leqq C|u|_{W_2^{(2)}}$, où C es une constante.*

Considérons maintenant un arc avec un point anguleux (l'angle peut même être égal a π). Les points de cet arc soient donnés à l'aide d'un paramètre x, $-1 \leqq x \leqq 1$ sous la forme $[x, f(x)]$ où $f(x)$ est une fonction continue dans $\langle -1, 1\rangle$ et deux fois continûment dérivable à l'exception de zéro. Soit pour zéro:

$$f(0) = 0\,, \quad \lim_{x\to 0-} f'(x) = -\lim_{x\to 0+} f'(x) = -k\,, \quad \lim_{x\to 0+} f''(x) = m\,,$$
$$\lim_{x\to 0-} f''(x) = l\,,$$

$(m, l, k$ étant des nombres réels). Soit maintenant $\Delta = \underset{[y,x]}{\mathscr{E}} (-1 < x < 1, k \operatorname{sgn} x . x < y < k \operatorname{sgn} x . x + 1)$, $\Delta_d = \underset{[y',x']}{\mathscr{E}} (-1 < x' < 1, f(x') < y' < f(x') + 1)$. Définissons une transformation de $\overline{\Delta}$ sur $\overline{\Delta}_d$ par les relations

$$x' = x \,, \quad y' = y + f(x) - k \operatorname{sgn} x . x \,. \tag{2.5}$$

Cette transformation est biunivoque et son Jacobien est égal à 1. Il s'ensuit visiblement des considérations relatives à (2.4) que les dérivées secondes de (2.5) sont bornées. (Elles sont même continues à l'exception de la droite $x = 0$, où elles sont continues à gauche et à droite.) Or cela implique le

Théorème 2.6. *Soit* $u(X) \in W_2^{(2)}(\Delta)$. *Alors* $V(X') = u(T^{-1}(X')) \in W_2^{(2)}(\Delta_d)$ *et inversement.* (La transformation (2.5) est écrite ici de nouveau de manière symbolique $X' = T(X)$.)

Comme nous l'avons annoncé déjà dans l'Introduction nous exploiterons d'une façon essentielle pour la résolution du problème biharmonique dans les domaines à points anguleux la résolution de ce problème dans un coin infini.

Les points de ce coin seront exprimés à l'aide des coordonnées polaires $[r, \Theta]$, $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\omega}{2}$. Nous supposerons que les conditions aux limites $f_1(r), f_2(r), g_1(r), g_2(r)$ de la fonction biharmonique cherchée $u(r, \Theta)$, $\left[u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r),\ u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r),\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta} u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r),\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta} u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = g_2(r)\right]$ vérifient les conditions suivantes (qui représentent un cas spécial des conditions aux limites pour lesquelles l'existence et l'unicité de la solution ont été démontrées dans les travaux [9], [10], [11]) $f_1(r), f_2(r)$ *sont absolument continues dans* $\langle 0, \infty)$,

$$f_1(0) = f_2(0) = 0 \,, \quad \int_0^1 [f_i'(r)]^2 \, dr < \infty \,, \quad \int_0^1 [g_i(r)]^2 \, dr < \infty \,, \quad i = 1, 2 \,,$$

$$\int_1^\infty [f_i'(r)]^2 \, r^{2\nu+1} \, dr < \infty \,, \quad \int_1^\infty [g_i(r)]^2 \, r^{2\nu+1} \, dr < \infty \tag{2.6}$$

où

$$-\lambda_1(\omega) - 1 < \nu < \operatorname{Min}(0, \lambda_1(\omega) - 1) \,.$$

(La signification et les propriétés de $\lambda_1(\omega)$ sont discutées en détail dans [9] et [11]; $\lambda_1(\omega)$ est une certaine fonction de l'angle ω, $0 < \omega < 2\pi$, pour laquelle on a démontré, dans les parties citées des travaux [9] et [11], que l'on a $\frac{1}{2} < \lambda_1(\omega)$, $\omega \in \pi \Rightarrow \lambda_1(\omega) \geqq 1$.) Remarquons encore que le problème biharmonique pour un demi-plan, dont la résolution a été donnée dans (10), peut être modifié au sens des conditions (2.6). La démonstration de l'existence et de l'unicité suit dans ce cas le même ordre d'idées comme dans le cas d'un coin non-convexe.

La fonction $u(r, \Theta)$ peut être exprimée à l'aide des fonctions de Green dont nous allons rappeler ici la définition.

Définition 2.5. *Les fonctions de Green pour la solution du problème biharmonique spécial, mentionné ci-dessus, pour un coin infini (convexe, demi-plan, nonconvexe) à angle ω, sont les suivantes:*

$$g_1(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{n \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n + 2) \Theta - (n + 2) \sin (n + 2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta}{n[(n + 1) \sin \omega + \sin (n + 1) \omega]} r^{-n} dn , \tag{2.7}$$

$$g_2(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{(n + 2) \cos (n + 2) \frac{\omega}{2} \sin n\Theta - n \cos n \frac{\omega}{2} \sin (n + 2) \Theta}{n[(n + 1) \sin \omega - \sin (n + 1) \omega]} r^{-n} dn , \tag{2.8}$$

$$g_3(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{\cos (n + 2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - \cos n \frac{\omega}{2} \cos (n + 2) \Theta}{(n + 1) \sin \omega + \sin (n + 1) \omega} r^{-n} dn , \tag{2.9}$$

$$g_4(r, \Theta, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{\sin (n + 2) \frac{\omega}{2} \sin n\Theta - \sin n \frac{\omega}{2} \sin (n + 2) \Theta}{(n + 1) \sin \omega - \sin (n + 1) \omega} r^{-n} dn . \tag{2.10}$$

L'intégration suit le contour $\operatorname{Re} n = \xi, \ -\lambda_1(\omega) - 1 < \xi < \operatorname{Min}(0, \lambda_1(\omega) - 1)$, $n = \xi + i\eta$.

On a alors

Théorème 2.7. *On obtient les solutions du problème biharmonique au sens des définitions données dans* [9] *et* [11] *pour les conditions aux limites* (2.6) *sous la forme suivante*

$$u(r, \Theta) = \int_0^\infty g_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) + f_2'(s)] ds + \int_0^\infty g_2\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) - f_2'(s)] ds + \int_0^\infty g_3\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [g_1(s) + g_2(s)] ds + \int_0^\infty g_4\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [g_1(s) - g_2(s)] ds . \tag{2.11}$$

Le théorème 2.7 est une conséquence directe du théorème 12 de [9] et du théorème 3 de [11].

Nous allons démontrer maintenant une propriété spéciale de la solution (2.11).

Théorème 2.8. *Soit* $f_1(r) = f_2(r) = g_1(r) = g_2(r) = 0$ *pour* $r \geqq 1$. *Soit* $F_i(n+1) = \int\limits_0^\infty r^n f'(r)\,\mathrm{d}r$, $G_i(n+1) = \int\limits_0^\infty r^n g_i(r)\,\mathrm{d}r$, $i = 1, 2$, $\operatorname{Re} n > -1$. *Supposons que nous ayons*

$$\sup_{\xi \in (-1, -\frac{1}{2})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_i(1 + \xi + i\eta)|^2 (1 + \eta^2)\,\mathrm{d}\eta < \infty\,, \tag{2.12}$$

$$\sup_{\xi \in (-1, -\frac{1}{2})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_i(1 + \xi + i\eta)|^2 (1 + \eta^2)\,\mathrm{d}\eta < \infty\,. \tag{2.13}$$

Alors $u \in W_2^{(2)}(K)$. (*K* désignant le coin infini.)

Démonstration. La transformée de Mellin de la solution $u(r, \Theta)$, $U(n, \Theta) = \int\limits_0^\infty r^{n-1} u(r, \Theta)\,\mathrm{d}r$ s'obtient pour $-1 < \operatorname{Re} n < -\frac{1}{2}$ sous forme de

$$\begin{aligned} U(n, \Theta) = {} & \frac{n \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n+2)\,\Theta - (n+2) \sin (n+2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta}{2n[(n+1) \sin \omega + \sin (n+1)\,\omega]} \,. \\ & . \, [F_1(n+1) + F_2(n+1)] + \\ & + \frac{(n+2) \cos (n+2) \frac{\omega}{2} \sin n\Theta - n \cos n \frac{\omega}{2} \sin (n+2)\,\Theta}{2n[(n+1) \sin \omega - \sin (n+1)\,\omega]} \,. \\ & . \, [F_1(n+1) - F_2(n+1)] + \\ & + \frac{\cos (n+2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta - \cos n \frac{\omega}{2} \cos (n+2)\,\Theta}{2[(n+1) \sin \omega + \sin (n+1)\,\omega]} [G_1(n+1) + G_2(n+1)] + \\ & + \frac{\sin (n+2) \frac{\omega}{2} \sin n\Theta - \sin n \frac{\omega}{2} \sin (n+2)\,\Theta}{2[(n+1) \sin \omega - \sin (n+1)\,\omega]} [G_1(n+1) - G_2(n+1)]\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Le théorème sera démontré si nous établissons

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \Bigg[& \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \Theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial \Theta}(r, \Theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2}(r, \Theta)\right)^2 + \\ & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta)\right)^2 \Bigg] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta < \infty\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Considérons p. ex. $\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \Theta)\right)^2 r \, dr \, d\Theta$. Nous obtenons de l'égalité de Parseval pour la transformation de Mellin (voir [9], théorème 3.)

$$\sup_{\xi \in (-1, -\frac{1}{2})} \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \Theta)\right)^2 r^{3+2\xi} \, dr =$$

$$\sup_{\xi \in (-1, -\frac{1}{2})} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |U(\xi + i\eta, \Theta)(\xi + i\eta)(1 + \xi + i\eta)|^2 \, d\eta \, .$$

Il s'ensuit des conditions (2.12) et (2.13) et du fait que les fractions figurant dans (2.14) multipliées par $n = \xi + i\eta$ restent uniformément bornées pour $-1 \leqq \operatorname{Re} n \leqq -\frac{1}{2}$, $|\Theta| \leqq \frac{\omega}{2}$, que $\int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \Theta)\right)^2 r \, dr < M < \infty$, M étant une constante indépendante de Θ. Nous suivons un raisonnement analogue en considérant l'expression $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \, \partial \Theta}$ au lieu de la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ etc.

Le théorème suivant est une analogie du théorème 2.8; il exprime, pour une certaine classe de fonctions biharmoniques, définies dans un demi-plan infini, une condition nécessaire et suffisante pour que ces fonctions appartiennent à $W_2^{(2)}(\Omega)$, Ω étant un sous-domaine quelconque borné d'un demi-plan infini.

