Michal Greguš

О некоторых новых краевых проблемах дифференциального уравнения третьего порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, 41–(47)

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100229`

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ КРАЕВЫХ ПРОБЛЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

МИХАЛ ГРЕГУШ (Michal Greguš), Братислава.

(Поступило в редакцию 30/VI 1955 г.)

При помощи т. наз. осцилляционной теоремы *Дж. Сансоне* и при помощи свойств нулей в зависимости от параметра λ в работе решено пять краевых проблем, касающихся интегралов дифференциального уравнения $y''' + 2Ay' + (A' + b)\, y = 0$, с краевыми условиями $y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0$, $y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0$, $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$, $y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y(c, \lambda) = 0$, $y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$.

Введение. В работе решено пять краевых проблем, касающихся интегралов дифференциального уравнения

$$y''' + 2A(x, \lambda)\, y' + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)]\, y = 0 \tag{a}$$

с краевыми условиями

$$1.\ y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0\,, \quad 2.\ y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0\,,$$

$$3.\ y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0\,, \quad 4.\ y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y(c, \lambda) = 0\,,$$

$$5.\ y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$$

при определенных предположениях относительно коэффициентов $A(x, \lambda)$, $b(x, \lambda)$, причем $a < b < c$ или $a > b > c$ суть действительные числа.

Решение проведено при помощи т. наз. осцилляционной теоремы Дж. Сансоне [1] и при помощи непрерывности нулей интеграла y и его производной y' при изменении параметра λ.

Вместо понятия ,,нуль'' (нулевая точка) было бы удобно воспользоваться понятием ,,дисперсия'', которое ввел О. Борувка [2]; непрерывность относительно параметра λ является одним из основных ее свойств [3]. Понятие дисперсии не вводится в явном виде, поэтому представляется более желательным особо доказать непрерывность нулей относительно параметра λ (λ-непрерывность).

В работе [4] решена краевая проблема, касающаяся интегралов дифференциального уравнения (a) с краевыми условиями $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y(c, \lambda) = 0$. Для решения непосредственно используются дисперсии.

Краевую проблему с условиями 1. решил Дж. Сансоне [1] для интегралов дифференциального уравнения

$$y''' + 2A(x)\, y' + \lambda[A'(x) + b(x)]\, y = 0$$

при специальных предположениях относительно коэффициентов при помощи интегральных уравнений.

Краевую проблему с условиями 2. решил также Дж. Сансоне [1], однако для интегралов дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами относительно переменного x в случае $b < a$.

I

Рассмотрим дифференциальное уравнение (a). Относительно коэффициентов $A(x, \lambda)$, $A'(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x} A(x, \lambda)$, $b(x, \lambda)$ мы предполагаем:

1. Пусть $A(x, \lambda) > 0$, $A'(x, \lambda)$, $b(x, \lambda) \geqq 0$ суть непрерывные функции переменного $x \in (-\infty, \infty)$ и $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$.

2. Пусть $A(x, \lambda)$ — возрастающая функция параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ и пусть $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$ при любом $x \in (-\infty, \infty)$. Пусть далее $b(x, \lambda)$ не равно нулю ни в одном частичном интервале для $x \in (-\infty, \infty)$.

Известно [1], что для интегралов $y = y(x, \lambda)$ дифференциального уравнения (a) имеет место т. наз. интегральное тождество Маммана:

$$yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \int\limits_a^x by^2\, \mathrm{d}x = \text{konst}\,,$$

причем $a \in (-\infty, \infty)$ — фиксированное, x — произвольное число.

