Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Jůza

Коллинеации, связанные с соответствием между двумя кривыми

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 563–572

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100330

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

КОЛЛИНЕАЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С СООТВЕТСТВИЕМ МЕЖДУ ДВУМЯ КРИВЫМИ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza), Прага

(Поступило в редакцию 10/III 1958 г.)

Пусть $\boldsymbol{c}$ — кривая в проективном пространстве $\boldsymbol{S}_n$, $\bar{\boldsymbol{c}}$ — кривая в проективном пространстве $\bar{\boldsymbol{S}}_n$, f — соответствие между кривыми $\boldsymbol{c}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$. Пусть $L(t)$ — коллинеации между пространствами $\boldsymbol{S}_n, \bar{\boldsymbol{S}}_n$, осуществляющие аналитическое касание порядка $n+1$ между кривыми $\boldsymbol{c}$, $\bar{\boldsymbol{c}}$ в отдельных точках $C(t)$ кривой $\boldsymbol{c}$, пусть $\Lambda(t)$ — коллинеации, осуществляющие аналитическое касание порядка $n+1$ между кривыми, двойственными кривым $\boldsymbol{c}$, $\bar{\boldsymbol{c}}$. Коллинеации $L(t)$ и $\Lambda(t)$ совпадают на касательных к кривой $\boldsymbol{c}$ в точках $C(t)$. Возьмем, далее, коллинеации $K(t)$, совпадающие с коллинеациями $L(t)$ и $\Lambda(t)$ на касательных к кривой $\boldsymbol{c}$ в точках $C(t)$; пусть при этом семейство $\{K(t)\}$ обладает огибающей. В статье исследуется, на какой части пространства $\boldsymbol{S}_n$ коллинеации $L(t)$, $\Lambda(t)$, $K(t)$ совпадают.

1. Пусть $\boldsymbol{c}$ — кривая в проективном пространстве $\boldsymbol{S}_n$ размерности n, заданная точечной функцией $C = C(t)$ класса C^∞, определенной на открытом интервале J, пусть $\bar{\boldsymbol{c}}$ — кривая в проективном пространстве $\bar{\boldsymbol{S}}_n$ размерности n, заданная точечной функцией $\bar{C}$ также класса C^∞, определенной на том же интервале J. Предположим, что для любого $t \in J$

$$[C(t), C'(t), \ldots, C^{(n)}(t)] \neq 0\,, \quad [\bar{C}(t), \bar{C}'(t), \ldots, \bar{C}^{(n)}(t)] \neq 0\,. \tag{1}$$

Пусть f — соответствие между кривыми $\boldsymbol{c}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$, относящее точке $C(t)$ точку $\bar{C}(t)$. Точечной коллинеацией[1]) $L(t)$ соответствия f в точке $C(t)$ кривой $\boldsymbol{c}$ мы назовем коллинеацию между пространствами $\boldsymbol{S}_n$, $\bar{\boldsymbol{S}}_n$, для которой кривые $\bar{\boldsymbol{c}}$ и $L(t)\,\boldsymbol{c}$ имеют аналитическое касание порядка $n+1$ в точке $\bar{C}(t)$.

Соприкасающиеся гиперплоскости кривой $\boldsymbol{c}$ образуют кривую $\boldsymbol{\gamma}$ в пространстве Σ_n, двойственном $\boldsymbol{S}_n$, соприкасающиеся гиперплоскости кривой

[1]) Это понятие, равно как и понятие гиперплоскостной коллинеации, было введено (для $n = 2$) Э. Чехом (см. [4], стр. 186—187) под названием первая и вторая локальная коллинеация.

$\bar{c}$ образуют кривую $\bar{\gamma}$ в пространстве $\bar{\Sigma}_n$, двойственном $\bar{S}_n$. Гиперплоскостной коллинеацией $\Lambda(t)$ соответствия f в точке $C(t)$ мы назовем коллинеацию, для которой кривые $\bar{\gamma}$ и $\Lambda(t)\,\gamma$ имеют аналитическое касание порядка $n+1$ в гиперплоскости $\bar{\Gamma}(t)$ кривой $\bar{c}$ в точке $C(t)$.

