Czechoslovak Mathematical Journal

I. I. Ogieveckij

Некоторые тауберовы теоремы винеровского типа для функции двух переменных

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 76–85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100278

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

НЕКОТОРЫЕ ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ВИНЕРОВСКОГО ТИПА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ*)

И. И. ОГИЕВЕЦКИЙ, Днепропетровск

(Поступило в редакцию 14/I 1957 г.)

В настоящей работе устанавливаются аналоги общих тауберовых теорем Н. Винера для случая функций двух переменных и даются некоторые их приложения к суммированию двойных рядов и интегралов. Применение указанных теорем дает возможность унифицированного рассмотрения ряда вопросов теории суммируемости двойных рядов и интегралов. Их значение в двумерной теории суммируемости основывается на том, что ряд известных в этой теории методов суммирования обладает ,,расщепляющимися'' ядрами, т. е. ядрами вида $K(x, y) = K_1(x) K_2(x)$.

Начнем с нескольких **определений:** Говорят, что функция $f(x)$ *принадлежит классу Винера* [2] ($f \in W$), если она L-интегрируема на всей бесконечной оси и её преобразование Фурье

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} f(u) \, \mathrm{d}u$$

не обращается в нуль ни при каком действительном t, $-\infty < t < \infty$. Функция $f(x, y)$ *медленно колеблется в области* $-\infty < x < \infty$, $-\infty < < y < \infty$, если

$$\lim_{(x,y)\to\infty} |f(x', y') - f(x, y)| = 0 ,$$

когда

$$x' > x , \quad y' > y , \quad (x' - x) \to 0 , \quad (y' - y) \to 0 .$$

Функция $f(x, y)$ *медленно колеблется в области* $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, если

$$\lim_{(x,y)\to\infty} |f(x', y') - f(x, y)| = 0 ,$$

*) Результаты настоящей работы были частично сообщены на *III всесоюзном математическом съезде* (25 июня—4 июля 1956 г., г. Москва), см. [1].

когда

$$x' > x\,, \quad y' > y\,, \quad \frac{x'}{x} \to 1\,, \quad \frac{y'}{y} \to 1\,.$$

Теорема 1. *Пусть*

$$K(x, y) = K_1(x)\,K_2(y)\,, \quad K_1(x) \in W\,, \quad K_2(y) \varepsilon W\,,$$
$$K^*(x, y) = K_1^*(x)\,K_2^*(y)\,, \quad K_1^*(x) \in L(-\infty, \infty)\,, \quad K_2^*(y) \in L(-\infty, \infty)\,,$$
$$|h(x, y)| \leqq M\,.$$

Тогда из

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-u, y-v)\,h(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = s\int_{-\infty}^{\infty} K(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

следует

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^*(x-u, y-v)\,h(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = s\int_{-\infty}^{\infty} K^*(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Доказательство. Из известной теоремы аппроксимации Винера [3] вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $m = m(\varepsilon)$, $n = n(\varepsilon)$, ξ_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$), η_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), что

$$K_1^*(x) = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu K_1(x + \xi_\mu) + \varphi_1(x)\,,$$

$$K_2^*((y) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu K_2\,(y + \eta_\nu) + \varphi_2(y)\,,$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_2(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Отсюда

$$K_1^*(x-u)\,K_2^*(y-v) = \sum_{\mu=1,\nu=1}^{m,n} a_\mu\, b_\nu\, K_1(x-u+\xi_\mu)\,K_2(y-v+\eta_\nu) +$$
$$+ \varphi_2(y-v)\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu K_1(x-u+\xi_\mu) + \varphi_1(x-u)\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu K_2(y-v+\eta_\nu) +$$
$$+ \varphi_1(x-u)\,\varphi_2(y-v) \tag{1}$$

и, значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1^*(x-u)\,K_2^*(y-v)\,h(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sum_{\mu=1,\nu=1}^{m,n} a_\mu b_\nu \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-u+\xi_\mu)\,.$$
$$.\,K_2(y-v+\eta_\nu)\,h(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \int_{-\infty}^{\infty}\{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu K_1(x-u+\xi_\mu)\}\,\varphi_2(y-v)\,h(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\{\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu K_2(y-v+\eta_\nu)\}\,\varphi_1(x-u)\,h(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-u)\,\varphi_2(y-v)\,h(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,. \tag{2}$$

Для второго слагаемого из (2) имеем

$$|\int_{-\infty}^{\infty}\{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu K_1(x-u+\xi_\mu)\}\,\varphi_2(y-v)\,h(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v| < M(c+\varepsilon)\,\varepsilon\,, \tag{3}$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_1^*(x)|\,\mathrm{d}x \leqq c\,,$$

и аналогичную оценку для третьего слагаемого. Легко видеть, что для четвертого слагаемого будет

$$|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-u)\,\varphi_2(y-v)\,h(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v| < M\varepsilon^2\,. \tag{4}$$

Подставляя в (2) оценки (3) и (4), получим, что

$$\begin{aligned}&|\int_{-\infty}^{\infty} K_1^*(x-u)\,K_2^*(y-v)\,h(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,- \\ &-\sum_{\mu=1,\nu=1}^{m,n} a_\mu b_\nu \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-u+\xi_\mu)\,K_2(y-v+\eta_\nu)\,h(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v| < \\ &< 2M(c+\varepsilon)\,\varepsilon + M\varepsilon^2 < \delta\end{aligned} \tag{5}$$

при достаточно малом ε.

Из условия для функции $K(u, v)$ вытекает

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to\infty} &\sum_{\mu=1,\nu=1}^{m,n} a_\mu b_\nu \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-u+\xi_\mu)\,K_2(y-v+\eta_\nu)\,h(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= s\sum_{\mu=1,\nu=1}^{m,n} a_\mu b_\nu \int_{-\infty}^{\infty} K_1(u)\,K_2(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= s\sum_{\mu=1,\nu=1}^{m,n} a_\mu b_\nu \int_{-\infty}^{\infty} K_1(u+\xi_\mu)\,K_2(v+\eta_\nu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.\end{aligned} \tag{5a}$$

Полагая в (1) $x = 2u$, $y = 2v$, получим

$$\begin{aligned}K_1^*(u)\,K_2^*(v) &= \sum_{\mu=1,\nu=1}^{m,n} a_\mu b_\nu\, K_1(u+\xi_\mu)\,K_2(v+\eta_\nu) + \\ &+\varphi_2(v)\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu K_1(u+\xi_\mu) + \varphi_1(u)\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\, K_2(v+\eta_\nu) + \\ &+\varphi_1(u)\,\varphi_2(v)\,.\end{aligned} \tag{5b}$$

Умножая (5b) на s, интегрируя по переменным u и v в пределах $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ и используя оценки, аналогичные (3) и (4), получим

$$\begin{aligned}&|s\sum_{\mu=1,\nu=1}^{m,n} a_\mu b_\nu \int_{-\infty}^{\infty} K_1(u+\xi_\mu)\,K_2(v+\eta_\nu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,- \\ &- s\int_{-\infty}^{\infty} K_1^*(u)\,K_2^*(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v| < 2s(c+\varepsilon)\,\varepsilon + s\varepsilon^2 < \delta\end{aligned} \tag{6}$$

при достаточно малом ε.

Сопоставляя (5), (5a) и (6), приходим к утверждению теоремы, т. к. δ может быть взято произвольно малым.

Положим (см. [2])

$$e^x = x', \quad e^y = y', \quad e^u = u', \quad e^v = v',$$
$$L_1(e^x) = e^{-x} K_1(-x), \quad L_2(e^y) = e^{-y} K_2(-y)$$

и от переменных x, y, u и v перейдем к переменным x', y', u', v'. При этой замене функции, заданные при $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, перейдут в функции, заданные в $0 < x' < \infty$, $0 < y' < \infty$, и класс Винера W функций $f(x)$ превратится в класс W_0 функций $F(x) \in L(0, \infty)$, для которых $\int\limits_0^\infty F(u)\, u^{-ix}\, \mathrm{d}u \neq 0$ при любом действительном x.

