Czechoslovak Mathematical Journal

Jaroslav Kurzweil

Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 4, 455–484

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100216

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

ОБ ОБРАЩЕНИИ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ
(Продолжение)

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага.
(Поступило в редакцию 6/VII 1955 г.)

5. Теорема о гомеоморфизме множества G и некоторые следствия.

В начале настоящей работы мы предположили, что множество G открыто, $0 \in G$, и определили понятие сильной устойчивости в G нулевого интеграла уравнения (1,01). В теоремах 1 и 7 было показано, что нулевой интеграл уравнения (1,01) является сильно устойчивым в G тогда и только тогда, если на множестве G можно определить функцию $V(x, t)$, удовлетворяющую некоторым условиям. В настоящем параграфе мы докажем, что множество G обладает весьма простой топологической структурой, если нулевой интеграл уравнения (1,01) сильно устойчив в G.

Предположение о том, что функция $f(x, t)$ определена и непрерывна в G, остается в силе. Пусть R есть открытая единичная сфера в E_n, т. е.

$$R = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [x \in E_n, \|x\| < 1] .$$

Докажем справедливость

Теоремы 8. *Предположим, что нулевой интеграл уравнения* (1,01) *сильно устойчив в* G.

Тогда существует гомеоморфное отображение $h(x)$ *множества* G *на сферу* R. *Отображение* $h(x)$ *обладает непрерывными производными всех порядков по координатам вектора* x, *и якобиан этого отображения отличен в каждой точке от нуля.*

Опишем ход доказательства теоремы 8. Прежде всего аппроксимируем функцию $f(x, t)$ функцией $\tilde{f}(x, t)$. Функция $\tilde{f}(x, t)$ обладает непрерывными производными всех порядков для $x \neq 0$, $t \geq 0$, и тривиальный интеграл уравнения

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tilde{f}(x, t) \tag{5,01}$$

силью устойчив в G.

Далее мы возьмем числа $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots, \lim_{i\to\infty} r_i = r^*$ так, чтобы r^* было достаточно малым, и положим

$$R_i = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in E_n, \|x\| < r_i] .$$

Используя свойства уравнения (5,01), построим последовательность гомеоморфных отображений $g_i(x)$ множества G на себя так, что будут соблюдаться следующие условия, если ввести обозначения $H_i = g_i^{-1}(R_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Каждое отображение $g_i(x)$ обладает непрерывными частными производными всех порядков, и его якобиан отличен всюду от нуля. (5,02)

$$H_{i+1} \supset \overline{H}_i , \quad i = 1, 2, 3, \ldots , \tag{5,03}$$

$$G = \sum_{i=1}^{\infty} H_i . \tag{5,04}$$

Теперь мы воспользуемся леммой 7. Для полноты положим $h_1(x) = g_1(x)$ и при помощи леммы 7 построим для данных отображений $h_1(x)$ и $g_2(x)$ гомеоморфное отображение $h_2(x)$ множества G на себя, которое будет удовлетворять условию (5,02) и условиям $h_2(x) = g_2(x)$ для $x \in G - H_2$, $h_2(x) = h_1(x)$ для $x \in H_1$. Для отображений $h_2(x)$ и $g_3(x)$ построим при помощи леммы 7 гомеоморфное отображение $h_2(x)$ множества G на себя, которое будет удовлетворять условию α) и условиям

$$h_3(x) = g_3(x) \quad \text{для} \quad x \in G - H_3 , \quad h_3(x) = h_2(x) \quad \text{для} \quad x \in H_2 .$$

Подобным же образом построим отображения $h_4(x)$, $h_5(x), \ldots$ Так как соблюдается условие (5,03) и имеет место $h_i(x) = h_{i+1}(x) = h_{i+2}(x) = \ldots$ для $x \in H_i$, то можно определить отображение $h^*(x) = h_i(x)$ для $x \in H_i$ и доказать, что отображение $h(x) = \frac{1}{r^*} h^*(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8.

Доказательство теоремы 8. Предположим, что нулевой интеграл уравнения (1,01) сильно устойчив в G. По теореме 7 существуют функции $V_7(x, t)$, $U_{13}(x)$, $U_{14}(x)$, $U_{15}(x)$ так, что выполняются условия I, II, III, IV, приведенные в этой теореме.