2. Ис справедливости (1) вытекает существование функций $p_1, \ldots, \ldots, p_{n+1}, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{n+1}$, определенных на J, таких, что

$$C^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} p_{n-i+1} C^{(i)}\,, \tag{3}$$

$$\bar{C}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} \bar{p}_{n-i+1} \bar{C}^{(i)}\,. \tag{4}$$

Если для всех i имеет место равенство $p_i = \bar{p}_i$, то коллинеация $KC^{(i)}(t) = \bar{C}^{(i)}(t)$ не зависит от t и переводит кривую c в кривую $\bar{c}$, причем является одновременно точечной и гиперплоскостной коллинеацией соответствия f. Этот случай мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Точечная коллинеация $L(t)$ соответствия f определяется соотношениями

$$L(t)\, C^{(i)}(t) = \bar{C}^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} r_{i-j} \bar{C}^{(j)}(t)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,, \tag{5}$$

$$L(t)\, C^{(n+1)}(t) = \bar{C}^{(n+1)}(t) + \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} r_{n-j+1} \bar{C}^{(j)}(t)\,, \tag{6}$$

где $r_1, \ldots, r_{n+1}$ — вещественные числа. Подставляя в (6) значения $C^{(n+1)}$, $\bar{C}^{(n+1)}$ из соотношений (3) и (4), получим в силу (5)

$$\sum_{i=0}^{n} p_{n-i+1}(t) \left[\bar{C}^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} r_{i-j} \bar{C}^{(j)}(t)\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \bar{p}_{n-i+1} \bar{C}^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} r_{n-j+1} \bar{C}^{(j)}(t)\,,$$

то есть,

$$\sum_{j=0}^{n} \bar{C}^{(n-j)}(t) \left[p_{j+1}(t) - \bar{p}_{j+1}(t) - \binom{n+1}{n-j} r_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} p_{j-i+1}(t) \binom{n+i-j}{n-j} r_i\right] = 0\,.$$

Ввиду (1) получаем отсюда соотношения

$$p_{j+1}(t) - \bar{p}_{j+1}(t) - \binom{n+1}{n-j} r_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} p_{j-i+1}(t) \binom{n+i-j}{n-j} r_i = 0\,, \tag{7}$$
$$j = 0\,, \ldots, n-1\,,$$

из которых можно однозначно определить $r_1, \ldots, r_n$; следовательно, соответствием f, используя (5) и (6), можем однозначно определить точечную коллинеацию $L(t)$ в точке $C(t)$. Коэффициент r_{n+1} можно определить из соотношения

$$p_{n+1}(t) - \bar{p}_{n+1}(t) - r_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} p_{n-i+1}(t)\, r_i = 0 .$$

3. Прежде чем приступить к гиперплоскостной коллинеации, мы проведем несколько вспомогательных рассуждений.

Возьмем в пространстве $\boldsymbol{S}_n$ точечные функции одного вещественного переменного $A_0, \ldots, A_n$ класса C^∞ на интервале J; пусть $\bar{A}_0, \ldots, \bar{A}_n$ — подобные же функции в пространстве $\bar{\boldsymbol{S}}_n$. Пусть, далее,

$$[A_0, \ldots, A_n] = 1 , \quad [\bar{A}_0, \ldots, \bar{A}_n] = 1 ,$$

так что для любого $t \in J$ точки $A_0(t), \ldots, A_n(t)$ образуют базис в $\boldsymbol{S}_n$, а точки $\bar{A}_0(t), \ldots, \bar{A}_n(t)$ — базис в $\bar{\boldsymbol{S}}_n$. Определим теперь в двойственных пространствах Σ_n, $\bar{\Sigma}_n$ базисы $\Gamma_0(t), \ldots, \Gamma_n(t)$; $\bar{\Gamma}_0(t), \ldots, \bar{\Gamma}_n(t)$ так, что бы

$$\Gamma_i = (-1)^i[A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n] , \quad \bar{\Gamma}_i = (-1)^i[\bar{A}_0, \ldots, \bar{A}_{i-1}, \bar{A}_{i+1}, \bar{A}_n].\text{[2]}$$

Отсюда получим

$$A_i\Gamma_j = \delta_{i,j} , \quad \bar{A}_i\bar{\Gamma}_j = \delta_{i,j}\text{[3]} \tag{8}$$

и, следовательно,

$$A_i = (-1)^i[\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{i-1}, \Gamma_{i+1}, \ldots, \Gamma_n] ,$$
$$\bar{A}_i = (-1)^i[\bar{\Gamma}_0, \ldots, \bar{\Gamma}_{i-1}, \bar{\Gamma}_{i+1}, \ldots, \bar{\Gamma}_n] .$$

