Czechoslovak Mathematical Journal

Věra Šedivá

О коллективно-нормальных и сильно- паракомпактных пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 1, 50–62

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100339`

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

О КОЛЛЕКТИВНО-НОРМАЛЬНЫХ И СИЛЬНО-ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВЕРА ШЕДИВА (Věra Šedivá), Прага

(Поступило в редакцию 7/III 1958 г.)

Статья содержит несколько результатов, касающихся коллективной нормальности и наследственной сильной паракомпактности.

В первой части настоящей работы рассматриваются коллективно-нормальные пространства: дается (теорема 1.1) условие, необходимое и достаточное для того, чтобы пространство было счетно-паракомпактным и коллективно-нормальным,[1]) и доказывается (теорема 1.3), что коллективная нормальность наследственна для F_σ-множеств. Во второй части рассматриваются, главным образом, вопросы, касающиеся наследственной сильной паракомпактности.

Окончательный вид работа получила после просмотра проф. М. Катетова, который мне тоже предложил тему этой работы. За это я ему выражаю большую благодарность.

Во всей статье мы называем хаусдорфово топологическое пространство просто пространством. Если V есть свойство топологических пространств, то мы говорим, что пространство X обладает свойством V *наследственно*, если любое $Y \subset X$ имеет свойство V, *локально*, если любая точка $x \in X$ имеет окрестность U такую, что $\overline{U}$ имеет свойство V.

Системы множеств мы будем обозначать иногда одной буквой, иногда знаком, напр., $\{U_\alpha | \alpha \in A\}$ и т. п.; при этом, вообще говоря, возможно $U_\alpha = U_\beta$ при $\alpha \neq \beta$.

1

Определения. Пространство называется *паракомпактным* (*счетно паракомпактным*), если в любое его открытое покрытие (счетное открытое покрытие) можно вписать локально-конечное открытое покрытие. Система

[1]) Этот результат (с иным доказательством) содержится также в статье М. Катетова О продолжении локально конечных покрытий, Colloquium Mathematicum 6 (1958) 145—151.

$\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ подмножеств пространства X называется дискретной, если она локально конечна и $\overline{A}_\lambda \cap \overline{A}_{\lambda'} = \emptyset$ при $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda'$. Пространство X называется коллективно-нормальным, если для любой дискретной системы $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, $A_\lambda \subset X$ существует дискретная система $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ такая, что $A_\lambda \subset G_\lambda$, G_λ открыты в X.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы пространство X было коллективно-нормальным и счетно-паракомпактным, необходимо и достаточно следующее условие: X нормально, и для любой локально-конечной системы $\{B_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, где $B_\lambda \subset X$, существует локально-конечная система $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ открытых подмножеств пространства X такая, что $B_\lambda \subset G_\lambda$ (при любом $\lambda \in \Lambda$).*

Доказательство. I. Пусть условие выполняется. Если дана дискретная система $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ где $A_\lambda \subset X$, то существуют открытые $G_\lambda \subset X$ такие, что $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ локально конечна и $\overline{A}_\lambda \subset G_\lambda$ (для всех $\lambda \in \Lambda$). Так как X нормально, то для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует открытое H_λ такое, что $A_\lambda \subset H_\lambda \subset \overline{H}_\lambda \subset G_\lambda - \bigcup_{\substack{\mu \in \Lambda \\ \mu \neq \lambda}} A_\mu$. Положим $V_\lambda = H_\lambda - \bigcup_{\substack{\mu \in \lambda \\ \mu \neq \lambda}} \overline{H}_\mu$. Тогда V_λ открыты, $A_\lambda \subset V_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \emptyset$ для $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Найдем теперь еще открытые U_λ так, чтобы $A_\lambda \subset U_\lambda \subset \overline{U}_\lambda \subset V_\lambda$. Тогда, очевидно, $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ дискретна. Итак, X коллективно-нормально. Если $F_k \subset X$ замкнуты, $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$, $F_k \supset F_{k+1}$, то $\{F_k\}$ локально конечна, и потому существуют открытые $G_k \supset F_k$ такие, что $\{G_k\}$ локально конечна; но тогда, очевидно, $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \emptyset$. Итак, (см. [2]), X счетно-паракомпактно.

II. Пусть X счетно-паракомпактно и коллективно-нормально. Так как X, очевидно, нормально, то нужно только доказать для любой локально конечной системы $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, $A_\lambda \subset X$ существование открытых $G_\lambda \supset A_\lambda$ таких, что $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ локально конечна; при этом можно, конечно, предполагать, что A_λ замкнуты.

Обозначим через U_n множество тех $x \in X$, которые принадлежат не более чем n множествам A_λ.[2]) Тогда $\{U_n | n = 1, 2, \ldots\}$ является счетным открытым покрытием X, так что существуют V_n такие, что $\overline{V}_n \subset U_n$, $\{V_n | n = 1, 2, \ldots\}$ является локально конечным открытым покрытием X.

III. Фиксируем теперь (в этой и следующей части доказательства) число $n = 1, 2, \ldots$ и докажем, что существуют открытые G_λ^n такие, что система $\{G_\lambda^n | \lambda \in \Lambda\}$ локально конечна и $A_\lambda \cap V_n \subset G_\lambda^n \subset V_n$ для каждого $\lambda \in \Lambda$.