Дифференциальное уравнение, сопряженное с уравнением (a), имеет вид

$$y''' + 2Ay' + (A' - b)\, y = 0\,, \tag{b}$$

а интегральное тождество для интегралов дифференциального уравнения (b) имеет вид

$$yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + Ay^2 - \int\limits_a^x by^2\, \mathrm{d}x = \text{konst}\,. \tag{1}$$

Пусть $a \in (-\infty, \infty)$ — фиксированное число. Известно [4], что все интегралы дифференциального уравнения (a), имеющие в числе a нуль, можно записать в виде $y = c_1y_1 + c_2y_2$, где y_1, y_2 — независимые интегралы дифференциального уравнения (a) со свойством $y_1(a, \lambda) = y_1'(a, \lambda) = 0$,

$y_2(a, \lambda) = y_2''(a, \lambda) = 0$, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Интегралы $c_1y_1 + c_2y_2$ удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению второго порядка, которое для $x > a$ можно записать в виде

$$\left[\frac{1}{w}\,y'\right]' + \left[\frac{2A}{w} + \frac{w''}{w^2}\right]y = 0\,, \tag{c}$$

где $w = w(x, \lambda)$ — интеграл дифференциального уравнения (b) с двойным нулем в точке a, не имеющий вправо от a других нулей. В этом легко убедиться по интегральному тождеству (1), которое для w имеет вид

$$ww'' - \tfrac{1}{2}w'^2 + Aw^2 - \int\limits_a^x bw^2\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Если предположить, что $x_1 > a$ является нулем интеграла w, то его подстановка в интегральное тождество приводит к противоречию.

Уравнение (c) мы получим, исключив c_1, c_2 из уравнений

$$y = c_1y_1 + c_2y_2\,, \quad y' = c_1y_1' + c_2y_2'\,, \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$$

и приняв во внимание то обстоятельство, что $y_1y_2 - y_1'y_2 = w$, [1].

Дж. Сансоне [1] доказал следующую т. наз. осцилляционную теорему:

Пусть $A(x) > 0$ вместе с $A'(x)$ суть непрерывные функции от $x \in \langle a, b\rangle$. Пусть $b(x, \lambda) \geqq 0$ для $x \in \langle a, b\rangle$ и $\lambda \geqq \lambda_0$. Тогда каждый интеграл дифференциального уравнения

$$y''' + 2\lambda Ay' + (\lambda A' + b)\,y = 0\,,$$

выполняющий начальные условия

$$y(a, \lambda)\,y''(a, \lambda) - \tfrac{1}{2}y'^2(a, \lambda) + A(a)\,y^2(a, \lambda) \leqq 0\,, \tag{2}$$

будет иметь в (a, b) нули, число которых возрастает до бесконечности с возрастающим λ, причем расстояние между двумя нулями стремится к нулю.

Замечание 1. Осцилляционная теорема справедлива и для дифференциального уравнения (a) при предположениях 1., 2. в любом интервале $\langle a, b\rangle \subset (-\infty, \infty)$. Доказательство видоизмененной таким образом теоремы подобно доказательству первоначальной теоремы.

Пусть $a < b \in (-\infty, \infty)$. Пусть $y(x, \lambda)$ — один из интегралов дифференциального уравнения (a), имеющий в точке a нуль. Следовательно, в точке a он удовлетворяет условию (2) и по осцилляционной теореме, начиная с некоторого $\Lambda_0 \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, имеет в $\langle a, b\rangle$ нули, число которых безгранично возрастает с возрастающим λ (мы будем вкратце говорить: интеграл колеблется в $\langle a, b\rangle$).

В интервале (a, ∞), а значит и в $(a, b\rangle$, функция $y(x, \lambda)$ имеет только простые нули, так как для $x > a$ она удовлетворяет дифференциальному уравнению (c).

Покажем, что нули интеграла $y(x, \lambda)$ являются непрерывными функциями параметра $\lambda \in (\Lambda_0, \Lambda_2)$ для $x > a$.

Из общей теоремы о дифференциальных системах, зависящих от параметра λ [5], следует, что в каждом замкнутом двумерном интервале для x и λ из области определения y, y', y'' являются непрерывными функциями x и λ.