Найдем функцию $\tilde{f}(x, t)$ так, чтобы она была определена и непрерывна для $x \in G$, $t \geqq 0$, имела непрерывные производные любого порядка для $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$ и чтобы имело место неравенство

$$\|f(x, t) - \tilde{f}(x, t)\| \leqq \frac{1}{2} \frac{U_{15}(x)}{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V_7}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 1} , \quad x \in G, t \geqq 0 .$$

Такая функция $\tilde{f}(x, t)$ существует, см. [10], стр. 76, лемма 6.

Витни (Whitney) формулирует указанную лемму об аппроксимации для функций, значениями которых являются числа; нетрудно, однако, убедиться, что лемма сохраняет силу и для функций, значения которых — векторы пространства E_n, так как лемму Витни можно применить к каждой составляющей отдельно. Цитированную лемму мы используем следующим образом:

Возьмем непрерывную функцию $\tilde{U}(x, t)$, определенную для $x \in G$, $t \geqq 0$, так, чтобы

$$\tilde{U}(x,t) \leqq \frac{1}{2} \frac{U_{15}(x)}{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V_7}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot \frac{t}{1+t} \;, \quad x \in G \;, \; t > 0 \;,$$

$0 < \tilde{U}(x, t)$ для $t > 0$, $0 \neq x \in G$, $0 = \tilde{U}(x, 0)$ для $x \in G$, $\tilde{U}(x, t) \to 0$ для $\omega(x) \to \infty$ при фиксированном t. Очевидно, будет $\tilde{U}(0, t)$, так как $U_{15}(0) = 0$.

Положим

$$\tilde{R} = \mathop{\mathrm{E}}_{(x,\, t)} [x \in G, x \neq 0, t > 0] \;,$$

$$\tilde{R}_p = \mathop{\mathrm{E}}_{(x,\, t)}\left[x \in G,\, t > \frac{1}{p} \;,\; \omega(x) > \frac{1}{p} \;,\; \tilde{U}(x, t) > \frac{1}{p}\right] , \quad p = 1, 2, 3, \ldots; \; \varepsilon_p = \frac{1}{p} \cdot$$

Из свойств функции $\tilde{U}(x, t)$ легко следует $\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{R}_p = \tilde{R}$, $\bar{\tilde{R}}_p \subset \tilde{R}_{p+1}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ Согласно цитированной лемме, существует функция $\tilde{f}(x, t)$, определенная и аналитическая в $\tilde{R}$ и удовлетворяющая неравенству

$$\|f(x, t) - \tilde{f}(x, t)\| < \varepsilon_p \quad \text{для} \quad (x, t) \in \tilde{R}_p - \bar{\tilde{R}}_{p-1}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

(мы положили $\tilde{R}_0 = \emptyset$), так что $\|f(x, t) - \tilde{f}(x, t)\| < \tilde{U}(x, t)$ для $(x, t) \in \tilde{R}$. Однако, для любой последовательности $(x_j, t_j) \in \tilde{R}$, $j = 1, 2, 3, \ldots)$ $(x_j, t_j) \to (x_0, t_0)$, где или $x_0 \in G, t_0 = 0$, или $x_0 = 0, t_0 \geqq 0$, существует $\lim_{j\to\infty} f(x_j, t_j)$ и имеет место $\tilde{U}(x_j, t_j) \to 0$. Поэтому существует и $\lim_{j\to\infty} \tilde{f}(x_j, t_j) = f(x_0, t_0)$, так что можно расширить область определения функции $\tilde{f}(x, t)$ и определить $\tilde{f}(x, t) = f(x, t)$, если $x \in G$, $t = 0$ или $x = 0$, $t \geqq 0$. Функция $\tilde{f}(x, t)$ определена и непрерывна для $x \in G$, $t \geqq 0$ и выполняет все требуемые условия.

Исследуем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tilde{f}(x, t) \,. \tag{5,01}$$

Очевидно, $\tilde{f}(0, t) = 0$ и производная $\tilde{W}_7(x, t)$ функции $V_7(x, t)$ по полю уравнения (5,01) удовлетворяет условию

$$\tilde{W}_7(x, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_7}{\partial x_j} \tilde{f}_j + \frac{\partial V_7}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_7}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial V_7}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_7}{\partial x_j} (\tilde{f}_j - f_j) \leqq$$

$$\leqq - U_{15}(x) + \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V_7}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \|f(x,t) - f(x)\, t)\| \leqq -\tfrac{1}{2} U_{15}(x) \,. \tag{5,05}$$

