Miloš Zlámal

О смешанной задаче для одного гиперболического уравнения с малым параметром

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 2, 218–242

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100349

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно

(Поступило в редакцию 30/IV 1958 г.)

Посвящено профессору О. Борувке ко дню его шестидесятилетия.

В статье выводятся асимптотические формулы для решения смешанной задачи для уравнения $\varepsilon\alpha(t)\, u_{tt} + \beta(t)\, u_t - a(x)\, u_{xx} = F(x, t)$, где ε означает малый параметр.

I. Введение

При решении одной технической задачи мне встретилось уравнение типа

$$\varepsilon\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) , \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 0$ для $t \geqq 0$ и $0 \leqq x \leqq l$ и ε — малый положительный параметр. Дело касалось смешанной задачи, т. е. были заданы начальные условия $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$ и краевые условия $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Ясно, что для малого ε можно уравнение (1) заменить уравнением теплопроводности

$$\beta \frac{\partial U}{\partial t} - a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F(x, t) , \tag{2}$$

которое получится из уравнения (1), если положить $\varepsilon = 0$. Порядок этого уравнения тот же, как в уравнении (1), но само уравнение является уравнением параболического типа, и одно начальное условие отпадает. Поэтому можем ожидать, что в асимптотических формулах для решения уравнения (1) будут выступать т. наз. члены типа погранслоя. Членом типа погранслоя мы разумеем, например, выражение $e^{-\frac{g(x,y)}{\varepsilon}}$, причем непрерывная функция $g(x, y)$ принимает положентельное значение внутри замкнутой кривой Жордана C и равна нулю в точках этой кривой. При малом положительном ε это выражение равно 1 на C, в то время как в каждой замкнутой части, лежащей внутри C, $e^{-\frac{g(x,y)}{\varepsilon}} \to 0$ равномерно. Значит, в окрестности кривой C функция $e^{-\frac{g(x,y)}{\varepsilon}}$ быстро меняет свое значение. Члены такого вида встречаются в асимптотических формулах для решения дифференциальных уравнений как в частных производных, так и обыкновенных, в которых при наивысшей производной стоит малый параметр (см. напр. [1] и [2]).

В настоящей работе мы поставили перед собой задачу найти асимптотические формулы для решения смешанной задачи для уравнения (1). Однако мы ограничимся тем случаем, когда коэффициенты α, β являются только функциями времени t, а коэффициент a — функцией переменного x. Это позволит нам воспользоваться методом Фурье. Что касается краевых условий, будем рассматривать краевые условия первого рода. Итак, будем решать следующую задачу:

$$L_\varepsilon(u) \equiv \varepsilon\alpha(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\,\frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)\ ,^1) \tag{3}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0\ ,^2) \tag{4}$$

$$u(x, 0) = f(x)\ , \quad u_t(x, 0) = g(x)\ . \tag{5}$$

О коэффициентах $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $a(x)$ будем предполагать, что они дважды, или же трижды, непрерывно дифференцируемы, а именно $\alpha(t)$, $\beta(t)$ для $t \geqq 0$ и $a(x)$ в интервале $\langle 0, l\rangle$. Далее, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ для $t \geqq 0$, $a(x) > 0$ в $\langle 0, l\rangle$.

Сокращенной задачей будем разуметь задачу

$$L_0(U) \equiv \beta(t)\,\frac{\partial U}{\partial t} - a(x)\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F(x, t)\ , \tag{6}$$

$$U(0, t) = U(l, t) = 0\ , \tag{7}$$

$$U(x, 0) = f(x)\ . \tag{8}$$

Сначала будем однако решать однородное уравнение, т. е. положим $F = 0$, а затем только неоднородное. В обоих случаях мы, правда, воспользуемся тем же методом, но некоторые оценки в неоднородном случае придется производить несколько иначе, и они не будут столь острыми, как в однородном случае.

---

[1]) Преобразуя независимо переменное x и зависимо переменное u можем к такому виду привести и более общее уравнение $\varepsilon\alpha(t)\, u_{tt} + \beta(t)\, u_t - a(x)\, u_{xx} + b(x)\, u = F(x, t)$.

[2]) Будем брать во внимание только однородные условия, потому что неоднородные условия $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$ можем, введя новое неизвестное z $\left(u = z + \mu_1(t)\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{x}{l}\,\mu_2(t)\right)$ свести к однородным. Правая часть уравнения для z будет, конечно, зависеть от ε, но линейно, так что результаты, справедливые для уравнения (3), можем легко применять.

II. Однородный случай

1. Будем решать задачу (9), (4), (5), где (9) — уравнение вида

$$L_\varepsilon(u) \equiv \varepsilon\alpha(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\,\frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{9}$$

Сокращенной задачей здесь будет (10), (7), (8), где (10) — уравнение вида

$$L_0(U) \equiv \beta(t)\,\frac{\partial U}{\partial t} - a(x)\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0\,. \tag{10}$$

Воспользуемся методом Фурье, так что важное значение будут иметь собственные числа и функции задачи

$$a(x)\,y'' + \lambda y = 0\,, \tag{11}$$

$$y(0) = y(l) = 0\,. \tag{12}$$

Напомним некоторые хорошо известные факты. Собственные числа задачи Штурма-Лиувилля (11), (12) являются простыми и положительными, и количество их счетно. Отметив их индексами согласно их величине, получим $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Точнее $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,\lambda_n < +\infty$. Поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$. Соответствующие собственные функции образуют ортогональную последовательность $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с весом $\frac{1}{a(x)}$ в интервале $\langle 0, l\rangle$. Будем считать их нормированными, так, что будет

$$\int\limits_0^l \frac{1}{a(x)}\,y_m(x)\,y_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n\,, \\ 1, & m = n\,. \end{cases}$$

Справедливы неравенства

$$|y_n(x)| \leqq M\,, \quad |y_n'(x)| \leqq M\lambda_n^{\frac{1}{2}}\,, \tag{13}$$

где M — положительная постоянная.

Если $G(x) \in L^2$, то имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n^2 = \int\limits_0^l \frac{1}{a(x)}\,G^2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{14}$$

При этом G_n означает n-й коэффициент Фурье функции $G(x)$, т. е.

$$G_n = \int\limits_0^l \frac{1}{a(x)}\,G(x)\,y_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Если $G(x) \in C^{(1)}$ и $G(0) = G(l) = 0$, то выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n G_n^2 \leqq \int_0^l G'^2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{15}$$

Пусть $G(x) \in C^{(2)}$ и при этом $G(0) = G(l) = 0$; тогда, интегрируя по частям $\int\limits_0^l G''(x)\, y_n(x)\,\mathrm{d}x$ и подставляя $y_n'' = -\dfrac{\lambda_n}{a(x)}\, y_n$, получим

$$G_n = -\lambda_n^{-1}[a(x)\, G''(x)]_n\,.^{3)} \tag{16}$$

Аналогично можно доказать, что

$$G_n = \lambda_n^{-2}\left[a(x)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\{a(x)\, G''(x)\}\right]_n, \tag{17}$$

если $G(x) \in C^{(4)}$ и $G(0) = G(l) = G''(0) = G''(l) = 0$.

2. Смешанную задачу можно решить методом Фурье. Чтобы можно было воспользоваться этим методом, необходимо наложить некоторые условия на функции $f(x)$ и $g(x)$. Известно (см., например, [3], § 23), что достаточно предполагать, что существуют непрерывные производные до третьего порядка включительно от функции $f(x)$ и до второго порядка включительно от функции $g(x)$ и, далее,

$$f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0\,, \tag{18}$$

$$g(0) = g(l) = 0\,. \tag{19}$$

Но мы будем сначала предполагать больше, а именно, что имеем смешанную задачу с начальными условиями вида

$$u(x, 0) = \bar{f}(x)\,, \quad u_t(x, 0) = \bar{g}(x)\,, \tag{20}$$

где $\bar{f}(x)$ пять раз непрерывно дифференцируема в интервале $\langle 0, l\rangle$ $\bar{g}(x)$ — трижды непрерывно дифференцируема и

$$\bar{f}(0) = \bar{f}(l) = \bar{f}''(0) = \bar{f}''(l) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(a\bar{f}'')\bigg|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(a\bar{f}'')\bigg|_{x=l} = 0\,, \tag{21}$$

$$\bar{g}(0) = \bar{g}(l) = \bar{g}''(0) = \bar{g}''(l) = 0\,. \tag{22}$$

Соответствующее решение обозначим через $\bar{u}(x, t)$. Решение уравнения (10), удовлетворящее условию (7) и

$$U(x, 0) = \bar{f}(x) \tag{23}$$

будем обозначать через $\bar{\bar{U}}(x, t)$.

Пусть $\langle 0, T\rangle$ — произвольный, но (всюду в дальнейшем) фиксированный

[3]) Через $[H(x)]_n$ обозначен n-й коэффициент Фурье функции $H(x)$.

