Marko Švec

Sur une propriété des intégrales de l'équation $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3,\ 4$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 3, 450–462

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100259`

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0\,, \quad n = 3, 4$

MARKO ŠVEC, Bratislava.

(Reçu le 16 novembre 1956.)

Il est bien connue la propriété suivante des intégrales de l'équation $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$: Si les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, les intégrales[1]) de cette équation sont ou bien toutes oscillatoires ou bien elles sont toutes non oscillatoires. Dans ce mémoire nous allons démontrer que les intégrales de l'équation $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0$, où $Q(x)$ est une fonction nonnégative et continue dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, n'étant identiquement nulle dans aucun sousintervalle, jouissent, pour $n = 4$, de la même propriété et, pour $n = 3$, d'une propriété analogue.

Nous supposerons, dans tout le mémoire, *la fonction $Q(x)$ nonnégative et continne dans l'intervalle* $(-\infty. \infty)$, *n'étant identiquement nulle dans aucun sousintervalle.*

Définition. Nos dirons que les intégrales d'un ensemble ont *le même caractère* si elles sont toutes oscillatoires ou bien elles sont toutes non oscillatoires.

Remarque. Il est bien aisé de prouver l'affirmation suivante: *Soient u, v deux intégrales dont les premières derivées sont continues. Si le Wronskien $W(u, v) \neq 0$ ou $\equiv 0$ pour $x > a$, les intégrales u et v ont le même caractère.*

I

Nous allons examiner, tout d'abord, l'équation

$$y^{(4)} + Q(x)\,y = 0\,. \tag{a}$$

Nous démontrerons quelques lemmes:

Lemme 1. *Toute intégrale de l'équation* (a) *admet au moins une racine.*

Démonstration. Soit $y(x)$ une intégrale arbitraire de l'équation (a). Supposons $y(x) \neq 0$ dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Soit par exemple $y(x) >$

[1]) Par intégrale nous entendons une intégrale non identiquement nulle qui est définie dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Par intégrale oscillatoire nous entendons une intégrale qui a un nombre infini de racines à droit d'un nombre a arbitraire.

> 0. Soit $x_1 \in (-\infty, \infty)$ un point arbitraire. Alors $y(x_1) > 0$. Il y a deux cas possibles concernant $y'''(x_1)$: 1° $y'''(x_1) \leqq 0$, 2° $y'''(x_1) > 0$.

1° Il est, par hypothèse, $y(x) > 0$ et $Q(x) \geqq 0$. Alors $y^{(4)}(x) = -Q(x)\,y(x) \leqq \leqq 0$, où le signe $=$ ne peut être valable que ponctuellement. Il en résulte que $y'''(x)$ est une fonction décroissante. En tenant compte de l'hypothèse que $y'''(x_1) \leqq 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) < 0$, c'est qui est en contradiction avec l'hypothèse $y(x) > 0$. Cette contradiction démontre notre affirmation.

2° Soit maintenant $y'''(x_1) > 0$. Faisons la transformation de la variable indépendante $x = x_1 - t$. L'équation (a) prendra la forme

$$\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}t^4} + Q^*(t)\,y = 0\,, \tag{1}$$

où $Q^*(t) = Q(x_1 - t) \geqq 0$. Dans cette transformation, au point x_1 correspond le point $t = 0$, à l'intégrale $y(x)$ l'intégrale $y(x_1 - t) = u(t)$ pour laquelle il est: $u(t) > 0$ pour tout $t \in (-\infty, \infty)$, par hypothèse, et $\left.\frac{\mathrm{d}^3 u}{\mathrm{d}t^3}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=x_1} < 0$. Nous avons donc pour $u(t)$ les mêmes conditions que pour $y(x)$ dans le cas 1°.

Lemme 2. *Soit* $y(x)$ *une intégrale arbitraire de l'équation* (a). *Alors l'expression* $y'''y - y'y''$ *est une fonction décroissante dans tout l'intervalle* $(-\infty, \infty)$. *Par conséquent,* $y(x)$ *et* $y''(x)$ *séparent mutuellement leurs racines sauf au plus un seul couple de racines voisines.*

Démonstration. Multiplions l'équation (a) par y. On a

$$[y'''y - y'y'']' = -[Q(x)\,y^2 + y''^2]\,, \tag{2}$$

d'où en intégrant

$$y'''y - y'y'' = k - \int_{x_0}^{x} [Q(x)\,y^2 + y''^2]\,\mathrm{d}x\,.$$

De (2) on voit que la fonction $y'''y - y'y''$ est décroissante dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Donc, elle ne peut changer de signe qu'une seule fois.

Considérons les identités

$$\left[\frac{y''}{y}\right]' = \frac{y'''y - y'y''}{y^2}\,, \quad \left[\frac{y}{y''}\right]' = -\frac{y'''y - y'y''}{y''^2}\,.$$

En intégrant la première identité entre les deux racines voisines de y'' et la seconde entre les deux racines voisines de y, nous en déduirons une contradiction, à l'exception d'un seul couple de racines voisines de y'', ou de y, entre lesquelles se trouve le point de changement du signe de la fonction $y'''y - y'y''$, si un tel point existe. Cette contradiction démontre notre lemme.