Согласно теореме 1, нулевой интеграл уравнения (5,01) сильно устойчив в G (ибо соблюдаются условия I, II, III теоремы 7 и неравенство (5,05)). Согласно лемме 1 существуют функции $\varphi_1(t)$ и $\Lambda_1(\eta)$, выполняющие следующие условия:

Функция $\varphi_1(t)$ определена и непрерывна для всех t, убывает и

$$\varphi_1(t) \to \infty \quad \text{для} \quad t \to -\infty\,, \quad \varphi_1(t) \to 0 \quad \text{для} \quad t \to \infty\,.$$

Функция $\Lambda_1(\eta)$ определена и непрерывна для всех $\eta > 0$, возрастает и

$$\Lambda_1(\eta) \to -\infty \quad \text{для} \quad \eta \to 0\,, \quad \Lambda_1(\eta) \to \infty \quad \text{для} \quad \eta \to \infty\,.$$

Если $x(t)$ — интеграл уравнения (5,01), определенный для $t \geqq t_0 \geqq 0$, то имеет место

$$\omega(x(t)) < \varphi_1(t - t_0 - \Lambda_1(\omega(x(t_0))))\,, \quad t \geqq t_0\,. \tag{5,06}$$

Возьмем число α, $0 < \alpha < \min[\frac{1}{4}\varrho(0, F), \frac{1}{2}]$, ($F$ есть дополнение множества G в E_n; положим $\alpha = \frac{1}{2}$, если $G = E_n$). Найдем число ζ, $0 < \zeta < \alpha$ такое, чтобы

$$\varphi_1(-\Lambda_1(\zeta)) < \alpha\,. \tag{5,07}$$

Пусть функция $\lambda(\eta)$ определена и непрерывна для $\eta \geqq 0$, обладает производными любого порядка для $\eta > 0$ и удовлетворяет условиям

$$\lambda(\eta) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqq \eta \leqq \tfrac{1}{2}\zeta\,, \quad \lambda(\eta) = 1 \quad \text{для} \quad \eta \geqq \zeta\,.$$

Положим $f^*(x, t) = \lambda(\|x\|)\,.\,\tilde{f}(x, t)$ и исследуем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f^*(x, t)\,. \tag{5,08}$$

(Отметим, что $\|x\| = \omega(x)$, если $\|x\| \leqq 2\alpha$; значит, условия $\|x\| \geqq \zeta$ и $\omega(x) \geqq \zeta$ еквивалентны).

Обозначим $\varphi_2(t) = \max(\alpha, \varphi_1(t))$, $-\infty < t < \infty$. Мы докажем, что каждый интеграл $x(t)$ уравнения (5,08), определенный для $t \geqq t_0 \geqq 0$ выполняет условие

$$\omega(x(t)) \leqq \varphi_2(t - t_0 - \Lambda_1(\omega(x(t_0))))\,, \quad t \geqq t_0\,. \tag{5,09}$$

Действительно, если для $t_0 \leqq t \leqq t_1$, $(t_1 > t_0)$ $\omega(x(t)) > \zeta$, то $x(t)$ является решением уравнения (5,01), так что имеет место (5,06), а тем более и (5,09) для $t_0 \leqq t \leqq t_1$. Если же (5,09) не имеет места, то существует число $t_2 > t_0$ такое, что

$$\omega(x(t_2)) > \varphi_2(t_2 - t_0 - \Lambda_1(\omega(x(t_0)))) \geqq \alpha > \zeta\,. \tag{5,10}$$

В силу того, что мы уже доказали, должно существовать число t_3, $t_0 < t_3 < t_2$ такое, что $\zeta = \omega(x(t_3)) < \omega(x(t))$, $t_3 < t \leqq t_2$. Для $t_3 \leqq t \leqq t_2$ функция $x(t)$ снова будет решением уравнения (5,01), так что, согласно (5,06) и (5,07), будет

$$\omega(x(t)) < \varphi_1(t - t_3 - \Lambda_1(\omega(x(t_3)))) < \varphi_1(-\Lambda_1(\omega(x(t_3)))) = \varphi_1(-\Lambda_1(\zeta)) < \alpha\,,$$
$$t_3 < t \leqq t_2\,,$$

что противоречит неравенству (5,10). Справедливость неравенства (5,09) доказана.