Теореме I будет соответствовать следующая

Теорема 2. *Пусть*

$$L(x, y) = L_1(x)\, L_2(y), \quad L_1(x) \in W_0, \quad L_2(y) \in W_0;$$
$$L^*(x, y) = L_1^*(x)\, L_2^*(y), \quad L_1^*(x) \in L(0, \infty), \quad L_2^*(y) \in L(0, \infty).$$

и $h(x, y)$ ограничено; тогда из

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int\limits_0^\infty L\left(\frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right) h(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = s \int\limits_0^\infty L(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

следует

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int\limits_0^\infty L^*\left(\frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right) h(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = s \int\limits_0^\infty L^*(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,.$$

Определим теперь $L^*(x) = L_1^*(x) = L_2^*(x)$ следующим образом

$$L_1^*(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}. \qquad (6a)$$

Легко видеть, что $L^*(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть $h(x, y)$ медленно колеблется (см. выше) в области $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$. Тогда, как нетрудно установить, следуя рассуждениям К. Кноппа из [4],

$$\lim_{(x,y)\to\infty} h(x, y) = s\,,$$

если

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int\limits_0^x \int\limits_0^y h(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = s\,.$$

Используя теорему 2 с $L^*(x) = L_2^*(x) = L_1^*(x)$ в (6a) и только что указанный факт, приходим к следующей

Теореме 3. *Если*

$$L(x, y) = L_1(x)\, L_2(y), \quad L_1(x) \in W_0, \quad L_2(y) \in W_0, \quad h(x, y)$$

ограничено и медленно колеблется в области $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, *то из*

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int_0^\infty L\left(\frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right) h(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = s \int_0^\infty L(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

вытекает, что

$$\lim_{(x,y)\to\infty} h(x, y) = s\,.$$

Совершая в последней теореме переход к переменным, обратный тому, который производился при получении теоремы 2 из теоремы 1, приходим к следующему результату:

Теорема 4. *Если*

$$K(x, y) = K_1(x)\, K_2(y)\,, \quad K_1(x) \in W\,, \quad K_2(y) \in W\,,$$

$h(x, y)$ ограничено и медленно колеблется в интервале $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ и

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - u, y - v)\, h(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = s \int_{-\infty}^{\infty} K(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,,$$

то

$$\lim_{(x,y)\to\infty} h(x, y) = s\,.$$

Перейдем к приложениям установленных выше теорем. Докажем, например, теорему Кноппа [4].

Теорема Кноппа. *Если последовательность* s_{mn} *ограничена и суммируется методом Абеля к* s, *то она также суммируется методом средне арифметических к* s.

Действительно, определив функцию $h(x, y)$ следующим образом

$$h(x, y) = s_{mn} \quad \text{для} \quad m \leqq x < m + 1\,, \quad n \leqq y < n + 1$$

и полагая $u = e^{-\frac{1}{x}}$, $v = e^{-\frac{1}{y}}$, мы можем написать

$$\lim_{(u,v)\to 1} (1 - u)(1 - v) \sum_{m=0,n=0}^{\infty} s_{mn} u^m v^n =$$

$$= \lim_{(x,y)\to\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{y}}\right) \sum_{m=0,n=0}^{\infty} s_{mn} e^{-\frac{m}{x}} e^{-\frac{n}{y}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to\infty} \sum_{m=0,n=0}^{\infty} s_{mn} \left(e^{-\frac{m}{x}} - e^{-\frac{(m+1)}{x}}\right)\left(e^{-\frac{n}{y}} - e^{-\frac{(n+1)}{y}}\right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \sum_{m=0,n=0}^{\infty} s_{mn} \int_{m}^{m+1} e^{-\frac{u}{x}} \mathrm{d}u \int_{n}^{n+1} e^{-\frac{v}{y}} \mathrm{d}v =$$

$$= \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{u}{x}} e^{-\frac{v}{y}} h(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = s\,, \tag{7}$$

т. к. последовательность предполагается суммируемой методом Абеля.

