Eduard Čech

Compléments au mémoire: Déformation projective des congruences W

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 2, 289–296

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100352`

COMPLÉMENTS AU MÉMOIRE: DÉFORMATION PROJECTIVE DES CONGRUENCES W

EDUARD ČECH, Praha

(Reçu le 25 septembre 1958)

On constate que les congruences W à dualisation asymptotique sont identiques aux congruences à nappes focales réglées. On détermine toutes les congruences R à nappes focales réglées qui possèdent des déformées projectives à nappes focales non réglées.

1. Au Mémoire *Déformation projective des des congruences W* [ce Journal, t. *6 (81)*, 1956, p. 401—414] j'ai considéré une congruence W arbitraire, y désignée par L, engendrée par la droite $[A_1A_2]$, faisant usage du repère ponctuel mobile

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \tag{1.1}$$

tel que

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_2A_2 + \omega_1A_3 , \\ dA_2 &= -\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4 , \\ dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 - \omega_1A_4 , \\ dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \omega_2A_3 + \omega_{44}A_4 , \end{aligned} \tag{1.2}$$

où

$$\omega_{11} + \omega_{44} = \omega_{22} + \omega_{33} = 0 , \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} \omega_{11} - \omega_{33} = z_1\omega_1 + z_2\omega_2 , \quad \omega_{11} - \omega_{22} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 , \\ \omega_{32} = (z_2 - t_2)\,\omega_1 + (z_1 - t_1)\,\omega_2 , \quad \omega_{41} = -(z_2 + t_2)\,\omega_1 - (z_1 + t_1)\,\omega_2 , \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$[d\omega_1] = -z_2[\omega_1\omega_2] , \quad [d\omega_2] = z_1[\omega_1\omega_2] , \tag{1.5}$$

$$[\omega_{31}\omega_1] - [\omega_{42}\omega_2] - 2[\omega_1\omega_2] = 0 , \ [dz_1 + \omega_{31}\omega_1] + [dz_2 + \omega_{42}\omega_2] = 0 , \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} [dt_1\omega_1] + [dt_2\omega_2] + (z_1t_2 - z_2t_1)[\omega_1\omega_2] &= 0 , \\ [dt_2\omega_1] + [dt_1\omega_2] + 3(z_1t_1 - z_2t_2)[\omega_1\omega_2] &= 0 , \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$[dz_2 - \omega_{42}\omega_1] + [dz_1 - \omega_{31}\omega_2] + (2z_1^2 - 2z_2^2 + t_1^2 - t_2^2)[\omega_1\omega_2] = 0 . \tag{1.8}$$

Rappelons que les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ donnent les développables de la congruence L et que les points A_1, A_2 décrivent les deux nappes focales (A_1), (A_2) dont les asymptotiques sont données par les équations

$$\omega_1 - \omega_2 = 0 , \quad \omega_1 + \omega_2 = 0 . \tag{1.9}$$

Soit

$$E_1, E_2, E_3, E_4$$

le repère corrélatif à (1.1), de sorte que E_4 est le plan tangent à (A_1) et E_3 celui à (A_2) et que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}E_1 + \omega_{11}E_1 - \omega_1 E_2 + \omega_{31}E_3 + \omega_{41}E_4 = 0\,,\\
&\mathrm{d}E_2 + \omega_2 E_1 + \omega_{22}E_2 + \omega_{32}E_3 + \omega_{42}E_4 = 0\,,\\
&\mathrm{d}E_3 + \omega_1 E_1 + \omega_{33}E_3 + \omega_2 E_4 = 0\,,\\
&\mathrm{d}E_4 + \omega_2 E_2 - \omega_1 E_3 + \omega_{44}E_4 = 0\,.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$[A_1\,\mathrm{d}A_1\,\delta A_1] = -\,[\omega_1\omega_2]\,E_4\,,\quad [E_4\,\mathrm{d}E_4\delta E_4] = -\,[\omega_1\omega_2]\,A_1\,,$$
$$[A_2\,\mathrm{d}A_2\delta A_2] = -\,[\omega_1\omega_2]\,E_3\,,\quad [E_3\,\mathrm{d}E_3\delta E_3] = -\,[\omega_1\omega_2]\,A_2\,,$$