Пусть $r_1, r_2, r_3, \ldots$ — числовая последовательность $\alpha < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$ $\ldots < 2\alpha$, и пусть шары $R_1, R_2, R_3, \ldots$ определяются соотношением

$$R_i = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in E_n, \|x\| < r_i], \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Возьмем число $t_1 > 0$ так, чтобы было

$$\varphi_2(t_1 - \Lambda_1(2)) < r_1 . \tag{5,11,1}$$

Определим функцию $\Theta_1(x)$ так, чтобы она была определена во всем пространстве E_n, обладала непрерывными частными производными любого порядка и удовлетворяла условиям

$$\Theta_1(x) = 1 \text{ если } x \in \Omega(\varphi_1(-\Lambda_1(2))) \quad \text{и} \quad \Theta_1(x) = 0 \text{ если } x \in \Omega(\varphi_1(-\Lambda_1(3)))$$

Такая функция $\Theta_1(x)$ существует ввиду возрастания функции $\varphi_1(-\Lambda_1(\eta))$.

Пусть $x^{(1)}(t, \tau, y)$ означает интеграл уравнения

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \Theta_1(x) \cdot f^*(x, t) \tag{5,12,1}$$

определенный для $t \geqq \tau$. Пусть этот интеграл определяется условием $x^{(1)}(\tau, \tau, y) = y$. (Если $x \in F$, $t \geqq 0$, то выражению $\Theta_1(x)\, f^*(x, t)$ мы приписываем значение 0. Функция $\Theta_1(x)\, f^*(x, t)$ обладает, очевидно, непрерывными частными производными любого порядка для $x \in E_n$, $t > 0$.)

Так как $\varphi_1(-\Lambda_1(\eta)) > \eta$ для $\eta > 0$, то

$$\varphi_1(-\Lambda_1(\eta)) = \varphi_2(-\Lambda_1(\eta)), \quad \eta \geqq \alpha \tag{5,13}$$

и $\varphi_1(-\Lambda_1(2)) = \varphi_2(-\Lambda_1(2))$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения:

Если $\omega(y) < 2$, $\tau \geqq 0$, то $\omega(x^{(1)}(t, \tau, y)) < \varphi_1(-\Lambda(2))$ для $t \geqq \tau$, и функция $x^{(1)}(t, \tau, y)$ удовлетворяет уравнению (5,08). Согласно (5,09) и (5,12,1), отсюда следует $\|x^{(1)}(1 + t_1, 1, y)\| \leqq \omega(x^{(1)}(1 + t_1, 1, y)) < r_1$, $(\omega(y) < 2)$. Определим гомеоморфное отображение $g_1(y)$ пространства E_n на себя $g_1(y) = x^{(1)}(1 + t_1, 1, y)$. Отображение $g_1(y)$ обладает, очевидно, непрерывными производными любого порядка. Якобиан J этого отображения

$$J(y_1, \ldots, y_n) = \left| \frac{|\partial g_{1,i}(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \right|$$

отличен от нуля в каждой точке, так как

$$J(y_1, \ldots, y_n) = \exp\left\{ \int_1^{1+t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(\partial f_i(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial x_i} \right)_{\substack{x_1 = x_{1n}(t,1,y) \\ \vdots \\ x_n = x_{1n}(t,1,y)}} \right) \mathrm{d}t ,\right.$$

см. напр. [11], § 87, теорема 1 (стр. 155). Отображение $g_1(x)$ удовлетворяет, далее, условиям

$$g_1(G) = G\,, \quad g_1(\Omega(2)) \subset R_1\,,$$
$$g_1(y) = y\,, \quad y \mathrel{\tilde{\in}} \Omega(\varphi_1(-\Lambda(3)))\,. \tag{5,14,1}$$

Предположим, что дано гомеоморфное отображение $g_i(y)$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) пространства E_n на себя, так, что оно выполняет условие $g_i(G) = G$.

