Karel Drbohlav

Gruppenartige Multigruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 2, 183–190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100242`

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

GRUPPENARTIGE MULTIGRUPPEN

KAREL DRBOHLAV, Praha.

(Eingelangt am 4. VI. 1956.)

In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich mit algebraischen Systemen von Elementen, innerhalb derer eine mehrdeutige binäre Operation erklärt ist; besonders mit den gruppenartigen Multigruppen, die eine gewisse Verallgemeinerung des wohlbekannten Begriffes einer Faktorgruppe bedeuten. Die Theorie von solchen Systemen wurde seit 1938 in verschiedenen Richtungen entwickelt. Ein Literaturverzeichnis am Ende dieses Artikels, der die wichtigsten dieses Thema betreffenden Arbeiten enthält, möge dem Leser zur Verfügung stehen. Das Ziel meiner Arbeit besteht insbesondere darin, alle gruppenartigen Multigruppen unter allen Multigruppoiden mit einer skalaren Rechtseinheit zu charakterisieren.

1. Gruppenartige Multigruppen. Man betrachte eine beliebige nichtleere Menge M von Elementen $a, b, c, \ldots$, in der eine mehrdeutige binäre Operation folgendermassen gegeben ist:

Das Produkt ab von zwei beliebigen Elementen a, b aus M bedeute immer eine nichtleere Untermenge von M.

Ist ein Element c in ab enthalten, so schreiben wir $c \in ab$, oder auch $c \subset ab$, oder $ab \supset c$.

Man nenne die Menge M mit einer mehrdeutigen binären Operation ein *Multigruppoid*. Ist ein Element j in M enthalten mit der Eigenschaft $xj = x$, $jx \supset x$ für alle x aus M, so nenne man dieses Element j (das eindeutig bestimmt ist) eine *skalare Rechtseinheit*.

Seien M_1, M_2 zwei Multigruppoide. Eine eineindeutige Abbildung φ von M_1 auf M_2 nenne man *Isomorphismus* von M_1 auf M_2, wenn folgendes gilt: $c \subset ab \Leftrightarrow c\varphi \subset (a\varphi)(b\varphi)$ für beliebige a, b aus M_1.

Eine andere Formulation: Es gilt $(ab)\,\varphi = (a\varphi)(b\varphi)$ für beliebige a, b aus M_1.

Enthält M_1 eine skalare Rechtseinheit j, so ist $j\varphi$ eine skalare Rechtseinheit in M_2.

Sei nun H eine Untergruppe einer gegebenen Gruppe G, und man betrachte das System S von Linksrestklassen von G nach H. Man definiere das Produkt $g_1H \cdot g_2H$ $(g_1, g_2 \in G)$ zweier beliebiger Elemente aus S als die Menge aller Linksrestklassen gH aus S, die in dem Komplexprodukt g_1Hg_2H (in G gerechnet) enthalten sind. Das System S wird auf diese Weise zu einem Multigruppoid mit skalarer Rechtseinheit H. Wir nennen das System S eine *gruppenartige Multigruppe* und bezeichnen sie mit G/H.

Man könnte natürlich auch Rechtsrestklassen von G nach H in ähnlicher Weise multiplizieren und in diesem Zusammenhang *linke* und *rechte* gruppenartige Multigruppen unterscheiden. In den letzteren wäre die Klasse H eine *skalare Linkseinheit*. Da wir aber nur von den linken gruppenartigen Multigruppen sprechen werden, benützen wir für diese einfach den Ausdruck „gruppenartige Multigruppe" und die Bezeichnung G/H. Falls H ein Normalteiler von G ist, so bedeutet G/H die gewöhnliche Faktorgruppe.

Die Benennung „gruppenartige Multigruppe" wird ferner für die Multigruppoide M benutzt, die mit irgendeiner gruppenartigen Multigruppe G/H isomorph sind.[1]) Ist $M \cong G/H$, so nenne man das Paar $[G, H]$ eine *Darstellung* von M. Ein beliebiger Automorphismus φ von G führt die Darstellung $[G, H]$ in die Darstellung $[G, H\varphi]$ über. Ein Isomorphismus $G/H \cong G/H\varphi$ wird durch die Abbildung $xH \longleftrightarrow (x\varphi) \cdot H\varphi$ vermittelt.