Обозначим через B_i, $i = 1, \ldots, n$ множества всех $\beta \subset \Lambda$, состоящих из $n - i + 1$ элементов. Построим множества W_i, $i = 1, \ldots, n$ и F_β, M_β, N_β, где $\gamma \in B_i$, $i = 1, \ldots, n$, так, чтобы выполнялись следующие условия:

[2]) Точнее говоря, таких $x \in X$, что имеется не более чем n индексов $\lambda \in \Lambda$, для которых $x \in A_\lambda$.

(a) $W_1 = V_n,\ W_i = W_{i-1} - \bigcup_{\beta \in B_{i-1}} \overline{N}_\beta$;

(b) $F_\beta = \overline{W}_i \cap \bigcap_{\lambda \in \beta} A_\lambda$ (для $\beta \in B_i$); каждая система $\{F_\beta | \beta \in B_i)\}$ дискретна;

(c) каждая система $\{M_\beta | \beta \in B_i\}$, $\{N_\beta | \beta \in B_i\}$ является локально конечной системой множеств, открытых в $\overline{W}_i$;

(d) если $\beta \in B_i$, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \operatorname{non} \in \beta$, то $M_\beta \cap A_\lambda = \emptyset$;

(e) $F_\beta \subset N_\beta \subset \overline{N}_\beta \subset M_\beta$ для любого $\beta \in B_i$, $i = 1, \ldots, n$;

При $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через $(\mathrm{a}_k), \ldots, (\mathrm{e}_k)$ соответствующие условия, в которых берется только $i = 1, \ldots, k$.

Множества, удовлетворяющие условиям $(\mathrm{a}_1), \ldots, (\mathrm{e}_1)$ строятся так: $W_1 = V_n$; $F_\beta = \overline{W}_1 \cap \bigcap_{\lambda \in \beta} A_\lambda$ (для $\beta \in B_1$); так как $\{F_\beta | \beta \in B_1\}$ является дискретной системой замкнутых подмножеств $\overline{W}_1$, то существуют открытые в $\overline{W}_1$ множества N_β, M_β, где $\beta \in B_1$, такие, что $F_\beta \subset N_\beta \subset \overline{N}_\beta \subset \boldsymbol{M}_\beta - \bigcup_{\lambda \operatorname{non} \in \beta} A_\lambda$ и система $\{M_\beta | \beta \in B_1\}$ дискретна.

Пусть теперь для некоторого $k = 1, \ldots, n - 1$ уже построены множества, удовлетворяющие условиям $(\mathrm{a}_k), \ldots, (\mathrm{e}_k)$. Положим $W_{k+1} = W_k - \bigcup_{\beta \in B_k} \overline{N}_\beta$; для $\beta \in B_{k+1}$ положим $F_\beta = \overline{W_{k+1}} \cap \bigcap_{\lambda \in \beta} A_\lambda$. Из локальной конечности системы $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ сразу вытекает, что система $\{F_\beta | \beta \in B_{k+1}\}$ также локально конечна. Если $\lambda \in \Lambda$, $\beta \in B_{k+1}$, $\lambda \operatorname{non} \in \beta$, то $A_\lambda \cap F_\beta = \emptyset$, так как иначе существовало бы $x \in F_\beta \cap A_\lambda$ и, полагая $\beta' = \beta \cup (\lambda)$ мы бы имели $\beta' \in B_k$, $x \in F_{\beta'} \subset N_{\beta'}$ и следовательно, $x \operatorname{non} \in \overline{W_{k+1}}$, что дает противоречие. Из доказанного соотношения $A_\lambda \cap F_\beta = \emptyset$ вытекает, далее, немедленно, что $F_{\beta 1} \cap F_{\beta 2} = \emptyset$ для $\beta_1 \neq \beta_2$, $\beta_1 \in B_{k+1}$, $\beta_2 \in B_{k+1}$. Итак, система $\{F_\beta | \beta \in B_{k+1}\}$ дискретна. Следовательно, условия (a_{k+1}), (b_{k+1}) выполняются. Из того, что пространство X коллективно-нормально, вытекает существование открытых в $\overline{W}_{k+1}$ множеств $M_\beta \supset F_\beta$, $\beta \in B_{k+1}$ таких, что система $\{M_\beta | \beta \in B_{k+1}\}$ локально конечна (и даже дискретна). При этом, очевидно, можно подобрать M_β так, чтобы $M_\beta \cap A_\lambda = \emptyset$, когда $\lambda \operatorname{non} \in \beta$. Возьмем еще открытые в $\overline{W}_{k+1}$ множества N_β так, чтобы $F_\beta \subset N_\beta \subset \overline{N}_\beta \subset M_\beta$. Легко видеть, что тогда выполняются все условия $(\mathrm{a}_{k+1}), \ldots, (\mathrm{e}_{k+1})$.

Из доказанного вытекает, наконец, существование множеств, удовлетворяющих условиям (a), ..., (e).