ce qui dit que les facteurs scalaires du point A_1 et du plan tangent E_4 sont associés mutuellement de manière usuelle relativement à la surface (A_1) et que le même a lieu pour les facteurs scalaires de A_2 et de E_3 relativement à (A_2). Il en résulte que les éléments linéaires projectifs de Fubini des deux nappes focales sont, (A, E) étant le produit scalaire du point A et du plan E,

$$\frac{(\mathrm{d}^2A_1, \mathrm{d}E_4) - (\mathrm{d}A_1, \mathrm{d}^2E_4)}{2(\mathrm{d}A_1, \mathrm{d}E_4)}\,,\quad \frac{(\mathrm{d}^2A_2, \mathrm{d}E_3) - (\mathrm{d}A_2, \mathrm{d}^2E_3)}{2(\mathrm{d}A_2, \mathrm{d}E_3)}$$

ou bien [ayant égard à (1.3)]

$$\frac{(\omega_{22} - \omega_{33})(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_{32}\omega_1\omega_2}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\,,\quad \frac{(\omega_{44} - \omega_{11})(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_{41}\omega_1\omega_2}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\,,$$

ou encore, vu les équations (1.4),

$$\frac{(z_1 + z_2 - t_1 - t_2)(\omega_1 + \omega_2)^3 + (z_1 - z_2 - t_1 + t_2)(\omega_1 - \omega_2)^3}{4(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \tag{1.10}$$

pour la surface (A_1) et

$$\frac{-\,(z_1 + z_2 + t_1 + t_2)(\omega_1 + \omega_2)^3 - (z_1 - z_2 + t_1 - t_2)(\omega_1 - \omega_2)^3}{4(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \tag{1.11}$$

pour la surface (A_2).

2. L^* étant la dualisation de la congruence L (toujours supposée W), nous savons que l'identité, considérée comme une correspondance $L \to L^*$, est une déformation projective. Dans le cas particulier $t_1 = t_2 = 0$ la congruence L appartient à un complexe linéaire fixe Ω et la déformation projective $L \to L^*$ se réduit à la polarité par rapport à Ω; à l'exception de ce cas, la déformation $L \to L^*$ n'est pas triviale. On voit donc qu'une congruence W *qui n'appartient pas à un complexe linéaire* est toujours projectivement déformable. Je ne sais pas si l'on peut supprimer les mots en italique. Rappelons d'ailleurs

que, pour une congruence L jouissant de la propriété d'appartenir à un complexe linéaire, une déformation projective telle que la déformée jouisse de la même propriété ne peut exister que si L est une congruence R et dans ce cas il y a toujours ∞^1 de telles déformations (ce sont les déformations projectives singulières au sens de E. Cartan).

Au Mémoire cité nous avons vu que l'équation

$$t_1\omega_1 + t_2\omega_2 = 0 , \tag{2.1}$$

si on exclut le cas $t_1 = t_2 = 0$, définit la *décomposition canonique* de L [au sens défini dans mon Mémoire *Transformations développables des congruences des droites*, ce Journal, t. *6* (*81*), 1956, p. 160—286] relative à la déformation projective $L \to L^*$ et nous avons considéré le cas particulier des congruences W à dualisation asymptotique de première et seconde sorte pour lesquelles l'équation (2.1) coïncide avec la première ou la seconde des équations (1.9) qui définissent les asymptotiques des surfaces focales. Les congruences W à dualisation asymptotique sont donc caractérisées par

$$t_1^2 - t_2^2 = 0 \quad (t_1 t_2 \neq 0)$$

et l'on a $t_1 + t_2 = 0$ pour la première sorte, $t_1 - t_2 = 0$ pour la seconde. Le résultat principal du Mémoire cité était que chaque congruence W à dualisation asymptotique admet des déformées projectives qui dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument, toutes ces déformées étant à dualisation asymptotique de la même sorte; en outre, parmi les déformées projectives d'une telle congruence, il en est toujours une qui appartient à un complexe linéaire. Or nous avons trouvé que chaque congruence W à dualisation asymptotique vérifie la condition

$$z_1 + z_2 = 0 \quad \text{pour la première sorte,}$$
$$z_1 - z_2 = 0 \quad \text{pour la seconde.}$$