Далее имеем

$$[\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n] = 1 , \quad [\bar{\Gamma}_0, \ldots, \bar{\Gamma}_n] = 1 .$$

Если положить

$$A_i' = \sum_{j=0}^{n} w_{i,j}A_j , \quad \Gamma_i' = \sum_{j=0}^{n} \omega_{i,j}\Gamma_j , \tag{9}$$

$$\bar{A}_i' = \sum_{j=0}^{n} \bar{w}_{i,j}\bar{A}_j , \quad \bar{\Gamma}_i' = \sum_{j=0}^{n} \bar{\omega}_{i,j}\bar{\Gamma}_j , \tag{10}$$

то, дифференцируя равенство (8), получим

$$A_i'\Gamma_j + A_i\Gamma_j' = 0 ,$$

$$\sum_{k=0}^{n} w_{i,k}A_k\Gamma_j + \sum_{k=0}^{n} \omega_{j,k}\Gamma_kA_i = 0 ,$$

---

[2]) Если $A_0, \ldots, A_{n-1}$ — точки в $\boldsymbol{S}_n$, то мы будем всегда считать, что координаты $\xi_0, \ldots, \xi_n$ гиперплоскости $\Xi = [A_0, \ldots, A_{n-1}]$ нормированы так, что

$$X\Xi = x_0\xi_0 + \ldots + x_n\xi_n = [X, A_0, \ldots, A_{n-1}]$$

для любой точки $X = (x_0, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{S}_n$.

[3]) $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ для } i = j , \\ 0 \text{ для } i \neq j . \end{cases}$

$$\sum_{k=0}^{n} w_{i,k}\delta_{k,j} + \sum_{k=0}^{n} \omega_{j,k}\delta_{k,i} = 0 ,$$

$$w_{i,j} = -\,\omega_{j,i} \tag{11}$$

и аналогично

$$\overline{w}_{i,j} = -\,\overline{\omega}_{j,i} . \tag{12}$$

Пусть $\boldsymbol{c}$ — кривая в $\boldsymbol{S}_n$, заданная точечной функцией C класса C^∞ на интервале J, пусть, далее, $\bar{\boldsymbol{c}}$ — кривая в $\overline{\boldsymbol{S}}_n$, заданная точечной функцией $\overline{C}$ также класса C^∞ на J. Скалярные множители у функций C, $\overline{C}$ можно подобрать так, чтобы было

$$[C, C', \ldots, C^{(n)}] = 1 , \quad [\overline{C}, \overline{C}', \ldots, \overline{C}^{(n)}] = 1 , \tag{13}$$

так что имеют место соотношения (3) и (4), причем $p_1 = \overline{p}_1 = 0$.

Положим $A_0 = C$, $A_1 = C', \ldots, A_n = C^{(n)}$; $\overline{A}_0 = \overline{C}$, $\overline{A}_1 = \overline{C}', \ldots, \overline{A}_n = \overline{C}^{(n)}$, так что

$$\left.\begin{aligned} A'_i &= A_{i+1} , \quad i = 0, \ldots, n-1 , \\ A'_n &= \sum_{i=0}^{n-1} p_{n-i+1} A_i , \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}'_i &= \overline{A}_{i+1} , \quad i = 0, \ldots, n-1 , \\ \overline{A}'_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \overline{p}_{n-i+1} \overline{A}_i . \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Согласно (9), (10) и (11), (12) тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} \Gamma'_0 &= -\,p_{n+1}\Gamma_n , \\ \Gamma'_i &= -\,\Gamma_{i-1} - p_{n-i+1}\Gamma_n , \quad i = 1, \ldots, n-1 , \\ \Gamma'_n &= -\,\Gamma_{n-1} ; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Gamma}'_0 &= -\,\overline{p}_{n+1}\overline{\Gamma}_n , \\ \overline{\Gamma}'_i &= -\,\overline{\Gamma}_{i-1} - \overline{p}_{n-i+1}\overline{\Gamma}_n , \quad i = 1, \ldots, n-1 , \\ \overline{\Gamma}_n &= -\,\overline{\Gamma}_{n-1} . \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Если теперь положить

$$\Gamma = [C, C', \ldots, C^{(n-1)}] , \quad \overline{\Gamma} = [\overline{C}, \overline{C}', \ldots, \overline{C}^{(n-1)}] ,$$