IV. Положим теперь $H^i_\lambda = \bigcup_{\substack{\beta \in Bi \\ \lambda \in \beta}} (W_i \cap M_\beta)$, $G^n_\lambda = \bigcup_{i=1}^{n} H^i_\lambda$. Очевидно, $G^n_\lambda \subset W_1 = V_n$, множества H^i_λ и G^n_λ открыты в X. Докажем, что $A_\lambda \cap V_n \subset G^n_\lambda$. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$, $x \in A_{\lambda_0} \cap V_n$. Возьмем наибольшее $h = 1, \ldots, n$ такое, что $x \in W_h$. Если $h < n$, то $x \in W_h$, $x \operatorname{non} W_{h+1}$ и поэтому $x \in \bigcup_{\beta \in Bh} \overline{N}_\beta$, $x \in \bigcup_{\beta \in Bh} M_\beta$, так что при подходящем $\beta' \in B_h$ имеем $x \in M_{\beta'}$, $x \in W_h \cap M_{\beta'}$. Ввиду $x \in A_{\lambda_0}$ необходимо будет $\lambda_0 \in \beta'$, откуда вытекает $x \in H^h_{\lambda_0} \subset G^n_{\lambda_0}$. Если же $h = n$, то, обозначая через β_0 множество всех $\lambda \in \Lambda$ для которых $x \in A_\lambda$, а через k число таких λ, имеем $\lambda_0 \in \beta_0$, $\beta_0 \in B_{n-k+1}$, $x \in W_{n-k+1}$, $x \in F_{\lambda_0}$, $x \in W_{n-k+1} \cap M_{\beta_0} \subset \supset H^{n-k+1}_{\lambda_0} \subset G^\mu_{\lambda_0}$. Из того, что $\{M_\beta | \beta \in B_i\}$ локально конечна, легко вытекает, что локально конечны также системы $\{H^i_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ а потому также $\{G^n_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$. Итак, G_n имеют требуемые свойства.

V. Положим теперь $G_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} G^n_\lambda$. Тогда G_λ открыты, $A_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \cap A_\lambda) \subset G_\lambda$. Так как система $\{V_n\}$ локально конечна, то для любого $x \in X$ существует его окрестность C и число p так, что $C \cap V_n = \emptyset$ для $n \geqq p$; для $n = 1, \ldots, p$ существуют окрестности C_n точки x такие, что C_n пересекается лишь с конечным числом множеств G^n_λ. Легко усмотреть, что $C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ пересекается только с конечным числом множеств G_λ. Итак, $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ локально конечна.

Теорема 1.2. *Если пространство X счетно-паракомпактно и коллективно-нормально, а пространство Y является метризуемым и компактным, то $X \times Y$ счетно-паракомпактно и коллективно-нормально.*

Доказательство. Пусть множества $A_\lambda \subset X \times Y$ замкнуты, система $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ локально конечна. Обозначим через $\tilde{A}_\lambda$ проекцию A_λ на X (т. е. множество $x \in X$ таких, что $(x, y) \in A_\lambda$ при подходящем $y \in Y$). Из компактности Y вытекает, что система $\{\tilde{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ локально-конечна в X. Следовательно, существует такая локально конечная система $\{\tilde{G}_\lambda | \lambda_\lambda \in \Lambda\}$ открытых в X множеств, что $\tilde{A}_\lambda \subset \tilde{G}_\lambda$. Положим $G_\lambda = \tilde{G}_\lambda \times Y$. Тогда, очевидно, $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ локально конечна в $X \times Y$ и $A_\lambda \subset G_\lambda$ (для каждого $\lambda \in \Lambda$).

Так как $X \times Y$ нормально (см. [2]), то из теоремы 1.1 вытекает, что $X \times Y$ счетно-паракомпактно и коллективно-нормально.

Теорема 1.3. *Каждое F_σ-множество коллективно-нормального пространства само является коллективно-нормальным пространством.*

Доказательство. Пусть X коллективно-нормально, $F_n \subset X$ замкнуты, $F_n \subset F_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots$, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Пусть $A_\lambda \subset F$ замкнуты в F, система $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ дискретна (в F).

Положим $H^0_\lambda = K^0_\lambda = \emptyset$ (для всех $\lambda \in \Lambda$). Пусть теперь уже построены (для $i = 0, 1, \ldots, n$) дискретные системы $\{H^i_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, $\{K^i_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ открытых множеств, причем для любого $\lambda_0 \in \Lambda$ и $i = 1, \ldots, n$ имеет место

$$(A_{\lambda_0} \cap F_i) \cup \overline{H}^{i-1}_{\lambda_0} \subset H^i_{\lambda_0} \subset \overline{H}^i_{\lambda_0} \subset K^i_{\lambda_0} - \overline{\bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda_0}} A_\lambda}\,. \tag{*}$$

Тогда $\{(A_\lambda \cap F_{n+1}) \cup \overline{H}^n_{\lambda_0} | \lambda \in \Lambda\}$ является дискретной системой замкнутых в X множеств; следовательно, существуют дискретные системы открытых множеств $\{H^{n+1}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, $\{K^{n+1}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ такие, что для любого $\lambda_0 \in \Lambda$

$$(A_{\lambda_0} \cap F_{n+1}) \cup \overline{H}^n_{\lambda_0} \subset H^{n+1}_{\lambda_0} \subset \overline{H}^{n+1}_{\lambda_0} \subset K^{n+1}_{\lambda_0} - \overline{\bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda_0}} A_\lambda}.$$

Из этого по индукции вытекает существование для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ дискретных систем открытых множеств $\{H^i_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, $\{K^i_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ таких, что (*) верно для всех $i = 1, 2, \ldots$ и всех $\lambda_0 \in \Lambda$.