Sei nun eine gruppenartige Multigruppe G/H gegeben und sei N ein Normalteiler von G, $N \subset H$. Die Abbildung $gH \longleftrightarrow gN(H/N)$ ist ein Isomorphismus zwischen G/H und $(G/N)/(H/N)$, worüber man sich leicht überzeugen kann: Es gilt nämlich $g_1Hg_2H = \{\ldots g_1hg_2H \ldots\} \longleftrightarrow \{\ldots g_1hg_2N(H/N) \ldots\} = \{\ldots g_1NhNg_2N(H/N) \ldots\} = g_1N(H/N)\, g_2N(H/N)$, wo h immer als ein die Gruppe H durchlaufendes Element angenommen wird. Setzt man $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$, so bekommt man den

Satz 1. *Sei G/H eine beliebige gruppenartige Multigruppe und man setze $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$, $G/N = G^*$, $H/N = H^*$. Dann gilt folgendes:*

1. $G/H \cong G^*/H^*$, 2. $\bigcap_{g^* \in G^*} (g^*)^{-1} H^* g^* = \{1^*\}$ (*die Einheitsgruppe in* G^*).

Man nenne jede Darstellung $[G^*, H^*]$ mit der Eigenschaft 2. eine *Standarddarstellung*. Nach Satz 1. gibt es für jede beliebige gruppenartige Multigruppe wenigstens eine Standarddarstellung.

Um die Ein- oder Mehrdeutigkeit der Standarddarstellung besprechen zu können, führe man folgende Äquivalenz ein:

---

[1]) Es gibt natürlich auch Multigruppoide, die keine gruppenartigen Multigruppen sind. Sei z. B. $M = \{j, a, b, \ldots\}$ eine Menge von $n \geqq 2$ Elementen und man definiere $xj = x$, $xy = M$ für beliebige $x, y \in M$, $y \neq j$. Offenbar gelten folgende Regeln: 1. das Assoziativgesetz $(ab)\, c = a(bc)$, 2. $jx \supset x$, $xj = x$ für $x \in M$, 3. die Lösbarkeit von $ax \supset b$, $ya \supset b$ für beliebige $a, b \in M$. Doch ist M keine gruppenartige Multigruppe [siehe z. B. Hilfssatz 4. Auch die Bedingung β) von Satz 3* ist nicht erfüllt, denn für $y \neq j$ ist $M = jy \supset j$].

Zwei Darstellungen $[G_1, H_1]$ *und* $[G_2, H_2]$ *einer gruppenartigen Multigruppe* M *seien äquivalent, wenn es einen Isomorphismus von* G_1 *auf* G_2 *gibt, der* H_1 *in* H_2 *überführt.*

Um alle Darstellungen einer gegebenen gruppenartigen Multigruppe M gewinnen zu können, braucht man nach Satz 1 nur alle nichtäquivalente Standarddarstellungen von M aufzudecken (siehe Satz 4), denn der Übergang von Standarddarstellungen zu den „gewöhnlichen" Darstellungen verläuft nach den wohlbekannten Schreierschen Erweiterungsmethoden.

2. Wesentliche Permutationsgruppen. Sei M ein Multigruppoid mit einer skalaren Rechtseinheit j. Man beobachte eine beliebige Permutation π der Elemente aus M (d. h. eine beliebige eineindeutige Abbildung von M auf sich). Überführt die Permutation π ein Element a aus M in das Element b, so schreibe man $b = \pi a$. Ist ein Komplex A in M (eine nichtleere Untermenge von M) gegeben, so soll das Produkt πA als $\bigcup\limits_{a \in A} \pi a$ erklärt werden. Ähnlicherweise führe man noch folgende Begriffe ein:

1. Das Produkt zweier beliebiger Komplexe aus M: $A \,.\, B = \bigcup\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} ab$.

2. Das Produkt einer Permutationsmenge Π und eines Komplexes A aus M: $\Pi \,.\, A = \bigcup\limits_{\substack{\pi \in \Pi \\ a \in A}} \pi a$.

Die Permutation π heisse nun *wesentlich*, wenn für beliebige $a, b \in M$ folgendes „Assoziativgesetz" gilt: $\pi(ab) = (\pi a)\, b$.