Множество $g_i^{-1}(\overline{R}_i)$, очевидно, замкнуто и содержится в G. Следовательно, существует число ξ_{i+1}, удовлетворяющее условиям

$$\xi_{i+1} \geqq 2^{i+1}\,, \tag{5,15,$i+1$}$$
$$\Omega(\xi_{i+1}) \supset g_i^{-1}(\overline{R}_i)\,. \tag{5,16,$i+1$}$$

Возьмем число t_{i+1} так, чтобы было

$$\varphi_2(t_{i+1} - \Lambda_1(\xi_{i+1})) < r_{i+1}\,. \tag{5,11,$i+1$}$$

Отыщем функцию $\Theta_{i+1}(x)$ такую, чтобы она была определена во всем пространстве E_n, обладала непрерывными частными производными любого порядка и выполняла условия

$$\Theta_{i+1}(x) = 1 \quad \text{если} \quad x \in \Omega(\varphi_1(-\Lambda_1(\xi_{i+1})))\,,$$
$$\Theta_{i+1}(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \mathrel{\tilde{\in}} \Omega(\varphi_1(-\Lambda_1(\xi_{i+1} + 1)))\,.$$

Такая функция $\Theta_{i+1}(x)$ существует ввиду возрастания функции $\varphi_1(-\Lambda(\eta))$.

Пусть $x^{(i+1)}(t, \tau, y)$ означает интеграл уравнения

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \Theta_{i+1}(z) \cdot f^*(x, t), \tag{5,12,$i+1$}$$

определенный для $t \geqq \tau$. Пусть этот интеграл определяется условием $x^{(i+1)}(\tau, \tau, y) = y$.

Функция $\Theta_{i+1}(x) \,.\, f^*(x, t)$ обладает, очевидно, непрерывными производными любого порядка для $x \in E_n$, $t > 0$. Ввиду (5,13) получаем

$$\varphi_1(-\Lambda_1\,(\xi_{i+1})) = \varphi_2(-\Lambda_1(\xi_{i+1}))$$

и легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

Если $\omega(y) < \xi_{i+1}, \tau \geqq 0$, то будет $\omega(x^{(i+1)}(t, \tau, y)) < \varphi_1(-\Lambda_1(\xi_{i+1}))$ для $t \geqq \tau$, и функция $x^{(i+1)}(t, \tau, y)$ удовлетворяет уравнению (5,08).

Согласно (5,09) и (5,11,$i+1$), отсюда следует

$$\|x^{(i+1)}(1 + t_{i+1}, 1, y)\| \leqq \omega(x^{(i+1)}(1 + t_{i+1}, 1, y)) < r_{i+1} \quad (\omega(y) < \xi_{i+1})\,.$$

Определим гомеоморфное отображение $g_{i+1}(y)$ пространства E_n на себя $g_{i+1}(y) = x^{(i+1)}(1 + t_{i+1}, 1, y)$. Отображение $g_{i+1}(y)$ обладает, очевидно, непрерывными производными любого порядка и отличным всюду от нуля якобианом, причем выполняются условия

$$g_{i+1}(G) = G\,, \quad g_{i+1}(\Omega(\xi_{i+1})) \subset R_{i+1}\,,$$
$$g_{i+1}(y) = y\,, \quad y \mathrel{\tilde{\in}} \Omega(\xi_{i+1} + 1)\,. \tag{5,14,$i+1$}$$

Мы построили последовательность гомеоморфных отображений $g_i(y)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ пространства E_n на себя, обладающих непрерывными производными любого порядка, отличным в каждой точке от нуля якобианом и выполняющих условия

$$g_i(G) = G \,, \tag{5,17}$$

$$g_{i+1}^{-1}(R_{i+1}) \supset g_i^{-1}(\overline{R}_i) \,, \tag{5,18}$$

$$g_i^{-1}(R_i) \supset \Omega(2^i) \,, \tag{5,19}$$

$$g_i(y) = y \,, \quad y \,\tilde{\in}\, \Omega(\xi_i + 1) \,, \tag{5,20}$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots$$

(см. (5,14,1), (5,14,2), ..., (5,15,2), (5,15,3), ..., (5,16,2), (5,16,3), ...).

Для завершения доказательства теоремы 8 нам понадобится следующая лемма:

Лемма 7. *Пусть $\tilde{g}_1(y)$, $\tilde{g}_2(y)$ — гомеоморфные отображения пространства E_n на себя, обладающие непрерывными производными всех порядков и отличными от нуля производными всех порядков и отличным от нуля якобианом. Пусть существует число N такое, что $\tilde{g}_1(x) = \tilde{g}_2(x) = x$ для $\|x\| > N$. Пусть $\tilde{R}$ — открытая сфера в E_n, $\tilde{R} = \underset{y}{\mathrm{E}}[y \in E_n, \|y\| < \tilde{r}]$ ($\tilde{r} > 0$), пусть множества G_1, G_2 открыты в E_n*

$$G_2 \supset \overline{G}_1 \,, \quad \tilde{g}_2(G_2) = \tilde{R} \,, \quad \tilde{g}_1(\overline{G}_1) \subset \tilde{R} \,. \tag{5,21}$$

