Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Bílý; Miroslav Fiedler; František Nožička

Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transportproblem

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 94–121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100280

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

DIE GRAPHENTHEORIE IN ANWENDUNG AUF DAS TRANSPORTPROBLEM

JOSEF BÍLÝ, MIROSLAV FIEDLER u. FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

(Eingelangt am 8. Jänner 1957)

Im Artikel wird das sog. Transportproblem aus der Linearplanung gelöst. Der Beweis, dass der angegebene Algorithmus nach endlich vielen Schritten zur Lösung führt, wird mit Hilfe der Graphentheorie gegeben.

1. Die Formulierung des Transportproblems ist die folgende:

In den Erzeugungszentren $E_1, E_2, \ldots, E_m$ $(m \geqq 1)$ wird ein Produkt hergestellt, und zwar in E_i während einer festen Zeitfrist $a_i \geqq 0$ Produktseinheiten. In den Verbrauchsstellen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ $(n \geqq 1)$ wird dieses Produkt verbraucht, und zwar in V_j während derselben Zeitfrist $b_j \geqq 0$ Produktseinheiten. Dabei wird die gesamte Erzeugung dem gesamten Verbrauch als gleich vorausgesetzt:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{1,1}$$

Es sind ferner die Preise k_{ij} gegeben, die der Transport einer Produktseinheit von E_i nach V_j kostet. Das Problem liegt jetzt darin, das gesamte Produkt von den Erzeugungszentren nach den Verbrauchsstellen am billigsten zu transportieren. Wenn also von E_i nach V_j $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$

$$x_{ij} \geqq 0 \tag{1,2}$$

Produktseinheiten transportiert werden, so dass

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \tag{1,3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \tag{1,4}$$

gilt, so ist der Ausdruck

$$L(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_{ij} \tag{1,5}$$

der Preis für den gesamten Transport. *Man soll* somit *solche Zahlen* (1,2) *aufsuchen, die* (1,3) *und* (1,4) *erfüllen und für welche* $L(x)$ *aus* (1,5) *minimal ist.*

Dass es überhaupt eine Lösung von (1,2), (1,3), (1,4) gibt, ist aus ökonomischen Gründen klar; mathematisch folgt es folgendermassen: für $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$ ist $x_{ij} = 0$ eine Lösung, für $\sum_{i=1}^{m} a_i > 0$ ist wegen (1,1) $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{k=1}^{m} a_k}$ eine Lösung.

Um zu einem geeigneten Verfahren zu gelangen, werden wir einige Grundbegriffe und Sätze aus der Graphentheorie,[1]) die übrigens unserer Ansicht nach auch für den Ökonomen von Wichtigkeit sein könnte, angeben.

2. Als einen *Graphen* G werden wir eine endliche Menge von Knotenpunkten $U(G)$ und eine endliche Menge von Kanten $H(G)$ ansehen, die durch eine Verknüpfungsrelation — Inzidenz — gebunden sind und die folgenden zwei Eigenschaften besitzen:

(1) zu jeder Kante h aus $H(G)$ gibt es genau zwei (verschiedene) Knotenpunkte U_1, U_2 aus $U(G)$, die mit h inzident sind (oder, wie man sagt, die durch h verbunden sind), geschrieben $h = U_1U_2$;

(2) zu jeden zwei verschiedenen Knotenpunkten aus $U(G)$ gibt es höchstens eine Kante, die sie verbindet (**D 1**).[2])

Sind G_1, G_2 Graphen und ist $U(G_1)$ in $U(G_2)$ sowie $H(G_1)$ in $H(G_2)$ enthalten, so heisst G_1 ein *Teilgraph* von G_2 (**D 2**). Man sagt auch, dass der Graph G_2 den Graphen G_1 enthält. Zwei Graphen sind gleich, wenn jeder von ihnen ein Teilgraph des anderen ist (**D 3**).

Ein Graph G, dessen sämtliche Kanten in eine Folge

$$h_{12} = U_1U_2\,, \quad h_{23} = U_2U_3, \ldots, h_{n-1,n} = U_{n-1}U_n$$

angeordnet werden können, deren je zwei aufeinanderfolgenden Kanten $h_{k-1,k}$, $h_{k,k+1}$ $(k = 2, \ldots, n-1)$ mit demselben Knotenpunkt U_k inzident sind, wobei sämtliche Knotenpunkte $U_1, U_2, \ldots, U_n$ voneinander verschieden sind, heisst ein *Weg* von U_1 nach U_n (oder von U_n nach U_1; diese sog. Endpunkte sind durch den Weg eindeutig bestimmt) (**D 4**).[3]) Sind $U_1, U_2, \ldots, U_n$ voneinander verschieden mit der Ausnahme $U_1 = U_n$, so heisst G ein *Kreis* (**D 5**); dieser besitzt keinen Endpunkt.

Ein Graph G heisst *zusammenhängend,* falls es zu jeden zwei verschieden Knotenpunkten U_1, U_2 von G mindestens einen Weg gibt, der in G enthalten ist und von U_1 nach U_2 führt (**D 6**). Ein Teilgraph G' von G heisst *Komponente*

[1]) Mit der Graphentheorie kann sich der Leser aus dem Buche *Königs* [11] näher bekanntmachen.

[2]) Wir werden Definitionen mit **D**, Eigenschaften mit **E** bezeichnen.

[3]) Dieser Weg wird auch mit $U_1U_2 \ldots U_n$ bezeichnet.

(bei König [11] zusammenhängender Bestandteil) von G, falls G' zusammenhängend und in keinem grösseren zusammenhängenden Teilgraphen von G enthalten ist (**D 7**). Es lässt sich zeigen (*König* [11], S. 15), dass man jeden Graphen in Komponenten zerlegen kann (**E 1**), und zwar bis auf Anordnung der Komponenten eindeutig.

Sind G_1, G_2 zwei Graphen mit gemeinsamer Knotenpunktmenge, so ist ihre *Summe* $G_1 + G_2$ der Graph mit derselben Knotenpunktmenge und denjenigen Kanten, die wenigstens in einem der Graphen G_1 und G_2 enthalten sind (**D 8**). Ihre *Differenz* $G_1 - G_2$ ist der Graph mit derselben Knotenpunktmenge und den Kanten, die in G_1, doch nicht in G_2 enthalten sind (**D 9**).

Ein Graph heisst *kreislos*, falls er keinen Kreis als Teilgraphen enthält (**D 10**). Ein zusammenhängender und kreisloser Graph heisst ein *Baum* (**D 11**). Der Baum besitzt die charakteristische Eigenschaft, dass jede zwei seine Knotenpunkte durch genau einen Weg verbunden werden können (**E 2**).[4]) Jede Komponente eines kreislosen Graphen ist somit ein Baum (**E 3**). Wenn man zwei Knotenpunkte eines kreislosen Graphen, die in verschiedenen Komponenten liegen, durch eine neue Kante verbindet, so bilden diese zwei Komponenten zusammen mit der Kante wieder einen Baum (**E 4**).

Ein Graph G heisst *paar*, falls jeder Kreis K von G eine gerade Anzahl von Kanten besitzt (**D 12**). Es gilt (*König* [11], S. 151 u. 170), dass G dann und nur dann paar ist, wenn die Knotenpunktmenge $U(G)$ von G in zwei Klassen V und W so geteilt werden kann, dass jede Kante von G zwei Knotenpunkte aus verschiedenen Klassen verbindet (**E 5**).

Hat ein Kreis K eine gerade Anzahl von Kanten (d. h. ist er paar), so kann man auch seine Kanten in zwei Klassen L_1 und L_2 so einteilen, dass jede zwei benachbarte Kanten (d. i. Kanten mit dem gemeinsamen Endpunkt) zu verschiedenen Klassen angehören. Die Graphen F_1 bzw. F_2, deren Knotenpunktmenge mit der Knotenpunktmenge von K identisch ist und die je die Kanten aus L_1 bzw. L_2 besitzen, heissen *lineare Faktoren* von K (**D 13**). Jeder paare Kreis ist also eine kantenfremde Summe von zwei seinen linearen Faktoren. Diese Faktoren sind durch den Kreis eindeutig bestimmt.

Wird jeder Kante eines Graphen G eine (reelle) Zahl als Wert dieser Kante zugeordnet, so entsteht eine *Bewertung* B des Graphen G (**D 14**). B heisst *trivial*, falls jede Kante von G mit Null (oder, wie man sagt, *trivial*) bewertet wird (**D 15**). Derjenige Teilgraph von G, dessen Kantenmenge sämtliche in B nicht trivial bewertete Kanten bilden, heisst der *Kern* $N(B)$ von B (**D 16**).

Bewertungen desselben Graphen G kann man addieren, subtrahieren und mit reellen Zahlen (skalar) multiplizieren, indem man Werte jeder einzelnen Kante addiert usw. Das Ergebnis dieser Operationen ist wieder eine Bewertung von G.

---

[4]) S. *König* [11], S. 48.

Eine Bewertung eines Graphen G werden wir *Γ-Bewertung* nennen, falls für jeden Knotenpunkt U aus G die Summe der Werte der mit U inzidenten Kanten gleich Null ist (**D 17**). Es ist klar, dass die Summe von zwei Γ-Bewertungen desselben Graphen sowie das Produkt einer Γ-Bewertung mit einer reellen Zahl wieder eine Γ-Bewertung ist. Also ist jede lineare Kombination von Γ-Bewertungen desselben Graphen eine Γ-Bewertung (**E 6**).

Ein Kreis K eines durch B bewerteten Graphen G heisst *alternierend bezüglich B*, falls keine seine Kante in G trivial bewertet ist und jede zwei benachbarte Kanten von K in B Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen besitzen (**D 18**). Jeder alternierende Kreis hat somit eine gerade Anzahl von Kanten (**E 7**).

Jetzt werden wir drei Sätze über Γ-Bewertungen eines paaren Graphen beweisen, die wir später brauchen werden.

Satz 2,1. *Es sei B eine Γ-Bewertung eines paaren Graphen G, h eine in B nicht trivial bewertete Kante von G. Dann existiert in G ein bezüglich B alternierender Kreis, der h enthält.*

Den Beweis werden wir durch Induktion nach der Anzahl $n(B)$ der in B nicht trivial bewerteten Kanten von G führen. Für $n(B) = 0$ ist der Satz in trivialer Weise erfüllt. Es sei nun $n(B) \geqq 1$ und setzen wir voraus, dass für sämtliche Γ-Bewertungen B' von G mit $0 \leqq n(B') < n(B)$ der Satz richtig ist. Ist jetzt h die Kante aus dem Satz, so sei $h = h_0 = U_0U_1$ in B positiv (bzw. negativ) bewertet. Da die Summe der Werte der mit U_1 inzidenten Kanten gleich Null ist, gibt es in U_1 mindestens eine in B negativ (bzw. positiv) bewertete Kante $h_1 = U_1U_2$; aus dem gleichen Grunde gibt es in U_2 eine positiv (bzw. negativ) bewertete Kante $h_2 = U_2U_3$ usw. Wegen der endlichen Anzahl von Knotenpunkten in G wird es geschehen, dass man zum ersten Male zu einem solchen Knotenpunkt U_r gelangt, der schon früher in der Folge $U_0, U_1, \ldots$ enthalten war: $U_r = U_j$, $0 \leqq j < r$. Somit bekommen wir laut (D 5) einen Kreis $K = U_jU_{j+1} \ldots U_r$, der eine gerade Anzahl von Kanten (G ist paar) besitzt und deshalb alternierend ist. Für $U_r = U_0$ ist der Satz bewiesen. Ist $U_r \neq U_0$, so sei u der kleinste der absoluten Beträge der Werte von Kanten in K, $B(K)$ diejenige Γ-Bewertung von G, die den in B positiv (bzw. negativ) bewerteten Kanten von K den Wert $+1$ (bzw. -1) zuordnet, während die in K nicht liegenden Kanten trivial bewertet werden. Die Bewertung

$$B' = B - uB(K)$$

ist laut (E 6) wieder eine Γ-Bewertung von G. Da wenigstens eine Kante in K, die in B den Wert vom absoluten Betrag u hatte, in B' trivial bewertet ist, gilt $n(B') < n(B)$. Die Kante h ist in B' nicht trivial bewertet, denn sie ist nicht in K; laut der Induktionsvoraussetzung gibt es in G einen bezüglich B' alternierenden Kreis K' durch die Kante h. Dann ist aber K' auch ein bezüglich B alternierender Kreis durch h, denn der Wert jeder Kante in B ist im Betrag mindestens so gross als derjenige dieser Kante in B', wobei sie beide — falls diese in B' nicht trivial bewertet ist — dasselbe Vorzeichen besitzen. Damit ist der Beweis vollendet.