Ceci étant, l'inspection des formules (1.10) et (1.11) montre que *les deux nappes focales de chaque congruence W à dualisation asymptotique sont surfaces réglées, les génératrices rectilignes étant données par $\omega_1 - \omega_2 = 0$ pour la première sorte et par $\omega_1 + \omega_2 = 0$ pour la seconde.* Il est tout aussi immédiat que, réciproquement, *si les deux nappes focales d'une congruence W sont des surfaces réglées dont les génératrices rectilignes sont p.* ex. $\omega_1 - \omega_2 = 0$, *alors la congruence envisagée est à dualisation asymptotique de première sorte ou bien c'est une congruence appartenant à un complexe linéaire qui est déformée projective d'une congruence W à dualisation asymptotique de première sorte.*

3. A la fin du Mémoire cité nous avons examiné la famille Φ des congruences W satisfaisant à la condition

$$z_1 = z_2 = 0 .$$

Toutes les congruences de la famille Φ sont des déformées projectives l'une de l'autre, et chaque déformée projective d'une congruence de Φ appartient à Φ. Or les formules (1.10) et (1.11) montrent que Φ est identique à la famille des congruences qui réalisent l'applicabilité projective des deux nappes focales, famille envisagée par moi-même dans la seconde des deux Notes intitulées *Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces* [Rend. Lincei 1928] et, indépendamment, un peu plus tard aussi par S. FINIKOFF [v. С. П. Фиников, *Теория конгруэнций*, 1950, chap. 11]. C'est un peu drôle que c'est seulement 30 années après la naissance de cette famille de congruences qu'on constate que c'est précisément la famille complète des déformées projectives de la congruence formée par les tangentes à une quadrique régulière qui appartiennent à un complexe linéaire arbitrairement donné.

4. Nous allons particulariser les formules du № 1 pour le cas où la congruence envisagée est une congruence R. On sait que c'est le cas où les formes de Pfaff ω_1, ω_2 possèdent un facteur intégrant commun de sorte qu'on peut poser

$$\lambda\omega_1 = \mathrm{d}v\,, \quad \lambda\omega_2 = \mathrm{d}u\,. \tag{4.1}$$

Comme il résulte de (1.5) et (1.7_1) que $[\mathrm{d}(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)] = 0$, posons

$$t_1\omega_1 + t_2\omega_2 = \mathrm{d}t\,. \tag{4.2}$$

On a donc [v. (1.5)]

$$z_1 = -\lambda_v\,, \quad z_2 = -\lambda_u\,, \tag{4.3}$$

$$t_1 = \lambda t_v\,, \quad t_2 = \lambda t_u\,, \tag{4.4}$$

où les indices u et v indiquent des dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}$.

(1.7_2) donne, en y substituant les valeurs (4.3) et (4.4)

$$t_{uu} - t_{vv} - 2\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\,t_u - \frac{\lambda_v}{\lambda}\,t_v\right) = 0\,. \tag{4.5}$$

Les équations (1.6) et (1.8) prennent maintenant la forme

$$[\omega_{31}\,\mathrm{d}v] - [\omega_{42}\,\mathrm{d}u] + \frac{2}{\lambda}\,[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,$$

$$[\omega_{31}\,\mathrm{d}v] + [\omega_{42}\,\mathrm{d}u] = 0\,,$$

$$[\omega_{31}\,\mathrm{d}u] + [\omega_{42}\,\mathrm{d}v] + \left(\lambda_{uu} - \lambda_{vv} - 2\,\frac{\lambda_u^2}{\lambda} + 2\,\frac{\lambda_v^2}{\lambda} - \lambda t_u^2 + \lambda t_v^2\right)[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0$$