Обозначим нули интеграла $y(x, \lambda)$:

$$a < x_1(\lambda) < x_2(\lambda) < \ldots < x_\nu(\lambda) < \ldots$$

Очевидно, $y[x_i(\lambda_1), \lambda_1] = 0$, но $y'[x_i(\lambda_1), \lambda_1] \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Поэтому для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для $|\lambda - \lambda_1| < \delta$ и для $a \leqq x \leqq x_\nu(\lambda_1) + \varepsilon$ будет

$$|y(x, \lambda_1) - y(x, \lambda)| < \min_u |y(u, \lambda_1)|\ ,$$

где

$$\begin{gathered} a + \varepsilon \leqq u \leqq x_1(\lambda_1) - \varepsilon\ , \\ x_1(\lambda_1) + \varepsilon \leqq u \leqq x_2(\lambda_1) - \varepsilon\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\nu-1}(\lambda_1) + \varepsilon \leqq u \leqq x_\nu(\lambda_1) - \varepsilon\ , \\ x_\nu(\lambda_1) + \varepsilon = u\ . \end{gathered}$$

Очевидно, что тогда в каждом интервале $\langle x_i(\lambda_1) - \varepsilon,\ x_i(\lambda_1) + \varepsilon\rangle$ $i = 1, 2, \ldots, \nu$ функция $y(x, \lambda)$ имеет для $|\lambda - \lambda_1| < \delta$ в точности один нуль, а в интервалах $(a, x_1(\lambda_1) - \varepsilon)$, $(x_i(\lambda_1) + \varepsilon,\ x_{i+1}(\lambda_1) - \varepsilon)$ не имеет ни одного. Отсюда следует непрерывная зависимость нулей $x_\nu(\lambda)$ от параметра λ.

Аналогично можно доказать, что нули производной $y'(x, \lambda)$ являются непрерывными функциями параметра λ.

II

Теорема 1. *Пусть коэффициенты дифференциального уравнения* (a) *выполняют предположения* 1., 2. п. I. *Пусть $a < b \in (-\infty, \infty)$ — фиксированные числа.*

Тогда существует бесконечное количество значений параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, которым соответствует последовательность функций $y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_{\nu+p}, \ldots$ с тем свойством, что $y_{\nu+p} = y(x, \lambda_{\nu+p})$ является интегралом дифференциального уравнения (a), *удовлетворяющим краевым условиям*

1) $y(a, \lambda_{\nu+p}) = y'(a, \lambda_{\nu+p}) = y(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$, *или*

2) $y(a, \lambda_{\nu+p}) = y'(a, \lambda_{\nu+p}) = y'(b, \lambda_{\nu+p}) = 0$

и имеющим в интервале (a, b) в точности $\nu + p$ нулей.

Доказательство. 1. Пусть $y(x, \lambda)$ — интеграл дифференциального уравнения (a) с двойным нулем в точке a. $y(x, \lambda)$ является в то же время интегралом дифференциального уравнения (c), так как $y(a, \lambda) = 0$. Очевидно, $y(x, \lambda)$ удовлетворяет в точке a условию (2) и следовательно, согласно осцилляционной теореме, он колеблется в (a, b) начиная с некоторого $\Lambda_0 \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$.

Пусть для $\lambda = \bar{\lambda} \in (\Lambda_0, \Lambda_2)$ функция $y(x, \bar{\lambda})$ умеет в (a, b) ν нулей. Тогда $x_{\nu+1}(\lambda) \geqq b$.

Из осцилляционной теоремы следует, что существует такое $\bar{\bar{\lambda}} \in (\bar{\lambda}, \Lambda_2)$, для которого $x_{\nu+1}(\bar{\bar{\lambda}}) < b$. Так как $x_{\nu+1}(\lambda)$ является непрерывной функцией параметра λ, то существует такое $\lambda_\nu \in (\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}})$, для которого $x_{\nu+1}(\lambda_\nu) = b$. Итак, $y(a, \lambda_\nu) = y'(a, \lambda_\nu) = y(b, \lambda_\nu) = 0$, причем $y_\nu = y(x, \lambda_\nu)$ имеет в (a, b) в точности ν нулей.