то имеем

$$\begin{aligned} \Gamma &= (-1)^n\, \Gamma_n , \\ \Gamma' &= (-1)^{n-1}\, \Gamma_{n-1} , \\ \Gamma'' &= (-1)^{n-2}\, \Gamma_{n-2} + (-1)^n\, p_2\Gamma_n , \\ \Gamma''' &= (-1)^{n-3}\, \Gamma_{n-3} + (-1)^{n-1}\, p_3\Gamma_n + (-1)^n\, (p_2\Gamma_n)' , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma^{(n)} &= \Gamma_0 + p_n\Gamma_n - (p_{n-1}\Gamma_n)' + \ldots + (-1)^n\, (p_2\Gamma_n)^{(n-2)} , \\ \Gamma^{(n+1)} &= -\,p_{n+1}\Gamma_n + (p_n\Gamma_n)' - \ldots + (-1)^n\, (p_2\Gamma_n)^{(n-1)} , \end{aligned}$$

следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^{(n+1)} &= \pi_{n+1}\Gamma + \pi_n\Gamma' + \ldots + \pi_2\Gamma^{(n-1)} + \pi_1\Gamma^{(n)} = \\ &= (-1)^{n-1}\, p_{n+1}\Gamma + (-1)^{n-2}\,(p_n\Gamma)' + \ldots + (p_4\Gamma)^{(n-3)}) - \\ &- (p_3\Gamma)^{(n-2)} + (p_2\Gamma)^{(n-1)}\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

и, конечно, аналогично

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{(n+1)} &= \overline{\pi}_{n+1}\overline{\Gamma} + \overline{\pi}_n\overline{\Gamma}' + \ldots + \overline{\pi}_2\overline{\Gamma}^{(n-1)} + \overline{\pi}_1\overline{\Gamma}^{(n)} = \\ &= (-1)^{n-1}\, \overline{p}_{n+1}\overline{\Gamma} + (-1)^{n-2}(\overline{p}_n\overline{\Gamma})' + \ldots + (\overline{p}_4\overline{\Gamma})^{(n-3)} - \\ &- (\overline{p}_3\overline{\Gamma})^{(n-2)} + (\overline{p}_2\overline{\Gamma})^{(n-1)}\,.\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Отсюда получим

$$\left.\begin{aligned}\pi_{i+1} &= \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1}\binom{n-k}{n-i} p_{k+1}^{(i-k)}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \\ \overline{\pi}_{i+1} &= \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1}\binom{n-k}{n-i} \overline{p}_{k+1}^{(i-k)}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \\ &\pi_1 = \overline{\pi}_1 = 0\,.\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

4. Возвратимся теперь к соответствию f между кривыми $\boldsymbol{c}$ и $\overline{\boldsymbol{c}}$, которое мы рассматривали в п. 2. Гиперплоскостная коллинеация соответствия f определяется соотношениями, аналогичными соотношениям (5), (6) и (7) для точечной коллинеации:

$$\left.\begin{aligned}\Lambda(t)\Gamma^{(i)}(t) &= \overline{\Gamma}^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i}{j}\varrho_{i-j}\overline{\Gamma}^{(j)}(t)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,, \\ \Lambda(t)\,\Gamma^{(n+1)}(t) &= \overline{\Gamma}^{(n+1)}(t) + \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}\varrho_{n-j+1}\overline{\Gamma}^{(j)}(t)\,,\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

где $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+1}$ — вещественные числа, определяемые равенствами

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{j+1}(t) - \overline{\pi}_{j+1}(t) - \binom{n+1}{n-j}\varrho_{j+1} + \sum_{i=1}^{j}\pi_{j-i+1}(t)\binom{n+i-j}{n-j}\varrho_i = 0\,, \\ &\qquad j = 0, \ldots, n-1\,, \\ &\pi_{n+1}(t) - \overline{\pi}_{n+1}(t) - \varrho_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\pi_{n-i+1}(t)\,\varrho_i = 0\,.\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Так как для функций C и $\overline{C}$ верны соотношения (1), то надлежащим выбором скалярных множителей можно достигнуть того, чтобы имело место даже (13); тогда будет $p_1 = \overline{p}_1 = 0$. Предположим вообще, что

$$p_1(t) = \overline{p}_1(t)\,, \ldots, p_{k-1}(t) = \overline{p}_{k-1}(t)\,, \quad p_k(t) \neq \overline{p}_k(t)\,, \quad 1 < k \leqq n+1\,, \quad (23)$$