интервал и пусть $t \in \langle 0, T \rangle$. Нашей целью будет прежде всего доказательство следующих асимптотических формул:

$$\bar{u}(x, t) = \bar{U}(x, t) + O(\varepsilon) , \tag{24}$$

$$\bar{u}_t(x, t) = \bar{U}_t(x, t) + \bar{k}(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon) , \tag{25}$$

$$\bar{u}_x(x, t) = \bar{U}_x(x, t) + O(\varepsilon) , \tag{26}$$

где

$$\bar{k}(x) = \bar{g}(x) - \bar{U}_t(x, 0) , \tag{27}$$

$$\nu(t) = \int_0^t \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\, \mathrm{d}s . \tag{28}$$

Чтобы доказать эти формулы, мы должны будем еще предполагать, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \geqq 0 . \tag{29}$$

Выражение $\bar{k}(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}$ представляет собой выражение типа погранслоя. Если $t = 0$, то его значение равно $\bar{k}(x)$, при $t > 0$ оно весьма быстро сходится к нулю в случае $\varepsilon \to 0+$.

3. Решение $\bar{U}(x, t)$ можно представить в виде ряда

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n e^{-\lambda_n \gamma(t)} y_n(x) , \tag{30}$$

где

$$\gamma(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\beta(s)} . \tag{31}$$

Сообразуясь с дальнейшими рассуждениями уместно заметить, что все частные производные первого и второго порядка решения $\bar{U}(x, t)$ можем вычислить, дифференцируя почленно ряд (30). Легко видно, что мажорирующим рядом всех этих рядов служит ряд $c \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\bar{f}_n|$, где c — достаточно большая положительная постоянная. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\bar{f}_n|$ сходится, так как согласно (17) и (15)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\bar{f}_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |[a(a\bar{f}'')'']_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \lambda_n^{\frac{1}{2}} |[a(a\bar{f}'')'']_n| \leqq$$

$$\leqq \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, [a(a\bar{f}'')'']_n^2\}^{\frac{1}{2}} \leqq \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \int_0^l [a(a\bar{f}'')'']'^2\, \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Теперь обозначим

$$\bar{h}(x) = \bar{U}_t(x, 0) = -\frac{1}{\beta(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{f}_n y_n(x) , \tag{32}$$

так что

$$\bar{k}(x) = \bar{g}(x) - \bar{h}(x) , \tag{33}$$

и далее

$$\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = \delta(t) , \tag{34}$$

так что

$$\dot{\nu}(t) = \frac{1}{\delta(t)} . \tag{35}$$

Теперь положим

$$\bar{u}(x, t) = \bar{U}(x, t) + \varepsilon\delta(t)\,\bar{k}(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] + \varepsilon z . \tag{36}$$

Вкратце разъясню, что привело меня к подстановке (36). Как мы отметили, в асимптотических формулах для решения $\bar{u}(x, t)$ будут, наверно, выступать члены погранслоя. Но в нашем уравнении параметр ε встречается только при второй частной производной по t. Далее, при $t = 0$ решение $\bar{u}(x, t)$ принимает значение, равное значению $\bar{U}(x, 0)$. Эти два обстоятельства натолкнули меня на мысль искать решение $\bar{u}(x, t)$ в виде

$$\bar{u}(x, t) = \bar{U}(x, t) + \varepsilon H(x, t)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] + \varepsilon z .$$

Функции $H(x, t)$ и $\nu(t)$ я выбирал так, чтобы функция $z(x, t)$ удовлетворяла однородным начальным и краевым условиям и чтобы выражение $L_\varepsilon(z)$ было ограниченным по отношению к параметру ε. Второе условие просто значит, что после подстановки в уравнение $\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon(\bar{u}) = 0$ по (36), в этом уравнении не должен выступать член, содержащий $\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}$. Легким вычислением можем убедиться в том, что оба условия будут выполнены, если воспользуемся подстановкой (36) и функции $\bar{k}(x)$ и $\nu(t)$ определим уравнением (33) или же (28).

Дифференцируя (36), получим

$$\bar{u}_t = \bar{U}_t + \bar{k}e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}} + \varepsilon\dot{\delta}\bar{k}[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}] + \varepsilon z_t , \tag{37}$$

$$\begin{gathered} \bar{u}_{tt} = \bar{U}_{tt} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\delta}\bar{k}e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}} + \frac{\dot{\delta}}{\delta}\bar{k}e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}} + \varepsilon\ddot{\delta}\bar{k}\,[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}] + \varepsilon z_{tt} , \\ \bar{u}_x = \bar{U}_x + \varepsilon\delta\bar{k}'[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}] + \varepsilon z_x , \\ \bar{u}_{xx} = \bar{U}_{xx} + \varepsilon\delta\bar{k}''[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}] + \varepsilon z_{xx} . \end{gathered} \tag{38}$$

Подставляя в уравнение $L_\varepsilon(\bar{u}) = 0$ и производя надлежащие преобразования, получим для функции z уравнение

$$L_\varepsilon(z) = K(x, t, \varepsilon)\,, \tag{39}$$

где

$$K(x, t, \varepsilon) = -\alpha(t)\,\overline{U}_{tt}(x, t) - \beta(t)\,\dot{\delta}(t)\,\bar{k}(x) + \delta(t)\,a(x)\,\bar{k}''(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] -$$
$$- \varepsilon\alpha(t)\,\ddot{\delta}(t)\,\bar{k}(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,. \tag{40}$$

При этом функция $z(x, t)$ выполняет, очевидно, следующие начальные и краевые условия:

$$z(x, 0) = z_t(x, 0) = z(0, t) = z(l, t) = 0\,. \tag{41}$$

Правая часть уравнения (39) ограничена по отношению к ε, т. е. $K(x, t, \varepsilon) = O(1)$. Учитывая этот факт и соотношение (41), можем ожидать, что будет

$$z(x, t) = O(1),\ z_t(x, t) = O(1),\ z_x(x, t) = O(1)\,. \tag{42}$$

Если нам удастся доказать (42), то формулы (24), (25), (26) получатся сразу же из (36), (37) и (38). В дальнейшем мы будем стремиться сделать больше, чем доказать (42), а именно — постараемся получить оценки функции $z(x, t)$ и ее первых частных производных при помощи функций $\bar{f}(x)$ и $\bar{g}(x)$.

4. Чтобы получить оценки функции $z(x, t)$ и ее первой частной производной, будем решать задачу (39), (41) методом Фурье, т. е. будем искать $z(x, t)$ в виде

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t)\, y_n(x) \tag{43}$$

и оценим коэффициенты $z_n(t)$.

Что функцию $z(x, t)$ можем представлять в виде ряда (43) и что этот ряд можем один или два раза почленно дифференцировать по t и по x, нетрудно заключить на основании соотношения (36). Левой частью уравнения (36) является $\bar{u}(x, t)$. При наших предположениях задачу (1), (2), (15) можно решить методом Фурье; это значит, что дряд Фурье для решения $\bar{u}(x, t)$ сходится равномерно и так же и ряды, возникшие в результате почленного дифференцирования этого ряда один или два раза по t и по x. Первый член в правой части уравнения (36) — это $\overline{U}(x, t)$. Его разложение в ряд Фурье (30) можем, как мы заметили выше, дифференцировать почленно один или два раза по t или по x. Если нам удастся доказать то же и о втором члене в правой части уравнения (36), то можем это утверждать и о функции $z(x, t)$. Учитывая вид этого члена, заключаем, что это утверждение достаточно доказать о функции $\bar{k}(x)$, т. е. достаточно доказать, что функцию $\bar{k}(x)$ можно разложить в ряд Фурье и что этот ряд, равно как и ряды, возникшие в результате дифференцирования его почленно один или два раза по x, сходится равномерно. Мажорирующим рядом рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{k}_n y_n^{(i)}(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ является ряд $c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\bar{k}_n|$. Согласно (27) и (32) $\bar{k}_n = \bar{g}_n - \frac{1}{\beta(0)} \lambda_n \bar{f}_n$, так что достаточно доказать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\bar{g}_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\bar{f}_n|$. О втором мы это уже доказали, а сходимость первого вытекает из соотношения $\bar{g}(x) \in C^{(3)}$ и из справедливости (22).