Es seien jetzt ein paarer Graph G und ein kreisloser Teilgraph T von G fest gegeben. Ein Kreis K von G heisst ein *Minimalkreis bezüglich* T, falls er folgende zwei Eigenschaften besitzt:

(1) einer seiner linearen Faktoren (s. (D 13)) ist in T enthalten,

(2) der Graph $T + K$ enthält einen einzigen Kreis (nämlich K) (**D 19**).

Im folgenden Satz werden diese Minimalkreise charakterisiert.

Satz 2,2. Es sei

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_R \quad (R \geqq 1)$$

die Zerlegung von T *in Komponenten* (s. E 1), $U(G) = V + W$ *die Zerlegung der Knotenpunktmenge* $U(G)$ *von* G *aus* (E 5). *Ist* $V_1, W_1, V_2, W_2, \ldots, V_s, W_s$ $(s \geqq 1)$ *eine Folge von Knotenpunkten aus* G, *für welche*

(1) V_i *in* V, W_i *in* W *liegen,*

(2) V_k *und* W_k *aus derselben Komponente* T_{i_k} *von* T *sind,*

(3) $W_1, W_2, \ldots, W_s$ *in voneinander verschiedenen Komponenten von* T *liegen,*

(4) $h_k = W_k V_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, s - 1)$ *sowie* $h_0 = W_s V_1$ *Kanten von* G *sind,*

dann ist der Kreis

$$V_1 - W_1 V_2 - W_2 V_3 \ldots W_{s-1} V_s - W_s V_1 \,, \tag{2,1}$$

wo $V_1 - W_1$ *usw. Weg in* T *bedeuten, ein Minimalkreis von* G *bezüglich* T. *Jeder Minimalkreis kann auf diese Weise entstehen.*

Beweis. Es sei K der in (2,1) definierte Kreis. Da jede Kante von K, die in (2,1) die Form $W_\alpha V_\beta$ mit W_α aus W, V_β aus V besitzt, in einem linearen Faktor F_1 von K, jede Kante der Form $V_\beta W_\gamma$ in dem anderen linearen Faktor F_2 von K liegt, so sind $h_0, h_1, \ldots, h_{s-1}$ in F_1 enthalten. Doch sind diese die einzigen Kanten von K, die in T nicht liegen [laut (2) und (3) aus dem Satz]. Es sind also sämtliche Kanten von F_2 in T enthalten und (1) aus (D 19) ist erfüllt.

Wir beweisen jetzt, dass der Graph

$$H = T + h_1 + h_2 + \ldots + h_{s-1}$$

kreislos ist. Ist nämlich W_k in der Komponente T_{i_k} von T $(k = 1, \ldots, s)$ enthalten, so ist der Graph

$$B = T_{i_1} + h_1 + T_{i_2} + h_2 + \ldots + h_{s-1} + T_{i_s}$$

ein Baum: Für $s = 1$ ist es laut (E 3) wahr, für $s > 1$ folgt es durch $(s - 1)$-malige Anwendung von (E 4). Die Knotenpunkte aus B hängen mit den Knotenpunkten aus den übrigen Komponenten $T_{i_{s+1}}, \ldots, T_{i_R}$ von T nicht mehr in

H zusammen. Also ist $H = B + T_{i_{s+1}} + \ldots + T_{i_R}$ die Zerlegung von H in Komponenten. Da diese Komponenten lauter kreislos sind, ist H kreislos.

Hieraus folgt, dass

$$T + K = T + h_1 + \ldots + h_{s-1} + h_0 = H + h_0$$

genau einen Kreis enthält: jeder solche Kreis muss durch $h_0 = W_s V_1$ gehen (H ist kreislos), wobei seine übrigen Kanten einen Weg von V_1 nach W_s in H bilden. Doch wegen (E 2) gibt es genau einen solchen Weg, also auch genau einen Kreis in $T + K$. Somit ist (2) aus (D 19) bewiesen und K ist ein Minimalkreis von G bezüglich T.

Ist umgekehrt K ein Minimalkreis von G bezüglich T, so sei $K = F_1 + F_2$ die Zerlegung von K in lineare Faktoren (s. (D 13)) mit F_1 in T enthalten [laut (1) aus (D 20)]. Also liegen die in T nicht enthaltenen Kanten von K in F_2, so dass diese Kanten für eine geeignete zyklische Anordnung der Kanten von K die Form $h_0 = W_s V_1$, $h_1 = W_1 V_2, \ldots, h_{s-1} = W_{s-1} V_s$ mit V_i aus V, W_i aus W annehmen. Somit sind die Eigenschaften (1), (2) und (4) aus dem Satz erfüllt. Um noch (3) zu beweisen, setzen wir voraus, dass mindestens zwei der Knotenpunkte $W_1, \ldots, W_s$ in derselben Komponente von T liegen. Es sei dann W_i der erste Knotenpunkt von $W_1, \ldots, W_s$, für welchen es vorkommt, und es sei noch W_j der letzte Knotenpunkt von $W_1, \ldots, W_s$, der in derselben Komponente von T wie W_i liegt. Nun ist, wie man leicht nachsieht,

$$V_1 - W_1 V_2 - W_2 V_3 \ldots W_{i-1} V_i - W_j V_{j+1} - W_{j+1} V_{j+2} \ldots W_s V_1$$

ein Kreis in $T + K$, der von K verschieden ist. Dieser Widerspruch gegen (2) von (D 19) beweist den Satz.

Aus diesem Satz folgt, dass es eine endliche Anzahl von Minimalkreisen von G bezüglich T gibt (**E 8**). Ist $K = F_1 + F_2$ die Zerlegung eines solchen Kreises in zwei lineare Faktoren, wobei F_1 in T enthalten ist, so nennen wir eine Γ-Bewertung, die jeder Kante aus F_1 bzw. F_2 bzw. $G - K$ den Wert -1 bzw. $+1$ bzw. 0 zuordnet, die *zu K gehörige Minimalkreisbewertung $B(K)$* von G (**D 20**). Ferner nennen wir eine Γ-Bewertung X von G *nichtnegativ bezüglich T*, falls jede Kante von G, die nicht in T liegt (also Kante von $G - T$), nichtnegativ bewertet ist (**D 21**).

Satz 2,3. *Es seien $K_1, K_2, \ldots, K_N$ sämtliche Minimalkreise von G bezüglich T (G paar, T kreislos), $B(K_1), B(K_2), \ldots, B(K_N)$ die zugehörigen Minimalkreisbewertungen. Dann ist jede bezüglich T nichtnegative Γ-Bewertung X als eine nichtnegative lineare Kombination von $B(K_1), B(K_2), \ldots, B(K_N)$ darstellbar.*

Den Beweis werden wir durch Induktion nach der Anzahl $\nu(X)$ der in X nicht trivial bewerteten Kanten von $G - T$ führen. Ist $\nu(X) = 0$, so ist X trivial: Ist nämlich X nicht trivial, so gibt es laut Satz 2,1 mindestens einen alternierenden Kreis bezüglich X in G, dessen sämtliche Kanten also nicht im kreislosen Graphen T enthalten sein können, so dass mindestens eine seine Kante in $G - T$ ist. Es sei also $\nu(X) \geqq 1$ und nehmen wir an, dass der Satz für sämtliche bezüglich T nichtnegative Γ-Bewertungen X' mit $0 \leqq \nu(X') < \nu(X)$ gilt. In $G - T$ existiert dann eine Kante h_0, die von allen Kanten in $G - T$ den kleinsten positiven Wert u in X annimmt. Durch die Kante h_0 gibt es laut Satz 2,1 einen alternierenden Kreis K' von G bezüglich X. Da X nichtnegativ bezüglich T ist, sind die negativen Kanten von K', die einen linearen Faktor F_1 von K' bilden, in T enthalten. K' hat somit die Eigenschaft (1) von (D 19). Es sei wieder $U(G) = V + W$ die Zerlegung der Knotenpunktmenge $U(G)$ von G aus (E 5). Da die in T nicht liegenden Kanten von K' in dem zweiten linearen Faktor F_2 von K' liegen, können sie in geeigneter zyklischer Anordnung von K' mit $h_0 = W_s V_1, h_1 = W_1 V_2, \ldots, h_{s-1} = W_{s-1} V_s$ bezeichnet werden, wo die Knotenpunkte V_i bzw. W_i in V bzw. W enthalten sind. Sind $W_1, W_2, \ldots, W_s$ in voneinander verschiedenen Komponenten von T, so ist K' laut Satz 2,2 ein Minimalkreis K. Ist es nicht der Fall, so sei W_i der erste Knotenpunkt aus $W_1, \ldots, W_s$, der mit einem anderen Knotenpunkt W_k in derselben Komponente von T liegt, und W_j sei der letzte Knotenpunkt aus $W_1, \ldots, W_s$, der mit W_i in derselben Komponente von T liegt. Dann ist der Kreis

$$V_1 - W_1 V_2 - W_2 V_3 \ldots W_{i-1} V_i - W_j V_{j+1} - W_{j+1} V_{j+2} \ldots W_s V_1 ,$$

wo $V_1 - W_1$ usw. Wege in T bedeuten, ein Minimalkreis K von G bezüglich T.

Es sei $B(K)$ die K entsprechende Minimalkreisbewertung von G. Die Bewertung

$$X' = X - uB(K) \tag{2,2}$$

ist offensichtlich eine Γ-Bewertung von G. Sie ist nichtnegativ bezüglich T, denn jede Kante $h_0, \ldots, h_{s-1}$ aus $K - T$ ist in X' nichtnegativ bewertet und jede in K nicht enthaltene Kante von $G - T$ ist in X' identisch mit X, also auch nichtnegativ, bewertet. Da die Kante h_0 in X' trivial bewertet ist, gilt $0 \leqq \nu(X') < \nu(X)$, so dass laut der Induktionsvoraussetzung X' als eine nichtnegative lineare Kombination von Minimalkreisbewertungen darstellbar ist:

$$X' = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B(K_i) , \quad \alpha_i \geqq 0 .$$

Aus der Gleichung (2,2) folgt dann

$$X = uB(K) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B(K_i) , \quad \alpha_i \geqq 0, u > 0 .$$

Also ist auch X eine nichtnegative lineare Kombination von Minimalkreisbewertungen und der Satz ist bewiesen.