Soit $x \in (-\infty, \infty)$ un point arbitraire. Désignons par $M(x)$ l'ensemble d'intégrales de l'équation (a) qui ont x pour une racine. En conséquence du lemme 1, toute intégrale de l'équation (a) appartient au moins à un ensemble $M(x)$.

Lemme 3. *Les intégrales de l'ensemble $M(x)$ ont le même caractère.*

Démonstration. Soit $x_1 \in (-\infty, \infty)$ un point arbitraire. Nous allons examiner les intégrales de l'ensemble $M(x_1)$. Désignons par $y_k(x)$ l'intégrale de l'équation (a) qui satisfait aux conditions initiales

$$y_k^{(j)}(x_1) = \left\langle \begin{array}{l} 0 \text{ pour } j \neq k , \\ 1 \text{ pour } j = k , \end{array} \right. \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, 2, 3 .$$

On démontre aisément que les y_0, y_1, y_2, y_3 forment un système fondamental de l'équation (a) et que toute intégrale $u \in M(x_1)$ peut être représentée comme une combinaison linéaire de y_1, y_2, y_3, c'est-à-dire on aura

$$u = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 , \tag{3}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes. Pareillement, on voit que toute combinaison linéaire du type (3) représente une intégrale de $M(x_1)$. En éliminant les constantes c_i entre u, u', u'' et u''', nous obtenons l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & u \\ y_1', & y_2', & y_3', & u' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'', & u'' \\ y_1''', & y_2''', & y_3''', & u''' \end{vmatrix} = 0 . \tag{4}$$

Toute intégrale de cette équation est une intégrale de $M(x_1)$ et toute intégrale de $M(x_1)$ est une intégrale ce dette équation. En tenant compte de ce que

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \end{vmatrix} = y_3, \quad \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_1', & y_2', & y_3' \\ y_1''', & y_2''', & y_3''' \end{vmatrix} = y_3', \quad \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \\ y_1''', & y_2''', & y_3''' \end{vmatrix} = y_3'', \quad \begin{vmatrix} y_1', & y_2', & y_3' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' \\ y_1''', & y_2''', & y_3''' \end{vmatrix} = y_3''',$$

l'équation (4) prend la forme

$$u''' y_3 - u'' y_3' + u' y_3'' - u y_3''' = 0 . \tag{5}$$

D'après [1], Th. 1.7, on a $W(y_j, y_k) \neq 0$[2]) pour $x > x_1$, $j, k = 0, 1, 2, 3$ et, plus encore, on démontre aisément que $W(y_j, y_k) > 0$ pour $j < k$, $x > x_1$. En tenant compte du Remarque, on voit que y_0, y_1, y_2, y_3 ont le même caractère.

Partageons les intégrales de l'ensemble $M(x_1)$ en deux groupes:

I. Au premier groupe appartiedront les intégrales $u(x) \in M(x_1)$ pour qui est valable

$$u'(x_1) \,.\, u''(x_1) \,.\, u'''(x_1) \neq 0 , \quad \operatorname{sgn} u'(x_1) = \operatorname{sgn} u'''(x_1) \neq \operatorname{sgn} u''(x_1) .$$

[2]) $W(y_j, y_k) = \begin{vmatrix} y_j, & y_k \\ y_j', & y_k' \end{vmatrix}$.

II. Au second groupe appartiendront celles de $M(x_1)$ qui n'appartiennent pas au premier.

α) *Les intégrales du groupe* II *ont le même caractère.*

Au groupe II appartiennent, entre autres, les intégrales y_1, y_2, y_3. Elles sont linéairement indépendantes. Soit $u(x)$ une intégrale du groupe II. D'après (3), il est

$$u(x) = u'(x_1)\, y_1 + u''(x_1)\cdot y_2 + u'''(x_1)\, y_3 \, .$$

Il y a trois cas possibles:

1° Un au moins des nombres $u'(x_1)$, $u''(x_1)$, $u'''(x_1)$ est nul.

2° $u'(x_1)\, u''(x_1)\, .\, u'''(x_1) \neq 0$, $\operatorname{sgn} u'(x_1) = \operatorname{sgn} u''(x_1)$.

3° $u'(x_1)\, u''(x_1)\, .\, u'''(x_1) \neq 0$, $\operatorname{sgn} u''(x_1) = \operatorname{sgn} u'''(x_1)$.

1° Soit $u'(x_1) = 0$. Alors $W(u, y_2) = - u'''(x_1)\, W(y_2, y_3)$ qui est différent de zéro pour $x > x_1$ ou identiquement nul selon ce si $u'''(x_1)$ est différent de zéro ou non. Il en résulte (v. Remarque) que $u(x)$ a le même caractère comme y_2, c'est-à-dire comme y_0, y_1, y_2, y_3.

On arrive, de pareille façon, au même résultat, si $u''(x_1) = 0$ ou $u'''(x_1) = 0$.

2° Dans ce cas nous avons $W(u, y_3) = u'(x_1)\, W(y_1, y_3) + u''(x_1)\, W(y_2, y_3) \neq \neq 0$ pour $x > x_1$.