для всех t из открытого интервала $J_1 \subset J$, на который мы ограничим дальнейшие рассуждения. Создается впечатление, как будто предположение (23) зависит от выбора параметра t рассматриваемого соответствия между кривыми $\boldsymbol{c}$, $\bar{\boldsymbol{c}}$, но однако такой зависимости не имеется. В этом нетрудно убедиться аналитическим путем, кроме того это следует без вычислений из геометрического смысла соотношений (23), который мы теперь установим. Если имеет место соотношение (23), то согласно (20) для любого $t \in J_1$ также

$$\pi_1(t) = \bar{\pi}_1(t), \ldots, \pi_{k-1}(t) = \bar{\pi}_{k-1}(t) ,$$
$$\pi_k(t) = \bar{\pi}_k(t) + (-1)^k (p_k(t) - \bar{p}_k(t)) \neq \bar{\pi}_k(t) .$$

Далее, согласно (7) и (22), справедливы соотношения

$$r_1 = 0, \ldots, r_{k-1} = 0 , \quad r_k = (p_k(t) - \bar{p}_k(t)) \binom{n+1}{n-k+1}^{-1} , \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 = 0, \ldots, \varrho_{k-1} = 0 , \quad \varrho_k = (\pi_k(t) - \bar{\pi}_k(t)) \binom{n+1}{n-k+1}^{-1} = \\ = (-1)^k (p_k(t) - \bar{p}_k(t)) \binom{n+1}{n-k+1}^{-1} = (-1)^k r_k . \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Пусть прежде всего $1 < k \leqq n$. Тогда, согласно (5), для коллинеации $L(t)$

$$\left.\begin{aligned} L(t)\, C(t) = \bar{C}(t) , \quad L(t)\, C'(t) = \bar{C}'(t), \ldots, L(t)\, C^{(k-1)}(t) = \bar{C}^{(k-1)}(t) , \\ L(t)\, C^{(k)}(t) = \bar{C}^{(k)}(t) + r_k \bar{C}(t) = \bar{C}^{(k)}(t) + (p_k(t) - \bar{p}_k(t)) \binom{n+1}{n-k+1}^{-1} \bar{C}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Аналогично для коллинеации $\Lambda(t)$ из (21) следует

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(t)\, \Gamma^{(i)}(t) = \bar{\Gamma}^{(i)}(t) , \quad i = 0, \ldots, k-1 , \\ \Lambda(t)\, \Gamma^{(i)}(t) = \bar{\Gamma}^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{i-k} \binom{i}{j} \varrho_{i-j} \bar{\Gamma}^{(j)}(t) , \quad i = k, \ldots, n . \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Из определений Γ и Γ_n вытекает с учетом (16)

$$\Gamma_n = (-1)^n \Gamma ,$$
$$\Gamma_{n-i} = (-1)^{n-i} \Gamma^{(i)} + \sum_{j=0}^{i-2} \varepsilon_{i,j} \Gamma^{(j)} , \quad i = 1, \ldots, k-1 ,$$
$$\Gamma_{n-k} = (-1)^{n-k} \Gamma^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-2} \varepsilon_{k,j} \Gamma^{(j)} + (-1)^{n+1} p_k \Gamma ,$$
$$\Gamma_{n-i} = (-1)^{n-i} \Gamma^{(i)} + \sum_{j=i-k}^{i-2} \varepsilon_{i,j} \Gamma^{(j)} + (-1)^{n+i-k+1} p_k \Gamma^{(i-k)} + \sum_{j=0}^{i-k-1} (.)\, \Gamma^{(j)} ,$$
$$i = k+1, \ldots, n ,$$

где $\varepsilon_{i,j}$ — функции одного переменного, определенные на интервале J_1 и зависящие только от $p_2, \ldots, p_{k-1}$ и от их производных, но не от функций $p_k, \ldots, p_{n+1}, \bar{p}_k, \ldots, \bar{p}_{n+1}$ и где $(.)$ означает коэффициенты, нас не интересующие.