Théorème 2.9. *Soit u une fonction biharmonique définie pour* $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$ *par l'expression*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi x \, . \, e^{-n\pi y} \left[-\frac{f_n}{\pi n} + y(g_n - f_n)\right], \tag{2.16}$$

où $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^2 < \infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n^2 < \infty$. *Alors la condition nécessaire et suffisante pour que* $u \in W_2^{(2)}(\Delta)$ *où* $\Delta = \underset{[x,y]}{\mathscr{E}} (0 < x < 1, 0 < y < 1)$ *est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_n^2 < \infty \, , \quad \sum_{n=0}^{\infty} n g_n^2 < \infty \, . \tag{2.17}$$

Sur le segment $y = 0$, $0 \leqq x \leqq 1$ *on a alors au sens du théorème* 2.2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx \, , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos nx \, .$$

A propos du théorème 2.9 nous signalons un fait remarquable: l'indépendance mutuelle des conditions (2.17). La fonction définie par (2.16) représente dans un sens non-précisé la solution générale du problème biharmonique pour un demi-plan, quand les conditions aux limites sont des fonctions périodiques.

La démonstration du théorème 2.9 est très facile, nous en laissons la charge au Lecteur.

A présent, nous allons énoncer des théorèmes de „construction". Il s'agira du problème de la construction d'une fonction de $W_2^{(2)}(\Omega)$, lorsque ses valeurs sur toute la frontière ou sur une partie de la frontière du domaine Ω sont données.

Théorème 2.10. *Soient $h(s)$ et $k(s)$ deux fonctions d'arc définies sur un arc positevement orienté Λ du carré déformé Δ_d. Supposons que les fonctions $h(s)$ et $k(s)$ soient absolument continues sur Λ et que leur dérivées premières y soient de carré sommable. Supposons qu'au point $[0, f(0)]$ il soit associé le paramètre $s = 0$ et au point $[1, f(1)]$ le paramètre $s = l$. Supposons ensuite que nous ayons $h(0) = h(l) = k(0) = k(l) = 0$. Désignons par T l'espace de telles paires $F = [h, k]$ où la norme est constituée par l'expression $|F|_T = (\int_0^l (h'(s))^2 \, ds)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^l (k'(s))^2 \, ds)^{\frac{1}{2}}$. Alors il existe une transformation linéaire continue V de l'espace T dans $W_2^{(2)}(\Delta_d)$ et l'on a l'implication: Si $V(F) = u$, alorssur l'arc Λ on a $\frac{\partial u}{\partial x} = h(s)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = k(s)$ avec $u(0, f(0)) = 0$.*

Démonstration. Ecrivons tout d'abord la transformation (2.4) et son inverse sous la forme $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, $x = f_{-1}(x', y')$, $y = g_{-1}(x', y')$. Soit maintenant $u \in W_2^{(2)}(\Delta_d)$ et soient $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ les dérivées au sens tu théorème 2.2, de la fonction u sur la frontière. (Dans ce qui suit, les dérivées premières des fonction de $W_2^{(2)}$ seront toujours entendues en ce sens.) Soit $v(x, y) = u(f(x, y), g(x, y))$. D'après notre théorème 2.5 nous avons $v \in W_2^{(2)}(\Delta)$ et

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial g}{\partial y}. \tag{2.18}$$

Soit maintenant $[h, k]$ une telle paire. Nous déterminons maintenant à partir de (2.18) les fonctions $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, dont les coefficients de Fourier vérifient, en raison du caractère lisse de la frontière et des propriétés des fonctions h et k, les conditions $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_n^2 < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} n^2 g_n^2 < \infty$, d'oú (2.17). Par là la fonction $v(x, y)$ est exprimée par (2.17) oú nous choisissons f_0 de telle sorte que nous ayons $v(0, 0) = 0$. Maintenant la fonction

$$u(x', y') = v(f_{-1}(x', y'), \ g_{-1}(x', y')) \in W_2^{(2)}(\Delta_d)$$

vérifie évidemment sur l'arc Λ les conditions $\frac{\partial u}{\partial x'} = h(s)$, $\frac{\partial u}{\partial y'} = k(s)$. Il est évident que cette construction conduit à une transformation linéaire continue V.

Théorème 2.11. *Soient $h(s)$ et $k(s)$ deux fonctions d'arc définies sur un arc positivement orienté Λ qui fait partie de la frontière du domaine Δ_d. (Pour la signification des symboles Λ, Δ, Δ_d voir le théorème 2.6.) Supposons que les fonctions $h(s)$ et $k(s)$ soient absolument continues sur l'arc Λ et que leurs dérivées premières y soient de carré sommable. Supposons qu'au point $[-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})]$ il soit associé le paramètre $-\frac{1}{2}l$, et au point $[\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})]$ le paramètre $\frac{1}{2}l$. Désignons par T l'espace de telles paires $F = [h, k]$ où la norme est constituée par l'expression*

$$|F|_T = \left(\int_0^l (h(s))^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l (h'(s))^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l (k(s))^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l (k'(s))^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il existe alors une transformation linéaire continue V de l'espace T *dans $W_2^{(2)}(\Delta_d)$ telle que $V(F) = u$, $\frac{\partial u}{\partial x} = h(s)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = k(s)$ pour $-\frac{l}{2} \leqq s \leqq \frac{l}{2}$, $u(0, 0) = 0$.*

Démonstration. D'une manière analogue à la démonstration du théorème précédent écrivons la transformation (2.5) et son inverse sous forme de

$$x' = f(x, y)\,, \quad y' = g(x, y)\,, \quad x = f_{-1}(x, y)\,, \quad y = g_{-1}(x, y)\,. \tag{2.19}$$

Soit maintenant de nouveau $u(x', y') \in W_2^{(2)}(\Delta_d)$. Alors pour les dérivées premières de la fonction $u(f(x, y), g(x, y)) = v(x, y)$ les relations (2.18) ont lieu. Substituons h et k aux relations (2.18) et calculons $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. Soit maintenant $\varphi(r)$ une fonction indéfiniment dérivable définie dans l'intervalle $\langle 0, |k|\rangle$ et telle que $\varphi(r) = 1$ pour $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}|k|$ et $\varphi(r) = 0$ pour $\frac{3}{4}|k| \leqq r \leqq |k|$. Soit ensuite K le coin infini à angle ω situé de telle façon que son sommet soit au point $[0, 0]$, et que ces côtés contiennent les segments $\overline{[-1, f(-1)], [0, 0]}$; $\overline{[0, 0], [1, f(1)]}$. Les points de ce coin seront exprimés par les coordonnées polaires $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\omega}{2}$. Nous allons prendre d'une façon formelle les fonctions $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0)$, pour les dérivées $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ d'une certaine fonction w. A partir de là calculons pour $0 \leqq r \leqq |k|$, $\varphi = \pm\frac{\omega}{2}$ les dérivées $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}$. Posons $w\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right) = \int_0^r \frac{\partial w}{\partial r}\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{d}r$. Cherchons maintenant la solution $z(r, \Theta)$ du problème biharmonique pour le coin infini K si nous avons sur sa frontière

$$\frac{\partial z}{\partial r}\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(w\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right)\varphi(r)\right), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \Theta}\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right)\varphi(r)\,.$$

Maintenant pour $F_i(n+1) = \int\limits_0^\infty r^n f'_r(r)\,\mathrm{d}r,\ G_i(n+1) = \int\limits_0^\infty r^n g_i(r)\,\mathrm{d}r,\ i = 1, 2$ les conditions (2.12) et (2.13) seront satisfaites. En effet, p. ex. au lieu de la condition

$$\sup_{\xi\epsilon(-1,-\frac{1}{2})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_1(1+\xi+i\eta)^2|\,\mathrm{d}\eta < \infty$$

nous pouvons prendre une autre qui lui est équivalente en vertu de l'égalité de Parseval, à savoir

$$\sup_{\xi\epsilon(-1,-\frac{1}{2})} \int\limits_0^{\infty} [f'_1(r)]^2\, r^{1+2\xi}\,\mathrm{d}r < \infty\,,$$

qui est vérifiée. Alors pour $-1 < \operatorname{Re} n < -\frac{1}{2}$ nous avons

$$\int\limits_0^\infty r^n f'_1(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{n+1}\int\limits_0^\infty r^{n+1} f''_1(r)\mathrm{d}r = -\frac{1}{n+1} H_1(n+2)\,.$$

(Notation: $\int\limits_0^\infty r^{n+1} f''_1(r)\,\mathrm{d}r = H_1(n+2)$.)

En appliquant encore une fois l'égalité de Parseval nous trouvons

$$\int\limits_0^\infty [f''_1(r)]^2\, r^{3+2\xi}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H_1(2+\xi+i\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta$$

d'où

$$\sup_{\xi\epsilon(-1,-\frac{1}{2})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |H_1(2+\xi+i\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta =$$
$$\sup_{\xi\epsilon(-1,-\frac{1}{2})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |1+\xi+i\eta|^2\,|F_1(1+\xi+i\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta < \infty\,.$$

De là s'ensuit déjà la condition (2.12) pour $F_1(n+1)$. Nous pouvons procéder d'une manière analogue dans le cas des fonctions $F_2(n+1)$, $G_1(n+1)$, $G_2(n+1)$. Si nous posons maintenant

$$u(x', y') = z(f_{-1}(x', y'), g_{-1}(x', y')) + \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0)\, f_{-1}(x', y') + \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0)\, g_{-1}(x', y')\,,$$

la transformation V sera par là déterminée.

Il n'a pas échappé sans doute au Lecteur que les théorèmes 2.10 et 2.11 sont d'un caractère local — les dérivées premières de la fonction de $W_2^{(2)}$ ne sont données que sur une partie de la frontière du domaine. A présent nous allons énoncer et démontrer un théorème global.

Théorème 2.12. *Soit donnée un domaine $\Omega \epsilon \mathfrak{N}_3$. Soient $h(s)$ et $k(s)$ deux fonctions absolument continues définies sur la frontière, leurs dérivées premières soient de carré sommable. Supposons que nous ayons $\int\limits_0^l h(s)\,\mathrm{d}x + k(s)\,\mathrm{d}y = 0$. Désignons* *par* T *l'espace de telles paires* $F = [h, k]$ *où la norme est constituée par l'expression*

$$|F|_T = (\int_0^l (h(s))^2 \, ds)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^l (h'(s))^2 \, ds)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^l (k(s))^2 \, ds)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^l (k'(s))^2 \, ds)^{\frac{1}{2}} .$$

Soit $[x_0, y_0]$ *un point sur la frontière de* $\dot{\Omega}$. *Il existe alors une transformation linéaire continue* V *de l'espace* T *dans* $W_2^{(2)}(\Omega)$ *telle que si* $V(F) = u$, *alors* $\frac{\partial u}{\partial x} = h(s)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = k(s)$, $u(x_0, y_0) = 0$.