de sorte qu'on peut poser

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= -\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}u + \left(h + \lambda_{uu} - 2\,\frac{\lambda_u^2}{\lambda} - \lambda t_u^2\right)\mathrm{d}v\,, \\ \omega_{42} &= \left(h + \lambda_{vv} - 2\,\frac{\lambda_v^2}{\lambda} - \lambda t_v^2\right)\mathrm{d}u - \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}v\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Les équations (1.4) s'écrivent, faisant usage de (1.3), (4.3) et (4.4),

$$\omega_{11} - \omega_{33} = \omega_{22} - \omega_{44} = -\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\,du + \frac{\lambda_v}{\lambda}\,dv\right), \tag{4.7}$$

$$\omega_{11} - \omega_{22} = \omega_{22} - \omega_{44} = t_u\,du + t_v\,dv\,,$$

$$\begin{aligned}\omega_{32} &= -\left(\frac{\lambda_v}{\lambda} + t_v\right)du - \left(\frac{\lambda_u}{\lambda} + t_u\right)dv\,,\\ \omega_{41} &= \left(\frac{\lambda_v}{\lambda} - t_v\right)du + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda} - t_u\right)dv\,.\end{aligned} \tag{4.8}$$

De (4.6) on déduit par différentiation extérieure

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_u = -\frac{\lambda_{uuu}}{\lambda} + 5\,\frac{\lambda_u\lambda_{uu}}{\lambda^2} - 4\,\frac{\lambda_u^3}{\lambda^3} + 4\,\frac{\lambda_v}{\lambda^3} + 2t_ut_{uu}\,,$$

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_v = -\frac{\lambda_{vvv}}{\lambda} + 5\,\frac{\lambda_v\lambda_{vv}}{\lambda^2} - 4\,\frac{\lambda_v^3}{\lambda^3} + 4\,\frac{\lambda_u}{\lambda^3} + 2t_vt_{vv}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\left(\frac{h}{\lambda}\right)_u &= (t_u^2)_u - \left(\frac{\lambda_{uu}}{\lambda}\right)_u + 2\left(\frac{\lambda_u^2}{\lambda^2}\right)_u - 2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_v\,,\\ \left(\frac{h}{\lambda}\right)_v &= (t_v^2)_v - \left(\frac{\lambda_{vv}}{\lambda}\right)_v + 2\left(\frac{\lambda_v^2}{\lambda^2}\right)_v - 2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_u\,.\end{aligned} \tag{4.9}$$

L'élimination de h donne

$$(t_u^2 - t_v^2)_{uv} = \left(\frac{\lambda_{uu} - \lambda_{vv}}{\lambda} - 2\,\frac{\lambda_u^2 - \lambda_v^2}{\lambda^2}\right)_{uv} - 2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_{uu} + 2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)_{vv}. \tag{4.10}$$

Le problème de trouver toutes les déformées projectives d'une congruence R donnée se réduit donc à l'intégration du système

$$(4.5) + (4.10)$$

suivie par la quadrature (4.9). La fonction $\lambda = \lambda(u, v)$ y est connue, et la fonction inconnue (contenant une constante additive inessentielle) est $t = t(u, v)$. Malgré la forme simple de ce système, son analyse générale semble très difficile et nous ne considérons qu'un cas particulier remarquable.

5. Un des points restés sans discussion au Mémoire cité est qu'on y a laissé sans examination les déformations projectives $L \to L'$ telles que la congruence L, mais non L', est à dualisation asymptotique. Or déjà là j'ai remarqué que j'ai réussi à combler cette lacune dans le cas de congruences R et c'est ce que je vais faire maintenant en m'appuyant sur les formules du № 4. Sans restreindre la généralité, je peux supposer que la congruence L soit à dualisation asymptotique de seconde espèce de sorte que $z_1 = z_2$ ou bien, selon (4.3), qu'on ait

$$\lambda = \lambda(u + v)\,. \tag{5.1}$$

On peut d'ailleurs supposer que

$$\lambda' \neq 0 \,, \tag{5.2}$$

l'accent désignant la dérivée par rapport à $u + v$, car le cas $z_1 = z_2 = 0$ était traité déjà au Mémoire cité. L'équation (4.5) devient

$$t_{uu} - t_{vv} - 2\,\frac{\lambda'}{\lambda}\,(t_u - t_v) = 0$$

ou bien

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(t_u + t_v - 2\,\frac{\lambda'}{\lambda}\,t\right) = 0\,.$$