Satz 2. *Alle wesentlichen Permutationen von* M *bilden eine Gruppe* $\Gamma(M)$. *Diejenigen wesentlichen Permutationen* π, *für die* $\pi j = j$ *ist, bilden ihre Untergruppe* $\Delta(M)$.

Der Beweis ist ganz einfach.

Ebenso leicht beweist man folgendes: *Sei* $\Pi \subset \Gamma(M)$; *dann gilt* $\Pi(AB) = (\Pi A)\, B$ *für beliebige Komplexe* A, B *aus* M.

Eine Permutationsgruppe, die nur aus wesentlichen Permutationen von M besteht, nennen wir eine *wesentliche Permutationsgruppe von* M.

Sei Γ eine beliebige wesentliche Permutationsgruppe von M und sei $\Delta = \Gamma \cap \Delta(M)$. Man bemerke, dass für jedes $\pi \in \Delta$ die Gleichung $\pi(jx) = jx$ gilt. Man führe folgende Bedingungen ein:

α) Γ ist transitiv über M,

β) Δ ist transitiv über jedem Produkt jx, wo x ein beliebiges Element aus M ist.

Die Bedeutung der Bedingungen α) und β) erklärt

Satz 3. *Die Existenz einer wesentlichen Permutationsgruppe* Γ *von* M *mit der Eigenschaft, dass* Γ *und* $\Delta = \Gamma \cap \Delta(M)$ *die Bedingungen* α) und β) *erfüllen, ist* *notwendig und hinreichend dazu, dass M eine gruppenartige Multigruppe ist. Sind die Bedingungen* α) *und* β) *erfüllt, so gilt* $M \cong \Gamma/\Delta$.

Eine schwächere Formulation:

Satz 3*. *M ist eine gruppenartige Multigruppe dann und nur dann, wenn $\Gamma(M)$ und $\Delta(M)$ die Bedingungen* α) *und* β) *erfüllen. Sind sie erfüllt, so gilt* $M \cong \Gamma(M)/\Delta(M)$.

Der Beweis des Satzes 3.: Sei zuerst M eine gruppenartige Multigruppe. Da isomorphe Multigruppen äquivalente Γ-Permutationsgruppen haben, so kann angenommen werden, dass $M = G/H$. Zu jedem g aus G stellt die Abbildung $xH \to gxH$ eine wesentliche Permutation von G/H vor. Alle Permutationen von dieser Art bilden eine wesentliche Permutationsgruppe Γ von G/H. Dabei erfüllen Γ und $\Delta = \Gamma \cap \Delta(M)$ die Bedingungen α) und β).

Um den Beweis in umgekehrter Richtung zu führen, betrachte man ein beliebiges Multigruppoid M mit einer skalaren Rechtseinheit j. Γ sei eine beliebige wesentliche Permutationsgruppe von M und man setze voraus, dass Γ und $\Delta = \Gamma \cap \Delta(M)$ die Bedingungen α) und β) erfüllen. Unmittelbar lässt sich dann folgender Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 1. *Für einen beliebigen Komplex A aus M gilt* $jA = \Delta A$.

Aus β) folgt nämlich $\Delta a \supset ja$ für beliebiges $a \in A$, und daraus ergibt sich $\Delta A \supset jA = (\Delta j)\, A = \Delta(jA) \supset \Delta A$.

Man betrachte nun folgende Abbildung von Γ auf M: $\pi \to \pi j$ für beliebiges π aus Γ. Durch diese Abbildung zerfällt Γ in eine bestimmte Anzahl von Klassen so, dass zwei beliebige Permutationen aus Γ dann und nur dann in dieselbe Klasse eingereiht werden, wenn sie auf dasselbe Element in M abgebildet sind. Die eben erwähnten Klassen identifiziert man leicht mit den Linksrestklassen von Γ/Δ, sodass eine eineindeutige Abbildung $\pi\Delta \longleftrightarrow \pi j$ von Γ/Δ auf M entsteht.

Sei nun $\pi_1\Delta \longleftrightarrow a$, $\pi_2\Delta \longleftrightarrow b$, $\pi_3\Delta \longleftrightarrow c$, d. h. $\pi_1 j = a$, $\pi_2 j = b$, $\pi_3 j = c$.