Подставляя теперь (43) в (39), замечаем, что коэффициенты $z_n(t)$ должны удовлетворять уравнению

$$L_\varepsilon^n(z_n) \equiv \varepsilon\alpha(t)\, \ddot{z}_n + \beta(t)\, \dot{z}_n + \lambda_n z_n = K_n(t) \tag{44}$$

и начальным условиям

$$z_n(0) = \dot{z}_n(0) = 0\,. \tag{45}$$

При этом символ $K_n(t)$ означает n-й коэффициент Фурье функции $K(x, t, \varepsilon)$, т. е.

$$K_n(t) = \int_0^l \frac{1}{a(x)}\, K(x, t, \varepsilon)\, y_n(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Из (40), (30) и (33) получим

$$K_n(t) = -\frac{\alpha\dot{\beta}}{\beta^2} \lambda_n \bar{f}_n e^{-\lambda_n \gamma} - \frac{\alpha}{\beta^2} \lambda_n^2 \bar{f}_n e^{-\lambda_n \gamma} - \beta\dot{\delta}\bar{g}_n + \beta\dot{\delta}\bar{h}_n + \delta[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}](a\bar{g}'')_n -$$
$$- \delta[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}](a\bar{h}'')_n - \varepsilon\alpha\ddot{\delta}[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}]\, \bar{g}_n + \varepsilon\alpha\ddot{\delta}[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}]\, \bar{h}_n\,.$$

Потому что $\bar{h}_n = -\frac{1}{\beta(0)} \lambda_n \bar{f}_n$, будет согласно (16) $(a\bar{h}'')_n = -\lambda_n \bar{h}_n = \frac{1}{\beta(0)} \lambda_n^2 \bar{f}_n$; далее имеем $(a\bar{g}'')_n = -\lambda_n \bar{g}_n$. Поэтому

$$K_n(t) = -\frac{\delta}{\beta(0)} [1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}]\, \lambda_n^2 \bar{f}_n - \delta[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}]\, \lambda_n \bar{g}_n + A_n(t)\,, \tag{46}$$

где

$$A_n(t) = O(\lambda_n |\bar{f}_n| + |\bar{g}_n| + \lambda_n^2 |\bar{f}_n|\, e^{-\lambda_n \gamma(t)})\,.^{4)} \tag{47}$$

С уравнением вида (44) мы встретимся чаще, но всякий раз у него будет иная правая часть. Поэтому оценки для $z_n(x)$ и $\dot{z}_n(t)$ выведем при общей правой части, т. е. рассмотрим уравнение

$$L_\varepsilon^n(z_n) \equiv \varepsilon\alpha(t)\, \ddot{z}_n + \beta(t)\, \dot{z}_n + \lambda_n z_n = M(t)\,. \tag{48}$$

[4]) Это и все дальнейшие символы 0 имеются в виду по отношению к ε и не зависят от функций $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$.

Умножим его на $2\dot{z}_n$ и проинтегрируем. Учитывая (45) получим

$$\varepsilon\alpha(t)\,\dot{z}_n^2(t) + \int_0^t [2\beta(s) - \varepsilon\dot{\alpha}(s)]\,\dot{z}_n^2(s)\,\mathrm{d}s + \lambda_n z_n^2(t) = 2\int_0^t M(s)\,\dot{z}_n(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

В инвервале $\langle 0, T\rangle$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $\dot{\alpha}(t)$ непрерывна; вследствие этого существуют положительные постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ такие, что $\alpha(t) \geqq \alpha_0$, $\dot{\alpha}(t) \leqq \alpha_1$, $\beta(t) \geqq \beta_0$ в $\langle 0, T\rangle$. Для $\varepsilon < \dfrac{\beta_0}{\alpha_1}$ будет $2\beta(s) - \varepsilon\dot{\alpha}(s) \geqq \beta_0$, так что, применив к правой части предыдущего уравнения неравенство Шварца-Буняковского, получим

$$\varepsilon\alpha(t)\,\dot{z}_n^2(t) + \beta_0\int_0^t \dot{z}_n^2(s)\,\mathrm{d}s + \lambda_n z_n^2(t) \leqq 2\{\int_0^t M^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}\,.\,\{\int_0^t \dot{z}_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}\,. \tag{49}$$

Из (49) вытекает прежде всего, что

$$\beta_0\int_0^t \dot{z}_n^2(s)\,\mathrm{d}s \leqq 2\{\int_0^t M^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}\,.\,\{\int_0^t \dot{z}_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}\,.$$

так что

$$\int_0^t \dot{z}_n^2(s)\,\mathrm{d}s \leqq \frac{4}{\beta_0^2}\int_0^t M^2(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Отсюда и из (49) видно, что

$$|z_n(t)| \leqq \frac{2}{\sqrt{\beta_0}}\,\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\,\{\int_0^t M^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}\,, \tag{50}$$

$$|\dot{z}_n(t)| \leqq \frac{2}{\sqrt{\alpha_0\beta_0}}\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\{\int_0^t M^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}. \tag{51}$$

Однако, для $\dot{z}_n(t)$ мы выведем еще одну, в большинстве случаев лучшую оценку. $\max\limits_{0\leqq s\leqq t}|\dot{z}_n(s)|$ лежит или внутри интервала $\langle 0, t\rangle$ или в его правой крайней точке, потому что $\dot{z}_n(0) = 0$. Пусть этот максимум лежит в t_n. Если $\dot{z}_n(t_n) > 0$, то $\max\limits_{0\leqq s\leqq t}|\dot{z}_n(s)| = \dot{z}_n(t_n)$ и либо $\ddot{z}_n(t_n) = 0$, либо $\ddot{z}_n(t_n) \geqq 0$, смотря по тому, будет ли $t_n < t$ или $t_n = t$. В обоих случаях из (48) вытекает, что

$$\beta(t_n)\,\dot{z}_n(t_n) \leqq |M(t_n)| + \lambda_n|z_n(t_n)|\,.$$

То же неравенство справедливо и в случае $\dot{z}_n(t_n) < 0$ и поэтому

$$|\dot{z}_n(t)| \leqq \frac{1}{\beta_0}\,[|M(t_n)| + \lambda_n|z_n(t_n)|]\,,\quad 0 < t_n \leqq t\,. \tag{52}$$

Теперь вернемся к (44). Согласно (46) правая часть этого уравнения представляет собой сумму трех слагаемых:

$$A_n(t),\, -\frac{\delta}{\beta(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}]\,\lambda_n^2\bar{f}_n\,,\quad -\delta[1 - e^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}]\,\lambda_n\bar{g}_n\,.$$

Его решением является поэтому сумма решений ур. (48), куда вместо $M(t)$ подставляем последовательно эти слагаемые. Если $M(t) = A_n(t)$, то из (47) вытекает, что $A_n^2(s) = O(\lambda_n^2 \bar{f}_n^2 + \bar{g}_n^2 + \lambda_n^4 \bar{f}_n^2 e^{-2\lambda_n \gamma(s)})$. Имеем

$$\int_0^t e^{-2\lambda_n \gamma(s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\lambda_n}\int_0^t \frac{1}{\dot{\gamma}(s)}\, 2\lambda_n \dot{\gamma}(s) e^{-2\lambda_n \gamma(s)}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\lambda_n}\left[-\frac{1}{\dot{\gamma}(s)}\, e^{-2\lambda_n \gamma(s)}\right]_0^t -$$

$$- \frac{1}{2\lambda_n}\int_0^t \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\dot{\gamma}^2(s)}\, e^{-2\lambda_n \gamma(s)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Итак, очевидно,

$$\int_0^t e^{-2\lambda_n \gamma(s)}\,\mathrm{d}s = O(\lambda_n^{-1}) \quad \text{и поэтому} \quad \int_0^t A_n^2(s)\,\mathrm{d}s = O\,(\lambda_n^3 \bar{f}_n^2 + \bar{g}_n)\,,$$

так что согласно (50) будет

$$z_n(t) = O(\lambda_n |\bar{f}_n| + \lambda_n^{-\frac{1}{2}} |\bar{g}_n|)\,.$$

Далее, согласно (47) и (52) получаем

$$\dot{z}_n(t) = O(\lambda_n^2 |\bar{f}_n| + \lambda_n^{\frac{1}{2}} |\bar{g}_n|)\,.$$

Теперь рассмотрим случай $M(t) = \dfrac{\delta(t)}{\beta(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\lambda_n^2 \bar{f}_n$. Можем считать что $\bar{f}_n > 0$. Положим

$$\mathrm{d}(t) = \frac{\delta(t)}{\beta(0)}\,[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,. \tag{53}$$

И ввиду предположения (29) и обозначений (34) и (35) будет $\dot{\mathrm{d}}(t) > 0$ в $\langle 0, T\rangle$. Кроме того, в $\langle 0, T\rangle$ $0 \leq \mathrm{d}(t) < c$, где c — постоянная, не зависящая от ε. Помножим уравнение (48), где, конечно, положено $M(t) = \lambda_n^2 \bar{f}_n\,\mathrm{d}(t)$ на $2\dot{z}_n(t)$ и проинтегрируем его следующим образом:

$$\varepsilon\alpha(t)\,\dot{z}_n^2(t) + \int_0^t [2\beta(s) - \varepsilon\dot{\alpha}(s)]\,\dot{z}_n^2(s)\,\mathrm{d}s + \lambda_n z_n^2(t) =$$

$$= \lambda_n^2 \bar{f}_n\,\mathrm{d}(t)\,z_n(t) - \lambda_n^2 \bar{f}_n \int_0^t \dot{d}(s)\,z_n(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{54}$$

Сначала докажем, что $z_n(t)$ принимает в интервале $(0, T\rangle$ только положительные значения. Учитывая (45), можем на основании (48) заключить, что $\ddot{z}_n(0) = 0$, $\dddot{z}_n(0) = \dfrac{\dot{\mathrm{d}}(0)}{\varepsilon\alpha(0)}\,\lambda_n^2 \bar{f}_n > 0$. Поэтому в некоторой окрестности числа 0 направо от 0 будет $z_n(t) > 0$. Но если бы точка τ_1 была первым положительным нулем решения $z_n(t)$ мы пришли бы в (54) к противоречию, потому что правая часть ур. (54) была бы для $t = \tau_1$ отрицательной по отношению к $\dot{d}(s) > 0$, в то время как левая часть была бы положительной. Итак, $z_n(t) > 0$ в $(0, T\rangle$, и из (54) сразу же получаем

$$\lambda_n z_n^2(t) \leqq \lambda_n^2 \bar{f}_n d(t)\, z_n(t)\,,$$

так что $z_n(t) = O(\lambda_n|\bar{f}_n|)$. Из (52) вытекает, что $\dot{z}_n(t) = O(\lambda_n^2|\bar{f}_n|)$.