Согласно (17) мы аналогично получим

$$\bar{\Gamma}_n \quad = (-1)^n \bar{\Gamma},$$

$$\bar{\Gamma}_{n-i} = (-1)^{n-i} \bar{\Gamma}^{(i)} + \sum_{j=0}^{i-2} \varepsilon_{i,j} \bar{\Gamma}^{(j)}, \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

$$\bar{\Gamma}_{n-k} = (-1)^{n-k} \bar{\Gamma}^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-2} \varepsilon_{k,j} \bar{\Gamma}^{(j)} + (-1)^{n+1} \bar{p}_k \bar{\Gamma},$$

$$\bar{\Gamma}_{n-i} = (-1)^{n-i} \bar{\Gamma}^{(i)} + \sum_{j=i-k}^{i-2} \varepsilon_{i,j} \bar{\Gamma}^{(j)} + (-1)^{n+i-k+1} \bar{p}_k \bar{\Gamma}^{(i-k)} + \sum_{j=0}^{i-k-1} (.)\, \bar{\Gamma}^{(j)},$$
$$i = k+1, \ldots, n.$$

Отсюда получим, согласно (27),

$$\Lambda(t)\, \Gamma_{n-i}(t) = \bar{\Gamma}_{n-i}(t), \quad i = 0, \ldots, k-1,$$

$$\Lambda(t)\, \Gamma_{n-i}(t) = \bar{\Gamma}_{n-i}(t) + \sum_{j=0}^{i-k} (.)\, \bar{\Gamma}_{n-j}(t), \quad i = k, \ldots, n-1,$$

$$\Lambda(t)\, \Gamma_0(t) = \bar{\Gamma}_0(t) + \left((-1)^k \binom{n}{n-k} \varrho_k + \bar{p}_k(t) - p_k(t)\right) \bar{\Gamma}_k(t) + \sum_{j=0}^{n-k-1} (.)\, \bar{\Gamma}_{n-j}(t).$$

Из этих соотношений можно вывести соотношения

$$\Lambda(t)\, A_i(t) = (-1)^i [\Lambda(t)\, \Gamma_0(t), \ldots, \Lambda(t)\, \Gamma_{i-1}(t), \Lambda(t)\, \Gamma_{i+1}(t), \ldots, \Lambda(t) \Gamma_n(t)] =$$
$$= (-1)^i [\bar{\Gamma}_0(t), \ldots, \bar{\Gamma}_{i-1}(t), \bar{\Gamma}_{i+1}(t), \ldots, \bar{\Gamma}_n(t)] = \bar{A}_i(t) \quad \text{для } 0 \leqq i < k;$$

$$\Lambda(t)\, A_k(t) = (-1)^k [\Lambda(t)\, \Gamma_0(t), \ldots, \Lambda(t)\, \Gamma_{k-1}(t), \Lambda(t)\, \Gamma_{k+1}(t), \ldots, \Lambda(t)\, \Gamma_n(t)] =$$
$$= (-1)^k \left\{ [\bar{\Gamma}_0(t), \ldots, \bar{\Gamma}_{k-1}(t), \bar{\Gamma}_{k+1}(t), \ldots, \bar{\Gamma}_n(t)] + \left((-1)^k \binom{n}{n-k} \varrho_k + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \bar{p}_k(t) - p_k(t)\right) [\bar{\Gamma}_k(t), \bar{\Gamma}_1(t), \ldots, \bar{\Gamma}_{k-1}(t), \bar{\Gamma}_{k+1}(t), \ldots, \bar{\Gamma}_n(t)] \right\} =$$
$$= \bar{A}_k(t) + (-1)^k (-1)^{k-1} \left((-1)^k \binom{n}{n-k} \varrho_k + \bar{p}_k(t) - p_k(t)\right) \bar{A}_0(t) =$$
$$= \bar{A}_k(t) + \left\{(p_k(t) - \bar{p}_k(t)) + (-1)^{k-1} \binom{n}{n-k} \varrho_k\right\} \bar{A}_0(t).$$

Следовательно, согласно (25) будет

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda(t)\, C(t) = \bar{C}(t), \ldots, \Lambda(t)\, C^{(k-1)}(t) = \bar{C}^{(k-1)}(t), \\
&\Lambda(t)\, C^{(k)}(t) = \\
&= \bar{C}^{(k)}(t) + \left\{(p_k(t) - \bar{p}_k(t)) - \binom{n}{n-k} \binom{n+1}{n-k+1}^{-1} (p_k(t) - \bar{p}_k(t))\right\} \bar{C}(t) = \\
&= \bar{C}^{(k)}(t) + (p_k(t) - \bar{p}_k(t)) \binom{n+1}{n-k+1}^{-1} \left\{\binom{n+1}{n-k+1} - \binom{n}{n-k}\right\} \bar{C}(t).
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