Démonstration. On déduit facilement des théorèmes 2.10 et 2.11 l'énoncé suivant: Pour chaque point X de la frontière il existe un voisinage simplement connexe $U(X)$ de ce point et une transformation continue V_x de T dans $W_2^{(2)}(\Omega \, . \, U(X))$ tels que si $V_x(F) = u$, alors $\frac{\partial u}{\partial x} = h(s)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = k(s)$ sur l'intersection de $\dot{\Omega}$ avec $U(X)$, et l'on a $u(x_0, y_0) = 0$. Ici $[x_0, y_0]$ est un point de $\dot{\Omega}\, U(X)$. La frontière étant lisse, il s'ensuit qu'on peut trouver des points $X_1, X_2, \ldots$, et leurs voisinages $U(X_1), U(X_2), \ldots$ de sorte que $\sum_{i=1}^{m} U(X_i) \supset \dot{\Omega}$. Les points X_i seront numérotés dans l'ordre donné par l'orientation positive de la frontière. L'intersection de $U(X_i)$ avec $U(X_j)$ est non-vide seulement si X_i et X_j sont voisins. Nous allons modifier la transformation V_{x_i} de la façon suivante: Nous posons $U_{x_1} = V_{x_1}$. Soit ensuite

$$[x_1, y_1] \in U(X_1) \, . \, U(X_2) \, . \, \dot{\Omega} \, .$$

Si $V_{x_2}(F) = u_2$ et $V_{x_1}(F) = u_1$, posons

$$U_{x_2}(F) = u_2(x, y) + u_1(x_1, y_1) - u_2(x_1, y_1) \, .$$

La transformation U_{x_2} reste évidemment linéaire. Nous poursuivons ce procédé le long du ,,périmètre". Il s'ensuit de la condition $\int_0^l h(s) \, dx + k(s) \, dy = 0$ que U_{x_m} associe aux points de l'intersection $\dot{\Omega}\, U(X_1)\, U(X_m)$ les mêmes valeurs de la fonction u comme U_{x_1}. Soit maintenant Ω' un tel domaine que l'on ait $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ et $\Omega' + \sum U(X_i) \supset \overline{\Omega}$. Il existe alors des fonctions φ et φ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ indéfiniment dérivables, à support fermé contenu dans Ω' ou $U(X_i)$ respectivement, et telles que $\varphi + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 1$ si $[x, y] \in \overline{\Omega}$. Posons $U_{x_i}(F) = u_i$ et $v_i = u_i \varphi_i$. D'une façon évidente $v_i \in W_2^{(2)}(\Omega)$. Posons $V(F) = \sum_{i=1}^{m} v_i = u$. Nous avons $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$, et si $[x, y] \in \Omega$, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial x} \varphi_i + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = h(s)$$

et d'une manière analogue $\dfrac{\partial u}{\partial y} = k(s)$. Le théorème 2.12 se trouve par là démontré, car V est une transformation linéaire continue de T dans $W_2^{(2)}(\Omega)$.

Pour terminer ce paragraphe nous allons démontrer un théorème analogue au théorème 2.11, mais dont les hypothèses sont essentiellement moins restrictives.

Théorème 2.13. *Les symboles Δ_d et Δ ont la même signification comme au théorème 2.11. Les points de l'arc orienté sont exprimés de façon paramétrique $x = x(s)$, $y = y(s)$, où $-l \leqq s \leqq l$. Soient $h(s)$ et $k(s)$ deux fonction d'arc, continues sur le segment $\langle -l, l\rangle$, continûment dérivables dans les deux intervalles $\langle -l, 0)$, $(0, l\rangle$. Soit ensuite*

$$h(0) = k(0) = 0\,, \quad |h'(s)| + |k'(s)| \leqq C|s|^{\varepsilon-1}\,, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{2.19}$$

Soit $D = \inf C$ de la condition (2.19). Désignons par T *l'espace de telles paires $F = [h, k]$ où la norme est constituée par $|F|_T = D$. Alors il existe une transformation linéaire, continue V de l'espace T dans $W_2^{(2)}(\Delta_d)$ telle que si $V(F) = u$, on a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = h(s)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = k(s)$ pour $-\dfrac{l}{2} \leqq s \leqq \dfrac{l}{2}$, et $u(0, 0) = 0$.*

La démonstration de ce théorème va suivre un chemin tout analogue à celui de la démonstration du théorème 2.11. Considérons à nouveau la transformation (2.5) écrite sous la forme de (2.19). Calculons $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ de la même façon comme dans le cas du théorème 2.11. Posons de façon formelle $v = w$ et calculons $\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \Theta}$ pour $0 < r \leqq |k|$, $\Theta = \pm\dfrac{\omega}{2}$ à partir de $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}$.

Posons maintenant

$$w\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right) = \int_0^r \frac{\partial w}{\partial r}\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right) \mathrm{d}r\,.$$

Soit $z(r, \Theta)$ la solution du problème biharmonique pour le coin infini K si l'on a sur la frontière

$$\frac{\partial z}{\partial r}\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(w\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right)\varphi(r)\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \Theta}\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \Theta}\left(r, \pm\frac{\omega}{2}\right)\varphi(r)\,.$$

(La signification de $\varphi(r)$ est la même comme dans la démonstration du théorème 2.11.) Pour

$$F_i(n+1) = \int_0^\infty r^n f_i'(r)\,\mathrm{d}r\,, \quad G_i(n+1) = \int_0^\infty r^n g_i(r)\,\mathrm{d}r\,, \quad i = 1, 2\,,$$

les conditions (2.12) et (2.13) sont de nouveau vérifiés et en même temps ces bornes supérieures sont aussi petites que l'on veut, pourvu que la norme $|F|_T$ soit suffisamment petite. On a par exemple

$$\sup_{\xi \in (-1, -\frac{1}{2})} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(1 + \xi + i\eta)|^2 \, d\eta = \sup_{\xi \in (-1, -\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} [f_1'(r)]^2 \, r^{1+2\xi} \, dr \leqq \frac{CD^2}{2\varepsilon}$$

et ensuite

$$\sup_{\xi \in (-1, -\frac{1}{2})} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(2 + \xi + i\eta)|^2 \, d\eta = \sup_{\xi \in (-1, -\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} [f_1''(r)]^2 \, r^{3+2\xi} \, dr \leqq \frac{ED^2}{2\varepsilon},$$

(C, E étant constantes). On procède d'une manière analogues en étudiant les fonctions $F_2(n + 1)$, $G_1(n + 1)$, $G_2(n + 1)$. Si nous posons enfin $u(x', y') = z(f_{-1}(x', y'), g_{-1}(z', y'))$, la transformation V sera construite.

3. Définition du problème et construction de la fonction de Green

Définition 3.1. *Soit Ω un domaine borné, simplement connexe. Par le symbole $F(\Omega)$ nous désignons l'espace linéaire composé des fonctions biharmoniques $u(x, y)$ dans Ω, $u(0, 0) = 0$ (nous supposons que l'origine des axes de coordonnées se trouve dans Ω). Soit Ω_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ une suite croissante de sous-domaines $\Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \ldots$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n = \Omega$. Pour $u \in F(\Omega)$ définissons la pseudo-norme*

$$|u|_n = \sum_{k=0}^{4} \sum_{k_1, k_2} \max_{[x,y] \in \Omega_n} \left| \frac{\partial u^k}{\partial x^{k_1} \, \partial y^{k_2}} \right|$$

et posons $\varrho(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u|_n}{1 + |u|_n}$. Définissons maintenant la distance séparant deux élémentes u et v par $\varrho(u - v)$. Toutes les exigeances que l'on impose à la métrique sont alors satisfaites. L'espace linéaire $F(\Omega)$ est devenu métrique, complet, donc c'est un espace de Fréchet.

Définition 3.2. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}_3$. Le symbole* W *dénotera les éléments F de* L_p, *$p > 1$, pour lesquels il existe $f \in W_2^{(2)}(\Omega)$ de telle sorte que l'on ait $F = T(f)$ au sens du théorème* 2.2.

Définition 3.3. *Soit $\Omega \in \mathfrak{N}_3$. Nous appellerons l'espace L_p extension de l'espace des conditions aux limites pour le domaine donné Ω s'il existe une transformation linéaire continue Z_Ω de l'espace L_p dans $F(\Omega)$ telle que pour $F \in W$ on a $Z_\Omega(F) = S(f)$ où $F = T(f)$. Le symbole $S(f)$ a la même signification comme au théorème* 2.3 *et le symbole $T(f)$ comme au théorème* 2.2. (*Il en sera de même dans ce qui va suivre, nous ne répéterons donc plus cet avis tant qu'il n'y aura pas de danger* *d'ambiguité.) Si $F = [f_x, f_y] \in \mathrm{L}_p$, alors la fonction biharmonique $Z_\Omega(F)$ sera appelée solution du problème biharmonique correspondant aux conditions aux limites* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f_y$.

Nous écrivons les points de la frontière $\dot{\Omega}$ du domaine Ω de $\mathfrak{N}_3$ de façon paramétrique à l'aide de l'arc de la frontière $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in \langle 0, l \rangle$, l désignant la longueur de la frontière.

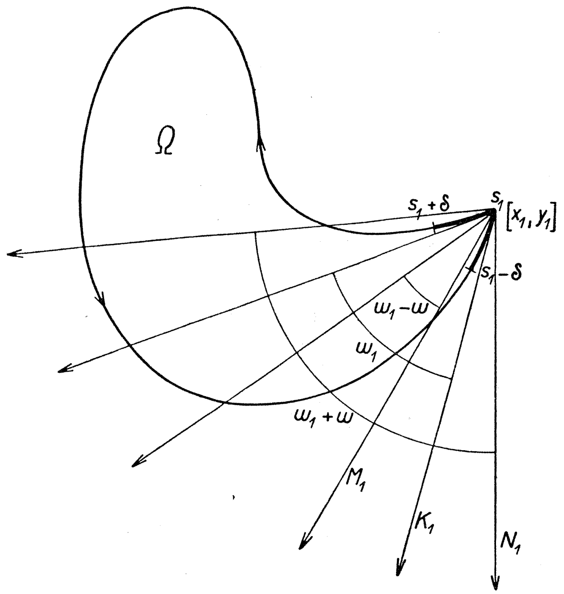

Fig. 2.