Используя вторую теорему с $L_1(z) = L_2(z) = e^{-z}$ и с $L_1^*(z) = L_2^*(z) = 1$ для $z < 1$ и с $L_1^*(z) = L_2^*(z) = 0$ для $z > 1$, получим, что функция $h(x, y)$, а, следовательно, и последовательность s_{mn}, суммируется методом среднеарифметических к s, что и тр. доказать.

Покажем, как используя теорему 4, можно прийти к следующему результату, также содержащемуся в [4].

Теорема. *Если последовательность* s_{mn} *ограничена, суммируется методом Абеля к* s *и медленно колеблется* (Опр. медленного колебания двойной последовательности см. в [4]), *то*

$$\lim_{(m,n)\to\infty} s_{mn} = s\,.$$

Действительно, легко видеть, что из условий теоремы вытекает справедливость (7); т. к. s_{mn} медленно колеблется, то отсюда вытекает, что $h(x, y)$ также медленно колеблется, и следовательно, непосредственно используя теорему 3 с $L_1(z) = L_2(z) = e^{-z}$, получим, что

$$\lim_{(m,n)\to\infty} s_{mn} = s\,.$$

Доказательство этого результата, построенное на совершенно других соображениях, содержится также в работе Деланжа [5].

Рассмотрим некоторые применения к суммированию интегралов методом Чезаро.

По аналогии с одномерным случаем говорят, что функция $s(x, y)$ суммируется методом (C, α, β) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ к значению s, если

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \bar{\sigma}^{\alpha,\beta}(x, y, s(x, y)) = s,$$

где

$$\bar{\sigma}^{\alpha,\beta}(x, y, s(x, y)) = \frac{\alpha\beta}{x^{\alpha} y^{\beta}} \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} (x-u)^{\alpha-1} (y-v)^{\beta-1} s(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,, \tag{8}$$

и, что интеграл $\int_0^\infty f(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ суммируется методом (C, α, β) к s, если

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f) = s\,,$$

где

$$\sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f) = \int_0^x \int_0^y \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{\alpha} \left(1 - \frac{v}{y}\right)^{\beta} f(u, v)\, du\, dv\,. \tag{9}$$

Последнее выражение имеет смысл при $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Из (8) вытекает, что

$$\bar{\sigma}^{\alpha+\eta,\beta+\delta}(x, y, s(x, y)) = \frac{\Gamma(\alpha+\eta+1)\,\Gamma(\beta+\delta+1)}{\Gamma(\eta)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)} \frac{1}{xy} \int_0^x \int_0^y \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{\eta-1} \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{v}{y}\right)^{\delta-1} \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha} \left(\frac{v}{y}\right)^{\beta} \bar{\sigma}^{\alpha,\beta}(u, v, s)\, du\, dv\,. \tag{10}$$

Точно такая же формула имеет место и для $\sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f)$.

Нетрудно видеть, что ядро суммирования в (10), имеющее вид $L_1(u)\,L_2(v)$, где

$$L_1(z) = \frac{\Gamma(\alpha+\eta+1)}{\Gamma(\eta)\,\Gamma(\alpha+1)} (1-z)^{\eta-1} z^{\alpha} \quad \text{для} \quad z < 1 \ \text{ и } L_1(z) = 0 \quad \text{для} \quad z > 1$$

и

$$L_2(z) = \frac{\Gamma(\beta+\delta+1)}{\Gamma(\delta)\,\Gamma(\beta+1)} (1-z)^{\delta-1} z^{\beta} \ \text{для} \ z < 1 \tag{11}$$

$$\text{и } L_2(z) = 0 \ \text{для} \ z > 1\,,$$

принадлежит классу W_0.

Рассмотрим некоторые приложения установленных выше теорем к суммированию интегралов. Покажем, что из теоремы 2 непосредственно вытекает следующая теорема, характеризующая свойства выпуклости суммирования интегралов методом Чезаро.