Положим теперь $H_\lambda = (\bigcup_{n=1}^{\infty} H^n_\lambda) \cap F$. Очевидно, $A_\lambda \subset H_\lambda$ и $H_\lambda \cap H_{\lambda'} = \emptyset$ для $\lambda \neq \lambda'$, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \in \Lambda$; из этого вытекает, что $A \subset F - M$, где M обозначает множество тех $x \in F$, любая окрестность которых пересекает бесконечное число множеств H_λ, $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Так как A и M замкнуты, то существует открытое в F множество N такое, что $A \subset N \subset \overline{N} \cap F \subset F - M$. Положим теперь $G^*_\lambda = N \cap H_\lambda$ и найдем открытые в F множества G_λ так, чтобы $A_\lambda \subset G_\lambda \subset \overline{G}_\lambda \cap F \subset G^*_\lambda$. Тогда $A_\lambda \subset G_\lambda$ открыты в F, $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ дискретна в F. Итак, пространство F коллективно-нормально.

Теорема 1.4. *Если каждое открытое множество пространства X является коллективно-нормальным пространством, то X наследственно коллективно-нормально.*

Доказательство. Пусть $Y \subset X$, множества $A_\lambda \subset Y$ замкнуты в Y, система $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ дискретна в Y. Обозначим через M замыкание множества $\bigcup_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \\ \lambda_1 \neq \lambda_2}} (\overline{A}_{\lambda_1} \cap \overline{A}_{\lambda_2})$. Очевидно, $Y \cap M = \emptyset$. Так как M замкнуто, то существует дискретная (в $X - M$) система $\{G^*_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ открытых множеств такая, что $A_\lambda \subset G^*_\lambda$. Положим $G_\lambda = G^*_\lambda \cap Y$. Тогда $A_\lambda \subset G_\lambda$, G_λ открыты в Y, $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ дискретна в Y.

2

Система множеств $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ называется *звездно-конечной* (или *комбинаторно-конечной*), если для любого $\lambda_0 \in \Lambda$ имеем $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \emptyset$ только для конечного числа индексов λ, называется звездно-счетной, если $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \Phi$ только для счетного числа индексов λ. Пространство X называется *сильно-паракомпактным*, если в любое его откыртое покрытие можно вписать звездно-конечное открытое покрытие.

Легко доказать (аналогично, как для паракомпактных пространств), что (1) замкнутое подпространство сильно-паракомпактного пространства, (2) произведение сильно-паракомпактного и компактного пространства также сильно паракомпактно, и (3) из сильной паракомпактности всех открытых $Y \subset X$ вытекает наследственная сильная паракомпактность пространства X.

В работе [3] утверждается, что F_σ-подмножество сильно-паракомпактного пространства и произведение σ-компактного[3]) и сильно-паракомпактного пространства также сильно-паракомпактны. В дальнейшем мы покажем, что эти утверждения ошибочны.[4]) Однако, для F_σ-множеств, удовлетворяющих некоторым условиям, сильная паракомпактность все же оказывается наследственной (см. теоремы 2.1 и 2.2).

Для сильной паракомпактности и наследственной сильной паракомпактности произведения двух пространств мы также получаем некоторые, преимущественно отрицательные результаты (см. теоремы 2.4 и 2.5).

Напомним теперь еще некоторые известные определения. Пространство называется *финально-компактным* или *линделефовским*, если всякое его открытое покрытие содержит счетное покрытие. Как известно, всякое линделефовское регулярное пространство является нормальным.

Пространство называется *совершенно нормальным*, если оно нормально и всякое его замкнутое подмножество является G_δ-множеством.

Весом пространства называется наименьшая мощность его открытой базы, *локальным весом* пространства X *в точке* $x \in X$ называется наименьшая мощность, являющаяся весом некоторой окрестности точки x; *локальным весом* пространства $X \neq \emptyset$ называется супремум его локальных весов во всех точках $x \in X$.

Введем еще следующие определения: Если $\mathfrak{U}$ — система множеств, то множество A, содержащееся в объединении множеств системы $\mathfrak{U}$, называется *связным по отношению к* $\mathfrak{U}$ (короче, $\mathfrak{U}$-*связным*), если для любых $x \in A$, $y \in A$ существуют U_i из $\mathfrak{U}$ такие, что $x \in U_1$, $y \in U_n$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$. Максимальное $\mathfrak{U}$-связное множество называется *компонентой* системы $\mathfrak{U}$. Легко видеть, что различные компоненты системы $\mathfrak{U}$ имеют пустое пересечение; если $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие пространства X, то компоненты системы $\mathfrak{U}$ являются открыто-замкнутыми множествами.