Il nous faudra trouver les fonctions de Green $g_x(x, y, s)$, $g_y(x, y, s)$ qui sont des fonctions biharmoniques du point $[x, y]$ de Ω, dépendent du paramètre s et vérifient:

$$Z_\Omega(F) = \int_0^l g_x(x, y, s)\, f_x(s)\, \mathrm{d}s + \int_0^l g_y(x, y, s)\, f_y(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Soient $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < l$ les valeurs du paramètre correspondant aux points anguleux. Nous allons procéder à quelques considérations „géometriques". Construisons des coins K_i aux sommets situés en $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_i = x(s_i)$, $y_i = y(s_i)$, à angle ω_i et dont l'axe de symétrie coïncide avec la bissectrice de l'angle correspondant ω_i. Soit à présent $0 < \omega < \underset{i=1,2,\ldots n}{\mathrm{Min}} \left(\dfrac{1}{2}\,\omega_i, \pi - \dfrac{\omega_i}{2}\right)$. Soient maintenant M_i et N_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, des coins construits tout comme les K_i, mais dont l'angle est égal à $\omega_i - \omega$ ou $\omega_i + \omega$ respectivement. Soit ensuite $\delta > 0$ si petit que l'on a $[x(s), y(s)] \in N_i$, $[x(s), y(s)]$ non $\in M_i$ pour $s_i - \delta \leqq s \leqq s_i + \delta$, $s \neq s_i$ (voir la fig. 2).

Nous allons procéder à la construction de la fonction de Green $g_x(x, y, s)$. Posons

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta(s) - z} \frac{d\zeta(s)}{ds}, \tag{3.1}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta(s) - z} \frac{d\zeta(s)}{ds} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\overline{\zeta(s)}}{(\zeta(s) - z)^2} \frac{d\zeta(s)}{ds} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta(s) - z} \frac{d\overline{\zeta(s)}}{ds}, \tag{3.2}$$

où $z = x + iy$, $\zeta(s) = x(s) + i\,y(s)$. Quant au choix des fonctions (3.1) et (3.2), remarquons que l'on peut les obtenir à partir des formules (3.3) et (3.4) employées par D. I. Šerman pour établir les équations intégrales servant à la solution du problème d'élasticité plan, comme c'est décrit en détail dans (4), pp. 208—210; il suffit d'y substituer à $\omega(\sigma)$ la fonction de Dirac $\delta(\sigma - s)$.

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\omega(\sigma)}{\zeta(\sigma) - z} \frac{d\zeta(\sigma)}{d\sigma} d\sigma, \tag{3.3}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\zeta(\sigma) - z} \frac{d\zeta(\sigma)}{d\sigma} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\overline{\zeta(\sigma)}\,\omega(\sigma)}{(\zeta(\sigma) - z)^2} \frac{d\zeta(\sigma)}{d\sigma} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\omega(\sigma)}{\zeta(\sigma) - z} \frac{d\overline{\zeta(\sigma)}}{d\sigma} d\sigma. \tag{3.4}$$

Soit à présent $h_x(x, y, s) = \operatorname{Re}(\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z))$ où $\chi'(z) = \psi(z)$. Nous choisissons $\chi(z)$ de manière à avoir $h_x(0, 0, s) = 0$. Désignons par $\vartheta(s_0, s)$ l'angle que fait le segment orienté $\overrightarrow{[x(s_0), y(s_0)], [x(s), y(s)]}$ avec la direction positive de l'axe des x. Si nous nous servons formellement des résultats de Šerman, nous aurons pour les points de la frontière $\dot{\Omega}$:

$$\frac{\partial h_x}{\partial x}(x(\tau), y(\tau), s) = \delta(\tau - s) + \frac{1}{\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s) - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s) \,.$$

$$.\cos 2\vartheta(\tau, s)\,, \quad \frac{\partial h_x}{\partial y}(x(\tau), y(\tau), s) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s) \sin 2\vartheta(\tau, s)\,.$$

Soit maintenant $k(\tau)$ une fonction réelle, définie et indéfiniment dérivable dans l'intervalle $\langle 0, l\rangle$, différente de zéro pour $\tau \in \langle a, b\rangle \in (0, l)$ seulement, et vérifiant $\int_0 k(s)\, dx = 1$. En même temps l'intervalle $\langle a, b\rangle$ est disjoint à tous les intervalles $\langle s_i - \delta, s_i + \delta\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit $F = [f_x, f_y]$ où

$$f_x(\tau, s) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}(s)\, k(\tau) + \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s) - \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s) \cos 2\vartheta(\tau, s)\,,$$

$$f_y(\tau, s) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s) \sin 2\vartheta(\tau, s)\,.$$

En vertu du théorème 2.12, il vient $F \in \mathrm{W}$. Posons $k_x(x, y, s) = S(f)$ où $F = T(f)$. Or en vertu du même théorème la fonction $k_x(x, y, s)$ en tant que fonction du paramètre s, transforme d'une manière continue la partie de la frontière

$$\dot{\Omega} - \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i\,, \quad (\Lambda_i = \mathop{\mathscr{E}}_{[x,y]} (x = x(s),\ y = y(s),\ s \in \langle s_i - \delta,\ s_i + \delta \rangle)$$

dans l'espace $W_2^{(2)}(\Omega)$; cela résulté de ce que la fonction $\vartheta(\tau, s)$ est lisse ce qui est, à son tour, une conséquence du caractère lisse de la frontière. Pour juger du caractère lisse des fonctions $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)$ et $\vartheta(\tau, s)$ au voisinage d'un point X de la frontière, on prend pour point de départ la formule

$$\vartheta(\tau, s) = \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(\tau)}{x(s) - x(\tau)} + C$$

où C est une constante. Les coordonnées x, y doivent être convenablement choisies par rapport au point X, ce qu'on peut toujours supposer, vu l'invariance géométrique de l'angle ϑ. Le Lecteur fera lui-même le calcul détaillé de $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)$ et de $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s\, \partial\tau}(\tau, s)$. Quant à l'angle $\vartheta(\tau, s)$, on peut se renseigner à ce sujet dans le livre [4], pp. 471-476.

Posons $g_x(x, y, s) = h_x(x, y, s) - k_x(x, y, s)$. Ainsi la fonction de Green $g_x(x, y, s)$ est définie pour $s \in \dot{\Omega} - \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i$.

Soit s maintenant appartenant par exemple à $\langle s_1 - \delta, s_1)$. Soit Λ l'arc composé des points $[x(s), y(s)]$ pour lequels $s_1 - \delta \leqq s \leqq s_1$ et du côté $0 \leqq r < \infty$, $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$ du coin K_1. Les points de cet arc Λ soient décrits au moyen du paramètre ν exprimant sa longuer d'arc; si $\tau \in \langle s_1 - \delta, s)$ on aura $\nu = \tau$. Soit ensuite $l_x(x, y, s)$ la solution du problème biharmonique dans K_1 déterminée par les conditions suivantes vérifiées pour les points $[x, y]$ du côté $0 < r < \infty$, $\Theta = \frac{\omega_1}{2}$:

$$\frac{\partial l_x}{\partial x}(x, y, s) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(s_1, s) - \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(s_1, s) \cos 2\vartheta(s_1, s) = c_x\,,$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial y}(x, y, s) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(s_1, s) \sin 2\vartheta(s_1, s) = d_x$$

et pour les points de l'autre côté $0 < r < \infty$, $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$:

$$\frac{\partial l_x}{\partial x}(x(\nu), y(\nu), s) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\nu, s) - \frac{1}{\pi}\frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\nu, s)\cos 2\vartheta(\nu, s)\,,$$
$$\frac{\partial l_y}{\partial y}(x(\nu), y(\nu), s) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\nu, s)\sin 2\vartheta(\nu, s)\,.$$

Rappelons encore que nous supposons $l_x(x_1, y_1, s) = 0$. La solution $l_x(x, y, s)$ est unique pour les conditions aux limites citées (au sens de la définition du problème biharmonique des travaux [9] et [11]) et on peut l'exprimer sous la forme (2.11). Nous pouvons prolonger analytiquement la fonction $l_x(x, y, s)$ à l'extérieur de K_1 en obtenant ainsi une fonction biharmonique dans un domaine Ω_1, contenant $\bar{\Omega} - [x_1, y_1]$. En effet, la fonction $l_x(x, y, s) - xc_x - yd_x$ s'annule pour $\Theta = \frac{\omega_1}{2}$ et, comme cela résulte du théorème 16 de [10], elle peut être prolongée au delà de cette demi-droite sur un coin à angle $2\omega_1$ ayant cette demi-droite pour axe de symétrie. (Si $\omega_1 > \pi$, on obtiendra en général une fonction multivalente.) On peut donc prolonger sur le même coin la fonction $l_x(x, y, s)$ également. Soit maintenant K_1' le coin dont un côté est donné par $0 < r < \infty$, $\Theta = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2}$ et l'autre par $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$, $0 < r < \infty$. La fonction

$$l_x(x, y, s) - h_x(x, y, s) + h_x(x_1, y_1, s)$$

est la solution d'un problème biharmonique dans K_1' et elle s'annule pour $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$. On peut donc la prolonger au delà de ce côté en obtenant une fonction biharmonique sur le coin infini ayant cette demi-droite pour son axe de symétrie; l'angle correspondant étant égal à $2\omega_1 - \omega$. Comme la fonction $h_x(x, y, s)$ est évidemment prolongeable sur ce domaine, il en est de même pour la fonction $l_x(x, y, s)$. Le domaine ainsi obtenu ne contient pas encore, en général, $\bar{\Omega} - [x_1, y_1]$. Soit donc Γ_1 le plus petit cercle centré au point $[x_1, y_1]$, dont l'adhérence contient les points $[x(\tau), y(\tau)]$ de la frontière pour $\tau \in \langle s_1 - \delta, s_1 \rangle$. Il s'ensuit des considérations ,,géométrique'' faites ci-dessus, qu'il suffit de prolonger la fonction $l_x(x, y, s)$ à l'extérieur de ce cercle seulement. Or cela peut se faire d'une manière ,,pendulaire'', c'est-à-dire que nous prolongeons alternativement au delà des deux demi-droites $\Theta = \frac{\omega_1}{2}$ et $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$, le domaine ainsi obtenu étant à chaque pas symétrique par rapport à $\Theta = \frac{\omega_1}{2}$ ou $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$ respectivement. Nous laissons au Lecteur la tâche de réaliser ces prolongements successifs d'une façon formelle.