В третьем случае, когда $M(t) = -\,\delta(t)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}]\,\lambda_n\bar{g}_n$, получаем $z_n(t) = O(|\bar{g}_n|)$, $\dot{z}_n(t) = O(\lambda_n|\bar{g}_n|)$.

Складывая предыдущие оценки, получаем следующий конечный результат: Для коэффициентов $z_n(t)$ разложения в ряд Фурье (43) справедливы равенства

$$z_n(t) = O(\lambda_n|\bar{f}_n| + |\bar{g}_n|)\,, \quad \dot{z}_n(t) = O(\lambda_n^2|\bar{f}_n| + \lambda_n|\bar{g}_n|)\,. \tag{55}$$

Теперь найдем оценку $z(x, t)$. Воспользуемся соотношениями (55), (13), (16) и (15). Получим[5])

$$|z(x, t)| \leqq c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n|\bar{f}_n| + |\bar{g}_n|) \leqq$$

$$\leqq c_1\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}\}^{\frac{1}{2}}[\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3\bar{f}_n^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\bar{g}_n^2\}^{\frac{1}{2}}] \leqq$$

$$\leqq c_2[\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(a\bar{f}'')_n^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\bar{g}_n^2\}^{\frac{1}{2}}] \leqq c_2[\{\int_0^l [(a(x)\,\bar{f}''(x))']^2\,\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}} + \{\int_0^l \bar{g}'^2(x)\,\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}}]\,,$$

следовательно,

$$z(x, t) = O(\{\int_0^l [(a\bar{f}'')'^2 + \bar{g}'^2]\,\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}})\,. \tag{46}$$

Аналогично из (56) и (57) получим

$$|z_t(x, t)| \leqq c_3 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2|\bar{f}_n| + \lambda_n|\bar{g}_n|) \leqq c_4[\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^5\bar{f}_n^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3\bar{g}_n^2\}^{\frac{1}{2}}] \leqq$$

$$\leqq c_4[\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n[a(a\bar{f}'')'']_n^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(a\bar{g}'')_n^2\}^{\frac{1}{2}}]\,,$$

так что

$$z_t(x, t) = O(\{\int_0^l \{[a(a\bar{f}'')'']'^2 + [(a\bar{g}'')']^2\}\,\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}}\,. \tag{57}$$

Оценки (56) и (57) при наших предположениях означают, что $z(x, t) = O(1)$, $z_t(x, t) = O(1)$. Этим доказаны формулы (24) и (25). Что же касается (26), то имеем

$$|z_x(x, t)| \leqq c_5 \sum_{n=1}^{\infty} \{\lambda_n^{\frac{3}{2}}|\bar{f}_n| + \lambda_n^{\frac{1}{2}}|\bar{g}_n|\} = c_5 \sum_{n=1}^{\infty} \{|[a(a\bar{f}'')'']_n + |(a\bar{g}'')_n|\}\,.\,\lambda_n^{-\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq c_6\{\int_0^l ([a(a\bar{f}'')'']^2 + [a\bar{g}'']^2)\,\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}}\,,$$

[5]) В дальнейшем через c_i будем обозначать постоянные, независящие от ε и от функций $\bar{f}(x)$ и $\bar{g}(x)$. Как только индекс i достигнет 9, начнем нумеровать снова, начиная с 1.

следовательно

$$z_x(x, t) = O(\{\int\limits_0 ([a(a\bar{f}'')'']^2 + [a\bar{g}'']^2)\,\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}})\,. \tag{58}$$

Опять-таки $z_x(x, t) = O(1)$.

5. Как мы уже заметили, для того, чтобы задача (9), (4), (5) имела решение, достаточно предположить, что $f(x)$ трижды, а $g(x)$ дважды непрерывно, дифференцируемы и что справедливо (18) и (19). Пока мы предполагали больше, а именно, что $\bar{f}(x)$ пять раз, а $\bar{g}(x)$ трижды непрерывно дифференцируема и что выполняется (21) и (22). Теперь выведем асимптотические формулы, предполагая только выполнение (18) и (19). Что же касается дифференцируемости, то пусть и дальше функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема пять раз, а функция $g(x)$ — три раза. Наш прием будет заключаться в следующем: из функций $f(x)$ и $g(x)$ вычтем определенные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ таким образом, чтобы разности

$$\bar{f}(x) = f(x) - \varphi(x)\,, \quad \bar{g}(x) = g(x) - \psi(x) \tag{59}$$

удовлетворяли (21) и (22). При этом функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут равняться нулю в интервале $\langle\eta, l - \eta)$, где η — новый малый положительный параметр, который дополнительно положим равным $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$.

С этой целью зададимся функцией $\omega(x)$, которая непрерывно дифференцируема пять раз, удовлетворяет неравенствам $0 \leqq \omega(x) \leqq 1$ и

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\,, \\ 0\,, & x \geqq 1\,. \end{cases}$$

Теперь положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{4!}\,\omega\!\left(\frac{x}{\eta}\right)\frac{A_1}{a(0)}\,x^4 + \frac{1}{4!}\,\omega\!\left(\frac{l-x}{\eta}\right)\frac{A_2}{a(l)}\,(l-x)^4\,,$$

где

$$A_1 = (af'')''_{x=0}\,, \quad A_2 = (af'')''_{x=l}\,,$$

и

$$\psi(x) = \frac{1}{2!}\,\omega\!\left(\frac{x}{\eta}\right)g''(0)\,x^2 + \frac{1}{2!}\,\omega\!\left(\frac{x-l}{\eta}\right)g''(l)(l-x)^2\,.$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ пять раз непрерывно дифференцируемы. При этом $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ в интервале $\langle\eta, l - \eta\rangle$. В интервале $\langle 0, \frac{1}{2}\eta\rangle$ есть $\varphi(x) = \frac{1}{4!}\,\frac{A_1}{a(0)}\,x^4$, так что $\varphi''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{A_1}{a(0)}\,x^2$ и очевидно, получим $\varphi''(0) = 0$, $(a\varphi'')''_{x=0} = A_1$. Аналогично $\varphi''(l) = 0$, $(a\varphi'')''_{x=l} = A_2$. Далее, $\psi''(0) = g''(0)$, $\psi''(l) = g''(l)$. Поэтому, если выбрать $\bar{f}(x)$ и $\bar{g}(x)$ по (59), будет выполняться (21) и (22). К выбранным таким образом $\bar{f}(x)$ и $\bar{g}(x)$ применим оценки (56), (57) и (58). Но прежде еще отметим, что

$$\varphi^{(i)}(x) = O(\eta^{4-i})\,, \quad \psi^{(i)}(x) = O(\eta^{2-i})\,, \quad i = 0, \ldots, 5\,. \tag{60}$$

Эти оценки получим путем дифференцирования, если еще учесть, что вне интервалов $\langle 0, \eta\rangle$ и $\langle l - \eta, l\rangle$ $\varphi = \psi \equiv 0$.

Теперь вернемся к (56). Рассмотрим сначала интервал $\int\limits_0^l [(a\bar{f}'')']^2 \, \mathrm{d}x$. Имеем

$$\int\limits_0^l [(a\bar{f}'')']^2 \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^l \{[(af'')']^2 - 2(af'')'(a\varphi'')' + [(a\varphi'')']^2\} \, \mathrm{d}x =$$
$$= O(1) + O(\eta^2) + O(\eta^3) = O(1) \, .$$

Производя оценки, мы должны учесть, что $\varphi \equiv 0$ в $\langle \eta, l - \eta\rangle$, так что во втором и в третьем интеграле x пробегает только интервалы $\langle 0, \eta\rangle$ и $\langle l - \eta, l\rangle$, т. е. интервалы длиной η. Аналогично можно показать, что $\int\limits_0^l [g']^2 \, \mathrm{d}x = O(1)$, так что

$$z(x, t) = O(1) \, . \tag{61}$$

Необходимо подчеркнуть, что символы O здесь имеются в виду по отношению к ε и к η одновременно. Из (57) получим

$$z_t(x, t) = O(\eta^{-\frac{1}{2}}) \, , \tag{62}$$

$$z_x(x, t) = O(1) \, . \tag{63}$$

Теперь положим

$$u = \bar{u} + r \, , \quad U = \bar{U} + R \, . \tag{64}$$

Потому что асимптотические формулы для $\bar{u}$ мы уже знаем, достаточно исследовать $r(x, t)$ и $R(x, t)$. Начнем с функции $R(x, t)$. Очевидно, $L_0(R) = 0$ и $R(x, 0) = \varphi(x)$, $R(0, t) = R(l, t) = 0$. Имеем $R(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n \gamma(t)} y_n(x)$ и поэтому в первую очередь

$$|R(x, t)| \leqq M \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| = M \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} |(a\varphi'')_n| \leqq c_6 \eta^3 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$$