Приведем теперь несколько лемм (доказательства почти очевидной леммы 2.1 и хорошо известных лемм 2.2, 2.3, 2.4 опускаются):

Лемма 2.1. *Если система множеств $\mathfrak{U}$ звездно-конечна, то каждая ее компонента пересекает лишь счетное число множеств системы $\mathfrak{U}$.*

Лемма 2.2. *Всякое локально конечное открытое покрытие линделефовского пространства является счетным.*

---

[3]) Пространство называется σ-компактным, если его можно представить как объединение счетного числа компактных пространств (компактными мы называем пространства, любое открытое покрытие которых содержит конечное покрытие, т. е. пространства, для которых часто употребляется название ,,бикомпактные").

[4]) См. также работу [7], в которой (на стр. 169) показано, что произведение открытого интервала и обобщенного пространства Бэра несчетного веса не является сильно-паракомпактным.

Лемма 2.3. *Пространство, представимое как объединение счетного числа линделефовских пространств, само является линделефовским.*

Лемма 2.4. *Всякое линделефовское пространство является сильно-паракомпактным.*

Лемма 2.5. *Для того, чтобы паракомпактное пространство X было локально линделефовским (имело счетный локальный вес), необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить как объединение непересекающихся открытых множеств, являющихся линделефовскими пространствами (пространствами счетного веса).*

Доказательство. Достаточность условия очевидна; докажем, что оно необходимо. Из паракомпактности X вытекает существование локально конечного открытого покрытия $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}$ такого, что каждое U_λ является линделефовским пространством (соответственно, имеет счетный вес). Из леммы 2.2 сразу вытекает, что $\mathfrak{U}$ звездно-счетно, а из этого следует, что каждая $\mathfrak{U}$-компонента пространства X является объединением счетного числа множеств U_λ и, следовательно, линделефовским пространством (соответственно, пространством счетного веса). Очевидно, $\mathfrak{U}$-компоненты пространства X открыты в X и взаимно не пересекаются.

Лемма 2.6. *Если сильно-паракомпактное пространство связно (соответственно, если всякая его точка имеет связную окрестность), то оно является линделефовским (соответсвенно, локально линделефовским) пространством.*

Доказательство. Пусть дано открытое покрытие $\{G_\lambda\}$ связного сильно-паракомпактного пространства X. Впишем в него звездно-конечное открытое покрытие $\mathfrak{H} = \{H_\mu\}$. Из звездной конечности $\mathfrak{H}$ вытекает, что каждая $\mathfrak{H}$-компонента пространства X является объединением счетного числа H_μ; из связности X вытекает, что X само является единственной $\mathfrak{H}$-компонентой; итак, $\mathfrak{H}$ счетно.

Теорема 2.1. *Пусть пространство X паракомпактно, F_σ-множество $Y \subset X$ является локально линделефовским пространством. Тогда Y сильно-паракомпактно.*

Доказательство. Так как X паракомпактно, то, по известной теореме, F_σ-множество Y также паракомпактно и поэтому, согласно лемме 2.5, представимо как объединение непересекающихся открытых множеств, являющихся линделефовскими и, следовательно, сильно-паракомпактными пространствами.

Следствие. Совершенно нормальное локально линделефовское паракомпактное пространство является наследственно сильно-паракомпактным.

Теорема 2.2. *Пусть пространство X сильно-паракомпактно, и каждая точка F_σ-множества $Y \subset X$ имеет связную окрестность в некотором про-*

странстве Z, где $Y \subset Z \subset X$. Тогда пространство Y также сильно-паракомпактно.

Доказательство. Если $x \in Y$, G связно и является окрестностью x в Z, то $\overline{G}$ (замыкание в X) связно и сильно-паракомпактно и потому, согласно лемме 2.6, является линделефовским пространством. Итак, Y есть локально линделефовское пространство, так что мы можем применить теорему 2.1.

Следствие. Если пространство X совершенно нормально и сильно-паракомпактно, и каждая его точка имеет связную окрестность, то оно наследственно сильно-паракомпактно.

Обозначения. Через H мы будем обозначать т. наз. гильбертов кирпич, т. е. (с точностью до гомеоморфизма) топологическое произведение счетного числа отрезков $\langle 0,1 \rangle$, через B_τ, где τ — мощность, топологическое произведение счетного числа дискретных пространств мощности τ, т. е. так наз. обобщенное бэровское пространство.

Теорема 2.3. *Сильно-паракомпактное метризуемое пространство X веса τ гомеоморфно подмножеству пространства $H \times B_\tau$.*

Замечание. Эта теорема, являющаяся обобщением теоремы 5 из [8], содержится (без доказательства) в работе [6] и приводится здесь только для полноты изложения.

Доказательство. I. Обозначим через T дискретное пространство мощности τ и покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое непрерывное отображение g пространства X в $H \times T$, что для любого $x \in X$ найдется окрестность W точки $y = g(x)$ в $H \times T$, для которой $g^{-1}(W)$ имеет диаметр $< \varepsilon$.

Существует звездно-конечное открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ пространства X такое, что каждое U_α имеет диаметр $< \varepsilon$; найдем еще открытые V_α так, чтобы $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, $\bigcup V_\alpha = X$.