Aus $ab \supset c$ folgt sukzessiv $(\pi_1 j)(\pi_2 j) \supset \pi_3 j$, $\pi_1[j(\pi_2 j)] \supset \pi_3 j$ und nach Hilfssatz 1. $\pi_1[\Delta\pi_2 j] \supset \pi_3 j$, $\pi_3 \in \pi_1\Delta\pi_2\Delta$, $\pi_1\Delta\pi_2\Delta \supset \pi_3\Delta$.

Sei umgekehrt $\pi_1\Delta\pi_2\Delta \supset \pi_3\Delta$. Dann folgt $\pi_1\Delta\pi_2\Delta j \supset \pi_3\Delta j$, $\pi_1\Delta b \supset c$, $\pi_1(jb) \supset c$, $(\pi_1 j)\, b \supset c$, $ab \supset c$. Damit ist der Isomorphismus $\Gamma/\Delta \cong M$ bewiesen.

Sei G/H eine beliebige gruppenartige Multigruppe und man betrachte nun wieder die Permutationen $\varrho(g) = \begin{pmatrix} xH \\ gxH \end{pmatrix}$ von G/H. Man sieht leicht, dass $g_1 \neq g_2 \Leftrightarrow \varrho(g_1) \neq \varrho(g_2)$ dann und nur dann gilt, wenn $[G, H]$ eine Standarddarstellung ist.

Alle Permutationen $\varrho(g)$, $g \in G$, bilden eine wesentliche Permutationsgruppe $P(G/H)$ von G/H. Falls $[G, H]$ eine Standarddarstellung ist, so ist die Abbildung $g \longleftrightarrow \varrho(g)$ ein Isomorphismus von G auf $P(G/H)$ und es gilt folgender Satz:

Satz 4. *Ist* $[G, H]$ *eine Standarddarstellung einer gegebenen gruppenartigen Multigruppe* M, *so gilt, abgesehen von Isomorphismus,* $G \subset \Gamma(M)$, $H = G \cap \cap \Delta(M)$.

Sei M eine beliebige gruppenartige Multigruppe. Es gilt $M \cong \Gamma(M)/\Delta(M)$, wobei dieser Isomorphismus durch die Abbildung $\xi j \longleftrightarrow \xi\, \Delta(M)$, $\xi \in \Gamma(M)$ gegeben ist (siehe Satz 3, Beweis). Man untersuche die Gruppe $\Gamma[\Gamma(M)/\Delta(M)]$! Durch die Relation $\pi(\xi j) \longleftrightarrow \sigma(\xi\, \Delta(M))$ für alle $\xi \in \Gamma(M)$ wird eine eineindeutige Abbildung $\pi \longleftrightarrow \sigma$ von $\Gamma(M)$ auf $\Gamma[\Gamma(M)/\Delta(M)]$ vermittelt. Aus $(\pi\xi)\, j \longleftrightarrow \pi\xi\, \Delta(M)$ folgt aber $\sigma(\xi\, \Delta(M)) = \pi\xi\, \Delta(M)$ für jedes $\xi \in \Gamma(M)$ und daraus schliesst man: $P(\Gamma(M)/\Delta(M)) = \Gamma(\Gamma(M)/\Delta(M))$.

Jede wesentliche Permutation von $\Gamma(M)/\Delta(M)$ kann als gewisse $\varrho(\pi)$-Permutation von $\Gamma(M)/\Delta(M)$ aufgefasst werden. Da nun verschiedene Permutationen π_1, π_2 aus $\Gamma(M)$ zu verschiedenen Permutationen $\varrho(\pi_1)$, $\varrho(\pi_2)$ von $\Gamma(M)/\Delta(M)$ führen, so gilt der Satz:

Satz 5. *Die Darstellung* $[\Gamma(M), \Delta(M)]$ *einer beliebigen gruppenartigen Multigruppe* M *ist eine Standarddarstellung.*

3. Die Primitivität und zweifache Transitivität von $\Gamma(M)$. Sei M eine gruppenartige Multigruppe. Aus Satz 3* folgt die Transitivität von $\Gamma(M)$ über M. Wann gilt die Primitivität? Man betrachte die Menge $\mathfrak{N}$ aller Multigruppoide N, die in M enthalten sind, und die folgende Bedingungen erfüllen:

a) $j \in N$.

b) Die Gleichung $xa \supset j$ ist für jedes $a \in N$ innerhalb N lösbar.