3° On a $W(u, y_1) = - u''(x_1)\, W(y_1, y_2) - u'''(x_1)\, W(y_1, y_3) \neq 0$ pour $x > x_1$. De ces relations il résulte que $u(x)$, au cas 2° comme aussi au cas 3°, a le même caractère que y_0, y_1, y_2, y_3. Ainsi notre affirmation α) est démontrée.

Partageons les intégrales du groupe I en deux sousgroupes:

I. a) Les intégrales u de ce sousgroupe ont la propriété suivante: pour toute racine $\varrho > x_1$ de l'intégrale $u(x)$ il vaut

$$u'(\varrho)\, .\, u''(\varrho)\, .\, u'''(\varrho) \neq 0\, , \quad \operatorname{sgn} u'(\varrho) = \operatorname{sgn} u'''(\varrho) \neq \operatorname{sgn} u''(\varrho)\, . \qquad (*)$$

I. b) A ce sousgroupe appartiendront les intégrales du groupe I pour lesquelles il existe une racine $\eta > x_1$ pour laquelle les relations (*) ne sont pas valables. Il est évident que l'intégrale $u(x)$ du sousgroupe I. b) appartiendra au groupe II de l'ensemble $M(\eta)$.

β) *Les intégrales du sousgroupe* I. b) *ont le même caractère comme celles du groupe* II.

Les intégrales du groupe II de l'ensemble $M(\eta)$ ont, d'après α), le même caractère. Envisageons maintenant l'intégrale $y(x)$ qui satisfait aux conditions: $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y(\eta) = 0$. Cette intégrale appartient au groupe II de l'ensemble $M(x_1)$. D'après [1], Th. 1.2, les nombres $y'(\eta), y''(\eta), y'''(\eta)$ sont différents de zéro et ont les mêmes signes. Par conséquent, $y(x)$ est du groupe II de l'ensemble $M(\eta)$. Il en résulte que les intégrales du groupe II de l'ensemble

$M(x_1)$ et celles du groupe II de l'ensemble $M(\eta)$ ont le même caractère. Ainsi l'affirmation β) est démontrée.

γ) *Si une intégrale arbitraire du sousgroupe* I. a) *est oscillatoire, alors* $y_3(x)$ *est aussi oscillatoire et, par suite, toutes les intégrales du groupe* II *comme aussi du sousgroupe* I. b) *sont oscillatoires.*

Soit $u(x)$ une intégrale oscillatoire du sousgroupe I. a). Soit $y_3(x)$ non oscillatoire. Soit $a \geqq x_1$ la racine de $y_3(x)$ qui est la dernière, c'est-à-dire à droit de a, $y_3(x)$ n'a aucune racine plus. Si $a > x_1$, il est, d'après [1], Th. 1.2, $y_3'(a) \cdot y_3''(a)\, y_3'''(a) \neq 0$, $\operatorname{sgn} y_3'(a) = \operatorname{sgn} y_3''(a) = \operatorname{sgn} y_3'''(a)$. On prouve sans difficulté que pour $x > a$ on a $y_3(x)\, y_3'(x)\, y_3''(x)\, y_3'''(x) \neq 0$, $\operatorname{sgn} y_3(x) = \operatorname{sgn} y_3'(x) = \operatorname{sgn} y_3''(x) = \operatorname{sgn} y_3'''(x)$. La même affirmation vaut pour $x > x_1$, si $a = x_1$. Pour ces x, l'équation (5) peut s'écrire

$$\left(\frac{u''}{y_3}\right)' + \left(\frac{y_3''}{y_3}\right)^2 \cdot \left(\frac{u}{y_3''}\right)' = 0\,. \tag{6}$$

Soient α, β, $a < \alpha < \beta$, deux racines voisines de $u(x)$. En intégrant cette équation entre α et β, et en appliquant la méthode de l'intégration par parties au second terme du premier membre, on a

$$\frac{u''(\beta)}{y_3(\beta)} - \frac{u''(\alpha)}{y_3(\alpha)} = 2\int_\alpha^\beta \frac{u}{y_3}\left(\frac{y_3''}{y_3}\right)' \mathrm{d}x\,. \tag{7}$$

Soit $u(x) > 0$ dans l'intervalle (α, β). Alors, $u'(\alpha) > 0$, $u'(\beta) < 0$ et, par hypothèse, $u''(\alpha) < 0$, $u''(\beta) > 0$. Le signe du premier membre de l'équation (7) est donc celui de $y_3(x)$. D'après le lemme 2, $y_3'''y_3 - y_3'y_3''$ est une fonction décroissante dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Puisque cette fonction a dans le nombre x_1 la valeur zéro, elle est négative dans l'intervalle (x_1, ∞). Il en suit que $\left(\frac{y_3''}{y_3}\right)'$ est négative dans (x_1, ∞). La fonction à intégrer du second membre de l'équation (7) a donc le signe contraire à celui de y_3 dans tout l'intervalle (α, β). Par suite, l'équation (7) nous donne la contradiction qui prouve qu'aussi $y_3(x)$ est oscillatoire.