Обозначим через $\{\tilde{U}_\beta | \beta \in B\}$ систему компонент системы $\mathfrak{U}$. Из звездной конечности $\mathfrak{U}$ легко вытекает, что U_β имеют вид $\tilde{U}_\beta = \bigcup\limits_{\alpha \in A_\beta} U_\alpha$, где A_β счетны и взаимно не пересекаются. Легко видеть, что мощность множества B не превышает τ; поэтому можно предполагать, что $B \subset T$. Возьмем теперь для каждого $\beta \in B$ последовательность $\{\alpha_\beta(n)\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы A_β было как раз множеством всех же членов и положим $U^*_{\beta,n} = U_{\alpha_\beta(n)}$, $V^*_{\beta,n} = V_{\alpha_\beta(n)}$, $\mathfrak{U}^* = \{U^*_{\beta,n} | \beta \in B,\ n = 1, 2, \ldots\}$. Очевидно, $\mathfrak{U}^*$ состоит из тех же множеств, что и $\mathfrak{U}$.

Найдем непрерывные функции $f_{\beta,n}$ так, чтобы $0 \leqq f_{\beta,n}(x) \leqq 1$ для всех $x \in X$, $f_{\beta,n}(x) = 0$ для $x \in X - U^*_{\beta,n}$, $f_{\beta,n}(x) = 1$ для $x \in V^*_{\beta,n}$. Теперь для

$x \in X$ обозначим через $\beta(x)$ то $\beta \in B \subset T$, для которого $x \in \tilde{U}_\beta$; положим $h(x) = \{f_{\beta,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $\beta = \beta(x)$ и, наконец, $g(x) = (h(x), \beta(x))$. Легко видеть, что отображение g имеет требуемые свойства.

II. При $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$ найдем отображения g_k со свойствами, указанными в I.Положим $\varphi(x) = \{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, как легко видеть, φ является гомеоморфным отображением X в произведение счетного числа пространств $H \times T$, т. е., с точностью до гомеоморфизма, как раз в $H \times B_\tau$.

Введем теперь в качестве вспомогательных понятий три типа пространств: $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}$. Пространством типа $\mathbf{p}_1$ мы будем называть метризуемое пространство X такое, что существует $a \in X$ и открытые $U_n \subset X$ со следующими свойствами: (1) $a \in U_n \subset U_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, (2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$, (3) если $G \subset X$ открыто-замкнуто, $a \in G$, то все $G - U_n$ непусты. Пространством типа $\mathbf{p}_2$ мы называем метризуемое пространство несчетного локального веса с единственной неизолированной точкой. Легко установить, что Y является пространством типа $\mathbf{p}_2$ тогда и только тогда, если оно имеет вид $Y = (\xi) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n несчетны и взаимно не пересекаются, точки $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ изолированы в Y, а множества $(\xi) \cup \bigcup_{n=p}^{\infty} A_n$ составляют полную систему окрестностей точки ξ.

Назовем, наконец, пространством типа $\mathbf{p}$ топологическое произведение пространства типа $\mathbf{p}_1$ и пространства типа $\mathbf{p}_2$.

Докажем теперь несколько лемм.

Лемма 2.7. *Для того, чтобы метризуемое пространство X имело счетный локальный вес, необходимо и достаточно каждое из следующих условий:* (a) *X не содержит подпространство типа $\mathbf{p}_2$*; (b) *X не содержит замкнутого подпространства типа $\mathbf{p}_2$.*

Доказательство. Покажем только, что условие (b) достаточно; все остальные утверждения леммы тогда будут очевидными. Итак, пусть метризуемое пространство X имеет несчетный локальный вес; покажем, что тогда условие (b) не выполняется. Пусть X имеет в точке $x \in X$ несчетный локальный вес. Обозначим через S_n , $n = 1, 2, \ldots$ множество $y \in X$ таких, что $\frac{1}{n+1} < \varrho(x, y) \leqq \frac{1}{n}$; обозначим через M множество чисел n таких, что вес пространства S_n несчетен. Очевидно, множество M бесконечно; пусть $n_k \in M$, $n_1 < n_2 < \ldots$ При подходящем $\varepsilon_k > 0$ существуют несчетные $A_k \subset S_{n_k}$ такие, что $\varrho(y, z) \geqq \varepsilon_k$ для $y \in A_k$, $z \in A_k$, $y \neq z$. Положим $Y = (x) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Легко усмотреть, что Y замкнуто в X и является пространством типа $\mathbf{p}_2$.

Напомним теперь вкратце определение малой индуктивной размерности $\operatorname{ind} X$ топологического пространства X: $\operatorname{ind} X = -1$ если (и только если) $X = \emptyset$; если уже определено, что значит $\operatorname{ind} X = -1, 0, \ldots, n$, то полагаем $\operatorname{ind} X = n + 1$, если не имеет место $\operatorname{ind} X = k$ при $k = -1, 0, \ldots, n$, однако каждая точка $x \in X$ имеет как угодно малые окрестности U такие, что $\operatorname{ind} (\overline{U} - U) \leqq n$.

Напомним еще, что размерность $\dim X$ определяется как наименьшее n такое, что в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие кратности $\leqq n + 1$.