Posons à présent $m_x(x, y, s) = l_x(x, y, s) - l_x(0, 0, s)$. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.1. *Soit* $-\frac{1}{2} < \xi_1 < \text{Min}\,(0, \lambda_1(\omega) - 1)$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Alors* $m_x(x, y, s)(s_1 - s)^{-\xi_1+\varepsilon}$ *transforme d'une manière continue l'arc* $\Lambda = \underset{[x(\tau), y(\tau)]}{\mathscr{E}}$ $(\tau \in \in \langle s_1 -, \delta\, s_1))$ *dans un ensemble borné de* $F(\Omega)$.

Démonstration. Il vient d'après la formule (2.11) pour $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\omega_1}{2}$,

$$l_x(r, \Theta, s) = \int_0^\infty g_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) + f_2'(s)]\, \mathrm{d}s + \dots .$$

Posons

$$l_x^{(1)}(r, \Theta, s) = \int_0 g_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) + f_2'(s)]\, \mathrm{d}s + \dots ,$$

$$l_x^{(2)}(r, \Theta, s) = \int_1^\infty g_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2} [f_1'(s) + f_2'(s)]\, \mathrm{d}s + \dots .$$

Afin de pouvoir mieux étudier les fonctions $f_2'(s)$ et $g_2(s)$ supposons — sans restreindre la généralité — que nous ayons

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\nu, s) = \frac{y'(s)(x(s) - (\nu - s_1)) - x'(s)\, y(s)}{(x(s) - (\nu - s_1))^2 + y^2(s)} .$$

Le système de coordonnées est choisi de telle manière que l'origine soit en $[x_1, y_1]$ et que la direction positive de l'axe des x coïncide avec la demi-droite $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$. Considérons maintenant les intégrales $\int_1^\infty$. Dans les formules (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) nous intégrons le long de la droite $\text{Re}\, n = \xi$, où $\xi < -1$. Pour $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\omega_1}{2}$ fixés nous pouvons changer l'ordre d'intégration dans $\int_1^\infty \int_{\xi - i\infty}^{\xi - i\infty}$. Les fractions figurant dans les intégrales (2.7)—(2.10) sont majorées par l'expression $Me^{-\alpha|\eta|}$, où M et α dépendent de r, Θ, ξ. Nous aurons ainsi

$$l_x^{(2)}(r, \Theta, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} r^{-n} \frac{n \sin n \frac{\omega}{2} \cos (n + 2)\, \Theta - (n + 2) \sin (n + 2) \frac{\omega}{2} \cos n\Theta}{2n[(n + 1) \sin \omega + \sin (n + 1)\, \omega]} \cdot$$

$$\cdot\, [F_1^{(2)}(n + 1, s) + F_2^{(2)}(n + 1, s)]\, \mathrm{d}n + \dots .$$

Ici nous avons

$$F_i^{(2)}(n + 1, s) = \int_1^\infty r^n f_i'(r, s)\, \mathrm{d}r\,, \quad G_i^{(2)}(n + 1, s) = \int_1^\infty r^n g_i(r, s)\, \mathrm{d}r\,.$$

Les fonctions $f_i(r, s)$, $g_i(r, s)$ sont les valeurs limites (au sens de (2.6)) de la fonction biharmonique $l_x(x, y, s)$ sur le coin infini K_1. Il s'ensuit de (3.5) que les fonctions $F_i^{(2)}(n+1, s)$, $G_i^{(2)}(n+1, s)$ sont continues et bornées pour $-\infty < < \eta < \infty$, $s \in \langle s_1 - \delta, s_1)$, $n = \xi + i\eta$. Il s'en ensuit la validité du théorème 3.1 pour $l_x^{(2)}(x, y, s)$, à condition que $\Omega \subset K_1$. En examinant $l_x^{(1)}(x, y, s)$ posons $\xi = \xi_1$ dans (2.8)—(2.10) et procédons ensuite d'une manière tout à fait analogue. Nous sommes conduits ainsi à examiner les intégrales

$$F_i^{(1)}(n+1, s) = \int_0^1 r^n f_i'(r, s)\,\mathrm{d}r\,, \quad G_i^{(1)}(n+1, s) = \int_0^1 r^n g_i(r, s)\,\mathrm{d}r\,.$$

Si $\omega_1 \neq \pi$, il exists $\delta_1 > 0$ et deux constantes L, L_1 telles que l'on a pour $s \in \langle s_1 - \delta_1, s_1)$ (en prenant par ex. $F_2^{(1)}(n+1, s)$)

$$|F_2^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)| \leqq L \int_0^1 r^{\xi_1} \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(r + s_1, s) \right| \mathrm{d}r \leqq$$

$$\leqq L|y(s)|^{\xi_1} \int_0^1 \left(\frac{r}{|y(s)|}\right)^{\xi_1} \frac{\left| y'(s)\left(\frac{x(s)}{|y(s)|} - \frac{r}{|y(s)|}\right) - x'(s)\,\frac{y(s)}{|y(s)|} \right|}{1 + \left(\frac{x(s)}{|y(s)|} - \frac{r}{|y(s)|}\right)^2} \frac{\mathrm{d}r}{|y(s)|} \leqq L_1 |y(s)|^{\xi_1}\,. \tag{3.6}$$

Si $s \in \langle s_1 - \delta, s_1 - \delta_1\rangle$, il découle de ce que (3.5) est borné et continu pour $\nu \in \langle s_1, s_1 + 1\rangle$ et $s \in \langle s_1 - \delta, s_1 - \delta_1\rangle$ que l'expression $F_2^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)$ est bornée et continue pour $-\infty < \eta < \infty$, $s \in \langle s_1 - \delta, s_1 - \delta_1\rangle$. Si $\omega_1 = \pi$, alors

$$\left| \frac{y'(s)(x(s) - r) - x'(s)\,y(s)}{(x(s) - r)^2 + y^2(s)} \right| \leqq M \quad (M \text{ const})\,.$$

Il s'ensuit de cela que la fonction $F_2^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)$ est, dans ce cas aussi, bornée et continue sur l'ensemble $-\infty < \eta < \infty$, $s \in \langle s_1 - \delta, s_1)$. Il en est de même pour la fonction $G_2^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)$. Quant à $F_1^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)$ et $G_1^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)$, ces deux fonctions sont évidemment bornées et continues pour $-\infty < \eta < \infty$, $s \in \langle s_1 - \delta, s_1)$. Il découle de (3.6) et des estimations analogues valables pour $G_2^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)$ que les fonctions

$$(s_1 - s)^{-\xi_1 + \varepsilon} F_i^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)\,, \quad (s_1 - s)^{-\xi_1 + \varepsilon} G_i^{(1)}(1 + \xi_1 + i\eta, s)$$

sont continues et bornées pour $s \in \langle s_1 - \delta, s_1)$, $-\infty < \eta < \infty$. Cela implique que le théorème 3.1 est valable pour $l_x^{(1)}(x, y, s)$ aussi, à condition que $\Omega \subset K_1$. Comme

$$l_x(x, y, s) = l_x^{(1)}(x, y, s) + l_x^{(2)}(x, y, s)\,,$$

le théorème 3.1 est démontré dans le cas où $\Omega \subset K_1$. Si Ω n'est pas contenu dans K_1, revenons au prolongement de la fonction $l_x(x, y, s)$. En appliquant le théorème 16 de [10] et un simple procédé de construction de la fonction prolongée, basé sur le principe de symétrie de Schwarz (pour les détails voir A. Huber [12]), nous arrivons à la conclusion que le théorème 3.1 a lieu dans tous les cas.

Théorème 3.2. *Soit*

$$f_x(\tau, s) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}(s)\, k(\tau) + \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s) - \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)\cos 2\vartheta(\tau, s) - \\ - \frac{\partial m_x}{\partial x}(x(\tau), y(\tau), s)\,,$$

$$f_y(\tau, s) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)\sin 2\vartheta(\tau, s) - \frac{\partial m_x}{\partial y}(x(\tau), y(\tau), s)\,.$$

Alors $F(s) = [f_x, f_y] \in \mathrm{W}$. *De plus, il existe une transformation linéaire* V *de l'espace* W *dans* $W_2^{(2)}(\Omega)$ *telle que les éléments* $V((s_1 - s)^{-\xi_1+\varepsilon} F(s))$ *transforment d'une manière continue l'arc* $\langle s_1 - \delta, s_1)$ *dans un ensemble borné contenu dans* $W_2^{(2)}(\Omega)$.

Démonstration. Critique sera le point $[x_1, y_1]$ de la frontière; examinons donc de plus près le comportement des fonctions $f_x(\tau, s)$, $f_y(\tau, s)$ pour $\tau \in \langle s_1 - \delta, s_1 + \delta\rangle$. Prenons d'abord $\tau \in \langle s_1 - \delta, s_1\rangle$. Posons

$$n_x(x, y, s) = l_x(x, y, s) - xc_x - yd_x\,.$$

Considérons maintenant la fonction biharmonique $n_x(x, y, s)$ et ses dérivées sur l'arc correspondant aux paramètres $\tau \in \langle s_1 - \delta, s_1\rangle$. Posons (comme nous l'avons fait en examinant $l_x(x, y, s)$)

$$n_x(x, y, s) = n_x^{(1)}(x, y, s) + n_x^{(2)}(x, y, s)\,.$$

La signification de $n_x^{(i)}(x, y, s)$ est la suivante: Désignons par $f_1(r, s)$, $f_2(r, s)$, $g_1(r, s)$, $g_2(r, s)$ les valeurs limites de la fonction biharmonique $n_x(x, y, s)$ sur K_1. Posons

$$n_x^{(1)}(r, \Theta, s) = \int_0^1 g_1\left(\frac{r}{\sigma}, \Theta, \omega_1\right)\frac{1}{2}[f_1'(\sigma, s) + f_2'(\sigma, s)]\,\mathrm{d}\sigma + \ldots,$$

$$n_x^{(2)}(r, \Theta, s) = \int_1^\infty g_1\left(\frac{r}{\sigma}, \Theta, \omega_1\right)\frac{1}{2}[f_1'(\sigma, s) + f_2'(\sigma, s)]\,\mathrm{d}\sigma + \ldots,$$