(имеем $\varphi'' = O(\eta^2)$ и $(a\varphi'')_n = O(\eta^3)$, потому что $\varphi(x) \equiv 0$ в $\langle \eta, l - \eta\rangle$). Из предыдущего неравенства, следовательно, вытекает, что

$$R(x, t) = O(\eta^3) \, . \tag{65}$$

Далее, $R_t(x, t) = -\dfrac{1}{\beta(t)} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n e^{-\lambda_n \gamma(t)} y_n(x)$ и

$$|R_t(x, t)| \leqq c_7 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\varphi_n| = c_7 \sum_{n=1}^{\infty} |(a\varphi'')_n| \leqq c_8 \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a\varphi'')_n^2\}^{\frac{1}{2}} \leqq c_8 \{\int\limits_0^l [(a\varphi'')']^2 \, \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}} \, ,$$

так что

$$R_t(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}}) \, . \tag{66}$$

Наконец,

$$|R_x(x, t)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n \gamma(t)} y_n'(x)| \leqq M \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} |\varphi_n| = M \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} |(a\varphi'')_n| \leqq c_9 \{\int\limits_l^l (a\varphi'')^2 \, \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$R_x(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}) \,. \tag{67}$$

Остается рассмотреть еще функцию $r(x, t)$. Она является решением уравнения $L_\varepsilon(r) = 0$ при условиях $r(x, 0) = \varphi(x)$, $r_t(x, 0) = \psi(x)$, $r(0, t) = r(l, t) = 0$. Следовательно, $r(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n(t)\, y_n(t)$, где $L_\varepsilon^n(r_n) = 0$ (оператор L_ε^n определен уравнением (44)) и $r_n(0) = \varphi_n$, $\dot r_n(0) = \psi_n$. Сначала займемся интегралами $r^*(t)$ и $r^{**}(t)$ уравнения $L_\varepsilon^n(r) = 0$, удовлетворяющими условиям $r^*(0) = 1$, $\dot r^*(0) = 0$, $r^{**}(0) = 0$, $\dot r^{**}(0) = 1$. Умножая опять на $2r^*(t)$ и интегрируя уравнение $L_\varepsilon^n(r^*) = 0$ получим

$$\varepsilon\alpha(t)\, \dot r_n^{*2}(t) + \int\limits_0^t [2\beta(s) - \varepsilon\dot\alpha(s)]\, \dot r^{*2}(s)\, \mathrm{d}s + \lambda_n r^{*2}(t) = \lambda_n \,,$$

откуда для малых ε получаем неравенство $|r^*(t)| \leqq 1$. Повторяя рассуждение, примененное при выводе неравенства (52), можем доказать неравенство $|\dot r^*(t)| \leqq \dfrac{1}{\beta_0}\lambda_n$. Что касается $r^{**}(t)$, то

$$\varepsilon\alpha(t)\dot r^{**2}(t) + \int\limits_0^t [2\beta(s) - \varepsilon\dot\alpha(s)]\, \dot r^{**2}(s)\, \mathrm{d}s + \lambda_n r^{**2}(t) = \varepsilon\alpha(0) \,,$$

так что $|r^{**}(t)| \leqq \sqrt{\alpha(0)}\, \varepsilon^{\frac12}\lambda_n^{-\frac12}$ и $|\dot r^{**}(t)| \leqq 1$.

Теперь достаточно учесть, что $r_n(t) = \varphi_n r^*(t) + \psi_n r^{**}(t)$. Отсюда очевидно получим

$$|r_n(t)| \leqq |\varphi_n| + \sqrt{\alpha(0)}\, \varepsilon^{\frac12}\lambda_n^{-\frac12}|\psi_n| \,, \quad |\dot r_n(t)| \leqq \frac{1}{\beta(0)}\lambda_n|\varphi_n| + |\psi_n| \,.$$

Из первого неравенства вытекает

$$|r(x, t)| \leqq M\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n| + M\alpha(0)\, \varepsilon^{\frac12}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-\frac12}|\psi_n| \leqq$$

$$\leqq c_1\left\{\int\limits_0^l \varphi'^2(x)\, \mathrm{d}x\right\}^{\frac12} + c_2\varepsilon^{\frac12}\left\{\int\limits_0^l \frac{1}{a(x)}\, \psi^2(x)\, \mathrm{d}x\right\}^{\frac12} ,$$

$$r(x, t) = O(\eta^{\frac{7}{2}}) + \varepsilon^{\frac12}O(\eta^{\frac{5}{2}}) \,. \tag{68}$$

Следствием второго неравенства являются соотношения

$$|r_t(x, t)| \leqq \frac{M}{\beta_0}\sum_{n=1}^{\infty} |(a\varphi'')_n| + M\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n| \leqq c_3\left\{\int\limits_0^l [(a\varphi'')']^2\, \mathrm{d}x\right\}^{\frac12} + c_4\left\{\int\limits_0^l \psi'^2\, \mathrm{d}x\right\}^{\frac12} ,$$

$$r_t(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}}) \,. \tag{69}$$

Таким же образом можно обнаружить, что

$$r_x(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}) + \varepsilon^{\frac12}O(\eta^{\frac{3}{2}}) \,. \tag{70}$$

6. Чтобы получить асимптотические формулы для $u(x, t)$, необходимо еще заменить $\bar{k}(x)$, определенные ур. (27), функцией $k(x) = g(x) - U_t(x, 0)$. Имеем

$$\bar{k}(x) = \bar{g}(x) - \bar{U}_t(x, 0) = g(x) - \psi(x) - U_t(x, 0) + R_t(x, 0) =$$
$$= k(x) - \psi(x) + R_t(x, 0)$$

так что, согласно (60) и (66)

$$\bar{k}(x) = k(x) + O(\eta^{\frac{3}{2}}) . \tag{71}$$

Кроме того, можем легко доказать, что

$$\bar{k}'(x) = k'(x) + O(\eta^{\frac{1}{2}}) . \tag{72}$$

Это следует из того, что

$$\bar{k}'(x) = k'(x) - \psi'(x) + R_{tx}(x, 0) = k'(x) + O(\eta) + R_{tx}(x, 0)$$

и

$$|R_{tx}(x, 0)| = \left| -\frac{1}{\beta(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n y_n'(x) \right| \leqq c_5 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{3}{2}} |\varphi_n| = c_5 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} |[a(a\varphi'')'']_n| \leqq$$
$$\leqq c_6 \{ \sum_{n=1}^{\infty} [a(a\varphi'')'']_n^2 \}^{\frac{1}{2}} = c_6 \{ \int_0^l a[(a\varphi'')'']^2 \, dx \}^{\frac{1}{2}} = O(\eta^{\frac{1}{2}}).$$

Теперь подведем итоги всем результатам. Применяя последовательно (64), (36), (68), (71), (61) и (65), получим

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + r(x, t) = \bar{U}(x, t) + \varepsilon\delta(t)\, \bar{k}(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] + \varepsilon z(x, t) +$$
$$+ O(\eta^{\frac{7}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{5}{2}}) = U(x, t) + R(x, t) + O(\varepsilon) + \varepsilon O(1) + O(\eta^{\frac{7}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{5}{2}}) =$$
$$= U(x, t) + O(\eta^3) + O(\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{5}{2}}) .$$

Аналогично из (37), (69), (71), (62) и (66) вытекает

$$u_t(x, t) = \bar{u}_t(x, t) + r_t(x, t) = \bar{U}_t(x, t) + \bar{k}(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + \varepsilon\dot{\delta}(t)\, \bar{k}(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] +$$
$$+ \varepsilon z_t(x, t) + O(\eta^{\frac{3}{2}}) = U_t(x, t) + R_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\eta^{\frac{3}{2}}) + \varepsilon O(1) +$$
$$+ \varepsilon O(\eta^{-\frac{1}{2}}) + O(\eta^{\frac{3}{2}}) = U_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\eta^{\frac{3}{2}}) + O(\varepsilon) + \varepsilon O(\eta^{-\frac{1}{2}})$$

и из (38), (70), $(72)_2$, (63) и (67)

$$u_x(x, t) = \bar{u}_x(x, t) + r_x(x, t) = \bar{U}_t(x, t) + \varepsilon\delta(t)\, \bar{k}'(x)[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}] + \varepsilon z_x + O(\eta^{\frac{5}{2}}) +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{3}{2}}) = U_x(x, t) + R_x(x, t) + \varepsilon O(1) + \varepsilon O(1) + O(\eta^{\frac{5}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{3}{2}}) =$$
$$= U_x(x, t) + O(\varepsilon) + O(\eta^{\frac{5}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{3}{2}}) .$$

Положив $\eta = \varepsilon^p$, получим $u_t(x, t) = U_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}p}) + O(\varepsilon^{1-\frac{1}{2}p})$.

Поэтому для p получаем уравнение $\frac{3}{2}p = 1 - \frac{1}{2}p$, так что $p = \frac{1}{2}$. Подставив это в последние формулы, получим конечный результат, который можем сформулировать следующим образом:

Теорема 1. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *пять раз, или же трижды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют краевым условиям* (18), *или же* (19). *Тогда, если только выполняется* (29), *для решения* $u(x, t)$ *задачи* (9), (4), (5) *в интервале* $\langle 0, T\rangle$ *справедливы следующие асимптотические формулы*:

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon)\,, \tag{73}$$

$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}})\,, \tag{74}$$

$$u_x(x, t) = U_x(x, t) + O(\varepsilon)\,. \tag{75}$$

При этом

$$k(x) = g(x) - U_t(x, 0)\,.$$

Замечание, прибавленное при корректуре. Дополнительно я обнаружил, что, изменив немного доказательство, можно опроститься от предположения $\frac{d}{dt}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \geqq 0$ и что формула верна в интервале $\langle 0, \infty)$.