Man setze zuerst $M = G/H$. Ist $N \in \mathfrak{N}$, so bezeichne man mit N' die Vereinigungsmenge aller Linksrestklassen von G/H, die das Multigruppoid N bilden. N' ist multiplikativ abgeschlossen und $1 \in N'$. Ist g in N' gegeben, so löse man nach b) die Gleichung $xHgH \supset H$. Es gibt Elemente h_1, h_2 aus H, für die $xh_1gh_2 = 1$ gilt. Daraus folgt $g^{-1} = h_2xh_1$, sodass $g^{-1} \in N'$. N' ist also eine Gruppe, $H \subset N' \subset G$.

Ist umgekehrt eine Gruppe N' gegeben, $H \subset N' \subset G$, so gilt $N'/H \in \mathfrak{N}$. Daraus schliesst man:

Hilfssatz 2. *Jedes Multigruppoid* N *aus* $\mathfrak{N}$ *ist eine gruppenartige Multigruppe. Es besteht eine eineindeutige Abbildung* $N \longleftrightarrow N'$ *zwischen der Menge* $\mathfrak{N}$ *und der Menge* $\mathfrak{N}'$ *aller Gruppen* N' *mit der Eigenschaft* $H \subset N' \subset G$.

Dasselbe gilt natürlich auch dann, wenn $M \cong G/H$ statt $M = G/H$ gilt, insbesondere für $\Gamma(M)/\Delta(M)$. Da die Gruppe $\Delta(M)$ gerade aus allen Permutationen $\pi \in \Gamma(M)$ gebildet ist, die das Element j festlassen, so gilt nach dem wohlbekannten Satz über Permutationsgruppen folgendes:

$\Gamma(M)$ ist primitiv über M dann und nur dann, wenn es keine Gruppe N' gibt mit der Eigenschaft $\Delta(M) \subset N' \subset \Gamma(M)$, $\Delta(M) \neq N' \neq \Gamma(M)$.

Daraus schliesst man nach Hilfssatz 2:

Satz 6. *Sei M eine gruppenartige Multigruppe. Dann gilt: $\Gamma(M)$ ist primitiv über M dann und nur dann, wenn $\mathfrak{N}$ nur aus den trivialen Multigruppen M und (j) besteht. In diesem Falle gilt dann für jede Darstellung $[G, H]$ von M folgendes: Entweder ist $H = G$, oder ist H eine maximale Untergruppe von G.*

Sei stets M eine gruppenartige Multigruppe und seien $\pi, \alpha, \beta \in \Gamma(M)$, $\alpha j = a$, $\beta j = b$. Man beweist leicht folgende Äquivalenz:

(A) $$\pi a = b \Leftrightarrow \pi^{-1} \in \alpha\, \Delta(M)\, \beta^{-1}\,.$$

Man betrachte ferner folgende zwei Bedingungen:

(B) Für alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma(M)$, $\beta^{-1}\alpha$ non $\in \Delta(M)$, $\delta^{-1}\gamma$ non $\in \Delta(M)$, gilt
$$\alpha\, \Delta(M)\, \gamma^{-1} \cap \beta\, \Delta(M)\, \delta^{-1} \neq \emptyset\,.$$

(C) Für alle $\alpha, \beta, \varepsilon \in \Gamma(M)$, $\beta^{-1}\alpha$ non $\in \Delta(M)$, ε non $\in \Delta(M)$, gilt
$$\alpha\, \Delta(M) \subset \beta\, \Delta(M)\, \varepsilon\, \Delta(M)\,.$$

Hilfssatz 3. *Die Bedingungen* (B) *und* (C) *sind äquivalent.*

Beweis: Man setze (B) voraus. Wählt man in (B) $\gamma = 1$, $\delta = \varepsilon^{-1}$, so ist $\delta^{-1}\gamma = \varepsilon$ non $\in \Delta(M)$, also $\alpha\, \Delta(M) \cap \beta\, \Delta(M)\, \varepsilon \neq \emptyset$. Daraus folgt (C).