δ) *Si* $y_3(x)$ *est oscillatoire, chaque intégrale du sousgroupe* I. a) *est oscillatoire.*

Soit $y_3(x)$ oscillatoire. Soit $u(x)$ une intégrale non oscillatoire du sousgroupe I. a). Alors, il y a une racine de $u(x)$ qui est la dernière. Désignons la par b, $b \geqq x_1$. Il est, par hypothèse,

$$u'(b)\, u''(b)\, u'''(b) \neq 0\,, \quad \operatorname{sgn} u'(b) = \operatorname{sgn} u'''(b) \neq \operatorname{sgn} u''(b)\,.$$

Soit $u'(b) > 0$, $u''(b) < 0$, $u'''(b) > 0$. Il est, par hypothèse, $u(x) \neq 0$ dans (b, ∞). De $u(b) = 0$ et $u'(b) > 0$ il résulte que $u(x) > 0$ dans tout l'intervalle (b, ∞). Alors, en tenant compte de l'équation (a), on a $u''''(x) \leqq 0$ pour $x > b$.

Par suite, $u'''(x)$ est décroissante pour $x > b$. $u'''(x)$ reste positive pour $x > b$. En effet, s'il existait un nombre $\tau, \tau > b$, tel que $u'''(\tau) < 0$, il serait $u'''(x) < u'''(\tau)$ pour $x > \tau$, d'où il resulterait $\lim_{x \to \infty} u(x) = -\infty$. Il existerait alors une racine de $u(x)$ qui serait plus grande que b. Mais ça serait une contradiction. Il est donc $u'''(x) > 0$ pour $x > b$. Par conséquent, $u''(x)$ croît dans l'intervalle (b, ∞). Puisque $u''(b) < 0$, il y a deux cas possibles:

1° $u''(x) < 0$ pour $x > b$.

2° Il y a un nombre $\tau > b$ tel que $u''(\tau) = 0$, $u''(x) > 0$ pour $\tau < x$.

Nous allons examiner, tout d'abord, le cas 2°. Soit $w > \tau$. Alors $u''(x) > > u''(w) > 0$ pour $x > w$. On déduit de cette inégalité que $\lim_{x \to \infty} u'(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} u(x) = \infty$. Il existe alors un nombre r, $r > w$, tel que $u(r) > 0$, $u'(r) > 0$, $u''(r) > 0$, $u'''(r) > 0$. Examinons les intégrales du groupe II de $M(r)$. Parmi ces intégrales il existe une qui appartient aussi au groupe II de $M(x_1)$. Par exemple l'intégrale qui a x_1 pour une racine double et r pour une racine simple. $y_3(x)$ étant oscillatoire, les intégrales du groupe II de $M(x_1)$ sont, d'après α), oscillatoires. Mais, en tenant compte de [1], Th. 1.2 et en appliquant α) à $M(r)$, on a que les intégrales du groupe II de $M(r)$ ont le même caractère. En conséquence de l'existence de l'une untégrale oscillatoire du groupe II de $M(x_1)$ qui appartient aussi au groupe II de $M(r)$, il en vient qu'aussi les intégrales du groupe II de $M(r)$ sont oscillatoires.

Soit $z_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, l'intégrale de (a) qui satisfait aux conditions initiales

$$z_i^{(j)}(r) = \left\langle \begin{array}{l} 0 \text{ pour } i \neq j\,, \\ 1 \text{ pour } i = j\,, \end{array} \right. \quad j = 0, 1, 2, 3\,.$$

Les intégrales z_1, z_2, z_3 appartiennent au groupe II de $M(r)$. Par suite, elles sont oscillatoires. On démontre sans difficulté, en tenant compte de [1], Th. 1.7, que $W(z_0, z_3) > 0$, $W(z_1, z_3) > 0$, $W(z_2, z_3) > 0$ pour $x > r$. On démontre encore aisément que l'intégrale $u(x)$ peut être écrite dans la forme $u(x) = = u(r)\, z_0 + u'(r)\, z_1 + u''(r)\, z_2 + u'''(r)\, z_3$. Il est alors

$$W(u, z_3) = u(r)\, W(z_0, z_3) + u'(r)\, W(z_1, z_3) + u''(r)\, W(z_2, z_3) > 0 \text{ pour } x > r.$$

Donc, $u(x)$ et $z_3(x)$ ont le même caractère. z_3 étant oscillatoire, $u(x)$ l'est aussi

1° Dans ce cas il est donc $u'''(x) > 0$, $u''(x) < 0$ pour $x > b$. Par suite, $u'(x)$ décroît dans l'intervalle (b, ∞). Puisque $u'(b) > 0$, la dérivée $u'(x)$ parcourt tout d'abord les valeurs positives. Nous allons démontrer que $u'(x) > 0$ pour $x > b$. En effet, s'il existait un nombre $q > b$ tel $u'(q) < 0$, il serait $u'(x) < < u'(q) < 0$, d'où il résulterait que $\lim_{x \to \infty} u(x) = -\infty$. Ce serait en contradiction avec l'hypothèse que $u(x) > 0$ pour $x > b$. En résumé, pour $x > b$ il est $u(x) > 0$, $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$, $u'''(x) > 0$. Par suite

$$u'''(x)\, u(x) - u'(x)\, u''(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x > 0\,.$$

Donc $\left(\dfrac{u''}{u}\right)' > 0$ pour $x > b$.