3. Es sei jetzt (x_{ij}) eine Lösung von (1,2), (1,3), (1,4). Wir können dieser Lösung eine Bewertung X eines Graphen G zuordnen, dessen Knotenpunkte die Zentren $E_1, E_2, \ldots, E_m, V_1, V_2, \ldots, V_n$ und dessen Kanten die Transportwege $h_{ij} = E_i V_j$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ sind, wobei der Kante h_{ij} diejenige Anzahl x_{ij} der Produktseinheiten als Wert zugeordnet wird, die von E_i nach V_j auf diesem Wege transportiert werden. Da die Knotenpunktmenge $U(G)$ von G in zwei Klassen $W = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$ und $V = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ so geteilt werden kann, dass die Kanten von G nur Knotenpunkte aus verschiedenen Klassen verbinden, ist nach (E 5) der Graph G paar.

Wir werden eine Lösung (x_{ij}) von (1,3) und (1,4) *einfach* nennen, falls der Kern [s. (D 16)] $N(X)$ der zugehörigen Bewertung X kreislos ist (**D 22**).

Im folgenden Satz werden wir zeigen, dass es mindestens eine einfache Lösung von (1,2), (1,3), (1,4) gibt. Gleichzeitig bietet er ein Mittel dar, solche Lösung wirklich aufzufinden.

Satz 3,1. *Ist eine Anordnung A (mit $<$ bezeichnet) der Kanten von G gegeben, dann wird durch die Relationen*

$$x_{ij} = \min[a_i - \sum_{h_{il} < h_{ij}} x_{il}\,,\ b_j - \sum_{h_{kj} < h_{ij}} x_{kj}]\ ^{5)} \tag{3,1}$$

eine Lösung von (1,2), (1,3), (1,4) *eindeutig bestimmt. Diese Lösung ist einfach.*

Beweis. Dass durch (3,1) sämtliche x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, eindeutig bestimmt sind, folgt leicht daraus, dass diese x_{ij} in der Anordnung A der Kanten h_{ij} schrittweise ausgerechnet werden können. Für diese gilt jetzt aus (3,1), dass

$$\sum_{h_{il} \leqq h_{ij}} x_{il} \leqq a_i\,, \tag{3,2}$$

$$\sum_{h_{kj} \leqq h_{ij}} x_{kj} \leqq b_j \tag{3,3}$$

ist, wobei mindestens in einer dieser Ungleichungen das Gleichheitszeichen eintritt. Somit ist wieder laut (1,3) $x_{ij} \geqq 0$, denn beide Zahlen in der Klammer sind nichtnegativ.

Jetzt beweisen wir (1,3), (1,4): aus (3,1) folgt

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq a_i\,, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqq b_j\,.$$

Setzen wir voraus, dass für einen Index i $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i$ gilt. Dann ist für jedes Indexpaar i, j in (3,2) das Zeichen $<$ und somit in (3,3) für jedes j das Gleichheitszeichen gültig:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} < \sum_{i=1}^{m} a_i\,,$$

[5]) $\sum_{h_{il} < h_{ij}} x_{il}$ bedeutet, dass man über solche Indexe l summiert, für welche h_{il} vor h_{ij} in der Anordnung A steht.

was ein Widerspruch mit (1,1) ist. Also gilt (1,3) und analogisch (1,4), so dass (x_{ij}) aus (3,1) eine Lösung von (1,2), (1,3), (1,4) ist. Es bleibt übrig zu beweisen, dass diese Lösung einfach ist. Nehmen wir zu diesem Zwecke an, dass im Kern [s. (D 16)] $N(X)$ der zugehörigen Bewertung X ein Kreis K existiert. Es sei $h_{ij} = E_i V_j$ die erste Kante von K in der Anordnung A. Aus (3,2) und (3,3) sowie aus (1,3), (1,4) folgt, dass

$$\sum_{h_{il} > h_{ij}} x_{il} \geqq 0 \,, \tag{3,4}$$

$$\sum_{h_{kj} > h_{ij}} x_{kj} \geqq 0 \tag{3,5}$$

gilt, wobei mindestens in einer dieser Ungleichungen das Gleichheitszeichen eintritt. Ist es in (3,4) der Fall, so ist $x_{il} = 0$ für sämtliche Indexe l mit $h_{il} > h_{ij}$. Also ist die zweite mit E_i inzidente Kante (von h_{ij} verschieden) von K trivial bewertet, was ein Widerspruch damit ist, dass der Kreis K ein Teilgraph von $N(X)$ ist. Aus ähnlichen Gründen kann in (3,5) das Gleichheitszeichen nicht eintreten, wodurch die Einfachheit der angegebenen Lösung bewiesen ist.

Satz 3,2. *Sind* (y_{ij}), (z_{ij}) *verschiedene einfache Lösungen von* (1,3) *und* (1,4), *denen die Bewertungen* Y, Z *von* G *entsprechen, so ist die Summe der Kerne* $N(Y) + N(Z)$ *ein Graph, der mindestens einen Kreis enthält.*

Beweis. Wir beweisen zuerst: entsprechen zwei (nicht nötig einfachen) Lösungen von (1,3) und (1,4) Bewertungen Y, Z von G, so gilt

$$N(Y) + N(Z - Y) = N(Y) + N(Z) \,. \tag{3,6}$$

Bezeichnen wir den Graphen auf der linken Seite mit G_1, den Graphen auf der rechten Seite mit G_2. Ist h eine Kante aus G_1 und ist sie in $N(Y)$, so ist auch h in G_2. Ist h nicht in $N(Y)$ und somit in $N(Z - Y)$, sind die Werte dieser Kante in Y und Z verschieden. Da dieser Wert in Y Null ist, ist der Wert in Z von Null verschieden und h ist in $N(Z)$ und somit in G_2 enthalten. Also ist G_1 ein Teilgraph von G_2. Ist umgekehrt h eine Kante aus G_2, so ist für h aus $N(Y)$ auch h in G_1. Ist h nicht in $N(Y)$ und somit in $N(Z)$ enthalten, sind die Werte von h in Y und Z verschieden (der eine gleich Null, der andere von Null verschieden). Somit ist h in $N(Z - Y)$ und also in G_1 enthalten. Daraus folgt, dass auch G_2 ein Teilgraph von G_1 ist und nach (D 3) $G_1 = G_2$.

Sind jetzt die Lösungen (y_{ij}) und (z_{ij}) verschieden, so ist $Z - Y$ eine nicht triviale Γ-Bewertung von G und $N(Z - Y)$ enthält laut Satz 2,1 mindestens einen Kreis. Aus (3,6) folgt, dass dasselbe auch von $N(Y) + N(Z)$ gilt. Der Satz ist bewiesen.

Satz 3,3. *Es gibt nur endlich viele einfache Lösungen von* (1,2), (1,3), (1,4).

Beweis. Aus dem vorigen Satz folgt, dass verschiedenen einfachen Lösungen entsprechende Bewertungen verschiedene Kerne besitzen. Da es nur eine endliche Anzahl von Teilgraphen von G gibt, folgt hieraus der Satz.

Wir definieren jetzt, dass zwei einfache Lösungen (y_{ij}) und (z_{ij}) von (1,2), (1,3), (1,4) *benachbart* sind, falls die Summe $N(Y) + N(Z)$ der Kerne der entsprechenden Bewertungen Y und Z genau einen Kreis enthält (**D 23**).

Satz 3,4. *Sind (y_{ij}), (z_{ij}) benachbarte einfache Lösungen von* (1,2), (1,3), (1,4) *mit den entsprechenden Bewertungen Y, Z, so ist der Kern $N(Z-Y)$ der Γ-Bewertung $Z - Y$ von G ein Minimalkreis K bezüglich $N(Y)$ und es gilt für ein $u > 0$ und die zugehörige Minimalkreisbewertung $B(K)$ von G*

$$Z - Y = uB(K)\,. \tag{3,7}$$

Ist umgekehrt K ein Minimalkreis bezüglich $N(Y)$, wo Y die einer einfachen Lösung (y_{ij}) entsprechende Bewertung von G ist, dann gibt es ein einziges $u > 0$ und eine einzige benachbarte Lösung (z_{ij}) mit der entsprechenden Bewertung Z von G so, dass für die entsprechende Minimalkreisbewertung $B(K)$ (3,7) *gilt.*

Beweis. Sind (y_{ij}) und (z_{ij}) benachbart, so ist $Z - Y$ eine nicht triviale Γ-Bewertung und $N(Z - Y)$ enthält laut Satz 2,1 mindestens einen Kreis. Da $N(Z - Y)$ nach (3,6) ein Teilgraph des Graphen $N(Y) + N(Z)$ mit einem einzigen Kreis ist, enthält $N(Z - Y)$ höchstens einen Kreis und somit genau einen Kreis K. Ist h eine Kante aus $N(Z - Y)$, so geht laut Satz 2,1 ein Kreis von $N(Z - Y)$ durch h. Also liegt h im einzigen Kreis K und $N(Z - Y) = K$.

Da $Z - Y$ auch eine Γ-Bewertung von K ist, ist einer der linearen Faktoren von K [s. (D 13)] mit u, der andere mit $- u$ $(u > 0)$ bewertet. Der negative Faktor ist in Y enthalten (Y sowie Z sind nichtnegativ). Der Kreis K hat somit die erste Eigenschaft aus (D 19) und es gilt (3,7). Die zweite Eigenschaft folgt direkt aus (3,6). Also ist K ein Minimalkreis bezüglich $N(Y)$.

Ist jetzt K ein Minimalkreis bezüglich $N(Y)$ (Y die entsprechende Bewertung zur einfachen Lösung (y_{ij})), so sei F der in $N(Y)$ enthaltene lineare Faktor von K. Es sei h eine Kante von F, die von allen Kanten aus F den kleinsten Wert in Y annimmt. Die Bewertung

$$Z = Y + uB(K) \tag{3,8}$$

ist offensichtlich wieder nichtnegativ und $N(Z)$ ist ein Teilgraph von $N(Y) + K$. Da die Kante h in Z trivial bewertet und K laut (2) von (D 19) der einzige Kreis von $N(Y) + K$ ist, ist $N(Z)$ kreislos. Also ist (z_{ij}), der Z entspricht, eine einfache Lösung von (1,2), (1,3), (1,4), die wegen (3,6) mit (y_{ij}) benachbart ist. Aus (3,8) folgt unmittelbar (3,7). Es bleibt übrig, die Eindeutigkeit von Z und u zu beweisen. Es sei also noch $Z_1 - Y = u_1B(K)$ mit $N(Z_1)$ kreislos. Der Wert der Kante h in Z_1 ist $w = u - u_1$, so dass $w \geqq 0$ ist. Für $w > 0$ sind Werte der übrigen Kanten von F auch positiv, so dass $N(Z_1)$ K als Teilgraphen enthält. Aus diesem Widerspruch folgt $w = 0$, $u_1 = u$ und $Z_1 = Z$.

Jetz werden wir den Hauptsatz der Arbeit formulieren.