Лемма 2.8. *Если X — пространство типа $\mathfrak{p}_1$, то $\operatorname{ind} X > 0$. Если X — метризуемое пространство, $\operatorname{ind} X > 0$, то X содержит открытое подпространство типа $\mathfrak{p}_1$.*

Доказательство. Пусть X — пространство типа $\mathfrak{p}_1$; пусть a, U_n имеют свойства, указанные в определении. Очевидно, не существует открыто-замкнутой окрестности точки a, содержащейся в U_1. Пусть X — метризуемое пространство, $\operatorname{ind} X > 0$. Тогда существует $a \in X$ и замкнутое $F \subset X$ такое, что $a \in X - F$ и всякая открыто-замкнутая окресность точки a пересекает F. Положим $Y = X - F$ и $U_n = \left\{ y \in X | \varrho(y, F) > \frac{1}{n} \right\}$. Пусть $G \subset Y$ открыто-замкнуто в Y, $a \in G$. Предположим, что $G \subset U_n$ при подходящем n; тогда G открыто-замкнуто также в X, и мы получаем противоречие.

Лемма 2.9. *Пространство типа $\mathfrak{p}$ не является сильно-паракомпактным.*

Доказательство. Пусть $X = X_1 \times X_2$, где X_1 — пространство типа $\mathfrak{p}_1$, X_2 — пространство типа $\mathfrak{p}_2$. Пусть a, U_n имеют (для пространства X_1) свойства, указанные в определении пространства типа $\mathfrak{p}_1$; пусть $X_2 = (\xi) \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, причем ξ является единственной неизолированной точкой пространства X_2, A_n несчетны и взаимно не пересекаются, а множества $N_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$ составляют полную систему окрестностей точки ξ. Для $i = 2, 3, \ldots$ и для $y \in \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} A_k$ положим $V_{i,y} = U_i \times (y)$; для $i = 1, 2, \ldots$ положим $V_i = U_i \times N_i$.

Система $\mathfrak{V}$ всех множеств $V_{i,y}$, V_i является, очевидно, открытым покрытием пространства X. Предположим, что в нее можно вписать звездно-конечное открытое покрытие $\mathfrak{H}$ и выведем отсюда противоречие; этим будет уже доказана наша лемма.

Возьмем H из $\mathfrak{H}$ такое, что $(a, \xi) \in H$, и затем найдем окрестность G точки a в X_1 и число l так, чтобы $(a, \xi) \in G \times N_l \subset H$. Обозначим через M компоненту системы $\mathfrak{H}$, содержащую (a, ξ); для каждого $y \in X_2$ обозначим через M_y множество тех $x \in X_1$, для которых $(x, y) \in M$. Так как M открыто-замкнуто, то также каждое M_y открыто-замкнуто; если $y \in N_l$, то $(a, y) \in \in H \subset M$, так что $a \in M_y$. Из свойств множеств U_n теперь вытекает, что каждое M_y, где $y \in N_l$, пересекает все $X_1 - U_n$ и, в частности, для каждого $y \in A_l$ существует $b_y \in X_1 - U_l$ такое, что $(b_y, y) \in M$. Если бы для двух различных $y_1 \in A_l$, $y_2 \in A_l$ точки (b_{y_1}, y_1), (b_{y_2}, y_2) лежали в одном и том же множестве H системы $\mathfrak{H}$, то они лежали бы в одном множестве из $\mathfrak{V}$. Это однако, очевидно, невозможно для множества $V_{i,y}$, а множество V_i, $i = 1, 2, \ldots$ вообще, как легко видеть, не может содержать точки вида (b, y), где $b \in \in X_1 - U_l, y \in A_l$. Итак, при различных $y_1 \in A_l$, $y_2 \in A_l$ точки (b_{y_1}, y_1), (b_{y_2}, y_2) лежат в различных множествах системы $\mathfrak{H}$ и, следовательно (так как A_l несчетно), имеется несчетное число множеств из системы $\mathfrak{H}$, пересекающих M. Так как $\mathfrak{H}$ звездно-конечна, то мы получили противоречие (см. лемму 2.1).

Следствие. Если пространство X_1 связно и нет компактоое, пространство X_2 является метризуемым, а $X_1 \times X_2$ сильно-паракомпактно, то X_2 имеет счетный локальный вес. В частности, произведение открытого интервала (значит, σ-компактного пространства) и метризуемого пространства с несчетным локальным весом не может быть сильно-паракомпактным.

Теорема 2.4. *Пусть X_1, X_2 — метризуемые пространства, $X = X_1 \times X_2$. Если X_1, X_2 имеют счетный локальный вес, то X наследственно сильно-паракомпактно. Если одно из пространств X_1, X_2 имеет несчетный локальный вес, а другое имеет положительную малую индуктивную размерность, то X не является наследственно сильно-паракомпактным.*

Доказательство вытекает из лемм 2.4, 2.7, 2.8, 2.9.

Замечание. Остаются открытыми (т. е. неизвестно, при каких условиях $X_1 \times X_2$ является наследственно сильно-паракомпактным) следующие случай:

I. $\dim X_1 = 0$, $\dim X_2 > 0$, X_1 имеет счетный а X_2 — несчетный локальный вес,

II. $\operatorname{ind} X_1 = \operatorname{ind} X_2 = 0$, X_1 и X_2 имеют несчетный локальный вес.[5])

Теорема 2.5. *Пусть X_1, X_2 — метризуемые пространства, $X = X_1 \times X_2$ Пусть X_1 имеет счетный локальный вес, $\dim X_2 \leqq 0$. Для того, чтобы*

[5]) Разумеется, этот случай бы отпал, если бы оказалось, что для метризуемых Y из $\operatorname{ind} Y \leqq 0$ вытекает $\dim Y \leqq 0$.