L'équation (5) peut être écrite, pour $x > b$, dans la forme

$$\left(\frac{y_3''}{u}\right)' + \left(\frac{u''}{u}\right)^2 \left(\frac{y_3}{u''}\right)' = 0\,. \tag{6'}$$

Soient ξ, η, $b < \xi < \eta$, deux racines consécutives de y_3. En intégrant l'équation (6') entre les extremités ξ et η, et, en appliquant la méthode de l'intégration par parties au second terme du premier membre, nous obtenons

$$\frac{y_3''(\eta)}{u(\eta)} - \frac{y_3''(\xi)}{u(\xi)} = 2\int_\xi^\eta \frac{y_3}{u}\left(\frac{u''}{u}\right)' \mathrm{d}x\,. \tag{7'}$$

Soit $y_3(x) > 0$ dans (ξ, η). Le second membre de l'équation (7') est donc positif. De $y_3(x) > 0$ pour $\xi < x < \eta$ il résulte que $y_3'(\xi) > 0$, $y_3'(\eta) < 0$. D'après [1], Th. 1.2, il est alors $y_3''(\xi) > 0$, $y_3''(\eta) < 0$. Par suite le premier membre de l'équation (7') est négatif. Nous avons donc une contradiction qui démontre que $u(x)$ est aussi oscillatoire. Ainsi l'affirmation δ) est démontrée.

Lemme 3 résulte de α), β), γ), δ).

Théorème 1. *Toutes les intégrales de l'équation* (a) *ont le même caractère.*

Démonstration. Il résulte du lemme 1 que toute l'intégrale de l'équation (a) appartient à un ensemble $M(x)$. Soient $M(x_1)$, $M(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, deux ensembles d'intégrales. Ils ont, au moins, un élément commun. En effet, il est toujours possible de trouver une intégrale de l'équation (a) qui a x_1 et x_2 pour racines. Il en vient, en tenant compte aussi du lemme 3, que les intégrales de l'ensemble $M(x_1)$ et celles de l'ensemble $M(x_2)$ ont le même caractère. Par conséquent, les nombres x_1 et x_2 étant arbitraires, en poursuivant l'idée, on déduit que les intégrales de tous les ensembles $M(x)$ ont le même caractère. Ainsi le théorème est démontré.

II

Nous allons maintenant examiner l'équation

$$y''' + Q(x)\, y = 0\,. \tag{b}$$

Lemme 4. *Soit* $z_1(x)$ *une intégrale de l'équation*

$$z''' - Q(x)\, z = 0 \tag{b'}$$

qui satisfait aux conditions initiales: $z_1(x_0) = z_1'(x_0) = 0$, $z_1''(x_0) > 0$. x_0 *est une nombre arbitraire de l'intervalle* $(-\infty, \infty)$. *Alors*, $\lim_{x\to\infty} z_1(x) = \lim_{x\to\infty} z_1'(x) = \infty$. *La limite* $\lim_{x\to\infty} z_1''(x)$ *existe et est finie ou* ∞. *Si* $\lim_{x\to\infty} z_1''(x) < +\infty$, *l'équation* (b′) *n'a aucune intégrale oscillatoire.*

Démonstration. En tenant compte des conditions initiales de $z_1(x)$ et de l'équation (b′), il résulte immédiatement que $z_1(x)$, $z_1'(x)$, $z_1''(x)$ sont des fonctions croissantes et possitives dans l'intervalle (x_0, ∞). Il est aisé en déduire $\lim_{x\to\infty} z_1(x) = \lim_{x\to\infty} z_1'(x) = \infty$ et l'existence de la limite $\lim z_1''(x)$ qui peut être finie et positive ou ∞.

Supposons en ce qui suit $\lim z_1''(x) = M < \infty$. $z_1(x)$ étant une intégrale particulière de l'équation (b′) nous pouvons abaisser l'ordre de cette équation. Posons $y = z_1 \int_a^x u \, \mathrm{d}x$, $a > x_0$. Nous obtenons de l'équation (b′) l'équation $u''z_1 + 3u'z_1' + 3uz_1'' = 0$. En la multipliant par z_1^2 nous avons

$$(z_1^3 u')' + 3z_1^2 z_1'' u = 0 \,. \tag{8}$$

Au lieu de cette équation examinons tout d'abord l'équation

$$(z_1^3 u')' + 3Mz_1^2 u = 0 \,. \tag{9}$$

Posons $p(x) = 3Mz_1^2$, $r(x) = z_1^3$. On a

$$\lim_{x\to\infty} \int^x p(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \int^x 3Mz_1^2 \, \mathrm{d}x = \infty \,,$$

$$\lim_{x\to\infty} r(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [p(x) \, r(x)]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{5}{\sqrt{6}} < -2 \,.$$

D'après [2], Th. 1.7, les intégrales de l'équation (9) sont non oscillatoires. Parce que pour (x_0, ∞) il est $3z_1^2 z_1'' < 3Mz_1^2$, en comparant l'équation (8) avec l'équation (9) on a, en vertu du théorème de comparaison de Sturm, que les intégrales de l'équation (8) sont non oscillatoires.