Nous appliquon maintenant le même procédé comme en étudiant les fonctions $l_x^{(i)}(r, \Theta, s)$, $i = 1, 2$. Comme $f_1(\sigma, s) = g_1(\sigma, s) = 0$, nous pouvons écrire $n_x^{(i)}(r, \Theta, s)$ sous forme de

$$n_x^{(1)}(r, \Theta, s) = \int_0^1 \frac{1}{2}\left[g_1\left(\frac{r}{\sigma}, \Theta, \omega_1\right) - g_2\left(\frac{r}{\sigma}, \Theta, \omega_1\right)\right] f_2'(\sigma, s)\,\mathrm{d}\sigma + \\ + \int_0^1 \frac{1}{2}\left[g_3\left(\frac{r}{\sigma}, \Theta, \omega_1\right) - g_4\left(\frac{r}{\sigma}, \Theta, \omega_1\right)\right] g_2(\sigma, s)\,\mathrm{d}\sigma$$

avec une expression analogue pour $n_x^{(2)}(r, \Theta, s)$. En retranchant les fractions figurant dans les intégrales des formules (2.7)—(2.10) pour g_1, g_2 ou g_3, g_4 nous trouvons qu'elles sont majorées pour $0 \leqq \Theta \leqq \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega}{2}$ par l'expression

$$K(\xi)\left|\frac{\omega_1}{2} - \Theta\right| e^{-\alpha|\eta|} . \tag{3.7}$$

Il en est de même pour leurs dérivées premières en Θ, tandis-que leurs dérivées secondes en Θ sont majorées par l'expression

$$L(\xi)\, \mathrm{e}^{-\alpha|\eta|} . \tag{3.8}$$

($K(\xi)$ et $L(\xi)$ sont deux constantes ne dépendant que de ξ.) Ici $\alpha > 0$ et $\xi + i\eta = n$. Considérons d'abord $n_x^{(2)}(r, \Theta, s)$. Choisissons — tout comme dans le cas de $l_x^{(2)}(r, \Theta, s)$ — un $\xi < -1$. Il est de nouveau possible d'échanger les intégrales $\int\limits_1^\infty$ et $\int\limits_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty}$. Nous obtenons ainsi

$$n_x^{(2)}(r, \Theta, s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} r^{-n} - F_2^{(2)}(n + 1, s)\, \mathrm{d}n + \ldots . \tag{3.9}$$

Ici

$$F_2^{(2)}(n + 1, s) = \int\limits_1^\infty f_2'(r, s)\, r^n\, \mathrm{d}r , \quad G_2^{(2)}(n + 1, s) = \int\limits_1^\infty g_2(r, s)\, r^n\, \mathrm{d}r .$$

Les fonctions $F_2^{(2)}(n + 1, s)$ et $G_2^{(2)}(n + 1, s)$ sont bornées et continues pour $s \in \langle s_1 - \delta, s_1)$, $-\infty < \eta < \infty$. La frontière étant lisse, il découle de (3.7), (3.8) et (3.9) que l'on a

$$\frac{\partial n_x^{(2)}}{\partial x}(x(\tau), y(\tau), s) = r_1^{(2)}(\tau, s)(\tau_1 - \tau)^{-\xi_1}, \quad \frac{\partial n_x}{\partial y}(x(\tau), y(\tau), s) = r_2^{(2)}(\tau, s)(\tau_1 - \tau)^{-\xi_1} ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial n_x}{\partial x}(x(\tau), y(\tau), s)\right) = s_1^{(2)}(\tau, s)(\tau_1 - \tau)^{-\xi_1 - 1} ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial n_x}{\partial y}(x(\tau), y(\tau), s)\right) = s_2^{(2)}(\tau, s)(\tau_1 - \tau)^{-\xi_1 - 1} , \tag{3.10}$$

où $r_i^{(2)}(\tau, s)$ et $s_i^{(2)}(\tau, s)$ sont des fonctions continues et bornées pour $s_1 - \delta \leqq \tau < s_1$, $s_1 - \delta \leqq s < s_1$. En examinant $n_x^{(1)}(x, y, s)$ nous choisissons $\operatorname{Re} n = \xi_1$. Comme les fonctions

$$(s_1 - s)^{-\xi_1 + \varepsilon} F_2^{(1)}(n + 1, s) , \quad (s_1 - s)^{-\xi_1 + \varepsilon} G_2^{(1)}(n + 1, s)$$

sont continues et bornées pour $-\infty < \eta < \infty$, $s \in \langle s_1 - \delta, s_1)$, $n = \xi_1 + i\eta$, nous trouvons en procédant de façon analogue au cas précédent

$$\frac{\partial n_x^{(1)}}{\partial x}(x(\tau), y(\tau), s) = r_1^{(1)}(\tau, s)(\tau_1 - \tau)^{-\xi_1}(s_1 - s)^{-\varepsilon + \xi_1} ,$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial y}(x(\tau), y(\tau), s) = r_2^{(1)}(\tau, s)(\tau_1 - \tau)^{-\xi_1}(s_1 - s)^{-\varepsilon + \xi_1} ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial n_x}{\partial x}(x(\tau), y(\tau), s)\right) = s_1^{(1)}(\tau, s)(\tau_1 - \tau)^{-\xi_1 - 1} . (s_1 - s)^{-\varepsilon + \xi_1} ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial n_x}{\partial y}(x(\tau), y(\tau), s)\right) = s_2^{(1)}(\tau, s)(\tau_1 - \tau)^{-\xi_1 - 1}(s_1 - s)^{-\varepsilon + \xi_1} .$$

Ici de nouveau $r_i^{(1)}(\tau, s)$, $s_i^{(1)}(\tau, s)$ sont des fonctions continues et bornées pour $s_1 - \delta \leqq \tau < s_1$, $s_1 - \delta \leqq s < s_1$.

Si nous examinons maintenant $f_x(\tau, s)$ et $f_y(\tau, s)$ pour $\tau \in \langle s_1, s_1 + \delta \rangle$, nous trouverons que $f_x(\tau, s)$ et $f_y(\tau, s)$ représentent les dérivées partielles, en x et en y respectivement, de la solution du problème biharmonique pour le coin K_1', les dérivées premières s'annulant pour $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$. Désignons par $v(x, y, s)$ cette solution. Les conditions aux limites sur la demi-droites $\Theta = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2}$ donnent pour les fonctions $f_x(\tau, s)$, $f_y(\tau, s)$ les conditions (3,10) si $\tau \in (s_1, s_1 + \delta\rangle$. En effet, ces conditions aux limites sont données par la différence $\frac{\partial h_x}{\partial x}(x, y, s) - \frac{\partial l_x}{\partial x}(x, y, s)$ ou $\frac{\partial h_x}{\partial y}(x, y, s) - \frac{\partial l_x}{\partial y}(x, y, s)$ respectivement sur la demi-droite $\Theta = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2}$. La fonction $v(x, y, s)$ égale $v^{(1)}(x, y, s) + v^{(2)}(x, y, s)$ où $v^{(i)}(x, y, s)$ sont les solutions du problème biharmonique sur le coin K_1' pour les conditions aux limites s'annulant pour $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$ les dérivées premières étant déterminées pour $\Theta = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2}$ de la façon suivante:

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}(x, y, s) = \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x}(x, y, s) + \frac{\partial l^{(1)}}{\partial x}(x, y, s) ,$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}(x, y, s) = \frac{\partial h^{(1)}}{\partial y}(x, y, s) + \frac{\partial l^{(1)}}{\partial y}(x, y, s) .$$

Ici $\frac{\partial h^{(1)}}{\partial x}(x, y, s) = \frac{\partial h_x}{\partial x}(x, y, s)$ tant qu'il y a $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leqq 1$. Autrement nous posons $\frac{\partial h^{(1)}}{\partial x}(x, y, s) = 0$. Le symbole $\frac{\partial h^{(1)}}{\partial y}(x, y, s)$ a une signification analogue. Maintenant $\frac{\partial h^{(2)}}{\partial x}(x, y, s) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, s)$ tant qu'il y a $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 > 1$, autrement $\frac{\partial h^{(2)}}{\partial x}(x, y, s) = 0$. Le symbole $\frac{\partial h^{(2)}}{\partial y}(x, y, s)$ a une signification analogue. Par ce procédé nous retrouvons les conditions (3.10); le Lecteur se chargera d'en examiner les détails. Or maintenant pour $\tau \in \langle s_1 - \delta, s_1)$ les expressions

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s) - \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)\cos 2\vartheta(\tau, s) - c_x \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)\,\sin\, 2\vartheta(\tau, s) - d_x$$

vérifient aussi les conditions (3.10) en raison du caractère lisse de la frontière. D'après notre théorème 2.13, il existe donc une transformation V des paires $F(s) = [f_x, f_y]$ dans $W_2^{(2)}(U(x_1, y_1)\ \Omega)$ telle que sur la partie de la frontière $\dot{\Omega}$ qui se trouve au voisinage $U(x_1, y_1)$ du point $[x_1, y_1]$ on a $\frac{\partial u}{\partial x} = f_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = f_y$ pour $V(F) = u(x, y, s)$. Il découle de (3.10) que la fonction $(s_1 - s)^{-\xi_1+\varepsilon}\,u(x, y, s)$ transforme de manière continue l'arc $\langle s_1 - \delta, s_1)$ dans un ensemble borné contenu dans $W_2^{(2)}(U(x_1, y_1)\ \Omega)$. Soient maintenant U_1 et U_2 deux voisinages du point $[x_1, y_1]$ jouissant de la propriété suivante: $\overline{U}_1 \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U$. Soit φ une fonction indéfiniment dérivable, égale à 1 dans U_1 et à zéro à l'extérieur de U_2. Posons $v(x, y, s) = u(x, y, s)\,\varphi(x, y)$. Nous aurons $v \in W_2^{(2)}(\Omega)$. Soit à présent $\overline{F(s)} = [\bar{f}_x, \bar{f}_y]$ où

$$\bar{f}_x(\tau, s) = f_x(\tau, s) - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, s)\,, \quad \bar{f}_y(\tau, s) = f_y(\tau, s) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, s)\,.$$

D'après notre théorème 2.12, il existe une transformation U des $\overline{F(s)}$ dans $W_2^{(2)}(\Omega)$ et telle que si $U(\overline{F}) = u(x, y, s)$, alors $u(x, y, s)$ transforme de manière continue l'arc $\langle s_1 - \delta, s_1)$ dans un ensemble borné contenu dans $W_2^{(2)}(\Omega)$. Mais cela implique déjà le théorème 3.2.

Soit à présent $p_x = S(f)$, où $T(f) = F = [f_x, f_y]$. (Pour la signification de f_x et f_y voir le théorème 3.2.) Posons

$$g_x(x, y, s) = h_x(x, y, s) - m_x(x, y, s) - p_x(x, y, s)\,.$$

La construction mentionnée peut être évidemment réalisé pour n'importe quel $s \neq s_i$, $s \in \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i$ (cf. la définition de $k_x(x, y, s)$).