Тогда существует гомеоморфное отображение $\tilde{h}(x)$ пространства E_n на себя, обладающее непрерывными частными производными любого порядка и отличным всюду от нуля якобианом, причем

$$\tilde{h}(x) = x \quad \text{для} \quad \|x\| > \tilde{N} \,, \qquad \tilde{h}(G_2) = \tilde{R} \,,$$

$$\tilde{h}(x) = \tilde{g}_1(x) \quad \text{для} \quad x \in G_1 \,,$$

где $\tilde{N}$ — подходящее положительное число.

Доказательство. Пусть R' есть сфера в E_n, $R' = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in E_n, \|x\| < r']$ ($r' < \tilde{r}$) такая, что $R' \supset \tilde{g}_1(\overline{G}_1)$, $R' \supset \tilde{g}_2(\overline{G}_1)$. Проберем функцию $\tilde{\lambda}(\eta)$ для $\tilde{r} > \eta \geqq 0$ так, чтобы она обладала непрерывными производными любого порядка, чтобы она не убывала и чтобы имело место

$$\tilde{\lambda}(\eta) = 1 \quad \text{для} \quad 0 \leqq \eta \leqq r' \,, \quad \tilde{\lambda}(\eta) \to \infty \quad \text{для} \quad \eta \to \tilde{r} \,.$$

Определим отображение $\tilde{l}(x)$ для $x \in \tilde{R}$, $\tilde{l}(x) = x \,.\, \tilde{\lambda}(\|x\|)$. Отображение $\tilde{l}(x)$ обладает непрерывными производными любого порядка, отличным всюду от нуля якобианом и отображает $\tilde{R}$ на E_n. Рассмотрим отображение $\tilde{s}(x)$, определенное соотношениями

$$\tilde{s}(x) = \tilde{l}^{-1}\tilde{g}_1\tilde{g}_2^{-1}\tilde{l}(x) \quad \text{для} \quad x \in \tilde{R} \,, \quad \tilde{s}(x) = x \quad \text{для} \quad x \,\tilde{\in}\, \tilde{R} \,.$$

Очевидно, существует число r'', $r' < r'' < \tilde{r}$ такое, что $\|\tilde{l}(x)\| > N$ если $r'' < \|x\| < \tilde{r}$. Отсюда следует $\tilde{s}(x) = x$ для $\|x\| > r''$, и мы без труда докажем таким образом, что отображение $\tilde{s}(x)$ обладает непрерывными производными любого порядка и всюду отличным от нуля якобианом; точно так же ясно, что $\tilde{s}(x)$ является гомеоморфным отображением пространства E_n на себя и что

$$\tilde{s}(\tilde{R}) = \tilde{R} . \tag{5,22}$$

Положим $\tilde{h}(x) = \tilde{s}\tilde{g}_2(x)$. $\tilde{h}(x)$ будет, очевидно, гомеоморфным отображением пространства E_n на себя, обладающим непрерывными производными любого порядка и отличным всюду от нуля якобианом.

Согласно (5,21) и (5,22), имеем $\tilde{h}(G_2) = \tilde{R}$. Возьмем $\tilde{N} \geqq \max(N, \tilde{r})$. Если $\|x\| > \tilde{N}$, то $\tilde{h}(x) = \tilde{s}\,\tilde{g}_2(x) = \tilde{s}(x) = x$. Наконец, если $x \in G_1$, то $y = \tilde{g}_2(x) \in R'$, $\tilde{l}(y) = y$ и

$$\tilde{h}(x) = \tilde{s}\tilde{g}_2(x) = \tilde{l}^{-1}\tilde{g}_1\tilde{g}_2^{-1}\tilde{l}\tilde{g}_2(x) = \tilde{l}^{-1}\tilde{g}_1\tilde{g}_2^{-1}\tilde{g}_2(x) = \tilde{l}^{-1}\tilde{g}_1(x) .$$

Так как $x \in G_1$, получим $\tilde{g}_1(x) \in R'$, так что $\tilde{l}^{-1}\tilde{g}_1(x) = \tilde{g}_1(x)$ и, следовательно, $\tilde{h}(x) = \tilde{g}_1(x)$. Лемма 7 доказана.