III. Неоднородный случай

1. Занимаясь неоднородным уравнением (3), ограничимся только таким решением этого уравнения, которое удовлетворяет краевым условиям (4) и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0\,. \tag{76}$$

Решение комплектной задачи (3), (4), (5) получим сложением этого решения и решения однородной задачи (9), (4), (5). Решение задачи (3), (4), (76) обозначим так же, как мы обозначали решение однородной задачи, т. е. $u(x, t)$. Также и остальные обозначения оставим без изменений. Асимптотические формулы, выведенные в настоящем отделе, сложим, наконец, с формулами (73), (74) и (75) и таким образом получим формулы для решения комплектной задачи (3), (4), (5).

Как мы уже отметили в введении, приемы вычислений будут в основном те же, как в однородном случае. Только некоторые оценки мы должны будем выводить несколько иначе, и они не будут столь сильными, как в случае однородного уравнения.

Задачу (3), (4) и (76) можно решать методом Фурье, если для $0 \leqq x \leqq l$ и $t \geqq 0$ правая часть $F(x, t)$ непрерывна, если она имеет непрерывную вторую производную по x и если

$$F(0, t) = F(l, t) = 0\,. \tag{77}$$

(см. [3], § 23). Мы должны будем предполагать, что $F(x, t)$ в указанной области непрерывна, что она имеет непрерывную третью производную по x и непрерывные производные $F_{xxt}(x, t)$, $F_{xxtx}(x, t)$ и что имеет место (77); итак, что касается краевых значений, не предполагаем больше чем самое необходимое для применения метода Фурье.

Как в однородном случае, займемся сначала уравнением $L_\varepsilon(\bar{u}) = \bar{F}(x, t)$, где $\bar{F}(x, t)$ будет от $F(x, t)$ отличаться только в интервалах $0 \leqq x \leqq \eta$ и $l - \eta \leqq x \leqq l$; аналогично тому, как было в II,5, положим

$$\bar{F}(x, t) = F(x, t) - \Phi(x, t) , \tag{78}$$

где

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2!}\, \omega \left(\frac{x}{\eta}\right) F_{xx}(0, t)\, x^2 + \frac{1}{2!}\, \omega \left(\frac{l - x}{\eta}\right) F_{xx}(l, t)(l - x)^2 . \tag{79}$$

Тогда будет

$$\bar{F}(0, t) = \bar{F}(l, t) = \bar{F}_{xx}(0, t) = \bar{F}_{xx}(l, t) = 0 . \tag{80}$$

Далее, очевидно,

$$\frac{\partial^i \Phi}{\partial x^i} = O(\eta^{2-i}) \quad (i = 0, \ldots, 3) ; \quad \Phi_{xxt} = O(1) . \tag{81}$$

2. Прежде чем перейти к рассмотрению уравнения $L_\varepsilon(\bar{u}) = \bar{F}(x, t)$, предпошлем некоторые сведения о решении $\bar{U}(x, t)$ уравнения $L_0(\bar{U}) = \bar{F}(x, t)$ удовлетворяющем условиям $\bar{U}(x, 0) = \bar{U}(0, t) = \bar{U}(l, t) = 0$. Имеем

$$\bar{U}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_n(t)\, y_n(x) , \tag{82}$$

где

$$\bar{U}_n(t) = e^{-\lambda_n \gamma(t)} \int_0^t \frac{1}{\beta(s)}\, e^{\lambda_n \gamma(s)} \bar{F}_n(s)\, \mathrm{d}s$$

и $\bar{F}_n(t)$ — n-й коэффициент Фурье функции $\bar{F}(x, t)$.

Мы должны еще убедиться в том, что производные $\bar{U}_t(x, t)$, $\bar{U}_{tt}(x, t)$, $\bar{U}_{xx}(x, t)$ и $\bar{U}_t(x, 0)$, $\bar{U}_{tx}(x, 0)$, $\bar{U}_{txx}(x, 0)$ можем получить, дифференцируя почленно ряд (82).

Имеем

$$\dot{\bar{U}}_n(t) = -\frac{1}{\beta(t)}\, \lambda_n \bar{U}_n(t) + \frac{1}{\beta(t)}\, \bar{F}_n(t) ,$$

$$\ddot{\bar{U}}_n(t) = \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)}\, \lambda_n \bar{U}_n(t) + \frac{1}{\beta^2(t)}\, \lambda_n^2 \bar{U}_n(t) - \frac{1}{\beta^2(t)}\, \lambda_n \bar{F}_n(t) + \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)}\, \bar{F}_n(t) + \frac{1}{\beta(t)}\, \dot{\bar{F}}_n(t) . \tag{83}$$

Потому что $y_n''(x) = O(\lambda_n)$, достаточно в первых трех случаях доказать равномерную сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\bar{U}_n(t)|$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\bar{F}_n(t)|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\dot{\bar{F}}_n(t)|$. Далее, $\dot{\bar{U}}_n(0) = \frac{1}{\beta(0)} \bar{F}_n(0)$ так что

$$\bar{U}_t(x, 0) = \frac{1}{\beta(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n(0)\, y_n(x) .$$

Поэтому в остальных случаях достаточно доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\bar{F}_n(0)|$, который является, очевидно, частным случаем второго из приведенных выше рядов.

Обозначим

$$a_n(t) = [a(x)\, \bar{F}_{xx}(x, t)]_n , \quad b_n(t) = [a(x)\, \bar{F}_{xxt}(x, t)]_n .$$

Очевидно, что $\dot{a}_n(t) = b_n(t)$. Тогда в силу (16), будет $\bar{F}_n(t) = -\lambda_n^{-1} a_n(t)$. Далее, $\dot{\bar{F}}_n(t) = -\lambda_n^{-1} b_n(t)$. Поэтому относительно ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |\dot{\bar{F}}_n(t)|$, справедливо

$$\sum_{n=p}^{p+k} |\dot{\bar{F}}_n(t)| \leqq \sum_{n=p}^{p+k} \lambda_n^{-1} |b_n(t)| \leqq \{\sum_{n=p}^{p+k} \lambda_n^{-2}\}^{\frac{1}{2}} \cdot \{\sum_{n=p}^{p+k} b_n^2(t)\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \{\sum_{n=p}^{p+k} \lambda_n^{-2}\}^{\frac{1}{2}} \cdot \{\int_0^l a(x)\, \bar{F}_{xxt}^2(x, t)\, \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}} = O(\{\sum_{n=p}^{p+k} \lambda_n^{-2}\}^{\frac{1}{2}}) ,^{6})$$

откуда уже вытекает равномерная сходимость.

Аналогично для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\bar{F}_n(t)|$ будет

$$\sum_{n=p}^{p+k} \lambda_n |\bar{F}_n(t)| = \sum_{n=p}^{p+k} |a_n(t)| \leqq \left\{ \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} (a(x)\, \bar{F}_{xx}(x, t)) \right]^2 \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{n=p}^{p+k} \lambda_n^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(\left\{ \sum_{n=p}^{p+k} \lambda_n^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \right) .$$

Что же касается ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\bar{U}_n(t)|$, то

$$\bar{U}_n(t) = -\lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n \gamma(t)} \int_0^t \lambda_n \dot{\gamma}(s)\, e^{\lambda_n \gamma(s)} a_n(s)\, \mathrm{d}s = -\lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n \gamma(t)} \{[e^{\lambda_n \gamma(s)} a_n(s)]_0^t -$$

$$- \int_0^t e^{\lambda_n \gamma(s)} \dot{a}_n(s)\, \mathrm{d}s\} = -\lambda_n^{-2} \{a_n(t) - a_n(0)\, e^{-\lambda_n \gamma(t)} - e^{-\lambda_n \gamma(t)} \int_0^t e^{\lambda_n \gamma(s)} b_n(s)\, \mathrm{d}s\} ,$$

откуда

$$|\bar{U}_n(t)| \leqq \lambda_n^{-2} \{|a_n(0)| + |a_n(t)| + \int_0^t |b_n(s)|\, \mathrm{d}s\} . \tag{84}$$

[6]) Символ O в данном отделе относим к независимо переменным x, t. В следующих отделах относим его опять к ε и считаем его независимым от функции $\bar{F}(x, t)$.