L'intégration donne

$$t = (u + v)\,f + \lambda g \tag{5.3}$$

où

$$f = f(u + v)\,, \quad g = g(u - v)\,. \tag{5.4}$$

Désignons par un accent la dérivée de f par rapport à $u + v$ et celle de g par rapport à $u - v$. L'équation (4.10) devient selon (5.1)

$$(t_u^2 - t_v^2)_{uv} = 0$$

ou bien, en substituant la valeur (5.3) de t,

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,(g'F + \lambda\lambda'\,.\,gg') = 0 \tag{5.5}$$

où l'on a posé

$$F = F(u + v) = \lambda[f + (u + v)\,f']\,. \tag{5.6}$$

L'équation (5.5) possède la solution évidente $g' = 0$ qu'on peut négliger car elle fournit $t = t(u + v)$ c'est-à-dire qu'elle ne donne que les déformées projectives de L qui sont à dualisation asymptotique. Soit donc

$$g' \neq 0\,. \tag{5.7}$$

Remarquons encore que pour $c =$ const. on a

$$(u + v)\,f + \lambda g = (u + v)\,f^* + \lambda(g - c)$$

où

$$f^* = f + \frac{\lambda c}{u + v}$$

ne dépend que de $u + v$; il en résulte qu'il est permis de remplacer g par $g - c$.

L'équation (5.5) peut s'écrire sous la forme

$$Fg''' - F''g' + \lambda\lambda'\,.\,(gg')'' - (\lambda\lambda')''\,.\,gg' = 0\,. \tag{5.8}$$

A l'égard de (5.2), on a déduit que $(gg')''$ est une combinaison linéaire à coefficients constants de g', gg', g''' et, comme on peut prendre $g - c$ au lieu de g, on peut supposer que

$$(gg')'' = (ag + b)\,g'\,, \tag{5.9}$$

a, b étant des constantes.

Maintenant nous allons distinguer deux cas. Soit d'abord $F = 0$. Alors il résulte de (5.8) et (5.9), ayant égard à (5.7), que

$$[(\lambda\lambda')'' - a\lambda\lambda']\, g = b$$

ce qui ne peut avoir lieu que si

$$(\lambda\lambda')'' = a\lambda\lambda' \tag{5.10}$$

et $b = 0$ ou bien

$$(gg')'' = agg' . \tag{5.11}$$

Comme $F = 0$, on déduit de (5.6) que $f + (u + v)\, f' = 0$ d'où

$$f = \frac{c}{u + v}, \quad c = \text{const} .$$

et de (5.3) il résulte, en se rappelant que t contient une constante additive inessentielle, qu'on peut poser

$$t = \lambda g . \tag{5.12}$$

L'élément linéaire projectif des congruences en question est donné par (4.1), si on y substitue pour $\lambda = \lambda(u + v)$ une solution non constante de l'équation différentielle (5.10) contenant un paramètre arbitraire; cet élement dépend donc en apparence de quatre constantes arbitraires. Cependant les équations (4.1) ne déterminent u, v qu'à des substitutions

$$u_1 = \alpha u + \beta_1 , \quad v_1 = \alpha v + \beta_2$$

près, où $\alpha \neq 0, \beta_1$, β_2 sont des constantes. On en déduit sans peine que notre élément linéaire projectif ne dépend en réalité que de deux constantes essentielles. Si on choisit une congruence L dont l'élément linéaire projectif a la forme envisagée, les déformées projectives de L qui ne sont pas à dualisation asymptotique s'obtiennent en déterminant t de (5.12), où λ est connu et g est une solution non constante de (5.11); t étant trouvé, la détermination de la déformée exige encore la quadrature (4.9). On voit donc que les *déformations* projectives en question de L dépendent de 4 constantes arbitraires tandis que les *déformées* ne dépendent que de 3 constantes, car L admet évidemment ∞^1 déformations projectives en elle même (données par $u_1 = u + \beta$, $v_1 = v - \beta, \beta = \text{const.}$).