Soient u_1, u_2 deux intégrales de l'équation (8) qui sont linéairement indépendantes. Alors z_1, $z_1 \int_a^x u_1 \, \mathrm{d}x$, $z_1 \int_a^x u_2 \, \mathrm{d}x$ forment un système fondamental d'intégrales de l'équation (b′). L'intégrale générale de l'équation (b′) est alors $z = c_1 z_1 + c_2 z_1 \int_a^x u_1 \, \mathrm{d}x + c_3 z_1 \int_a^x u_2 \, \mathrm{d}x$ ou $z = z_1 [c_1 + \int_a^x (c_2 u_1 + c_3 u_2) \, \mathrm{d}x]$, où c_1, c_2, c_3 sont des constantes.

Posons $G = c_1 + \int_a^x (c_2 u_1 + c_3 u_2) \, \mathrm{d}x$. On a $G' = c_2 u_1 + c_3 u_2$ ce qui est une intégrale générale de l'équation (8). Parce qu'elle est non oscillatoire, elle garde le signe pour les x grands. Pour ces x, G est une fonction monotonne.

Pour les x assez grands elle garde aussi le signe. z_1 étant non oscillatoire garde aussi le signe pour les x assez grands. Il en résulte que l'intégrale générale $z(x)$ de l'équation (8) garde aussi le signe pour x assez grands. Ainsi le lemme 4 est démontré.

Lemme 5. *Les intégrales de l'équation* (b) *qui admettent une racine, ont le même caractère.*

Démonstration. Soit x_0 un nombre arbitraire de l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Soient u_1, u_2 deux intégrales de l'équation (b) qui satisfont aux conditions initiales suivantes:

$$u_1(x_0) = u_1''(x_0) = 0\,, \quad u_1'(x_0) = 1\,,$$
$$u_2(x_0) = u_2'(x_0) = 0\,, \quad u_2''(x_0) = 1\,.$$

Elles sont évidemment linéairement indépendantes. D'après [1], Th. 1.7, leur Wronskien $W(u_1, u_2) \neq 0$ pour $x > x_0$, donc selon la Remarque elles ont le même caractère.

Toute intégrale u de l'équation (b) qui a x_0 pour une racine peut être représentée comme une combinaison linéaire de u_1 et u_2, c'est-à-dire on aura $u = c_1u_1 + c_2u_2$, c_1 et c_2 sont des constantes. Il est $W(u, u_1) = -c_2W(u_1, u_2) \neq 0$ pour $x > x_0$, si $c_2 \neq 0$ ou $W(u, u_1) \equiv 0$, si $c_2 = 0$. Par suite, u et u_1 ont le même caractère. Bref, les intégrales de (b) qui ont x_0 pour une racine ont le même caractère.

Soit $\xi \neq x_0$ un nombre arbitraire. Il est toujours possible de trouver une intégrale de (b) qui a ξ et x_0 pour racines. Il en résulte que les intégrales qui ont ξ pour une racine et celles qui ont x_0 pour une racine ont le même caractère. Le lemme 5 est donc démontré.

Théorème 2. *Si l'équation* (b) *a une intégrale oscillatoire, tout intégrale $y(x)$ de cette équation est ou bien oscillatoire ou bien elle n'admet aucune racine. Celle qui n'admet aucune racine jouit des propriétés suivantes*: $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ *sont des fonctions monotonnes*; $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$; $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0$.

Si l'équation (b) *a une intégrale non oscillatoire qui a au moins une racine ou une integrale $y(x)$ sans racine avec* $\lim_{x\to\infty} y(x) \neq 0$, *l'équation* (b) *n'admet aucune intégrale oscillatoire.*

Démonstration. Soit $u_k(x)$ l'intégrale de (b) qui satisfait aux conditions initiales suivantes:

$$u_k^{(j)}(x_0) = \left\langle \begin{array}{l} 0 \text{ pour } j \neq k\,, \\ 1 \text{ pour } j = k\,, \end{array} \right. \quad j = 0, 1, 2, \; k = 0, 1, 2.$$

Les intégrales u_0, u_1, u_2 forment un système fondamental de (b). Il est, d'après [1], Th. 1.7, $W(u_0, u_1) \neq 0$, $W(u_1, u_2) \neq 0$, $W(u_0, u_2) \neq 0$ pour $x > x_0$. On vérifie aisément que ces Wronskiens sont pour $x > x_0$ positifs. Par suite, u_0, u_1, u_2 ont le même caractère.