Доказательство равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(0)| + |a_n(t)|)$ проводится так же, как в предыдущих случаях. Оценку ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t |b_n(s)|\,\mathrm{d}s$ в интервале $\langle 0, T\rangle$ получим следующим способом:

$$\sum_{n=p}^{p+k}\int_0^t |b_n(s)|\,\mathrm{d}s \leqq \{\sum_{n=p}^{p+k}\lambda_n^{-1}\}^{\frac{1}{2}} \cdot \{\sum_{n=p}^{p+k}\lambda_n(\int_0^t |b_n(s)|\,\mathrm{d}s)^2\}^{\frac{1}{2}} \leqq \{\sum_{n=p}^{p+k}\lambda_n^{-1}\}^{\frac{1}{2}}\{t\sum_{n=p}^{p+k}\lambda_n\int_0^t b_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \{\sum_{n=p}^{p+k}\lambda_n^{-1}\}^{\frac{1}{2}}\{t\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n b_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} \leqq \{\sum_{n=p}^{p+k}\lambda_n^{-1}\}^{\frac{1}{2}} \cdot \{t\int_0^t\int_0^l \bar{F}_{xxtx}(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} = O(\{\sum_{n=p}^{p+k}\lambda_n^{-1}\}^{\frac{1}{2}}) .$$

3. Теперь введем опять функцию $z(x, t)$ (ур. (36)) с той только разницей, что $\bar{k}(x)$ не будем определять из ур. (33), но положим

$$\bar{k}(x) = -\,\bar{U}_t(x, 0) . \tag{85}$$

Формулы для производных решения $\bar{u}(x, t)$ (т. е. выражения (37), (38) и остальные) остаются в силе; подстановкой в уравнение $L_\varepsilon(\bar{u}) = \bar{F}(x, t)$ получим опять уравнение (39), где $K(x, t, \varepsilon)$ дано ур. (40). Повторяя рассуждения из первой части отдела II,4 (стр. 224), докажем, что функцию $z(x, t)$ можем представить в виде ряда (43) и что этот ряд можем раз или два раза почленно дифференцировать по x и по t. Поэтому коэффициенты Фурье $z_n(t)$ функции $z(x, t)$ будут опять-таки удовлетворять ур. (44) и начальным условиям (45). Подставляя в (40) вместо $\bar{U}(x, t)$ выражения из (82) и (83), а вместо $\bar{k}(x)$ выражение из (85), причем согласно (16) $[a(x)\,\bar{k}''(x)]_n = -\,\lambda_n\bar{k}_n$, видим, что

$$K_n(t) = A_n(t) + B_n(t) + C_n(t) + D_n ,$$

где

$$A_n(t) = O(\lambda_n^2|\bar{U}_n(t)|) , \quad B_n(t) = O(\lambda_n|\bar{F}_n(t)|) , \quad C_n(t) = O(|\dot{\bar{F}}_n(t)|) ,$$
$$D_n = O(\lambda_n|\bar{F}_n(0)|) .$$

Поэтому можем $z_n(t)$ написать в виде суммы решений уравнения вида (48), куда вместо $M(t)$ последовательно подставим $A_n(t)$, $B_n(t)$, $C_n(t)$ и $D_n(t)$. Нет надобности производить оценку последнего решения. Также не будем оценивать ни второе, ни третье решение, а ограничимся только оценкой первого решения. Отметим только, что оценка второго и третьего решения не дает худшего результата.

Согласно (50) будет (полагаем $M(t) = A_n(t)$)

$$z_n(t) = O(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\{\int_0^t A_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) = O(\lambda_n^{\frac{3}{2}}\{\int_0^t \bar{U}_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) .$$

Поэтому из (84) вытекает

$$|z_n(t)| \leqq c_1 \cdot \lambda_n^{-\frac{1}{2}}\{\int_0^t [\,|a_n(0)| + |a_n(s)| + \int_0^s |b_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau]^2\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{3}c_1\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\{\int_0^t [a_n^2(0) + a_n^2(s) + (\int_0^s 1 \,.\, |b_n(\tau)|\,\mathrm{d}\tau)^2]\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq c_2\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\{\int_0^t [a_n^2(0) + a_n^2(s) + s\int_0^s b_n^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau]\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c_2\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\{ta_n^2(0) + \int_0^t a_n^2(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t [s\int_0^s b_n^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau]\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq c_2\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\{ta_n^2(0) + \int_0^t a_n^2(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t [t\int_0^t b_n^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau]\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c_2\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\{ta_n^2(0) + \int_0^t a_n^2(s)\,\mathrm{d}s + t^2\int_0^t b_n^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\}^{\frac{1}{2}},$$

так что

$$|z(x, t)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n(t)|\,|y_n(x)| \leqq Mc_2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\{ta_n^2(0) + \int_0^t a_n^2(s)\,\mathrm{d}s + t^2\int_0^t b_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq Mc_2[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}]^{\frac{1}{2}} \,.\, [\sum_{n=1}^{\infty}\{ta_n^2(0) + \int_0^t a_n^2(s)\,\mathrm{d}s + t^2\int_0^t b_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c_3[t\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t a_n^2(s)\,\mathrm{d}s + t^2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t b_n^2(s)\,\mathrm{d}s]^{\frac{1}{2}} \leqq c_4\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(0)\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ c_5\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t a_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} + c_6\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t b_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} \leqq c_4\{\int_0^l a(x)\,\overline{F}_{xx}^2(x, 0)\,\mathrm{d}x\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ c_5\{\int_0^T\int_0^l a(x)\,\overline{F}_{xx}^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} + c_6\{\int_0^T\int_0^l a(x)\,\overline{F}_{xxt}^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}$$

и, следовательно,

$$z(x, t) = O(1)\,. \tag{86}$$

Что же касается $z_t(x, t)$, то из (51) и (84) вытекает, что

$$z_t(x, t) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O(\sum_{n=1}^{\infty}\{ta_n^2(0) + \int_0^t [a_n^2(s) + t^2b_n^2(s)]\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O(\{\sum_{n=1}^{\infty}[t\lambda_n a_n^2(0) + \int_0^t \lambda_n a_n^2(s)\,\mathrm{d}s + t^2\int_0^t \lambda_n b_n^2(s)\,\mathrm{d}s]\}^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O(\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n^2(0)\}^{\frac{1}{2}}) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O(\{\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O(\{\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n b_n^2(s)\,\mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O\left(\left\{\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}\,a(x)\,\overline{F}_{xx}^2(x, 0)\right]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O\left(\left\{\int_0^t\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}\,a(x)\,\overline{F}_{xx}(x, s)\right]^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}O\left(\left\{\int_0^t\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}\,a(x)\,\overline{F}_{xxt}(x, s)\right]^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}\right),$$

так что

$$z_t(x, t) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} O(\eta^{-\frac{1}{2}}) . \tag{87}$$

Для $z_x(x, t)$ можем аналогично доказать соотношение

$$z_x(x, t) = O(\eta^{-\frac{1}{2}}) . \tag{88}$$

4. Аналогично уравнениям (64) положим

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + r(x, t) , \quad U(x, t) = \bar{U}(x, t) + R(x, t) .$$

Функция $R(x, t)$ удовлетворяет уравнению $L_0(R) = \Phi(x, t)$ и побочным условиям $R(x, 0) = R(0, t) = R(l, t) = 0$, так что

$$R(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \gamma(t)} \int_0^t \frac{1}{\beta(s)} e^{\lambda_n \gamma(s)} \Phi_n(s) \, ds \, . \, y_n(x) .$$

Оценку функции $R(x, t)$ и ее частных производных первого порядка получим следующим образом:

$$|R(x, t)| = M \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \gamma(t)} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\beta^2(s)} e^{2\lambda_n \gamma(s)} \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^t \Phi_n^2(s) \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq c_7 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^t \Phi_n^2(s) \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq c_8 \left\{ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^2(s) \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq c_8 \left\{ \int_0^t \int_0^l \frac{1}{a(x)} \Phi^2(x, t) \, dx \, ds \right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ [7]}$$

так что

$$R(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}) . \tag{89}$$

Далее,

$$R_t(x, t) = \frac{1}{\beta(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi_n(t) - \lambda_n e^{-\lambda_n \gamma(t)} \int_0^t \frac{1}{\beta(s)} e^{\lambda_n \gamma(s)} \Phi_n(s) \, ds \right] ,$$

$$|R_t(x, t)| \leqq \frac{1}{\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(t)| + c_9 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^t \Phi_n^2(s) \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq c_1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_n^2(t) \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

---

[7] Справедливо неравенство $\int_0^t \frac{1}{\beta^2(s)} e^{2\lambda_n \gamma(s)} \, ds \leqq \frac{1}{\beta_0} \int_0^t \frac{1}{\beta(s)} e^{2\lambda_n \gamma(s)} \, ds =$
$= \frac{1}{2\beta_0} \lambda_n^{-1} \int_0^t 2\lambda_n \dot{\gamma}(s) \, e^{2\lambda_n \gamma(s)} ds = \frac{1}{2\beta_0} \lambda_n^{-1} \left[e^{\lambda_n \gamma(s)} \right]_0^t \leqq \frac{1}{2\beta_0} \lambda_n^{-1} e^{2\lambda_n \gamma(t)}$.

$$+ c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^t [a(x)\, \Phi_{xx}(x, s)]_n^2 \, \mathrm{d}s \right\}^{\frac{1}{2}} \leq c_1 \left\{ \int_0^l \Phi_x^2(x, t) \, \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ c_2 \left\{ \int_0^t \int_0^l a(x)\, \Phi_{xx}^2(x, s) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \right\}^{\frac{1}{2}},$$