Теорема. *Если для* $\int\limits_0^{\infty} f(u, v)\, du\, dv$.

$$|\sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f)| \leqq c$$

при всех $x > 0$, $y > 0$ *и этот интеграл суммируется методом Чезаро порядка* $(C, \alpha+\eta, \beta+\delta)$ *к* s, *где* $\eta > 0$, $\delta > 0$ — *некоторые фиксированные числа, то он также суммируется методом* (C, α', β') *к* s *при любых* $\alpha' > \alpha > -1$, $\beta' > \beta > -1$.

Действительно, из условий теоремы вытекает, что

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int_0^x \int_0^y L_1\left(\frac{u}{x}\right) L_2\left(\frac{v}{y}\right) \sigma^{\alpha,\beta}(u, v, f)\, du\, dv = s \tag{10a}$$

при данных $\eta > 0$, $\delta > 0$, где $L_1(z)$ и $L_2(z)$, определены в (11). Так как $L_1(z)$ и $L_2(z)$ принадлежит классу W_0 при любых $\eta > 0$ и $\delta > 0$, то применяя теорему 2 к (10a), приходим к утверждению теоремы.

Несколько варьируя предыдущие рассуждения, легко приходим к теореме включения для суммирования интегралов методом Чезаро.

Теорема. *Если для* $\int\limits_0^\infty f(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$

$$\left|\sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f)\right| \leqq c$$

при $x \geqq 0, y \geqq 0$ *и этот интеграл суммируется методом* (C, α, β), $\alpha > -1$, $\beta > -1$, *к* s, *то он также суммируется методом* (C, α', β'), $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$ *к тому же значению.*

Действительно, из условий теоремы следует, что $\sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f)$ суммируется методом средне-арифметических. Но ядро метода средне-арифметических принадлежит классу W_0. Поэтому, применяя теорему 2 к (10), получим, что $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \sigma^{\alpha+\eta,\beta+\delta}(x, y, f) = s$ при любых $\eta > 0$, $\delta > 0$.

Другое доказательство предыдущих двух теорем см. в [6].

Другой иллюстрацией применения теоремы 2 может служить доказательство следующей теоремы, являющейся непрерывным аналогом первой теоремы из [7].

Теорема. *Если* $\int\limits_0^\infty f(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ *суммируется методом* $(C, \alpha + \eta, \beta + \delta)$ *к* s *и его* $\sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f)$ *средние ограничены, то эти средние суммируются методом* (C, η, δ), $\eta > 0$, $\delta > 0$ *к* s.

Из условий теоремы, используя первую из предшествующих двух теорем, заключаем, что $\int\limits_0^\infty f(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ суммируется методом $(C, \alpha + 1, \beta + 1)$ к s. Полагая, затем $\eta = \delta = 1$ в (10) получим

$$\sigma^{\alpha+1,\beta+1}(x, y, f) = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{xy} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left(\frac{u}{x}\right)^\alpha \left(\frac{v}{y}\right)^\beta \sigma^{\alpha,\beta}(u, v, f)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,, \tag{12}$$

где ядро перехода от $\sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f)$ к $\sigma^{\alpha+1,\beta+1}(x, y, f)$ имеет вид $L_1(x)\, L_2(x)$ с $L_1(z) = (\alpha + 1)\, z^\alpha$ при $z < 1$ и $L_1(z) = 0$ при $z > 1$, а $L_2(z) = (\beta + 1)\, z^\beta$ при $z < 1$ и $L_2(z) = 0$ при $z > 1$.

Нетрудно видеть что $L_1(z)$ и $L_2(z)$ принадлежат классу W_0 Винера.