Si maintenant nous écrivons $i\,\delta(\sigma - s)$ au lieu de $\omega(\sigma)$ dans les formules (3.3) et (3.4), nous retrouverons les fonctions $\varphi(z)$, $\psi(z)$ définissant la fonction

$$h_y(x, y, s) = \operatorname{Re}\,(\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z)) \quad \text{où} \quad \chi'(z) = \chi(z)\,, \quad \chi(0) = 0\,.$$

Sur la frontière $\dot{\Omega}$ nous aurons alors

$$\frac{\partial h_y}{\partial x}(x(\tau), y(\tau), s) = \frac{1}{\pi}\sin 2\vartheta(\tau, s)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)\,,$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial y}(x(\tau), y(\tau), s) = \delta(\tau - s) + \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s) - \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)\cos 2\vartheta(\tau, s)\,.$$

Les valeurs limites de la fonction $h_y(x, y, s)$ sont alors données sous forme de

$$f_x(\tau, s) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}(s)\,k(\tau) + \frac{1}{\pi}\sin 2\vartheta(\tau, s)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)\,,$$

$$f_y(\tau, s) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s) - \frac{1}{\pi}\cos 2\vartheta(\tau, s)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}(\tau, s)$$

(à condition que s non $\epsilon \sum_{i=1}^{n} \langle s_i - \delta, s_i + \delta \rangle$). Si p. ex. $s \epsilon \langle s_1 - \delta, s_1)$ alors la solution $l_y(x, y, s)$ du problème biharmonique pour le coin K_1 est déterminée par ces conditions sur les côtés: Pour $\Theta = -\frac{\omega_1}{2}$ on a

$$\frac{\partial l_y}{\partial x}(x(\nu), y(\nu), s) = \frac{1}{\pi} \sin 2\vartheta(\nu, s) \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\nu, s),$$

$$\frac{\partial l_y}{\partial y}(x(\nu), y(\nu), s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\nu, s) - \frac{1}{\pi} \cos 2\vartheta(\nu, s) \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\nu, s).$$

Pour $\Theta = \frac{\omega_1}{2}$ on a

$$\frac{\partial l_y}{\partial x}(x, y, s) = c_y, \quad \frac{\partial l_y}{\partial y}(x, y, s) = d_y,$$

où

$$c_y = \frac{1}{\pi} \sin 2\vartheta(s_1, s) \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(s_1, s), \quad d_y = \frac{1}{\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(s_1, s) - \frac{1}{\pi} \cos 2\vartheta(s_1, s) \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(s_1, s).$$

Dans la suite, on peut appliquer un procédé analogue à celui de la construction de la fonction $g_x(x, y, s)$, nous laissons cela au Lecteur. Les théoremès 3.1 et 3.2 subsistent à condition d'y remplacer $m_x(x, y, s)$ par $m_y(x, y, s)$, etc.

Les théorèmes 3.1 et 3.2 entraînent un autre théorème qui est très important, à savoir

Théorème 3.3. *Soit* $-\frac{1}{2} < \xi_i < \mathrm{Min}\,(0, \lambda_1(\omega_i) - 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Soit* $p > \frac{1}{1 + \xi_i}$. *Alors la formule*

$$u(x, y) = \int_0^l g_x(x, y, s)\, f_x(s)\, \mathrm{d}s + \int_0^l g_y(x, y, s)\, f_y(s)\, \mathrm{d}s = Z(F) \tag{3.11}$$

détermine une transformation continue de l'espace L_p *dans* $F(\Omega)$ *(on peut toujours prendre* $p = 2$*).*

Démonstration. Il s'ensuit des théorèmes 3.1 et 3.2 pour toutes les dérivées jusqu'au quatrième ordre et pour le domaine Ω_j (voir la définition 3.1), qu'il existe une constante K_j telle que

$$\left| \frac{\partial^m g_x(x, y, s)}{\partial x^{k_1}\, \partial y^{k_2}} \right| \leqq K_j \prod_{i=1}^{n} |s_i - s|^{\xi_i - \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

L'inégalité de Schwarz implique alors que les intégrales

$$\int_0^l |f_x(s)| \prod_{i=1}^{n} |s_i - s|^{\xi_i - \varepsilon}\, \mathrm{d}s, \quad \int_0^l |f_y(s)| \prod_{i=1}^{n} |s_i - s|^{\xi_i - \varepsilon}\, \mathrm{d}s$$

sont finies. Le théorème 3.3 découle alors des théorèmes bien connus sur la différentiation sous le signe.

4. Propriétés de la transformation Z

Au paragraphe 3 nous avons construit les fonctions de Green $g_x(x, y, s)$, $g_y(x, y, s)$ et nous avons montré que la formule (3.11) définit une transformation linéaire continue de L_p dans $F(\Omega)$ si $p > \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \frac{1}{1+\xi_i}$. Le présent paragraphe aura pour but de montrer que l'espace L_p est une extension de l'espace des conditions aux limites et que la transformation Z définie par (3.11) coïncide avec Z_Ω.

Théorème 4.1. *Soit* $\Omega \in \mathfrak{N}_3$. *Si* $p > \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \frac{1}{1+\xi_i}$ *alors* L_p *est l'extension de l'espace des conditions aux limites et la transformation* Z *définie par la formule* (3.11) *coïncide avec* Z_Ω.

Démonstration. Soit d'abord $\varphi(x, y) \in D_c(\Gamma)$ (voir le théorème 2.4). Soient $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ les pointes angulaires. Soit $u = S(f)$ où $T(u) = T(\varphi)$ au sens du théorème 2.2. Soit $v = Z(F)$ où $F = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = [f_x, f_y]$. Nous allons montrer d'abord que $v \in W_2^{(2)}(\Omega)$. D'après la définition nous avons

$$v(x, y) = \int_0^l h_x(x, y, s)\, f_x(s)\, ds - \int_0^l m_x(x, y, s)\, f_x(s)\, ds -$$
$$- \int_0^l p_x(x, y, s)\, f_x(s)\, ds + \int_0^l h_y(x, y, s)\, f_y(s)\, ds - \int_0^l m_y(x, y, s)\, f_y(s)\, ds -$$
$$- \int_0^l p_y(x, y, s)\, f_y(s)\, ds\,.$$

Si s non $\in \sum\limits_{i=1}^{n} \langle s_i - \delta, s_i + \delta\rangle$, nous posons

$$m_x(x, y, s) = 0\,,\; m_y(x, y, s) = 0\,,\; p_y(x, y, s) = k_x(x, y, s)\,,$$
$$p_y(x, y, s) = k_y(x, y, s)\,.$$

Ecrivons maintenant la fonction biharmonique

$$h(x, y) = \int_0^l h_x(x, y, s)\, f_x(s)\, ds + \int_0^l h_y(x, y, s)\, f_y(s)\, ds$$

sous forme de Re $(\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z))$. Désignons $\psi(z) = \chi'(z)$, nous obtenons

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\Omega}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\, (f_x(\zeta) + i\, f_y(\zeta))\,,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\Omega}} \frac{f_x(\zeta) + i\, f_y(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\Omega}} \frac{\bar{\zeta}(f_x(\zeta) + i\, f_y(\zeta))}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\Omega}} \frac{f_x(\zeta) + i\, f_y(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}\, d\zeta\,. \tag{4.1}$$

Pour que l'on ait $h \in W_2^{(2)}(\Omega)$, il suffit (voir (4), p. 72) que les fonctions $\varphi''(z)$, $\psi'(z)$ soient bornées dans le domaine Ω. Il en vient

$$\varphi''(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\Omega}} \frac{f_x''(\zeta) + i f_y''(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \, .$$

La frontière de Ω est la somme d'un nombre fini d'arcs Λ_i ayant pour extrémités les points $[x_i, y_i]$ respectifs, les arcs sont trois fois continûment dérivables. Comme la fonctions $\varphi(x, y)$ est indéfiniment dérivable, les fonctions $f_x''(\zeta)$, $f_y''(\zeta)$ sont hölderiennes et s'annulent identiquement pour $s \in \langle s_i - \delta', s_i + \delta' \rangle$ où δ' est suffisamment petit. D'après la monographie de N. J. Muschelišvili [9] (voir pp. 42 et 78) nous en concluons que $\varphi''(z)$ est continûment prolongeable sur $\overline{\Omega}$, donc bornée sur Ω. D'une manière analogue, nous trouvons que $\psi'(z)$ est aussi bornée sur Ω. Soit maintenant

$$m(x, y) = \int_0^l m_x(x, y, s) \, f_x(s) \, ds + \int_0^l m_y(x, y, s) \, f_y(s) \, ds \, .$$

Si $\delta' \geqq \delta$, alors $m(x, y) = 0$. On remarquera l'égalité suivante qui, quoique bien simple, n'en est pas moins importante par les conséquences qu'on peut en tirer: pour $s \neq s_i$ on a

$$m_x(x, y, s) + p_x(x, y, s) = k_x(x, y, s) \tag{4.2}$$

et

$$m_y(x, y, s) + p_y(x, y, s) = k_y(x, y, s) \, . \tag{4.3}$$

Tout d'abord $m_x(x, y, s)$ et $m_y(x, y, s)$ appartiennent à $W_2^{(2)}(\Omega)$. En effet $m_x(x, y, s) = l_x(x, y, s) - l_x(0, 0, s)$. Pour fixer les idées, nous allons considérer de nouveau le point angulaire $[x_1, y_1]$. Si nous calculons la transformée de Mellin de la fonction $m_x(r, \Theta, s)$ dans la bande $-\lambda_1(\omega_1) - 1 < \operatorname{Re} n < -1$, alors la transformation inverse de Mellin donne pour $0 < r \leqq 1$, $-\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2} \leqq \Theta \leqq -\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega}{2}$ (le contour d'intégration étant choisi comme $\operatorname{Re} n = \xi < -1$)

$$\left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \leqq K r^{-2\xi-4} \, . \tag{4.4}$$

Si maintenant $-\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2} \leqq \Theta \leqq -\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega}{2}$ alors $l_x(x, y, s) = h_x(x, y, s) + r_x(x, y, s)$, où $r_x(x, y, s)$ est la solution d'un problème biharmonique dans le coin K_1' (voir la démonstration de la possibilité de prolonger la fonction $l_x(x, y, s)$) pour laquelle l'estimation (4.4) est valable. Comme la fonction $h_x(x, y, s)$ est manifestement deux fois continûment dérivable pour $0 \leqq r \leqq 1$, $-\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2} \leqq \Theta \leqq \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega}{2}$ nous trouvons que $m_x(x, y, s) \in W_2^{(2)}(\Omega)$. Mais puisque