Ist umgekehrt (C) vorausgesetzt, so setze man $\varepsilon = \delta^{-1}\gamma$, sodass $\alpha\, \Delta(M) \subset \subset \beta\, \Delta(M)\, \delta^{-1}\gamma\, \Delta(M)$, also ist $\alpha\, \Delta(M) \cap \beta\, \Delta(M)\, \delta^{-1}\gamma \neq \emptyset$. Daraus folgt (B). Für weitere Untersuchungen brauchen wir noch den

Hilfssatz 4. *Gilt in einer gruppenartigen Multigruppe M für irgendwelche zwei Elemente a, b die Gleichung $ab = M$, so ist $M = \{j\}$.*

Beweis. Man kann $M = G/H$ setzen. Sei nun $gHkH = G/H$. Dann gilt für bestimmte h_1, h_2 aus H die Gleichung $gh_1kh_2 = g$. Daraus folgt $k \in H$, und $H = G$.

Satz 7. *Sei M eine beliebige gruppenartige Multigruppe. Ist $\Gamma(M)$ zweifach transitiv über M, so richtet sich die Multiplikation in M nach folgenden Regeln:*

1. *$aj = a$ für beliebiges $a \in M$,*

2. *$ab = M - a$ für beliebige $a, b \in M$, $b \neq j$, und umgekehrt. Ist M endlich und n die Anzahl ihrer Elemente, so gilt in diesem Falle $M \cong S_n/S_{n-1}$, wo S_n die symmetrische Permutationsgruppe von n Elementen bedeutet. Umgekehrt hat jede Multigruppe S_n/S_{n-1} die erwähnte Eigenschaft.*

Beweis. Sei $\Gamma(M)$ zweifach transitiv über M. Für beliebige Elemente $\alpha j = a$, $\beta j = b$, $\gamma j = c$, $\delta j = d$, für die $a \neq b$, $c \neq d$ gilt, muss nach (A) $\alpha\, \Delta(M)\, \gamma^{-1} \cap \beta\, \Delta(M)\, \delta^{-1}$ eine nichtleere Menge sein, was eben die Bedingung (B) ist. Nach Hilfssatz 3 gilt (C). Aus dem Isomorphismus $M \cong \Gamma(M)/\Delta(M)$ folgt

(D) $$a \subset be \text{ für beliebige } a, b, e \in M,\ a \neq b,\ e \neq j.$$

Für be $(e \neq j)$ gibt es also zwei Möglichkeiten: 1. $be = M - b$, 2. $be = M$, wobei die zweite, vermöge des Hilfssatzes 4, versagt. Die Multiplikationsregeln von Satz 7 sind also bewiesen.

Man setze nun diese Multiplikationsregeln voraus, (M ist also ein Multigruppoid mit einer skalaren Rechtseinheit) und man untersuche $\Gamma(M)$. Da $\pi(ab) = (\pi a)\, b$ für $b = j$ trivial erfüllt ist, so braucht nur $b \neq j$ aufgenommen werden. Dann gilt $\pi \in \Gamma(M)$ dann und nur dann, falls $\pi(M - a) = M - \pi a$ für beliebiges $a \in M$ ist, was aber für jede Permutation von M erfüllt ist. Daraus folgt, dass $\Gamma(M)$ und $\Delta(M)$ die Bedingungen α) und β) von Satz 3* erfüllen, sodass M eine gruppenartige Multigruppe ist. Ferner ist $\Gamma(M)$ über M zweifach transitiv. Falls M endlich, und n die Anzahl ihrer Elemente ist, so gilt $\Gamma(M) = S_n$, $\Delta(M) = S_{n-1}$. Die übrigen Behauptungen des Satzes sind evident.

Korollar. *Für $n \geqq 2$ ist S_{n-1} eine maximale Untergruppe von S_n.*

Die Theorie der gruppenartigen Multigruppen in Verbindung mit ihren Permutationsgruppen $\Gamma(M)$ lässt verschiedene interessante Fragen offen, auf die wir hier aber leider nicht eingehen können.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *M. Drescher, O. Ore:* Theory of multigroups, American Journal of Mathematics, *60*, 1938, 705–733.

[2] *J. E. Eaton:* Theory of Cogroups, Duke Mathematical Journal, *6*, 1940, 101–107.