Полагая в (10) $\alpha = \eta$, $\beta = \delta$ и $s(x, y) = \sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f)$ получим

$$\bar{\sigma}^{\eta,\delta}(x, y, \sigma^{\alpha,\beta}(x, y, f)) = \frac{\eta\delta}{xy} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{\eta-1} \left(1 - \frac{v}{y}\right)^{\delta-1} \sigma^{\alpha,\beta}(u, v, f)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{13}$$

т. к. $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \sigma^{\alpha+1,\beta+1}(x, y, f) = s$, то, применяя к (12) теорему 2, заключаем, что предел правой части (13) при $(x, y) \to \infty$ существует и равен s. Следовательно (C, α, β) — средние интеграла $\int\limits_0^\infty f(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ суммируются методом (C, η, δ) $\eta > 0$, $\delta > 0$ к s.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. И. Огиевецкий:* К теории суммирования кратных числовых рядов, Труды третьего всесоюзного математического съезда, Том. *1* (1956), стр. 94.

[2] *Г. Харди:* Расходящиеся ряды, Москва 1951.

[3] *N. Wiener:* Tauberian theorems, Annals of Mathematics *33* (1932), 1—100.

[4] *K. Knopp:* Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen, Math. Z. *45* (1939), 573—589.

[5] *H. Delange:* Théorèmes taubèriens pour les séries multiples de Dirichlet et les intégrales multiples de Laplace, Annales de l'école Normale *70* (1953), 51—103.

[6] *М. Ф. Тиман:* Диссертация — Днепропетровский Гос. Унив., г. Днепропетровск 1952.

[7] *И. И. Огиевецкий:* О суммировании кратных рядов, ДАН СССР *95* (1954), 713—716.

Summary

SOME TAUBERIAN THEOREMS OF N. WIENER'S TYPE FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

I. I. OGIEVECKIJ, Dniepropetrovsk

(Received January 14, 1957)

The following theorems are analogous to the well-known tauberian theorems of N. Wiener.

Theorem 1. *Let W be the class of Wiener functions. Let $K(x, y) = K_1(x)\,K_2(y)$ where $K_1, K_2 \in W$. Let $K^*(x, y) = K_1^*(x)\,K_2^*(y)$ where $K_1^*, K_2^* \in L(-\infty, +\infty)$. Let $h(x, y)$ by a bounded function.*

Then the relation

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-u, y-v)\,h(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = s \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

implies

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^*(x-u, y-v)\,h(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = s \int\limits_{-\infty}^{\infty} K^*(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Theorem 2. *Let W_0 be the class of Wiener functions in* $(0, \infty)$. *Let* $L(x, y) = L_1(x)\, L_2(y)$ *where* $L_1, L_2 \in W_0$. *Let* $L^*(x, y) = L_1^*(x)\, L_2^*(y)$, *where* $L_1^*, L_2^* \in L(0, \infty)$. *Let* $h(x, y)$ *be a bounded function.*

Then the relation

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int_0^\infty L\left(\frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right) h(u, v)\, du\, dv = s \int_0^\infty L(u, v)\, du\, dv$$

implies

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int_0^\infty L^*\left(\frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right) h(u, v)\, du\, dv = s \int_0^\infty L^*(u, v)\, du\, dv\,.$$

Theorem 3. *Let* $L(x, y)$ *be defined as in* 2. *Let* $h(x, y)$ *be bounded and slowly oscillating in* $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$.

Then the relation

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{xy} \int_0^\infty L\left(\frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right) h(u, v)\, du\, dv = s \int_0^\infty L(u, v)\, du\, dv$$

implies

$$\lim_{(x,y)\to\infty} h(x, y) = s\,.$$

Theorem 4. *Let* $K(x, y)$ *be defined as in* 1. *Let* $h(x, y)$ *by bounded and slowly oscillating in* $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Then the relation

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - u, y - v)\, h(u, v)\, du\, dv = s \int_{-\infty}^{\infty} K(u, v)\, du\, dv$$

implies

$$\lim_{(x,y)\to\infty} h(x, y) = s\,.$$

The proof is based on the "closure of translations theorem" of N. Wiener and a generalization of a result of K. Knopp. These theorems enable us to consider from one point of view many problems of summability of double series and integrals. The importance of these theorems for two-dimensional summability is based on the fact that many known summability methods have „factorable kernels" $K(x, y) = K_1(x)\, K_2(y)$.

We also consider some applications of the theorems proved.