Satz 3,5. *Es sei (y_{ij}) eine einfache Lösung von* (1,2), (1,3), (1.4), *L die Linearform* (1,5). *Gilt für jede zu (y_{ij}) benachbarte Lösung (z_{ij}) $L(z) \geqq L(y)$, so ist für jede Lösung (x_{ij}) von* (1,2), (1,3), (1,4) *überhaupt $L(x) \geqq L(y)$.*

Beweis. Ist also (y_{ij}) eine einfache Lösung, $(\overset{1}{z}_{ij}), (\overset{2}{z}_{ij}), \ldots, (\overset{N}{z}_{ij})$ sämtliche zu (y_{ij}) benachbarte Lösungen und (x_{ij}) eine beliebige Lösung von (1,2), (1,3), (1,4), so seien $Y, Z_1, \ldots, Z_N$ und X die zugehörigen Bewertungen von G. Die Bewertung $X - Y$ ist eine bezüglich $N(Y)$ nichtnegative Γ-Bewertung von G. Laut dem Satz 2,3 ist $X - Y$ eine nichtnegative lineare Kombination von Minimalkreisbewertungen bezüglich $N(Y)$. Da nach dem vorigen Satz sämtliche Minimalkreisbewertungen bezüglich $N(Y)$ von der Form

$$B(K_j) = \frac{1}{u_j}(Z_j - Y) \text{ mit } u_j > 0 \quad (j = 1, \ldots, N)$$

sind, gilt

$$X - Y = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B(K_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{u_i}(Z_i - Y), \quad \alpha_i \geqq 0,\ u_i > 0 .$$

Hieraus folgt

$$L(x) - L(y) = L(x - y) = L\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{u_i}(\overset{i}{z} - y)\right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{u_i} L(\overset{i}{z} - y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{u_i}[L(\overset{i}{z}) - L(y)] \geqq 0 \quad \text{wegen} \quad L(\overset{i}{z}) \geqq L(y) .$$

Der Satz ist bewiesen.

Anmerkung. Aus diesem Satz folgt: Sind $(\overset{1}{y}_{ij}), (\overset{2}{y}_{ij}), \ldots, (\overset{s}{y}_{ij})$ sämtliche einfache Lösungen von (1,2), (1,3), (1,4) (laut dem Satz 3,3 ist ihre Anzahl endlich), so ist der kleinste der Werte $L(\overset{k}{y})$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ das gesuchte Minimum der Werte $L(x)$ für alle Lösungen (x_{ij}). Es ist praktisch sehr wichtig, dass es zur Minimalität einer einfachen Lösung (y_{ij}) genügt, dass $L(y)$ die Werte $L(z)$ für sämtliche benachbarte Lösungen (z_{ij}) von (y_{ij}) nicht überschreitet.

Wir werden noch zeigen, wie man einfach entscheiden kann, welcher von zwei benachbarten einfachen Lösungen von (1,2), (1,3) und (1,4) der kleinere Wert der Linearform L aus (1,5) entspricht.

Satz 3,6. *Sind (y_{ij}), (z_{ij}) benachbarte einfache Lösungen, so gilt $L(y) < L(z)$ dann und nur dann, wenn*

$$\sum_{h_{ij} \in F_y} k_{ij} < \sum_{h_{rs} \in F_z} k_{rs} \tag{3,9}$$

gilt, wo F_y bzw. F_z derjenige lineare Faktor des zugehörigen Minimalkreises [der laut Satz 3,4 eindeutig (y_{ij}) und (z_{ij}) entspricht] ist, der im Kern $N(Y)$ bzw. $N(Z)$ enthalten ist.

Beweis. Es folgt sogleich aus

$$L(z) - L(y) = L(z - y) = u[\sum_{h_{rs} \in F_z} k_{rs} - \sum_{h_{ij} \in F_y} k_{ij}] \tag{3,10}$$

nach (3,7), denn $u > 0$.

Satz 3,7. *Eine einfache Lösung* (y_{ij}) *von* (1,2), (1,3) *und* (1,4) *besitzt die Minimaleigenschaft bezüglich der Linearform aus* (1,5) *dann und nur dann, wenn für jeden Minimalkreis* K *von* $N(Y)$

$$\sum_{h_{ij}\in F_1} k_{ij} \leqq \sum_{h_{rs}\in F_2} k_{rs} \tag{3,11}$$

gilt, wobei F_1 *bzw.* F_2 *derjenige lineare Faktor von* K *ist, der in* $N(Y)$ *enthalten bzw. nicht enthalten ist.*

Beweis. Folgt aus Satz 3,5 und Satz 3,6.

Satz 3,8. *Es sei* (y_{ij}) *eine einfache Lösung von* (1,2), (1,3) *und* (1,4), *welche die Minimaleigenschaft bezüglich einer Linearform* L *besitzt. Ist ferner* (y'_{ij}) *eine Lösung von*

$$x'_{ij} \geqq 0\,, \quad (i = 1, \ldots, m;\, j = 1, \ldots, n) \tag{1,2'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = a'_i\,, \tag{1,3'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b'_j\,, \tag{1,4'}$$

für welche

$$y'_{ij} > 0 \Longleftrightarrow y_{ij} > 0$$

(*also* $N(Y) = N(Y')$) *gilt, dann besitzt* (y'_{ij}) *auch die Minimaleigenschaft bezüglich* L.

Beweis. Folgt aus dem vorigen Satz, denn jeder Minimalkreis von $N(Y)$ ist auch Minimalkreis von $N(Y')$ und umgekehrt.

4. Die theoretischen Sätze, die in den vorigen Absätzen 1,2,3 angegeben und bewiesen wurden (in erster Reihe die Resultate aus dem Absatze 3) bilden die theoretische Grundlage zur Aufstellung eines bestimmten Algorithmus für die numerische Lösung eines jeden vorgelegten Transportproblems.

Im Sinne der im Absatz 1 eingeführten Symbole stellen wir das folgende Schema auf:

	V_1	V_2		V_j		V_n	
E_1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1j}	$\ldots$	x_{1n}	a_1
E_2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2j}	$\ldots$	x_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
E_i	x_{i1}	x_{i2}	$\ldots$	x_{ij}	$\ldots$	x_{in}	a_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
E_m	x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mj}	$\ldots$	x_{mn}	a_m
	b_1	b_2		b_j		b_n	

(4,1)

Die Summe der Elemente x_{ij} der i-ten Zeile in (4,1) ist gleich a_i, die Summe der Elemente x_{ij} der j-ten Kolonne ist gleich b_j (Gleichungen (1,3), (1,4)).

Dem Schema (4,1) ordnen wir eindeutig ein anderes Schema zu, d. h.

	V_1	V_2		V_j		V_n
E_1	k_{11}	k_{12}	$\dots$	k_{1j}	$\dots$	k_{1n}
E_2	k_{21}	k_{22}	$\dots$	k_{2j}	$\dots$	k_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
E_i	k_{i1}	k_{i2}	$\dots$	k_{ij}	$\dots$	k_{in}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
E_m	k_{m1}	k_{m2}	$\dots$	k_{mj}	$\dots$	k_{mn}

(4,2)

wo k_{ij} den Preis für den Transport einer Produktseinheit aus dem Erzeugungszentrum E_i nach dem Verbrauchsort V_j darstellt.

Die Idee, die zum Aufsuchen der gewünschten Lösung des vorgelegten Transportproblems führt und die man zugleich zu einem ziemlich einfachen Algorithmus ausarbeiten kann, ist nun die folgende:

Wir suchen in bestimmter Weise (die später beschrieben wird) eine bestimmte einfache Lösung $({}^0x_{ij})$ *von* (1,2), (1,3), (1,4) *aus (d. h. eine einfache Lösung im Sinne der im Absatz* 3 *angeführten Definition). Wir bestimmen dann alle zu* $({}^0x_{ij})$ *benachbarten einfachen Lösungen (s. Absatz* 3) $({}^0\underset{r}{x}_{ij})$, $r = 1, \dots, \alpha$.[6])

Wenn $L({}^0x)$ *den Wert der gegebenen Linearform* (1,5) *für die einfache Lösung* $({}^0x_{ij})$ *angibt und wenn die Symbole* $L({}^0\underset{r}{x})$ *denselben Sinn für die mit* $({}^0x_{ij})$ *benachbarten Lösungen* $({}^0\underset{r}{x}_{ij})$ *haben, dann bestehen zwei Möglichkeiten:*

(a) *entweder gilt:* $L({}^0x) \leqq L({}^0\underset{r}{x})$ *für alle mit* $({}^0x_{ij})$ *benachbarten Lösungen* $({}^0\underset{r}{x}_{ij})$. *Dann ergibt sich aus dem Satze* (3,5), *dass* $({}^0x_{ij})$ *die gesuchte Lösung des gegebenen Transportproblems darstellt.*

(b) *oder existiert mindestens eine einfache Lösung* $({}^1x_{ij})$ *von* (1,2), (1,3), (1,4) *mit den folgenden Eigenschaften:*

$$({}^1x_{ij}) \in \{({}^0\underset{1}{x}_{ij}), ({}^0\underset{2}{x}_{ij}), \dots, ({}^0\underset{\alpha}{x}_{ij})\} ,$$

$$L({}^1x) < L({}^0x) ,$$

$$L({}^1x) \leqq L({}^0\underset{r}{x}) \quad \text{für } r = 1, \dots, \alpha .$$

6) α ist eine endliche ganze Zahl; dies folgt sofort aus dem Satze (3,3).

Im Falle (b) *wird folgendermassen fortgesetzt: Wir setzen den angedeuteten Prozess fort. Wir suchen alle zu* $({}^1x_{ij})$ *benachbarten einfachen Lösungen* $(\underset{r}{{}^1x_{ij}})$, $r = 1, \ldots, \beta$, *aus. Falls* $L({}^1x) \leqq L(\underset{r}{{}^1x})$ *für* $r = 1, \ldots, \beta$ *gilt, so ist* $({}^1x_{ij})$ *die gesuchte Lösung des gegebenen Transportproblems. In anderem Falle existiert mindestens eine Lösung* $({}^2x_{ij})$ *von* (1,2), (1,3), (1,4) *mit den folgenden Eigenschaften:*

$$({}^2x_{ij}) \in \{(\underset{1}{{}^1x_{ij}}), (\underset{2}{{}^1x_{ij}}), \ldots, (\underset{\beta}{{}^1x_{ij}})\} ,$$

$$L({}^2x) < L({}^1x) ,$$

$$L({}^2x) \leqq L(\underset{r}{{}^1x}) \quad \text{für } r = 1, \ldots, \beta .$$

Der eben angedeutete Prozess wird in ähnlicher Weise weiter fortgesetzt. Dem Satze (3,3) *zufolge erhalten wir jedenfalls eine endliche Folge*

$$({}^0x_{ij}), ({}^1x_{ij}), \ldots, ({}^sx_{ij})$$

einfacher Lösungen von (1,2), (1,3), (1,4), *wo* $({}^kx_{ij})$, $({}^{k+1}x_{ij})$, $k = 1, \ldots, s - 1$ *benachbarte einfache Lösungen sind (falls* $s > 1$) *und* $L({}^sx) \leqq L(x)$ *für jede Lösung* (x_{ij}) *von* (1,2), (1,3), (1,4). *Dem Satze* (3,5) *nach ist* $({}^sx_{ij})$ *die gesuchte Lösung des vorgelegten Transportproblems.*

Wir werden nun die oben angedeuteten Schritte mathematisch verfolgen und zugleich an einem einfachen Beispiel demonstrieren.