В силу нашего предположения $n \geqq 2$, $2 \leqq k \leqq n$, будет

$$\binom{n+1}{n-k+1} - \binom{n}{n-k} = \binom{n}{n-k+1} \geqq 2\,,$$

так что, сравнивая (28) с (26), получим

$$\begin{gathered} L(t)\,C^{(i)}(t) = \Lambda(t)\,C^{(i)}(t) = \bar{C}^{(i)}(t)\,, \quad i = 0, \ldots, k-1\,; \\ L(t)\,C^{(k)}(t) \neq \bar{C}^{(k)}(t) \neq \Lambda(t)\,C^{(k)}(t)\,, \quad L(t)\,C^{(k)}(t) \neq \Lambda(t)\,C^{(k)}(t)\,. \end{gathered} \tag{29}$$

Итак, *если справедливо предположение* (23), *где* $1 < k \leqq n$, *то коллинеации* $L(t)$ *и* $\Lambda(t)$ *совпадают на соприкасающемся* $(k-1)$*-пространстве, но не совпадают на соприкасающемся* k*-пространстве кривой* $\boldsymbol{c}$ *в точке* $C(t)$.

Остается исследовать случай, когда $k = n+1$. В этом случае согласно (5) и (24) имеет место равенство

$$L(t)\,C^{(i)}(t) = \bar{C}^{(i)}(t)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

Ввиду (25) и (21) также

$$\Lambda(t)\,\Gamma^{(i)}(t) = \bar{\Gamma}^{(i)}(t)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

Учитывая (16) и (17), отсюда нетрудно получить

$$\Lambda(t)\,\Gamma_i(t) = \bar{\Gamma}_i(t)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,,$$

а, следовательно, и

$$\Lambda(t)\,A_i(t) = \bar{A}_i(t)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,,$$

то есть,

$$\Lambda(t)\,C^{(i)}(t) = L(t)\,C^{(i)}(t) = \bar{C}^{(i)}(t)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,. \tag{30}$$

Итак, *в случае* $k = n+1$ *коллинеации* $L(t)$ *и* $\Lambda(t)$ *совпадают во всем пространстве* $\boldsymbol{S}_n$.

Этим установлен обещанный геометрический смысл соотношений (23). Мы скажем, что рассматриваемое соответствие f между кривыми $\boldsymbol{c}$, $\bar{\boldsymbol{c}}$ есть соответствие вида k, если имеет место (23) $(1 < k \leqq n+1)$. В целях краткости мы оставим в стороне нетрудный вопрос о существовании соответствий f конкретных видов (для $n = 3$ см. [3], § 7).

5. Э. Чех показал ([1], стр. 121—123 и [2], стр. 172—176), что каждому соответствию f между $\boldsymbol{c}$, $\bar{\boldsymbol{c}}$ можно сопоставить соответствие F между $\boldsymbol{S}_n$, $\bar{\boldsymbol{S}}_n$, которое (если его истолковать как многообразие бипроективного пространства $\boldsymbol{S}_n \times \bar{\boldsymbol{S}}_n$) является огибающей коллинеаций $K(t)$. Если дано f, то F будет определенным только тогда, если мы зададимся скалярными множителями точечных функций C, $\bar{C}$, и будет огибающей коллинеаций $K(t)$, где

$$K(t)\,C^{(i)}(t) = \bar{C}^{(i)}(t)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{31}$$

Для любого t $K(t)$ представляет собой касательную коллинеацию соответствия F вдоль соответствующего соприкасающегося $(n - 1)$-пространства кривой $\boldsymbol{c}$, и в каждой точке X этого $(n - 1)$-пространства существует вполне $K(t)$-линеаризующая прямая соответствия F, соединяющая X с точкой $E(t)$, которая зависит только от t (см. [1], стр. 123, (24, 20)). Если имеют место соотношения (3), (4) и (31), то

$$E(t) = \sum_{i=0}^{n} (p_{n-i+1}(t) - \bar{p}_{n-i+1}(t))\, C^{(i)}(t)\,. \tag{32}$$