так что

$$R_t(x, t) = O(\eta^{\frac{1}{2}}) \,. \tag{90}$$

Аналогично можно доказать, что

$$R_x(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}}) \,. \tag{91}$$

Функция $r(x, t)$ выполняет уравнение $L_\varepsilon(r) = \Phi(x, t)$ и побочные условия $r(x, 0) = r_t(x, 0) = r(0, t) = r(l, t) = 0$. Имеем $r(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n(t) \,.\, y_n(x)$ и $r_n(t)$ удовлетворяют уравн. (48), где $M(t) = \Phi_n(t)$ и начальным условиям (45). На основании (50) можно утверждать, что

$$r(x, t) = O(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \{ \int_0^t \Phi_n^2(s) \, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}} = O(\{\int_0^t \int_0^l \Phi^2(x, s) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) \,,$$

так что

$$r(x, t) = O(\eta^{\frac{5}{2}}) \,. \tag{92}$$

Функцию $r_t(x, t)$ оценим при помощи (51). Имеем

$$r_t(x, t) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} O(\sum_{n=1}^{\infty} \{\int_0^t \Phi_n^2(s) \, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} O(\{\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_n \Phi_n^2(s) \, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} O(\{\int_0^t \int_0^l \Phi_x^2(x, s) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s\}^{\frac{1}{2}}) \,, \tag{93}$$

$$r_t(x, t) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{3}{2}}) \,.$$

Наконец,

$$r_x(x, t) = O(\eta^{\frac{3}{2}}) \,. \tag{94}$$

Чтобы составить конечные формулы, необходимо выразить еще $\bar{k}(x)$. Имеем

$$\bar{k}(x) = - \bar{U}_t(x, 0) = - U_t(x, 0) + R_t(x, 0) \,,$$

так что согласно (90) будет

$$\bar{k}(x) = k(x) + O(\eta^{\frac{1}{2}}) \,. \tag{95}$$

где $k(x) = - U_t(x, 0)$. Кроме того можно легко доказать, что

$$\bar{k}'(x) = k'(x) + O(\eta^{-\frac{1}{2}}) \,. \tag{96}$$

5. Теперь подведем итог всем формулам. Используя оценки (86)—(96) и поступая так же, как в II,6, получим

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon) + O(\eta^{\frac{5}{2}}) ,$$
$$u_t(x, t) = U_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\eta^{\frac{1}{2}}) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} O(\eta^{-\frac{1}{2}}) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} O(\eta^{\frac{3}{2}}) ,$$
$$u_x(x, t) = U_x(x, t) + \varepsilon O(\eta^{-\frac{1}{2}}) + O(\eta^{\frac{3}{2}}) .$$

Положим опять $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Ясно видно, что $u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon)$, $u_t(x, t) = U_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$, $u\ (x, t) = U_x(x, t) + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}})$. Сложив эти формулы с формулами (73), (74), (75), получим конечный результат для решения комплектной задачи (3), (4), (5), который сформулируем в следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть, далее функция* $F(x, t)$ *непрерывна в области* $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$, *пусть она имеет в этой области непрерывную третью производную по* x *и непрерывные частные производные* F_{xxt}, F_{xxtx} *и пусть удовлетворяет* (77). *Тогда для решения* $u(x, t)$ *задачи* (3), (4), (5) *справедливы в интервале* $\langle 0, T\rangle$ *следующие асимптотические формулы*

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon) , \quad u_t(x, t) = U_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{4}}) ,$$
$$u_x(x, t) = U_x(x, t) + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}) .$$

При этом $k(x) = g(x) - U_t(x, 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *N. Levinson:* The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + A(x, y) u_x + B(x, y)\, u_y + C(x, y)\, u = D(x, y)$ for small ε. Ann. of Math. *51*, 1950, 428—445.

[2] *М.-И. Вишик, Л. А. Люстерник*: Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи мат. наук, *XII*, 1957, 3—122.

[3] *И. Г. Петровски:* Лекции об уравнениях с частными производными, 2. изд., Москва, 1953.

Zusammenfassung

ÜBER DAS GEMISCHTE PROBLEM FÜR EINE HYPERBOLISCHE GLEICHUNG MIT KLEINEM PARAMETER

MILOŠ ZLÁMAL, Brno

(Eingelangt am 30. April 1958)

Ein Ingenieur kam zu mir um Ratschläge über die Gleichung von der Form $a_0 u_{tt} + b_0 u_t - c_0 u_{xx} = 0$ $(a_0, b_0, c_0 > 0)$ zu gewinnen. Dabei handelte es sich um das gemischte Problem $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Es war notwendig die Gleichung für mehrere Werte der Koeffizienten a_0, b_0, c_0 zu lösen. In einem Fall waren die numerischen Werte der Koeffizienten gleich $a_0 = \frac{1}{200}$, $b_0 = c_0 = 1$. Der Ingenieur teilte mir mit, dass er in diesem Fall die obenerwähnte Gleichung durch die Wärmeleitungsgleichung $U_t = U_{xx}$ ersetzt habe und er fragte mich, in wieweit diese Aproximation berechtigt sei. Die Antwort konnte nicht einfach ausfallen, da die ursprüngliche Gleichung vom hyperbolischen Typus ist und folglich zwei Anfangsbedingungen erfordert, während die verkürzte Gleichung eine solche vom parabolischen Typus darstellt und somit den einzigen Anfangswert $U(x, 0)$ vorzuschreiben ermöglicht. Es handelt sich darum, ob die Lösung des gemischten Problems für die Gleichung

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_0 \frac{\partial u}{\partial t} - c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 . \tag{1}$$

mit $\varepsilon \to 0+$ gegen die Lösung des gemischten Problems der Wärmeleitungsgleichung $b_0 U_t = c_0 U_{xx}$ konvergiert. Die Lösung von (1) kann man zwar auf elementare Weise in der expliziten Form erhalten. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass diese explizite Form nicht zu ermitteln erlaubt, ob die Konvergenzbeziehung $u(x, t) \to U(x, t)$ tatsächlich besteht. Ich stellte mir zur Aufgabe diese Frage zu untersuchen.

Es handelt sich also um eine partielle Differentialgleichung mit kleinem Parameter bei den höchsten Ableitungen. Dies ist ein darzeit häufig behandeltes Problem. Wenn dieser kleine Parameter gleich Null ist, so wird die Ordnung der Gleichung in unserem Fall zwar nicht erniedrigt, wie es gewöhnlich zu sein pflegt, aber es wird der Typus geändert und eine Anfangsbedingung geht verloren. Man kann darum nicht erwarten, dass die Lösung $u(x, t)$ eine analytische Funktion des Parameters ε im Punkt $\varepsilon = 0$ sein wird, also von der Form $u(x, t) = U(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)\, \varepsilon^i$. Im Gegensatz kann man erwarten, dass in den Formeln für $u(x, t)$ die sogenannten Glieder der Grenzschichte erscheinen.

Es gelang mir das vorgelegte Problem zu lösen, und zwar für die Gleichung von der Form

$$\varepsilon\alpha(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \tag{2}$$

mit folgenden Nebenbedingungen:

$$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(x)\ , \quad u(0, t) = u(l, t) = 0\ . \tag{3}$$

Dabei ist $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ für $t \geqq 0$, $a(x) > 0$ für $x \in \langle 0, l \rangle$. Die verkürzte Gleichung ist

$$\beta(t) \frac{\partial U}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F(x, t)\ ,$$

die Nebenbedingungen

$$U(x, 0) = f(x) , \quad U(0, t) = U(l, t) = 0 .$$

Die resultierenden, in jedem endlichen Intervall $\langle 0, T \rangle$ geltenden, asymptotischen Formeln schauen im homogenen Fall ($F(x, t) \equiv 0$) so aus:

$$u(x, t) = U(x, t) + O(\varepsilon) , \quad u_t(x, t) = U_t(x, t) + k(x)\, e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{4}}) ,$$
$$u_x(x, t) = U_x(x, t) + O(\varepsilon) .$$

Dabei ist

$$k(x) = g(x) - U_t(x, 0), \quad \nu(t) = \int_0^t \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\, \mathrm{d}s .$$

Aus der ersten und dritten Formel folgt $u(x, t) \to U(x, t)$, $u_x(x, t) \to U_x(x, t)$ gleichmässig in $\langle 0, T \rangle$ bei $\varepsilon \to 0+$. Was $u_t(x, t)$ betrifft, gilt $u_t(x, t) \to U_t(x, t)$ nur im Intervall $\langle \delta, T \rangle$, wobei δ eine beliebig kleine positive Zahl darstellt.

Und nun die Voraussetzungen: Was die Randwerte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ betrifft, so nehme ich $f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = g(0) = g(l)$ an; das sind nicht nur hinreichende, aber auch notwendige Voraussetzungen zur Lösung des Problems (2), (3) mittels der Fourierschen Methode. Mehr muss ich allerdings über die Differenzierbarkeit voraussetzen; und zwar $f(x) \in C^{(5)}$, $g(x) \in C^{(3)}$. Über die Koefizienten $\alpha(t)$, $\beta(t)$ war ich genötigt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \geqq 0$ anzunehmen.

Im Fall der nichthomogenen Gleichung habe ich fast dieselben Formeln abgeleitet. Der Unterschied besteht nur in kleineren Potenzen von ε in dem O Symbol.