$k_x(0, 0, s) = m_x(0, 0, s) = p_x(0, 0, s) = 0$ et que les dérivées de $m_x(x, y, s) + p_x(x, y, s)$ sur la frontière coïncident avec celles de $k_x(x, y, s)$, (4.1) a lieu. De façon analogue on conclue à la validité de (4.2). Il est donc possible, sans restreindre la généralité des raisonnements, de supposer que $\delta' \geqq \delta$. Les fonctions de Green pour $s \neq s_i$, d'ailleurs quelconque, ont la forme

$$g_x(x, y, s) = h_x(x, y, s) - k_x(x, y, s)\,,$$
$$g_y(x, y, s) = h_y(x, y, s) - k_y(x, y, s)\,.$$

Introduisons la notation

$$k(x, y) = \int_0^l k_x(x, y, s)\, f_x(s)\, \mathrm{d}s + \int_0^l k_y(x, y, s)\, f_y(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Les ensembles $k_x(x, y, s)$ et $k_y(x, y, s)$ de fonctions du paramètre s sont bornés dans $W_2^{(2)}(\Omega)$. Il en résulte que $k \in W_2^{(2)}(\Omega)$. Montrons à présent que sur la frontière $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$. D'après la formule (2.8.2) de (4), p. 74, les dérivées premières de la fonction h sont continûment prolongeables sur $\overline{\Omega}$, à condition qu'il en soit de même pour les fonctions φ, φ' et ψ. Or cela est vrai en vertu des formules (4.1). La démonstration suit un chemin analogue à celui de l'étude de la fonction φ'', nous en laissons la charge au Lecteur. Ce prolongement continu vaudra en vertu de l'équation intégrale de Šerman (voir (4), p. 210):

$$\frac{\partial h}{\partial x}(\tau) + i\,\frac{\partial h}{\partial y}(\tau) = f_x(\tau) + i\,f_y(\tau) + \frac{1}{\pi}\int_0^l (f_x(s) + i\,f_y(s))\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s)\,\mathrm{d}s -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^l (f_x(s) + i\,f_y(s))\,\frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s)\, e^{2i\vartheta(\tau,s)}\,\mathrm{d}s\,.$$

D'autre part

$$\frac{\partial k}{\partial x}(\tau) + i\,\frac{\partial k}{\partial y}(\tau) = \int_0^l k(\tau)\, f_x(s)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s)\, f_x(s)\,\mathrm{d}s -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s)\cos 2\vartheta(\tau, s)\, f_x(s)\,\mathrm{d}s - \frac{i}{\pi}\int_0^l \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s)\sin 2\vartheta(\tau, s)\, f_x(s)\,\mathrm{d}s +$$
$$+ \int_0^l k(\tau)\, f_y(s)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s)\sin 2\vartheta(\tau, s)\, f_y(s)\,\mathrm{d}s +$$
$$+ i\int_0^l \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s)\, f_y(s)\,\mathrm{d}s - \frac{i}{\pi}\int_0^l \frac{\partial \vartheta}{\partial s}(\tau, s)\cos 2\vartheta(\tau, s)\, f_y(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Donc $v = u$.

Soit à présent $f \in W_{20}^{(2)}(\Gamma)$. Si nous considérons la fonction f sur Ω seulement nous aurons $f \in W_2^{(2)}(\Omega)$. Soit $u = S(f)$. D'après notre théorème 2.4, il existe des fonctions $\varphi_k \in D_c(\Gamma)$ telles que $\lim \varphi_k = f$ dans $W_{20}^{(2)}(\Gamma)$, donc aussi dans $W_2^{(2)}(\Omega)$. En posant $u_x = S(\varphi_k)$ nous obtenons $\lim u_x = u$ dans $W_2^{(2)}(\Omega)$. Soit $F_k = \left[\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}\right]$, $F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$. Maintenant

$$\lim_{k\to\infty} Z_\Omega(F_k) = Z_\Omega(F) \quad \text{dans} \quad F(\Omega)\,,$$

parce que d'après le théorème de l'immersion (voir Sobolev [1], p. 64) on a $\lim_{k\to\infty} F_k = F$ dans L_p. Donc $Z_\Omega(F) = u$.

Soit maintenant $f \in W_2^{(2)}(\Omega)$. Soient φ et φ_i les fonctions figurant dans la démonstration du théorème 2.12. Soit $f_i = f\varphi_i$ et $f^* = f \,.\, \varphi$. Soit $u = S(f)$, $u_i = S(f_i)$, $h = S(f^*)$. On a $h = 0$ d'où $u = \sum_{i=1}^{m} u_i$. Posons ensuite $F_i = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}\right]$, $F = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$. Il vient

$$Z_\Omega(F) = \sum_{i=1}^{m} Z_\Omega(F_i)\,.$$

Nous allons montrer que $Z_\Omega(F_i) = u_i$.

Soit donc $U(X_i)$ le voisinage du point frontière X_i, et soit φ_i la fonction correspondante. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la partie de la frontière qui se trouve dans $\overline{U(X_i)}$ se compose de points $[x, f(x)]$ où $f(x)$ possède les propriétés mentionnées au théorème 2.11 ou 2.10. Supposons que le domaine Ω soit situé „au-dessous" de la fonction $f(x)$. Soit ensuite Ω_ε le domaine Ω translaté de ε sous la fonction $f(x)$. La fonction $f(x, y)$ est prolongeable à l'extérieur de $U(X_i)$ à zéro. Désignons par Δ le domaine auquel $f_i(x, y)$ peut être prolongée. Si ε est suffisamment petit, alors $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset \Delta$, $[0, 0] \in \Omega_\varepsilon$. Ecrivons, sur $\dot{\Omega}$,

$$f_{i\varepsilon}(x, y) = f_i(x, y - \varepsilon)\,, \quad F_{i\varepsilon} = \left[\frac{\partial f_{i\varepsilon}}{\partial x}, \frac{\partial f_{i\varepsilon}}{\partial y}\right].$$

De la proposition citée dans [1], p. 16, il découle $\lim_{\varepsilon\to 0} f_{i\varepsilon} = f_i$ dans $W_2^{(2)}(\Omega)$. Posons $F_i = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}\right]$. Il s'ensuit du théorème de l'immersion que $\lim_{\varepsilon\to 0} F_{i\varepsilon} = F_i$ dans L_p. Ecrivons $S(F_{i\varepsilon}) = u_{i\varepsilon}$. D'après ce qui précède, nous avons $Z_\Omega(F_{i\varepsilon}) = u_{i\varepsilon}$. Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} u_{i\varepsilon}(x,y) = u_i(x,y)$ dans $W_2^{(2)}(\Omega)$, donc aussi dans $F(\Omega)$ et $\lim Z_\Omega(F_{i\varepsilon}) = Z_\Omega(F_i)$ dans $F(\Omega)$, nous avons nécessairement $u_i = Z_\Omega(F_i)$. Le théorème 4.1 est par là démontré.

Nous allons terminer ce paragraphe et par là le travail tout entier par une remarque et un excercice destiné aux Lecteurs.

La transformation Z_Ω peut être construite aussi à l'aide des équations intégrales constituées avec les noyaux $h_x(x, y, s)$, $h_y(x, y, s)$, $m_x(x, y, s)$, $m_y(x, y, s)$.

On peut s'attendre à ce que cette méthode qui est dans bien des sens beaucoup plus compliquée que celle employée dans le présent travail, permettra d'affaiblir d'une dérivée les conditions imposées aux arcs réguliers dont se compose la frontière du domaine Ω.

Exercice. *En appliquant le théorème* 2.12 *démontrer que* $\overline{\mathrm{W}} = \mathrm{L}_p$. *Montrer ensuite que* Z_Ω *est unique.*

LITTÉRATURE

[1] *С. Л. Соболев*: Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград 1950.

[2] *Н. И. Мусхелишвили*: Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва 1949.

[3] *Д. И. Шерман*: К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. ДАН СССР, 1940, *XXVIII*, № 1, 29—32.

[4] *I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo*: Matematická theorie rovinné pružnosti. Praha 1955.

[5] *B. Pini*: Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale. Rendiconti del seminario matematico della universita di Padova, vol. *XXV*, 1956, 196—213.

[6] *Л. Г. Магнарадзе*: Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Труды Тбилисского математического института *IV*, 1938, 43—76.

[7] *Г. А. Гринберг*: О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и о некоторых его обобщениях. Прикл. мат. и мех. *17*, Т. 53, 211—228.

[8] *J. Nečas*: Řešení biharmonického problému pro konvexní mnohoúhelníky. Kandidátská disertační práce.

[9] *J. Nečas*: Řešení biharmonického problému pro nekonečný klín, I. Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 257—286.

[10] *J. Nečas*: Řešení biharmonického problému pro nekonečný klín, II. Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 399—424.

[11] *J. Nečas*: Řešení biharmonického problému pro nekonečný, nekonvexní klín. Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), 90—98.

[12] *A. Huber*: The reflection principle for polyharmonic functions. Pacific Journal of Mathematics, vol. *5*, 1955, 433—440.

[13] *Н. И. Мусхелишвили*: Сингулярные интегральные уравнения. Ленинград 1946.

Резюме

РАСШИРЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 28/VII 1958 г.)

Исследуется бигармоническая задача в односвязной, плоской, ограниченной области, граница которой может содержать конечное число угловых точек. На границе задана пара функций f_x, f_y дуги, и нужно найти бигармоническую функцию, которая на границе формально удовлетворяет краевому условию $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f_x, \dfrac{\partial u}{\partial y} = f_y$.

Каждой области Ω поставлено в соответствие число $\mu \leqq 0$ так, что если $p > \dfrac{1}{1 + \mu}$, то f_x, f_y являются допустимыми краевыми условиями, если они абсолютно интегрируемы на границе с p-й степенью. При этом, конечно, на границе должно быть $\oint f_x \, \mathrm{d}x + f_y \, \mathrm{d}y = 0$. Так как во всяком случае $-\frac{1}{2} < \mu$, следует отсюда, что функции, интегрируемые с квадратом, являются краевыми условиями.

Из зависимости μ от угловых точек следуют еще дальнейшие условия, касающиеся краевых условий. Например, если область выпукла (достаточно, чтобы углы были выпуклыми), то допустимыми краевыми условиями являются функции, интегрируемые абсолютно с какой-либо степенью $p > 1$.