Далее, очевидно, будет $x_{\nu+1}(\lambda_\nu) = b < x_{\nu+2}(\lambda_\nu)$.

Однако, из осцилляционной теоремы следует существование такого $\lambda^* \in (\lambda_\nu, \Lambda_2)$, для которого $x_{\nu+2}(\lambda^*) < b$.

Из λ-непрерывности $x_{\nu+2}(\lambda)$ следует, что существует такое $\lambda_{\nu+1} \in (\lambda_\nu, \lambda^*)$, для которого $x_{\nu+2}(\lambda_{\nu+1}) = b$, откуда видно, что $y_{\nu+1} = y(x, \lambda_{\nu+1})$ удовлетворяет краевым условиям

$$y(a, \lambda_{\nu+1}) = y'(a, \lambda_{\nu+1}) = y(b, \lambda_{\nu+1}) = 0$$

и имеет в интервале (a, b) в точности $\nu + 1$ нулей.

Продолжая это рассуждение, мы получили бы последовательность значений параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, которой соответствует последовательность функций $y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_{\nu+p}, \ldots$ с требуемыми свойствами.

2. Доказательство утверждения 2) нашей теоремы подобно доказательству утверждения 1) с той разницей, что вместо нулей интеграла y нужно рассматривать нули производной y'.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты дифференциального уравнения* (a) *выполняют предположения* 1., 2., *сформулированные в п.* I. *Пусть* $a < b < c \in (-\infty, \infty)$ — *фиксированные числа.*

Тогда существует бесконечное количество значений параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, *которым соответствует последовательность функций* $y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_{\nu+p}, \ldots$ *с тем свойством, что* $y_{\nu+p} = y(x, \lambda_{\nu+p})$ *является интегралом дифференциального уравнения* (a), *удовлетворяющим краевым условиям:* 3) $y(a, \lambda_{\nu+p}) = y(b, \lambda_{\nu+p}) = y'(c, \lambda_{\nu+p}) = 0$, *или* 4) $y(a, \lambda_{\nu+p}) = y'(b, \lambda_{\nu+p}) = y(c, \lambda_{\nu+p}) = 0$, *или* 5. $y(a, \lambda_{\nu+p}) = y'(b, \lambda_{\nu+p}) = y'(c, \lambda_{\nu+p}) = 0$ *и имеющим в интервале* (b, c) *в точности* $\nu + p$ *нулей.*

Доказательство. В случае 3) рассмотрим интеграл $y(x, \lambda)$ дифференциального уравнения (a) со свойством $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0$. Такой интеграл существует. Действительно, достаточно в общем интеграле дифференциального уравнения (c) надлежащим образом подобрать постоянные c_1, c_2.

Согласно осцилляционной теореме, выбранный таким образом интеграл дифференциального уравнения (a) колеблется в интервале (b, c).

Вполне аналогично рассуждениям в теореме 1, если принять во внимание λ-непрерывность нулей производной $y'(x, \lambda)$, докажем утверждение нашей теоремы в случае 3.

В случаях 4), 5) нужно рассмотреть интеграл $y(x, \lambda)$ дифференциального уравнения (a) со свойством $y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0$. Такой интеграл существует. Действительно, достаточно в общем интеграле дифференциального уравнения (c) подобрать надлежащим образом постоянные c_1, c_2.

Выбранный таким образом интеграл $y(x, \lambda)$ дифференциального уравнения (a) колеблется в интервале (b, c), и число нулей безгранично возрастает справа налево с возрастающим λ, поскольку, согласно осцилляционной теореме, возрастает число нулей интеграла $\bar{y}(x, \lambda)$ со свойством $\bar{y}(a, \lambda) = \bar{y}(b, \lambda) = 0$, который вместе с интегралом $y(x, \lambda)$ является решением дифференциального уравнения (c) и который удовлетворяет в точке a условию (2) осцилляционной теоремы. Ввиду этого, их нули отделяют друг друга.