Schritt 1. Wir ordnen die $m.\ n$ Zahlen k_{ij} aus (4,2) in eine Folge derart, dass

$$k_{i_1j_1} \leqq k_{i_2j_2} \leqq \ldots \leqq k_{i_{mn}j_{mn}} \tag{4,3}$$

gilt. Einer solchen Anordnung entspricht — nach dem Satze (3,1), Formel (3,1) — eindeutig eine bestimmte Lösung von (1,2), (1,3), (1,4) und diese Lösung ist einfach im Sinne der im Absatz 3 eingeführten Definition. Diese Lösung bezeichnen wir mit $({}^0x_{ij})$ und wir werden sie als erste Approximation der gesuchten Lösung bezeichnen.[7])

---

[7]) Wir wollen den Grund dieser Wahl der einfachen Lösung nicht näher angeben. Wir begnügen uns mit folgender Vermutung, die aus dem ökonomischen Charakter des Transportproblems hervorgeht: Indem wir diejenigen Transportwege, die mit den niedrigsten Transportpreisen für eine Produktseinheit belastet sind, vollkommen ausnutzen, dann hoffen wir eine annehmbare Lösung des gegebenen Transportproblems zu finden, die nicht „sehr weit“ von der gesuchten Lösung „entfernt“ ist.

Beispiel 1. Es seien vier Erzeugungszentren E_1, E_2, E_3, E_4 und sechs Verbrauchsstellen V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 gegeben. Mittels der Tafel

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	
E_1	$x_{11}\ ^{1}$	$x_{12}\ ^{2}$	$x_{13}\ ^{3}$	$x_{14}\ ^{4}$	$x_{15}\ ^{5}$	$x_{16}\ ^{6}$	12
E_2	$x_{21}\ ^{7}$	$x_{22}\ ^{8}$	$x_{23}\ ^{9}$	$x_{24}\ ^{10}$	$x_{25}\ ^{11}$	$x_{26}\ ^{12}$	37
E_3	$x_{31}\ ^{13}$	$x_{32}\ ^{14}$	$x_{33}\ ^{15}$	$x_{34}\ ^{16}$	$x_{35}\ ^{17}$	$x_{36}\ ^{18}$	3
E_4	$x_{41}\ ^{19}$	$x_{42}\ ^{20}$	$x_{43}\ ^{21}$	$x_{44}\ ^{22}$	$x_{45}\ ^{23}$	$x_{46}\ ^{24}$	48
	26	6	9	11	20	28	

(4,4)

zusammen mit der zugehörigen „Preistafel"

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
E_1	46 ^{1}	202 ^{2}	53 ^{3}	14 ^{4}	89 ^{5}	14 ^{6}
E_2	258 ^{7}	7 ^{8}	69 ^{9}	19 ^{10}	102 ^{11}	9 ^{12}
E_3	311 ^{13}	26 ^{14}	48 ^{15}	224 ^{16}	47 ^{17}	154 ^{18}
E_4	14 ^{19}	37 ^{20}	15 ^{21}	53 ^{22}	31 ^{23}	84 ^{24}

(4,5)

ist — laut (4,1), (4,2) — ein spezielles Transportproblem vollkommen dargestellt. Die Bedingung (1,1) ist hier erfüllt.

Die Zahlen k_{ij} aus der Preistafel (4,5) ordnen wir — laut (4,3) — in eine nichtabnehmende Folge, also

$$7,\ 9,\ 14,\ 14,\ 14,\ 15,\ 19,\ 26,\ 31,\ 37,\ 46,\ 47,\ 48,\ 53,\ 53,\ 69,\ 84,\ 89,\ 102,\ 154,\ 202,\ 224,\ 258,\ 311\ . \tag{4,6}$$

der die Anordnung

$$8,\ 12,\ 19,\ 4,\ 6,\ 21,\ 10,\ 14,\ 23,\ 20,\ 1,\ 17,\ 15,\ 3,\ 22,\ 9,\ 24,\ 5,\ 11,\ 18,\ 2,\ 16,\ 7,\ 13 \tag{4,7}$$

der zugehörigen Felder entspricht.

Bei der gewählten Anordnung (4,7) erhalten wir auf Grund der Vorschrift in (3,1) eine bestimmte einfache Lösung des gegebenen Systems von Ungleichungen und Gleichungen

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i1} = 26,\ \sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 6,\ \sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 9,\ \sum_{i=1}^{4} x_{i4} = 11,\ \sum_{i=1}^{4} x_{i5} = 20,\ \sum_{i=1}^{4} x_{i6} = 28, \tag{4,8}$$

$$\sum_{j=1}^{6} x_{1j} = 12,\ \sum_{j=1}^{6} x_{2j} = 37,\ \sum_{j=1}^{6} x_{3j} = 3,\ \sum_{j=1}^{6} x_{4j} = 48\,.$$

Diese einfache Lösung von (4,8) sieht bei der schematischen Darstellung (4,4) folgendermassen aus:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	
E_1	0 [1]	0 [2]	0 [3]	11 [4]	1 [5]	0 [6]	12
E_2	0 [7]	6 [8]	0 [9]	0 [10]	3 [11]	28 [12]	37
E_3	0 [13]	0 [14]	0 [15]	0 [16]	3 [17]	0 [18]	3
E_4	26 [19]	0 [20]	9 [21]	0 [22]	13 [23]	0 [24]	48
	26	6	9	11	20	28	

(4,9)

Wir erhalten leicht die in (4,9) eingetragene Lösung von (4,8), indem wir die einzelnen Felder etappenweise in Anordnung (4,7) mit der möglichst grössten Zahl besetzen (dabei müssen die Bedingungen (4,8) behalten bleiben). Die in (4,9) ausgedrückte Lösung von (4,8) stellt also die erste Approximation der gesuchten Lösung dar.

Schritt 2. Wir gehen nun von der im Schritt 1 ausgewählten einfachen Lösung $({}^0x_{ij})$ von (1,2), (1,3), (1,4) aus, die wir als die erste Approximation der gesuchten Lösung des Problems bezeichnet haben. Einer solchen Lösung können wir (laut Absatz 3) eine Bewertung ${}^0X$ eines Graphen G zuordnen, dessen Kanten die Transportwege $h_{ij} \equiv E_iV_j$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ sind[8]), indem wir die Zahlen ${}^0x_{ij}$ als Werte der zugehörigen Kanten h_{ij} $(i = 1, \ldots, m;$

[8]) Das Symbol h_{ij} bezeichnet also die Kante, die in dem betrachteten Graphen den Punkt E_i mit dem Punkt V_j verbindet. Falls $i \neq j$, dann sind h_{ij}, h_{ji}. zwei verschiedene Kanten des Graphen (d. h. die Indizes von h_{ij} sind unvertauschbar).

$j = 1, \ldots, n$) ansehen (s. Absatz 3). Da die Lösung $({}^0x_{ij})$ einfach ist, ist — der früheren Definition nach — der Kern $N({}^0X)$ dieser Bewertung kreislos. Mit unserer Lösung $({}^0x_{ij})$ ist also ein bestimmter kreisloser Teilgraph $N({}^0X)$ von G verbunden. Wir zeichnen diesen Graphen $N({}^0X)$ in irgendwelcher Weise auf,[9] um ihn bei dem nächsten Schritte zu benützen. Das Aufzeichen des Graphen $N({}^0X)$ bietet keine Schwierigkeiten. Man wählt einfach in der Ebene beliebig $m + n$ verschiedene Punkte $E_1, \ldots, E_m, V_1, \ldots, V_n$ (die Knotenpunkte des Graphen $N({}^0X)$), die den in Betracht kommenden Erzeugungszentren und Verbrauchstellen entsprechen. Die Kanten des Graphen $N({}^0X)$ sind die Verbindungsstrecken derjenigen Punktpaare E_iV_j, für welche ${}^0x_{ij} > 0$ ist.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Der Lösung $({}^0x_{ij})$ aus (4,9) entspricht zum Beispiel der Graph $N({}^0X)$ in Abb. 1. Man sieht sofort, dass dieser Graph kreislos und zusammenhängend ist, d. h., in unserem konkreten Falle ist der Graph $N({}^0X)$ (Abb. 1) ein Baum [s. (D 11)].

Anmerkung. Der Graph $N({}^0X)$ braucht nicht immer (in allgemeinem Falle) ein Baum zu sein, d. h. es kann vorkommen, dass der Graph $N({}^0X)$ wenigstens zwei Komponenten besitzt. Wir werden uns zuerst mit dem Fall befassen, dass alle bei der Berechnung in Frage kommenden Graphen $N(X)$ zusammenhängend sind. Den übrigen Fall werden wir später noch angehen.

Schritt 3. Von der Lösung $({}^0x_{ij})$ ausgehend, werden wir alle einfachen mit $({}^0x_{ij})$ benachbarten Lösungen aufsuchen. Dem Satze (3,4) nach entspricht jeder solchen Lösung eindeutig ein bestimmter Minimalkreis (s. (D 20)) und umgekehrt. Unter der obangeführten Voraussetzung über den Graphen $N({}^0X)$ wird jeder Minimalkreis bezüglich $N({}^0X)$ durch Hinzufügen einer trivial (d. h. mit Null) bewerteten Kante E_iV_j zu $N({}^0X)$ eindeutig bestimmt. Da G ein paarer Graph ist, besitzt dieser Minimalkreis eine gerade Anzahl von Kanten [s. (D 12)].

Sei also $h_{i_1j_1} = E_{i_1}V_{j_1}$ $(i_1 \in 1, \ldots, m; j_1 \in 1, \ldots, n)$ eine bestimmte mit Null bewertete Kante von G,[9]) $E_{i_1}V_{j_1}E_{i_2}V_{j_2} \ldots E_{i_s}V_{j_s}E_{i_1}$ der zugehörige Minimalkreis, den wir mit

$$K_{i_1j_1} \equiv (h_{i_1j_1} \sim h_{i_2j_1} \sim h_{i_2j_2} \sim h_{i_3j_2} \sim \ldots \sim h_{i_sj_s} \sim h_{i_1j_s}) \tag{4,10}$$

bezeichnen wollen. Diesem Kreise ordnen wir die Zahl

$$\delta(K_{i_1j_1}) \equiv k_{i_1j_1} - k_{i_2j_1} + k_{i_2j_2} - k_{i_3j_2} + \ldots + k_{i_sj_s} - k_{i_1j_s} \tag{4,11}$$

zu. Die zu $K_{i_1j_1}$ zugehörige benachbarte einfache Lösung $({}^0\underset{1}{x}_{ij})$ ist „besser" als $({}^0x_{ij})$ (im Sinne unserer Aufgabe), falls $L({}^0x) > L({}^0\underset{1}{x})$ gilt. Dieser Fall tritt (dem Satze (3,6), Formel (3,9)) nach dann und nur dann ein, wenn die Zahl

[9]) Der Übersicht wegen ist es empfehlenswert den Graphen $N({}^0X)$ derart aufzuzeichnen, damit sich seine Kanten nicht durchschneiden. Das ist immer möglich.