[3] *M. Krasner:* La loi de Jordan-Hölder dans les hypergroupes et les suites génératrices des corps de nombres $\mathfrak{P}$-adiques, Duke Mathematical Journal *6*, 1940, 120–140.

[4] *M. Krasner:* La caractérisation des hypergroupes de classes et le problème de Schreier dans ces hypergroupes, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *212*, 1941, 948–950.

[5] *M. Krasner:* La caractérisation des hypergroupes de classes et le problème de Schreier dans ces hypergroupes: errata, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *218*, 1944, 483–484.

[6] *M. Krasner:* Rectifications à ma note précédente et quelques nouvelles contributions à la théorie des hypergroupes, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *218*, 1944, 542–544.

Резюме

ГРУППОПОДОБНЫЕ МУЛЬТИГРУППЫ

КАРЕЛ ДРБОГЛАВ (Karel Drbohlav), Прага.

(Поступило в редакцию 4/VI 1956 г.)

Мультигруппоид M есть непустое множество, в котором определена одна многозначная бинарная операция: произведение $a\,.\,b$ двух произвольных элементов $a, b \in M$ является всегда непустым подмножеством в M. Если в M существует элемент j такой, что $x = xj$, $x \in jx$ для любого $x \in M$, то j есть *правая скалярная единица в M.*

Понятие фактор-группы можно обобщить следующим образом: левые смежные классы gH разложения группы G по ее подгруппе H перемножаются между собой так, что произведение $g_1H \cdot g_2H$ означает множество всех смежных классов разложения, содержащихся в подмножестве (комплексе) g_1Hg_2H. Получающаяся таким образом система G/H является мультигруппоидом с правой скалярной единицей H. Мультигруппоид G/H (и, более обще, каждый мультигруппоид, изоморфный G/H) называем (*левой*) *группоподобной мультигруппой*. Если $M \cong G/H$, то называем $[G, H]$ *представлением* M, которое является *стандартным*, если имеет место равенство $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = (1)$. Всякая группоподобная мультигруппа обладает стандартным представлением (Теорема 1).

Пусть M — мультигруппоид с правой скалярной единицей j. Введем обозначения:

$\Gamma(M)$ — группа всех перестановок π множества M таких, что $\pi(ab) = (\pi a)\, b$ для всех $a, b \in M$.

$\Delta(M)$ — группа всех перестановок $\pi \in \Gamma(M)$ таких, что $\pi j = j$.

M будет группоподобной мультигруппой тогда и только тогда, если выполнены следующие условия:

α) $\Gamma(M)$ транзитивна над M,

β) $\Delta(M)$ транзитивна над каждым подмножеством jx ($x \in M$). (Теорема 3*.)

При выполнении α) и β) M обладает стандартным представлением $[\Gamma(M), \Delta(M)]$. (Теорема 5.)

Если $[G, H]$ еще одно произвольное стандартное представление того же мультигруппоида M, то имеет место, вплоть до изоморфизма, равенство $G \subset \Gamma(M)$, $H = G \cap \Delta(M)$. (Теорема 4.)

Пусть M — группоподобная мультигруппа и пусть $\mathfrak{N}$ — система всех подгруппоидов $N \subset M$ со следующими свойствами: а) $j \in N$, б) для всякого $a \in N$ существует $x \in N$ такое, что имеет место $j \in xa$. Тогда каждый мультигруппоид $N \in \mathfrak{N}$ будет группоподобной мультигруппой (Лемма 2). $\Gamma(M)$ примитивно над M тогда и только тогда, если $\mathfrak{N}$ содержит только тривиальные подмультигруппы (j) и M. В таком случае для каждого представления $[G, H]$ мультигруппы M может наступить один из следующих случаев: 1. $H = G$, 2. H есть максимальная подгруппа в G. (Теорема 6.)

Пусть M — группоподобная мультигруппа. Если $\Gamma(M)$ над M вдвойне транзитивна, то в M справедливы следующие правила: 1. $aj = a$ ($a \in M$) 2. $ab = M - a$ ($a, b \in M$, $b \neq j$) и наоборот. Если M — мультигруппа конечного порядка n, то из справедливости 1. и 2. следует $M \cong S_n/S_{n-1}$, где S_n — симметрическая группа степени n, и наоборот. (Теорема 7.)