L'intégrale générale $y(x)$ de (b) est $y(x) = c_0u_0 + c_1u_1 + c_2u_2$, où $c_0 = y(x_0)$, $c_1 = y'(x_0)$, $c_2 = y''(x_0)$. Quant aux signes des constantes c_0, c_1, c_2, si $c_0 \,.\, c_1 \,.\, c_2 \neq 0$, il y a quatre cas possibles:

$$\text{a) } \operatorname{sgn} c_0 = \operatorname{sgn} c_1 = \operatorname{sgn} c_2\,, \quad \text{b) } \operatorname{sgn} c_0 \neq \sin c_1 = \operatorname{sgn} c_2\,,$$
$$\text{c) } \operatorname{sgn} c_0 = \operatorname{sgn} c_1 \neq \operatorname{sgn} c_2\,, \quad \text{d) } \operatorname{sgn} c_0 = \operatorname{sgn} c_2 \neq \operatorname{sgn} c_1\,.$$

Les intégrales sub a), b), c) ont le même caractère comme u_0, u_1, u_2. Il est, en effet,

$$\text{a), b) } W(u_0, y) = c_1 W(u_0, u_1) + c_2 W(u_0, u_2) \neq 0 \text{ pour } x > x_0,$$
$$\text{c) } W(y, u_2) = c_0 W(u_0, u_2) + c_1 W(u_1, u_2) \neq 0 \text{ pour } x > x_0.$$

On prouve encore de pareille façon: si au moins une des constantes c_0, c_1, c_2 est nulle, l'intégrale $y(x)$ a le même caractère que u_0, u_1, u_2.

Supposons maintenant que l'équation (b) a une intégrale oscillatoire. Alors, en tenant compte du lemme 5 et de ce qui était dit plus haut, nous pouvons énoncer ceci: Toute intégrale $y(x)$ non oscillatoire de l'équation (b) 1° n'a aucune racine, 2° elle doit être du type d) en tout $x \in (-\infty, \infty)$, c'est-à-dire elle doit satisfaire aux conditions $y(x) \,.\, y'(x) \,.\, y''(x) \neq 0$, $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Soit, pour fixer l'idée, $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$, $y''(x) > 0$ dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Il est alors $y''' = -Q(x) \,.\, y \leqq 0$. Par suite, $y''(x)$ est décroissante tout en restant positive. S'il y avait $\lim\limits_{x\to\infty} y''(x) = m > 0$, il serait $y''(x) > m > 0$, d'où on déduirait que $y'(x) > k + m(x - x_0)$. Par conséquent, $y'(x)$ serait positive pour les x grands ce qui contredirait à l'hypothèse. Donc, il est $\lim\limits_{x\to\infty} y''(x) = 0$. Par le même raisonnement on prouve que $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$.

Pour démontrer qu'aussi $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ envisageons $W(y, u_1)$. Cette fonction est oscillatoire. En effet, serait-il $W(y, u_1) \neq 0$ pour les x grands, $y(x)$ et $u_1(x)$ auraient le même caractère et par conséquent $y(x)$ serait oscillatoire se qui, par hypothèse, n'est pas vrai. On vérifie aisément que $W(y, u_1)$ est une intégrale de l'équation (b'). L'équation (b') a donc une intégrale oscillatoire.

Puisque y, u_1, u_2 sont linéairement indépendentes, on a, d'après la formule de Liouville, $W(y, u_1, u_2) = y(x_0)$, ce qui peut s'écrire sous la forme

$$y'' W(u_1, u_2) - y' W'(u_1, u_2) + y W''(u_1, u_2) = y(x_0)\,. \tag{10}$$

On démontre sans difficulté que $W(u_1, u_2)$ est une intégrale de l'équation (b') qui satisfait aux conditions initiales:

$$W(u_1, u_2)\big|_{x=x_0} = W'(u_1, u_2)\big|_{x=x_0} = 0\,, \quad W''(u_1, u_2)\big|_{x=x_0} = 1\,.$$

D'après le lemme 4, il est $\lim\limits_{x\to\infty} W(u_1, u_2) = \lim\limits_{x\to\infty} W'(u_1, u_2) = \infty$ et parce que l'équation (b') a une intégrale oscillatoire, il est aussi $\lim\limits_{x\to\infty} W''(u_1, u_2) = \infty$.

Supposons maintenant $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) > 0$. En tenant compte de ce que nous avons démontré plus haut, le premier membre de l'équation (10) donne pour $x \to \infty$ la limite ∞ ce qui est en contradiction avec le second membre de cette équation. Cette contradiction prouve que $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$. Ainsi la première partie du théorème 2 est démontrée.

Si l'équation (b) a une intégrale non oscillatoire qui a au moins une racine, il résulte du lemme 5 que cette équation n'a aucune intégrale oscillatoire.

Soit $z(x)$ une intégrale de l'équation (b) qui n'admet aucune racine et telle que $\lim\limits_{x\to\infty} z(x) \neq 0$. Trois cas sont possibles:

1° Il existe un nombre $\xi \in (-\infty, \infty)$ tel que l'un au moins des nombres $z'(\xi)$, $z''(\xi)$ est nul.