$\delta(K_{i_1j_1})$ aus (4,11) negativ ist. Unter dieser Voraussetzung ist die (negative) Differenz $L(\underset{1}{^0x}) - L(^0x)$ gleich

$$\Delta L(\underset{1}{^0x}, {^0x}) = \underset{1}{^0u}\delta(K_{i_ij_i}) , \tag{4,12}$$

wo

$$\underset{1}{^0u} = \min(^0x_{i_2j_1}, {^0x_{i_3j_2}}, \dots {^0x_{i_sj_{s-1}}}, {^0x_{i_1j_s}}) \tag{4,13}$$

gilt. Dies folgt ummittelbar aus (3,10) und aus dem Beweis des Satzes (3,4).

Dieser Teil des Prozesses wird also auf die folgende Weise durchgeführt:

Für jede mit Null bewertete Kante h_{kl} von G bildet man den zugehörigen Minimalkreis K_{kl} bezüglich $N(^0X)$. Ist die Zahl $\delta(K_{kl})$ [s. (4,11)] negativ, so rechnet man diese Zahl $\delta(K_{kl})$ sowie die Zahl $\Delta_{kl} = u\delta(K_{kl})$ aus, wo u durch (4,13) definiert ist. Es sei $\Delta_{k_1l_1}$ die kleinste (d. h. absolut grösste) Zahl der Menge der in Betracht kommenden allen negativen Zahlen Δ_{kl}.[10]) Dann rechnet man die zugehörige benachbarte Lösung $(^1x_{ij})$ folgendermassen aus (^1u wird laut der Vorschrift (4,13) berechnet):

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a) } {^1x_{ij}} = {^0x_{ij}} + {^1u}, \text{ falls die Kante } h_{ij} \text{ in } K_{i_1j_1} \text{ liegt und sich in der Folge (4,10) auf einer ungeraden Stelle befindet;}\\ \text{(b) } {^1x_{ij}} = {^0x_{ij}} - {^1u}, \text{ falls die Kante } h_{ij} \text{ in } K_{i_1j_1} \text{ liegt und sich in der Folge (4,10) auf einer geraden Stelle befindet;}\\ \text{(c) } {^1x_{ij}} = {^0x_{ij}} \text{ für alle übrigen Indexpaare } (i, j).\end{array}\right\} \tag{4,14}$$

Aus den früheren Erwägungen folgt, dass diese neue einfache Lösung (4,14) die Eigenschaft besitzt, dass der Wert der gegebenen Linearform L von allen zu $(^0x_{ij})$ benachbarten Lösungen für diese Lösung der kleinste ist. Diese Lösung $(^1x_{ij})$ werden wir als die zweite Approximation der gesuchten Lösung des gegebenen Transportproblems ansehen.

Das mechanische Vorgehen im Schritt 3 (falls $N(^0X)$ ein Baum ist) besteht somit aus folgenden Etappen:

(I) Jeder Kante des Graphen $N(^0X)$ schreiben wir den entsprechenden „Preis" k_{ij} zu, den man sofort aus dem Graphen $N(^0X)$ und aus der „Preistafel" (4,2) auslesen kann.

(II) Wir fügen dem Graphen $N(^0X)$ eine Kante $h_{i_1j_1}$ des Graphen G zu, die in G mit Null bewertet ist, und schreiben ihr die Zahl $k_{i_1j_1}$ zu (die man aus der Tafel (4,2) sofort feststellt).

(III) Wir suchen in dem Graphen $N(^0X) + h_{i_1j_1}$ den zugehörigen Minimalkreis (4,10) aus.

(IV) Dem Minimalkreise $K_{i_1j_1}$ ordnen wir die Zahl $\delta(K_{i_1j_1})$ zu [laut (4,11)].

(V) Falls $\delta(K_{i_1j_1})$ nichtnegativ ist, dann brechen wir die Berechnung ab und wir wiederholen die Schritte (II), (III), (IV) für eine andere, im G mit Null bewertete Kante. Ist $\delta(k_{i_1j_1})$ negativ, so berechnen wir die Zahl $\underset{1}{^0u}$ mittells

[10]) Gibt es mehrere solche Zahlen, so wählt man beliebig eine von ihnen aus.

(4,13). Weiter berechnen wir den betreffenden „Zuwachs" der gegebenen Linearform (1,5) aus der Formel (4,12).

(VI) Dieser Prozess wird für jede in G mit Null bewertete Kante wiederholt.

(VII) Aus den Resultaten stellen wir eine geignete übersichtliche Tafel zusammen.

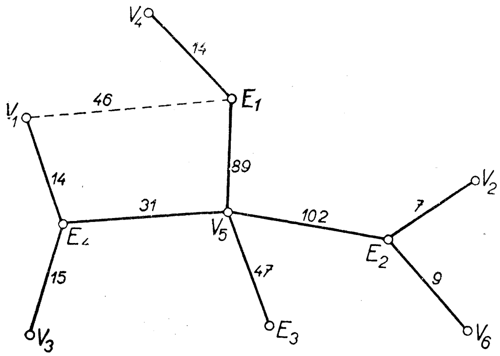

Abb. 1.

(VIII) Wir berechnen laut (4,14) diejenige mit $({}^0x_{ij})$ benachbarte einfache Lösung $({}^1x_{ij})$, die dem kleinsten Wert der Differenz ΔL aus (4,12) entspricht. Wie man praktisch vorgeht, wird an unserem weiteren Beispiel klar.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Jeder Kante des Graphen $N({}^0X)$ in der Abb. 1 schreiben wir den entsprechenden „Preis" k_{ij} zu, der sofort aus der Tafel (4,5) erlesbar ist (Abb. 1).

Wir wählen eine mit Null bewertete Kante in unserer Bewertung (4,9) des Graphen G. Diese Eigenschaft hat z. B. die Kante h_{11}; dies ist aus (4,9) ersichtlich. Diese Kante tragen wir in den Graphen $N({}^0X)$ ein und schreiben ihr den zugehörigen „Preis" $k_{11} = 46$ zu (Abb. 1). So erhalten wir den Graphen $N({}^0X) + h_{11}$, welcher gerade einen Kreis enthält (in Übereinstimmung mit der Theorie). Im Sinne der Bezeichnung (4,10), (4,11) lesen wir in Abb. 1 für den betrachteten Minimalkreis folgende Daten aus:

$$K_{11} \equiv (h_{11} \sim h_{41} \sim h_{45} \sim h_{15}) ,$$
$$\delta(K_{11}) = k_{11} - k_{41} + k_{45} - k_{15} = 46 - 14 + 31 - 89 = -26 < 0 .$$

Daraus und aus (4,9) folgt dann laut (4,13):

$$\underset{1}{{}^0u} = \min({}^0x_{41}, {}^0x_{15}) = \min(26,1) = 1 .$$

Es gilt also für die zugehörige Differenz ΔL [s. (4,12)]:

$$\Delta L({}^0x, \underset{1}{{}^0x}) = \underset{1}{{}^0u} \,.\, \delta(K_{11}) = 1 \,.\, (-26) = -26 .$$

Mit Null sind diese weiteren Kanten in G (bei der Bewertung ${}^0X$, die in (4,9) beschrieben ist) bewertet: h_{12}, h_{13}, h_{16}, h_{21}, h_{23}, h_{24}, h_{31}, h_{32}, h_{33}, h_{34}, h_{36}, h_{42}, h_{44}, h_{46}. Für jede Kante h_{ij} aus der angegebenen Folge berechnen wir in derselben Art, wie angeführt wurde, ähnliche Daten. Die Resultate der Berechnung sind in folgender Tafel (4,15) eingeschrieben.

Im Falle, dass $\Delta L \geqq 0$, ist es nicht nötig (wie oben begründet wurde) den Wert von u und ΔL anzugeben. Mit dieser Tatsache haben wir in der Tafel (4,15) gerechnet.

	h_{ij}	K_{ij}	$\delta(K_{ij})$	${}^0u$	ΔL
1	h_{11}	$h_{11} \sim h_{41} \sim h_{45} \sim h_{15}$	$46 - 14 + 31 - 89 = -26$	1	-26
2	h_{12}	$h_{12} \sim h_{22} \sim h_{25} \sim h_{15}$	$202 - 7 + 102 - 89 > 0$	—	—
3	h_{13}	$h_{13} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{15}$	$53 - 15 + 31 - 89 = -20$	1	-20
4	h_{16}	$h_{16} \sim h_{26} \sim h_{25} \sim h_{15}$	$14 - 9 + 102 - 89 > 0$	—	—
5	h_{21}	$h_{21} \sim h_{41} \sim h_{45} \sim h_{25}$	$258 - 14 + 31 - 102 > 0$	—	—
6	h_{23}	$h_{23} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{25}$	$69 - 15 + 31 - 102 = -27$	3	-51
7	h_{24}	$h_{24} \sim h_{14} \sim h_{15} \sim h_{25}$	$19 - 14 + 89 - 102 = -8$	3	-24
8	h_{31}	$h_{31} \sim h_{41} \sim h_{45} \sim h_{35}$	$311 - 14 + 31 - 47 > 0$	—	—
9	h_{32}	$h_{32} \sim h_{22} \sim h_{25} \sim h_{35}$	$26 - 7 + 102 - 47 > 0$	—	—
10	h_{33}	$h_{33} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{35}$	$48 - 15 + 31 - 47 > 0$	—	—
11	h_{34}	$h_{34} \sim h_{14} \sim h_{15} \sim h_{35}$	$224 - 14 + 89 - 47 > 0$	—	—
12	h_{36}	$h_{36} \sim h_{26} \sim h_{25} \sim h_{35}$	$154 - 9 + 102 - 47 > 0$	—	—
13	h_{42}	$h_{42} \sim h_{22} \sim h_{25} \sim h_{45}$	$37 - 7 + 102 - 31 > 0$	—	—
14	h_{44}	$h_{44} \sim h_{14} \sim h_{15} \sim h_{45}$	$53 - 14 + 89 - 31 > 0$	—	—
15	h_{46}	$h_{46} \sim h_{26} \sim h_{25} \sim h_{45}$	$84 - 9 + 102 - 31 > 0$	—	—

(4,15)

Aus der Tafel (4,15) ergibt sich, dass es vier mit $({}^0x_{ij})$ benachbarte einfache Lösungen von (4,8) gibt, für welche ΔL negativ ist. Das kleinste ΔL gehört derjenigen mit $({}^0x_{ij})$ benachbarten Lösung, die mittels der unter dem Posten 6, Tafel (4,15), angegebenen Daten wohl definiert ist. Die Angaben

$$K_{23} \equiv (h_{23} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{25})\,, \quad \underset{6}{{}^0u} = 3$$

bestimmen dann — laut (4,14) — eindeutig die einfache mit $({}^0x_{ij})$ benachbarte Lösung $({}^1x_{ij})$ von (4,8); es gilt also (wenn wir zur Berechnung das Schema (4,9) und die Gleichungen (4,14) benutzen) für die Bewertung ${}^1X$ von G:

$${}^1x_{23} = 0 + 3 = 3,\ {}^1x_{43} = 9 - 3 = 6,\ {}^1x_{45} = 13 + 3 = 16,\ {}^1x_{25} = 3 - 3 = 0,$$

${}^1x_{ij} = {}^0x_{ij}$ für übrige Paare von Indizen.

Daraus und mit Hilfe von (4,9) gewinnen wir folgendes Schema

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	
E_1	0	0	0	11	1	0	12
E_2	0	6	3	0	0	28	37
E_3	0	0	0	0	3	0	3
E_4	26	0	6	0	16	0	48
	26	6	9	11	20	28	

(4,16)

woraus die Bewertung ${}^1X$ der Lösung $({}^1x_{ij})$ von (4,8) klar wird.