При данном f соответствие F зависит, как мы уже сказали, от выбора скалярных множителей точечных функций C, $\bar{C}$. Обозначим через F_0, $K_0(t)$ тот выбор, при котором $p_1 = \bar{p}_1$, или тот, при котором точка $E(t)$ лежит в соприкасающейся гиперплоскости кривой $\boldsymbol{c}$. Этот выбор однозначно определяется соответствием f. Нетрудно убедиться, что — если f есть соответствие вида k $(1 \leqq k \leqq n)$ — все три коллинеации $L(t)$, $\Lambda(t)$, $K_0(t)$ совпадают на соприкасающемся $(k - 1)$-пространстве кривой $\boldsymbol{c}$ в точке $C(t)$, однако на соприкасающемся k-пространстве все три отличны друг от друга; точка $E(t)$ тогда лежит на соприкасающемся $(n - k + 1)$-пространстве кривой $\boldsymbol{c}$, но не лежит на соприкасающемся $(n - k)$-пространстве (для $k = n$: она отлична от точки $C(t)$). Если f есть соответствие вида $n + 1$, то все три коллинеации $L(t)$, $\Lambda(t)$, $K_0(t)$ тождественны и точка $E(t)$ совпадает с точкой $C(t)$. Доказательства всех этих утверждений (сформулированных для $n = 3$ уже в [3]) не представляют затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Э. Чех:* Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами II, Чехословацкий математический журнал *2 (77)*, 1952, 109—123.

[2] *Э. Чех:* Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами V, Чехословацкий математический журнал *2 (77)*, 1952, 167—188.

[3] *E. Čech:* Sur la déformation projective des surfaces développable, Известия на Българската академия на науките, София (в печати).

[4] *G. Fubini — E. Čech:* Introduction à la géometrie projective différentielle des surfaces, Paris 1931.

Résumé

QUELQUES HOMOGRAPHIES ASSOCIÉES A UNE CORRESPONDENCE ENTRE DEUX COURBES

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 10 mars 1958)

Soit C une courbe dans l'espace projectif $\boldsymbol{S}_n$, $\bar{C}$ une courbe dans l'espace $\bar{\boldsymbol{S}}_n$, les deux courbes étant rapportées au même paramètre t ce qui détermine une

correspondance f entre elles. Si l'on fixe arbitrairement les facteurs scalaires des points mobiles de C et $\overline{C}$, ces deux courbes sont définies, en négligeant leur position dans $\boldsymbol{S}_n$, $\overline{\boldsymbol{S}}_n$, moyennant les équations différentielles usuelles (3) et (4). Il est d'ailleurs commode de soumettre le choix des facteurs scalaires à la condition $p_1 = \overline{p}_1$. Pour chaque valeur de t on a une homographie $L(t)$ (homographie ponctuelle de la correspondance f) qui réalise un contact analytique d'ordre $n + 1$ entre C et $\overline{C}$. Sous la condition $p_1 = \overline{p}_1$ déjà mentionnée, les équations de $L(t)$ sont (5), les quantités r_i étant définies par (7). Or il existe aussi une autre homographie $\Lambda(t)$ (homographie hyperplanaire) dont la définition est corrélative à celle de $L(t)$. Les relations mutuelles existant entre $L(t)$ et $\Lambda(t)$ dépendent de la valeur de l'entier k $(1 < k \leqq n + 1)$, k étant la valeur maximum telle que $p_i = \overline{p}_i$ pour $i < k$. On prouve alors que toutes les deux homographies transforment de la même façon le $(k - 1)$-espace osculateur de C, mais non le k-espace osculateur.

Les facteurs scalaires de C et $\overline{C}$ étant tout-à-fait arbitraires, les équations $K(t)\, C^{(i)} = \overline{C}^{(i)}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ fixent une autre homographie $K(t)$ de manière que, si l'on fait varier t, la famille des $\infty^1 K(t)$ possède une enveloppe (dans l'espace biprojectif $\boldsymbol{S}_n \times \overline{\boldsymbol{S}}_n$). Si l'on suppose de nouveau $p_1 = \overline{p}_1$, la valeur $K_0(t)$ de $K(t)$ devient complètement déterminée par la correspondance f et, l'entier k ayant la même valeur comme plus haut, $K_0(t)$ transforme le $(k - 1)$-espace osculateur de manière identique à celle de $L(t)$ et $\Lambda(t)$; au contraire, les trois homographies $L(t)$, $\Lambda(t)$, $K_0(t)$ sont toutes différentes l'une de l'autre si on les considère comme transformations du k-espace osculateur.