Passons au cas où $F \neq 0$. Alors l'équation (5.8) montre que, outre (5.9), on doit avoir encore

$$g''' = (a_0 g + b_0)\, g' , \tag{5.13}$$

où a_0, b_0 sont de nouvelles constantes. De (5.9) et (5.13) on obtient en intégrant

$$(gg')' = \tfrac{1}{2}ag^2 + bg + c , \quad g'' = \tfrac{1}{2}a_0 g^2 + b_0 g + c_0$$

avec deux constantes ultérieures c, c_0. On en déduit que

$$(g')^2 = -\tfrac{1}{2}a_0 g^3 + (\tfrac{1}{2}a_0 - b_0)\, g^2 + (b - c_0)\, g + c .$$

En dérivant on obtient, vu l'inégalité (5.7),

$$2g'' = -\tfrac{3}{2}a_0 g^2 + (a - 2b_0)\, g + b - c_0 .$$

Comparaison avec la seconde des équations (5.12) donne $a_0 = 0$ de manière que (5.13) peut s'écrire
$$g'^2 = Ag^2 + 2Bg + C\,,$$
où A, B, C sont des constantes. La dérivation donne, vu (5.7),
$$\begin{aligned} g'' &= Ag + B\,, \quad (gg')' = 2Ag^2 + 3Bg + C\,,\\ g''' &= Ag'\,, \quad (gg')'' = (4Ag + 3B)\,g'\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$
En comparant (5.14_4) à (5.9) on obtient
$$A = \tfrac{1}{4}a\,, \quad B = \tfrac{1}{3}b\,,$$
de sorte que la substitution des valeurs (5.14) dans l'équation (5.8) donne, en égard à (5.7),
$$[(\lambda\lambda')'' - a\lambda\lambda']\,g + F'' - \tfrac{1}{4}aF - b\lambda\lambda' = 0\,.$$
On retrouve donc pour λ l'équation (5.10) et on obtient en outre les conditions
$$F'' = \tfrac{1}{4}aF + b\lambda\lambda'\,, \tag{5.15}$$
$$g'^2 = \tfrac{1}{4}ag^2 + \tfrac{2}{3}bg + C\,. \tag{5.16}$$
On voit que l'hypothèse $F \neq 0$ conduit de nouveau à la même forme de l'élément linéaire projectif de nos congruences que nous avons vu de dépendre de deux constantes essentielles. Mais nous obtenons pour ces congruences de nouvelles déformations projectives telles que la congruence déformée ne soit pas à dualisation asymptotique. On trouve sans difficulté que, pour chacune de nos congruences, il y a ∞^5 telles déformations outre les ∞^4 trouvées auparavant.

Резюме

ДОПОЛНЕНИЯ К СТАТЬЕ: ПРОЕКТИВНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОНГРУЭНЦИЙ W

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага

(Поступило в редакцию 25/IX 1958 г.)

В настоящей статье сначала замечается, что конгруэнции W с асимптотической дуализацией, которые были главной темой цитированной статьи, тождественны с конгруэнциями, обе фокальные поверхности которых являются линейчатыми. Затем показывается, что конгруэнции с проективно налагающимися фокальными поверхностями тождественны с проективными деформациями конгруэнции, являющейся пересечением линейного комплекса с комплексом касательных к регулярной поверхности 2-го порядка. Далее выводится система двух уравнений с частными производными, от интеграции которой зависит нахождение проективных деформаций данной конгруэнции R. Наконец, определены конгруэнции R, фокальные поверхности которых не являются линейчатыми, которые однако можно проективной деформацией перевести в такие конгруэнции, что бы обе их фокальные поверхности были линейчатыми.