Schritt 4. Wir gehen nun von der einfachen Lösung $({}^1x_{ij})$ von (1,2), (1,3), (1,4) aus und wiederholen den Prozess (Schritt 2 — Schritt 3). Dies geschieht in Übereinstimmung mit unserer Idee, die wir früher (Seite 106) erklärt haben. Das weitere Vorgehen besteht aus endlicher Anzahl von Wiederholungen des beschriebenen Prozesses Schritt 2 — Schritt 3 (wie es in der ausgesprochenen Idee formuliert und begründet wurde).

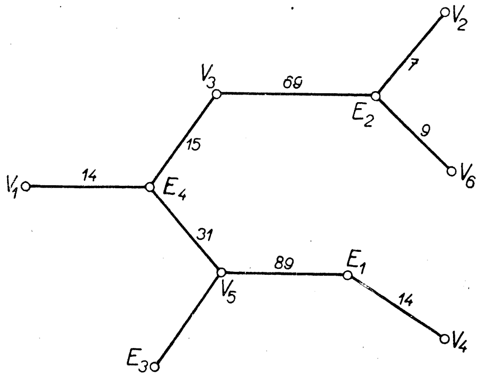

Abb. 2.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Wir gehen von der Lösung $({}^1x_{ij})$ aus, die durch (4,16) schematisch dargestellt ist und zeichnen denjenigen Graphen auf, der den Kern $N({}^1X)$ der zu $({}^1x_{ij})$ angehörigen Bewertung ${}^1X$ bedeutet. Gleichzeitig tragen wir für jede Kante des Graphen $N({}^1X)$ die zugehörige Zahl k_{ij} ein, die wir sofort aus der „Preistafel“ (4,5) feststellen können (Abb. 2). Wir suchen nun diejenige mit $({}^1x_{ij})$ benachbarte einfache Lösung von (4,8) auf, die den kleinsten aller negativen Werte von ΔL ausweist und zwar in der Art, wie es im Schritt 3 beschrieben wurde. Die Teilresultate führen dann zu folgender Tafel:

	h_{ij}	K_{ij}	$\delta(K_{ij})$	${}^1u$	ΔL
1	h_{11}	$h_{11} \sim h_{41} \sim h_{45} \sim h_{15}$	$46-14+31-89=-26$	1	-26
2	h_{12}	$h_{12} \sim h_{22} \sim h_{23} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{15}$	$202-7+69-15+31-89>0$	—	—
3	h_{13}	$h_{13} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{15}$	$53-15+31-89=-20$	1	-20
4	h_{16}	$h_{16} \sim h_{26} \sim h_{23} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{15}$	$14-9+69-15+31-89>0$	—	—
5	h_{21}	$h_{21} \sim h_{23} \sim h_{43} \sim h_{41}$	$258-69+15-14>0$	—	—
6	h_{24}	$h_{24} \sim h_{23} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{15} \sim h_{14}$	$19-69+15-31+89-14>0$	—	—
7	h_{25}	$h_{25} \sim h_{45} \sim h_{43} \sim h_{23}$	$102-31+15-69>0$	—	—
8	h_{31}	$h_{31} \sim h_{41} \sim h_{45} \sim h_{35}$	$311-14+31-47>0$	—	—
9	h_{32}	$h_{32} \sim h_{22} \sim h_{23} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{35}$	$26-7+69-15+31-47>0$	—	—
10	h_{33}	$h_{33} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{35}$	$48-15+31-47>0$	—	—
11	h_{34}	$h_{34} \sim h_{14} \sim h_{15} \sim h_{35}$	$224-14+89-47>0$	—	—
12	h_{36}	$h_{36} \sim h_{26} \sim h_{23} \sim h_{43} \sim h_{45} \sim h_{35}$	$154-9+69-15+31-47>0$	—	—
13	h_{42}	$h_{42} \sim h_{22} \sim h_{23} \sim h_{43}$	$37-7+69-15>0$	—	—
14	h_{44}	$h_{44} \sim h_{14} \sim h_{15} \sim h_{45}$	$53-14+89-31>0$	—	—
15	h_{46}	$h_{46} \sim h_{26} \sim h_{23} \sim h_{43}$	$84-9+69-15>0$	—	—

Aus dieser Tafel geht hervor, dass der kleinste Wert von ΔL derjenigen einfachen mit $({}^1x_{ij})$ benachbarten Lösung $({}^2x_{ij})$ entspricht, welche man aus den Daten, die sich unter dem Posten 1 der vorigen Tafel befinden, mit Hilfe von

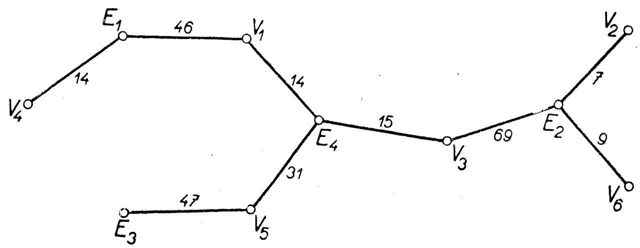

Abb. 3.

(4,14), (4,16) feststellen kann. Bezeichnen wir diese Lösung mit $({}^2x_{ij})$ und die zugehörige Bewertung mit ${}^2X$, dann erhalten wir das folgende Schema:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6		
E_1	1	0	0	11	0	0	12	
E_2	0	6	3	0	0	28	37	
E_3	0	0	0	0	3	0	3	(4,17)
E_4	25	0	6	0	17	0	48	
	26	6	9	11	20	28		

Wir gehen nun von der in (4,17) schematisch dargestellten Lösung $({}^2x_{ij})$ aus und zeichnen den zugehörigen Graphen $N({}^2X)$ auf ($N({}^2X)$ ist der Kern der Bewertung ${}^2X$). Gleichzeitig fügen wir jeder der Kanten des Graphen $N({}^2X)$ die zugehörige Zahl k_{ij} zu (Abb. 3)

Wenn wir nun in üblicher Weise die Tafel von nützlichen Daten berechnen, indem wir von der Lösung $({}^2x_{jj})$ aus (4,17) und von dem Graphen aus Abb. 3 ausgehen, dann stellen wir fest, dass es nur eine einzige mit $({}^2x_{ij})$ benachbarte einfache Lösung gibt, die ein negatives ΔL ausweist. Diese Lösung, die wir mit $({}^3x_{ij})$ bezeichnen, ist mittels der Angaben

h_{ij}	K_{ij}	$\delta(K_{ij})$	${}^2u$	ΔL
h_{24}	$h_{24} \sim h_{14} \sim h_{11} \sim h_{41} \sim h_{43} \sim h_{23}$	$19-14+46-14+15-69=-17$	3	-51

durch die Gleichungen (4,14) (wo wir uns das Symbol ${}^3x_{ij}$ an Stelle von ${}^1x_{ij}$, ${}^2x_{ij}$ an Stelle von ${}^0x_{ij}$ und ${}^2u$ anstatt ${}^1u$ denken) eindeutig bestimmt. Diese einfache Lösung $({}^3x_{ij})$ von (4,8) sieht dann in unserem üblichen Schema folgendermassen aus:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	
E_1	4	0	0	8	0	0	12
E_2	0	6	0	3	0	28	37
E_3	0	0	0	0	3	0	3
E_4	22	0	9	0	17	0	48
	26	6	9	11	20	28	

Indem wir nun das Vorgehen aus dem Schritt 2 und 3 auf die Lösung $({}^3x_{ij})$ aus (4,18) anwenden, so überzeugen wir uns, dass es keine einfache zu $({}^3x_{ij})$ benachbarte Lösung von (4,8) gibt, für welche ΔL negativ wäre, das heisst für jede mit $({}^3x_{ij})$ benachbarte einfache Lösung $(\underset{r}{{}^3x_{ij}})$ von (4,8) gilt: $\Delta L({}^3x, \underset{r}{{}^3x}) \geqq 0$. Daraus ergibt sich (dem Satze (3,5) nach), dass $({}^3x_{ij})$ die gesuchte Lösung unserer Aufgabe ist.

Die Zahlen

$$
{}^3x_{11} = 4,\quad {}^3x_{14} = 8,\quad {}^3x_{22} = 6,\quad {}^3x_{24} = 3,\quad {}^3x_{26} = 28,\quad {}^3x_{35} = 3,\quad {}^3x_{41} = 22,
$$
$$
{}^3x_{43} = 9,\quad {}^3x_{45} = 17,\quad {}^3x_{ij} = 0 \quad \text{für übrige Indizes,}
$$

stellen also die gewünschte Lösung unseres speziellen Transportproblems dar.

Anmerkung. In unserem vorigen Beispiel 1 waren alle in Betracht kommenden Kerne $N({}^0X)$, $N({}^1X)$, $N({}^2X)$, $N({}^3X)$ der zugehörigen Bewertungen ${}^0X$, ${}^1X$, ${}^2X$, ${}^3X$ des Graphen G (die den einfachen Lösungen $({}^0x_{ij})$, $({}^1x_{ij})$, $({}^2x_{ij})$, $({}^3x_{ij})$ angehörten) lauter Bäume im Sinne der Graphentheorie. Falls der Kern einer Bewertung X von G, die einer gewissen einfachen Lösung (x_{ij}) von (1,2), (1,3), (1,4) entspricht, kein Baum ist, d. h. besitzt der Graph $N(X)$ wenigstens zwei Komponenten, dann sieht das Vorgehen im Schritte 3 etwas anders aus. In diesem Falle wäre es falsch zu behaupten, dass durch Hinzufügen einer mit Null in G bewerteten Kante zu dem Graphen $N(X)$ immer ein Minimalkreis bezüglich $N(X)$ ensteht. Wir müssen hier das früher beschriebene mechanische Aufsuchen von Minimalkreisen verlassen und wir müssen alle Minimalkreise (bezüglich $N(X)$) auf irgendwelche Weise bestimmen. Haben wir es getan, dann führen wir die im Schritte 3 beschriebene Berechnung auf dieselbe Art weiter. Das mechanische Vorgehen bei der Bestimmung aller

Minimalkreise lässt sich z. B. folgendermassen durchführen: Es seien T_1, $T_2, T_3, \ldots, T_A$ die Komponenten des Graphen $N(X)$. Durch Hinzufügen einer mit Null in G bewerteten Kante z. B. zu der Komponente T_1 ensteht ein bestimmter Minimalkreis bezüglich T_1 und damit auch bezüglich $N(X)$. Auf diese Weise können wir alle Minimalkreise bezüglich T_1 gewinnen. Dasselbe Vorgehen führen wir bei den übrigen Komponenten $T_2, \ldots, T_A$ durch. Damit haben wir aber nicht alle Minimalkreise bezüglich $N(X)$ gefunden. Der zweite Schritt besteht darin, dass wir die Komponenten $T_1, \ldots, T_A$ in eine Graphenfolge $T_\alpha + T_\beta$ einreihen, wo $\alpha, \beta \in 1, \ldots, A$; $\alpha \neq \beta$ ist. Wir suchen diejenigen Minimalkreise bezüglich $T_\alpha + T_\beta$, die Minimalkreise weder bezüglich T_α noch bezüglich T_β sind. Das tut man durch Hinzufügen von zwei Kanten E_iU_j, E_kV_l zwischen diese zwei Komponenten laut der Vorschrift im Satz 2,2. Dies tun wir bei allen Graphen $T_\alpha + T_\beta$. Weiter nehmen wir in Betracht alle aus drei Komponenten gebildete Graphen $T_\alpha + T_\beta + T_\gamma$, wo $\alpha, \beta, \gamma \in 1, \ldots, A$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. Wir suchen wieder alle Minimalkreise bezüglich $T_\alpha + T_\beta + T_\gamma$ aus, die nicht Minimalkreise bezüglich T_α, T_β, T_γ, $T_\alpha + T_\beta, T_\alpha + T_\gamma, T_\alpha + T_\delta$ sind. Es ist nun klar, wie man weiter vorgeht. Die letzte Etappe besteht aus der Bestimmung aller Minimalkreise bezüglich $N(X)$, die nicht Minimalkreise bezüglich keines der früher betrachteten Graphen $T_{\alpha_1} + T_{\alpha_2} + \ldots T_{\alpha_s}$ sind, wo $\alpha_i \in 1, \ldots A$ $(i = 1, \ldots, s < A)$ voneinander verschiedene Zahlen sind. Auf diese Weise können systematisch alle Minimalkreise bezüglich $N(X)$ aufgefunden werden.