Рассуждая теперь совершенно аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1 и используя в случае 4) λ-непрерывность нулей интеграла $y(x, \lambda)$, а в случае 5) λ-непрерывность нулей производной $y'(x, \lambda)$, нетрудно доказать утверждение 4) и 5) нашей теоремы.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 можно доказать и в том случае, когда $a > b > c$, но тогда нужно предположить, что $b(x, \lambda) \leqq 0$ для $x \in (-\infty, \infty)$ и $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, притом $b(x, \lambda)$ не может тождественно равняться нулю ни в одном частичном интервале интервала $(-\infty, \infty)$ для x, ни при каких значениях $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$.

Действительно, при этом предположении можно доказать осцилляционную теорему в интервале $\langle b, a \rangle$, причем условие (2) должно быть выполнено в точке a, для которой имеет, следовательно, место неравенство $a > b$. Доказательство аналогично доказательству первоначальной теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Sansone:* Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale, Revista Matem. y Fisica Teorica, Serie A, 1948, Tucuman, 195—253.

[2] *O. Борувка:* О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка, Чехословацкий математический журнал, т. *3* (*78*), 1953, 199—247.

[3] *M. Greguš:* Aplikácia disperzií na okrajový problém druhého rádu, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *1*, 1954, 27—37.

[4] *M. Greguš:* O niektorých nových vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *2*, 1955, 73—85.

[5] *Дж. Сансоне:* Обыкновенные дифференциальные уравнения I, стр. 27, Москва — 1953.

ÜBER EINIGE NEUE RANDWERTPROBLEME DER DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG

MICHAL GREGUŠ, Bratislava.

(Eingelangt am 30. Juni 1955.)

In der vorliegenden Arbeit werden 5 Randwertprobleme der Differentialgleichung:

$$y''' + 2A(x, \lambda)\, y' + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)]y = 0 \qquad \text{(a)}$$

gelöst. Die Lösung gelingt unter Benutzung des sogenannten Oszillationstheorems von G. Sansone (1) und mit Hilfe von Sätzen über die Stetigkeit der Nullstellen der Differentialgleichung (a) mit dem Parameter.

Das Ergebnis lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Von den Koeffizienten der Differentialgleichung (a) wird vorausgesetzt:

1. *Es seien* $A(x, \lambda) > 0$, $A'(x, \lambda)$, $b(x, \lambda) \geqq 0$ *stetige Funktionen von* $x \in (-\infty, \infty)$ *und* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$.

2. *Es sei* $A(x, \lambda)$ *eine steigende Funktion von* λ *und es gelte* $\lim_{\lambda \to \Lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$ *für jedes* $x \in (-\infty, \infty)$.

Es sei weiter $b(x, \lambda)$ *in keinem Teilintervall von* $x \in (-\infty, \infty)$ *ungleich Null und es seien* $a < b < c \in (-\infty, \infty)$ *konstante Zahlen.*

Unter diesen Voraussetzungen gibt es unendlich viele Werte des Parameters λ: $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, *zu welchen die Folge der Funktionen* $y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_{\nu+p}, \ldots$ *gehört, welche Integrale der Differentialgleichung* (a) *sind. Jedes Integral genügt einer der fünf nachstehenden Randbedingungen:*

$$1.\ y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0\,, \quad 2.\ y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0\,,$$

$$3.\ y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0\,, \quad 4.\ y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y(c, \lambda) = 0\,,$$

$$5.\ y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0\,.$$

Das Integral hat für die Randbedingungen 1. *und* 2. *im Intervall* (a, b) *und für die Randbedingungen* 3., 4. *und* 5. *im Intervall* (b, c) *genau* $\nu + p$ *Nullstellen.*

Wenn wir $b(x, \lambda) \leqq 0$ voraussetzen, dann gilt der Satz auch für den Fall $a > b > c$.