Можно показать, что для метризуемых Y следующие утверждения являются эквивалентными:

a) если $\operatorname{ind} Y = 0$, то $\dim Y = 0$,

b) если $\operatorname{ind} Y = 0$, то Y сильно-паракомпактно,

c) если $Y = X_1 \times X_2$, $\operatorname{ind} X_1 = \operatorname{ind} X_2 = 0$, то Y является наследственно сильно-паракомпактным.

X было наследственно сильно-паракомпактным, необходимо и достаточно каждое из следующих условий: (a) *X не содержит подпространства типа p*; (b) *или* $\dim X \leqq 0$ *или X имеет счетный локальный вес.*

Доказательство. Возможны следующие случай, которые взаимно исключаются: (1) $\dim X_1 \leqq 0$; (2) $\dim X_1 > 0$, X_2 имеет счетный локальный вес; (3) $\dim X_1 > 0$, X_2 имеет несчетный локальный вес. В случае (1) имеем $\dim X \leqq 0$ согласно известным теоремам (см., напр., [4], стр. 364) и, следовательно, X наследственно сильно-паракомпактно (так как тогда для каждого $Y \subset X$ имеем $\dim Y \leqq 0$, так что в любое открытое покрытие Y можно вписать открытое покрытие, состоящее из непересекающихся множеств); а из этого вытекает, согласно лемме 2.9, что условие (a) выполняется. В случае (2) пространство X, очевидно, имеет счетный локальный вес и потому наследственно сильно-паракомпактно; выполнение условий (a), (b) очевидно. В случае (3) из лемм 2.7, 2.8 вытекает, что X содержит пространство типа $\mathbf{p}$ и потому (см. лемму 2.9) не является наследственно сильно-паракомпактным; условие (b), очевидно, не выполняется.

Замечание. Было бы интересно знать, нельзя ли найти такой достаточно простой тип пространства, чтобы метризуемое пространство X (или, по крайней мере, всякое метризуемое X вида $X = X_1 \times X_2$) было наследственно сильно-паракомпактным тогда, когда оно не содержит пространства этого типа.

LITERATURA

[1] *Bing R. H.*: Metrisation of Topological Spaces. Canadian J. Math. Soc. *54*, 1948, 977–982.

[2] *Dowker C. H.*: On Countably Paracompact Spaces. Canad J. Math. *3*, 1951, 175–186.

[3] *Iséki Kyoshi*: On Hypocompact Spaces. Portugal. Math. *13*, 1954, 149–152.

[4] *Katětov M.*: О размерности несепарабельных пространств I. Чехосл. мат. журнал *2 (77)*, 1952, 333—368.

[5] *Morita K.*: Star-finite Coverings and the Star-finite Property. Math. Japonicae *1*, 1948, 60–68.

[6] *Morita K.*: Dimension Theory for Metric Spaces. Math. Annalen *128*, 1954, 350–362.

[7] *Nagata J.*: Note on Dimension Theory for Metric Spaces. Fund. Math. *45*, 1948, 143–181.

[8] *Смирнов Ю.*: О сильно-паракомпактных пространствах. Известия АН СССР, серия мат. *20*, 1956, 253—273.

Summary

ON COLLECTIONWISE NORMAL AND HYPOCOMPACT SPACES

VĚRA ŠEDIVÁ, Praha

(Received March 7, 1958)

The present note contains several theorems concerning collectionwise normality (cf. [1]) and hypocompactness (cf. [3]).

The following main results are proved:

Theorem 1.1. *A Hausdorf space X is collectionwise normal and countably paracompact if and only if it is normal and has the following property: If $\{B_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ is a locally finite collection of subsets of X, then there exist a locally finite collection $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ of open sets such that $B_\lambda \subset G_\lambda$* (for *every $\lambda \in \Lambda$*).

Theorem 1.2. *If X is countably paracompact and collection-wise normal, Y is compact metrizable, then $X \times Y$ is countably paracompact collectionwise normal.*

Theorem 1.3. *Collectionwise normality is hereditary for F_σ-subsets.*

Theorem 2.1. *In a paracompact space, every F_σ-subset which is locally a Lindelöf space is hypocompact.*

Theorem 2.2. *If X is hypocompact and every point of a F_σ-subset $Y \subset X$ has a connected neighbourhood in some subspace Z, $Y \subset Z \subset X$, then Y is hypocompact.*

Theorem 2.4. *Let X_1, X_2 be metrizable spaces, $X = X_1 \times X_2$. If X_1, X_2 are locally separable, then X is hereditarily hypocompact. If X_1 is not locally separable, and* ind $X_2 > 0$ (*where ind denotes the inductive dimension*) *then X is not hereditarily hypocompact.*

Theorem 2.5. *Let X_1, X_2 be metrizable, $X = X_1 \times X_2$; let X_1 be locally separable,* dim $X_2 \leqq 0$. *Then X is hereditarily hypocompact if and only if either X is locally separable or* dim $X \leqq 0$.