Unsere Idee wird an weiterem Beispiel ersichtlich.

Beispiel 2. Es ist ein spezielles System von Typus (1,2), (1,3), (1,4) gegeben und zwar in folgender schematischer Darstellung:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	1
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	1
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	1
	1	1	1	

Man überzeugt sich leicht, dass durch das Schema

	1	0	0	1
	0	1	0	1
	0	0	1	1
	1	1	1	

(4,18)

eine bestimmte einfache Lösung von Gleichungen und Ungleichungen

$$x_{ij} \geqq 0 \text{ für } i, j = 1, 2, 3; \ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \ (j = 1, 2, 3); \ \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \ (i = 1, 2, 3) \quad (4{,}19)$$

beschrieben ist.

Den Kern $N(X)$ der zur Lösung (x_{ij}) aus (4,18) zugehörigen Bewertung X kann man z. B. folgendermassen aufzeichnen (Abb. 4):

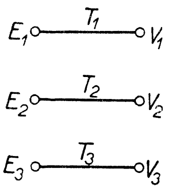

Abb. 4.

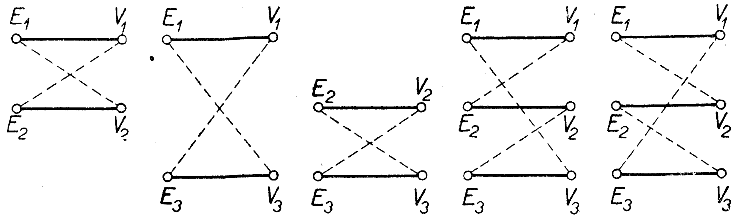

Abb. 5.

Der Graph $N(X)$ zerfällt also in drei Komponenten T_1, T_2, T_3. Es gibt insgesamt fünf verschiedene Minimalkreise bezüglich $N(X)$, die man laut der obangeführten Vorschrift leicht aus dem Graphen $N(X)$ (Abb. 5) auffindet. Die einzelnen Minimalkreise bezüglich $N(X)$ sind aus der Abb. 5 ersichtlich.

Es gibt also fünf verschiedene mit (x_{ij}) aus (4,18) benachbarte Lösungen von (4,19).

Zum Schluss dieser Arbeit wollen wir noch bemerken, dass in der Praxis der Fall, dass der Kern einer zu einer einfachen Lösung von (1,2), (1,3), (1,4) gehörigen Bewertung in mehrere Komponenten zerfällt, nur selten vorkommt. Ist es jedoch der Fall, dann ist es immer möglich durch eine sehr kleine Abänderung (beliebig klein) die gegebenen Zahlen a_i $(i = 1, \ldots, m)$, b_j $(j = 1, \ldots, n)$, so zu ändern, dass das gegebene ökonomische Problem praktisch unverändert bleibt, doch (vom mathematischen Standpunkt aus) der Kern der betreffenden Bewertung zusammenhängender Graph wird. Dies erleichtert uns das Aufsuchen von Minimalkreisen. Wir wollen hier nicht diese Tatsache näher angehen. Die Arbeit von F. Nožička [12] zeigt an einigen Beispielen, wie man in solchen Fällen die Berechnung durchführt. In dieser zitierten Arbeit ist aber die ganze das Transportproblem umfassende Theorie ganz anders aufgebaut worden. Sie beruht auf einigen Erkenntnissen aus der allgemeinen Theorie der n-dimensionalen Polyeder und der ganze Algorithmus der Berechnung wird in geometrischer Art dargelegt.

Es ist klar, das es noch einen algebraischen Weg gibt, der zur erfolgreichen Lösung des Transportproblems führen möchte. Doch das Anwenden von

Graphentheorie vereinfacht viele Beweise der notwendigen theoretischen Sätze und macht den ganzen Algorithmus zu einem ziemlich leichten und anschaulichen Apparat, der in der Praxis seine Verwendung leicht finden wird.

5. Zur Geschichte des Transportproblems wird Folgendes kurz angeführt:

Die Aufgabe, ein in mehreren Produktionsstellen erzeugtes Produkt unter bestimmte Verbrauchsstellen mit gegebenem Verbrauchsumfang (gleich dem Produktionsumfang) so zu verteilen, dass die Transportkosten minimal werden, wurde zuerst von HITCHCOCK [7] mathematisch formuliert und mit mathematischen Mitteln gelöst. Die vom Standpunkte der Geschichte des Problems interessante Arbeit von KANTOROVIČ [8] ist uns unzugänglich geblieben und nur dem Titel nach (zitiert in [8]) bekannt. Der Schiffmangel, der schon während des ersten Weltkrieges zu gewissen Regulierungen des Umlaufes von Schiffen zwang und während des zweiten Weltkrieges in viel grösserem Ausmasse in Erscheinung trat, führte im zweiten Weltkriege zur mathematischen Formulierung und Lösung der Aufgabe, wobei zu bemerken ist, dass der Transport zur See gewisse besondere Bedingungen stellt, die von denen des Eisenbahntransports unterschiedlich sind. Näheres über diese Seite des Problems siehe in [9] und [10]. Die Simplexmethode der Lösung des Transportproblems wurde von DANTZIG in [4] angegeben.

In der Tschechoslowakischen Republik ist man zum Transportproblem im obigen Sinne im Zusammenhang mit dem Bestreben nach einer ökonomischen Gestaltung des Eisenbahntransportes gekommen. Das Problem wurde im Jahre 1952 von Nožička unabhängig von den oben angeführten Arbeiten gelöst; die Methode wurde ausführlich in [12] erläutert.

Ein wachsendes Interesse der Mathematiker und Praktiker in der Tschechoslowakei und im Ausland — siehe z. B. [1] und [14] — an dem Transportproblem und an anderen Problemen der Linearplanung bewegte die Autoren dieses Artikels zu einer verkürzten Umarbeitung der Arbeit [12], wobei die Theorie der Graphen als Grundlage gestellt wurde. Die Möglichkeit, das Transportproblem unter Mithilfe dieser Theorie zu lösen, wurde in [4] und [13] erwähnt und in [6] von FLOOD ausgenützt; siehe darüber auch BELLMAN in [2]. Wir finden diese Methode sehr anschaulich und besonders dann anwendbar, wenn keine modernen Rechenautomaten zur Verfügung sind; über deren Ausnützung siehe Eisemann [5] .Die Existenzfragen siehe in [3].

Das Transportproblem wird unter folgenden Voraussetzungen gelöst:

1. Das Produkt ist in beliebig kleine Mengen teilbar.

2. Es besteht keine Einschränkung über die kleinste zu transportierende Menge; diese Voraussetzung trifft gewiss nicht zu, z. B. für Kohle ist die kleinste Menge ein Eisenbahnwagen.

3. Die zur Beförderung benützten Transportmittel bleiben auf der Rückreise unbenützt.

4. Der Transport wickelt sich mit einer gleichbleibender Intensität ab.

5. Die Transportwege haben eine unbeschränkte Kapazität (über die Anhäufung siehe Prager in [13]).

LITERATUR

[1] *Abrham J.:* A Note on a Linear Programming Problem, Чехосл. мат. журнал *7* (*82*), 1957, 124—130.

[2] *Bellman R.:* Mathematical Aspects of Scheduling Theory, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, B. *4* (1956), 168—205.

[3] *Черников С. Н.:* Системы линейных неравенств, Успехи мат. наук *VIII*, 2 (54) (1953), 7—73.

[4] *Dantzig G. B.:* Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, Activity Analysis of Production and Allocation, 359—373.

[5] *Eiseman K.:* Linear Programming, Quarterly of Applied Mathematics, B. *XIII* (1955), 209—232.

[6] *Flood M. M.:* On the Hitchcock Distribution Problem, Pacific Journal of Mathematics, B. *3* (1953), 369—386.

[7] *Hitchcock F. L.:* The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, Journal of Mathematics and Physics, B. *20* (1941), 224—230.

[8] *Kantorovič L.:* On the Translocation of Masses, Доклады Академии наук СССР *37* (1942), 224—230; zitiert nach [2].

[9] *Koopmans T. C.:* Optimum Utilization of the Transportation System, The Econometric Society Meeting, September 6—18, 1947, Washington, D. C., 136—146.

[10] *Koopmans T. C.* und *Reiter S.:* A Model of Transportation, Activity Analysis of Production and Allocation, New York, 1951, 222—259.

[11] *König D.:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.

[12] *Nožička F.:* O jednom minimálním problému v theorii lineárního plánování (Über ein Minimalproblem in der Theorie der Linearplanung). Lithographiert — Mathematisches Institut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften, Prag, 1956.

[13] *Prager W.:* On the Role of Congestion in Transportation Problems, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, B. *35* (1955), 264—268.

[14] *Sadowski W.:* Zastosowanie teorii programowania liniowego do rejonizacji zaopatrzenia, Przeglad statystyczny, B. *4* (1956), 393—404.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ К РЕШЕНИЮ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

ИОСЕФ БИЛЫ, МИРОСЛАВ ФИДЛЕР и ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА
(Josef Bílý, Miroslav Fiedler a František Nožička), Прага

(Поступило в редакцию 8/I 1957 г.)

Т. наз. транспортная проблема из теории линейного планирования формулируется в экономии следующим образом:

Дано некоторое число производственных центров, вырабатывающих определенный товар с данной (средней) продукцией в определенном отрезке времени. Далее рассматривается определенное количество мест сбыта этого товара (городов, больших предприятий и т. п.) с заранее заданным (напр. планированным) потреблением в том же отрезке времени. При этом предполагается состояние экономического равновесия, т. е. что общая продукция товара равна общему его потреблению в данном отрезке времени. Требуется найти наиболее выгодное распределение товара при данных транспортных тарифах из каждого производственного центра в каждое место сбыта, причем наиболее выгодное в том смысле, чтобы общие расходы по транспорту были минимальными.

При математической формулировке эта проблема сводится к *отысканию минимума определенной линейной формы* (1,5) *на множестве действительных чисел, удовлетворяющих условиям* (1,2), (1,3) и (1,4).

В работе используется *теория графов* для вывода нескольких теорем, составляющих теоретические основы решения данной проблемы.

Этим методом теоретически доказывается алгоритм, приведенный в работе [12], а на примерах иллюстрируется и практическое применение метода.