2° Il existe un nombre $\eta \in (-\infty, \infty)$ tel que $z(\eta) \,.\, z'(\eta) \,.\, z''(\eta) \neq 0$ et

a) $\operatorname{sgn} z(\eta) = \operatorname{sgn} z'(\eta) = \operatorname{sgn} z''(\eta)$, ou

b) $\operatorname{sgn} z(\eta) = \operatorname{sgn} z'(\eta) \neq \operatorname{sgn} z''(\eta)$ ou

c) $\operatorname{sgn} z(\eta) \neq \operatorname{sgn} z'(\eta) = \operatorname{sgn} z''(\eta)$.

3° Il est $z(x) \,.\, z'(x) \,.\, z''(x) \neq 0$, $\operatorname{sgn} z(x) = \operatorname{sgn} z''(x) \neq \operatorname{sgn} z'(x)$ en tout $x \in (-\infty, \infty)$.

1° Posons $x_0 = \xi$. Soit $z'(x_0) = 0$. Alors, $z = c_0 u_0 + c_2 u_2$ et $W(z, u_2) = c_0 W(u_0, u_2) \neq 0$ pour $x > x_0$, ($c_0 = z(x_0) \neq 0$ d'après l'hypothèse.) Il en vient que $z(x)$ et $u_2(x)$ ont le même caractère et, par suite, $u_0(x)$ et $u_1(x)$ ont le même caractère comme $z(x)$. Elles sont alors non oscillatoires. D'après le lemme 5, toute intégrale de l'équation (b) est alors non oscillatoire.

On démontre de même qu'aussi dans le cas où $z''(x_0) = 0$, toute intégrale de l'équation (b) est non oscillatoire.

2° Posons $x_0 = \eta$. Nous avons déja démontré plus haut que les intégrales de types a), b), c) ont le même caractère que les u_0, u_1, u_2. Or, dans ces cas u_1 est non oscillatoire, d'où, d'après le lemme 5, il vient que toute intégrale de l'équation (b) est non oscillatoire.

3° Soit $z(x) > 0$, $z'(x) < 0$, $z''(x) > 0$ dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Nous avons démontré plus haut que dans ce cas $\lim\limits_{x\to\infty} z''(x) = \lim\limits_{x\to\infty} z'(x) = 0$. $z(x)$ étant linéairement indépendante des u_1, u_2, d'après la formule de Liouville, on a la relation

$$z'' W(u_1, u_2) - z' W'(u_1, u_2) + z W''(u_1, u_2) = z(x_0)$$

d'où il résulte que $\lim_{x\to\infty} zW''(u_1, u_2) < \infty$, et de là, que $\lim_{x\to\infty} W''(u_1, u_2) < \infty$. En tenant compte de ce que $W(u_1, u_2)$ est une intégrale de l'équation (b') et en tenant compte du lemme 4, l'équation (b') n'a aucune intégrale oscillatoire. $W(z, u_1)$ étant une intégrale de l'équation (b'), il est $W(z, u_1) \neq 0$ pour les x grands. Il en vient que $z(x)$ et $u_1(x)$ ont le même caractère, donc u_1 est non oscillatoire, de là, d'après le lemme 5, il résulte que toute intégrale de l'équation (b) est non oscillatoire. Ainsi la deuxième partie du théorème 2 est aussi démontrée.

III

Si on considère l'équation $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0$, $n > 4$, on démontre sans difficulté que le théorème analogue au théorème 1 ou au théorème 2 n'est pas valable. Il suffit considérer l'équation $y^{(n)} + \frac{k}{x^n}\,y = 0$ avec $k > 0$ choisi convenablement.

RÉFÉRENCES

[1] *M. Švec:* Eine Eigenwertaufgabe der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x, \lambda)\,y = 0$, Чехословацкий математический журнал T. *6* (*81*), 1956, 46–71.

[2] *R. L. Potter:* On self-adjoint differential equation of second order, Pacific J. Math., 3 (1953), 467–491.

Резюме

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЯ $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0\,,\quad n = 3, 4$

МАРКО ШВЕЦ (Marko Švec), Братислава.

(Поступило в редакцию 16/XI 1956 г.)

Как известно, линейные дифференциальные уравнения второго порядка $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ обладают следующим свойством: если коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные на интервале (a, ∞) функции, то или все интегралы будут колеблющимися или все они будут неколеблющимися. Мы будем говорить, что они одинакового характера. В работе доказано, что интегралы уравнения $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0$ для $n = 3, 4$ обладают подобным свойством, если функция $Q(x)$ непрерывна и неотрицательна на ин-

тервале $(-\infty, \infty)$ и такая, что ни на каком частичном интервале не равна тождественно нулю. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Интегралы дифференциального уравнения*

$$y^{(4)} + Q(x)\, y = 0 \tag{a}$$

носят одинаковый характер.

Теорема 2. *Если дифференциальное уравнение*

$$y^{(3)} + Q(x)\, y = 0 \tag{b}$$

обладает колеблющимся интегралом, то каждый ее интеграл или является колеблющимся или не имеет корней. Такой интеграл $y(x)$, который не имеет корней, обладает следующими свойствами: $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ — монотонные функции;

$$\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)\,; \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0\,.$$

Если уравнение (b) *имеет неколеблющийся интеграл $y(x)$, имеющий хоть один корень, или такой, который не имеет корней и $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) \neq 0$, то все интегралы уравнения — неколеблющиеся.*