Теперь уже нетрудно закончить доказательство теоремы 8.

Положим

$$h_1(y) = g_1(y) \quad \text{для} \quad y \in E_n , \quad H_1 = g_1^{-1}(R_1) .$$

Предположим, что нам известен гомеоморфизм $h_i(x)$, обладающий непрерывными производными любого порядка и отличный от нуля якобиан, причем $h_i(y) = y$ для $\|y\| > N_i$,

$$h_i(H_i) = R_i , \quad \text{где} \quad H_i = g_i^{-1}(R_i) . \tag{5,23}$$

Ввиду этих соотношений и ввиду (5,18) и (5,20) мы можем воспользоваться леммой 7, в которой мы положим

$$\tilde{g}_1 = h_i , \quad \tilde{g}_2 = g_{i+1} , \quad G_2 = H_{i+1} = g_{i+1}^{-1}(R_{i+1}) , \quad G_1 = H_i .$$

Согласно лемме 7, существует гомеоморфное отображение $h_{i+1}(x)$, пространства E_n на себя, обладающее непрерывными производными любого порядка и отличным всюду от нуля якобианом, причем

$$h_{i+1}(H_{i+1}) = R_{i+1} , \tag{5,24}$$

$$h_{i+1}(x) = h_i(x) , \quad x \in H_i , \tag{5,25}$$

$$h_{i+1}(x) = x \quad \text{для} \quad \|x\| > \tilde{N}_{i+1} .$$

Таким образом мы определили последовательность гомеоморфизмов $h_1(x)$, $h_2(x), h_3(x), \ldots$ Определим отображение

$$h^*(x) = h_1(x) \quad \text{для} \quad x \in H_1 , \quad h^*(x) = h_i(x) \quad \text{для} \quad x \in H_i - H_{i-1} ,$$
$$i = 2, 3, 4, \ldots ,$$

$$h(x) = \frac{1}{r^*} h^*(x), \text{ где } r^* = \lim_{i \to \infty} r_i .$$

Теперь уже нетрудно доказать, что $h(x)$ является искомым отображением. Соотношение (5,18) [см. (5,23)] можно преписать в виде $H_{i+1} \supset \overline{H}_i$. Отсюда и из определения отображения $h^*(x)$ следует

$$h^*(x) = h_i(x) = h_{i+1}(x) = h_{i+2}(x) = \dots \quad \text{для} \quad x \in H_i \, . \tag{5,26}$$

Из соотношения (5,19) тогда вытекает $\sum_{i=1}^{\infty} H_i = G$, а отсюда, учитывая то, что мы доказали относительно отображения $h_i(x)$, выводим, что отображение $h(x)$ определено в G, обладает непрерывными производными любого порядка и отличным всюду от нуля якобианом. Соотношение (5,24) влечет за собой и равенство $h^*(H_i) = R_i$, так что

$$h^*(G) \supset R^* \, , \quad \text{где} \quad R^* = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[x \in E_n, \|x\| < r^*] \, .$$

Для любой точки $x \in G$ существует, однако, индекс i так, что $x \in H_i$, и тогда $h^*(x) \in h^*(H_i) = R_i$ и далее $h^*(G) = R^*$, $h(G) = R$.

Докажем, наконец, что отображение h^* — простое. Возьмем две произвольные точки $x_1 \in G$, $x_2 \in G$, $x_1 \neq x_2$. Очевидно, существует индекс i так, что $x_1 \in H_i$, $x_2 \in H_i$. В силу (5,26) будет

$$h^*(x_1) = h_i(x_1) \, , \quad h^*(x_2) = h_i(x_2) \quad \text{и} \quad h_i(x_1) \neq h_i(x_2) \, ,$$

так как отображение $h_i(x)$ является гомеоморфным отображением множества G. Итак, отображения $h^*(x)$ и $h(x)$ — простые, и теорема 8 доказана.

Существует несколько интересных следствий теоремы 8. Прежде всего обратим внимание, что из одного факта существования функции $V(x)$, определенной на открытом множестве G и удовлетворяющей некоторым условиям, следует, что множество G гомеоморфно шару.

Пусть R — шар в E_n, $R = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[x \in E_n, \|x\| < 1]$.

Теорема 9. *Предположим, что множество G открыто, $0 \in G$, и функция $\omega(x)$ имеет обычный смысл (см. стр. 221).*

Пусть существует функция $V(x)$, выполняющая следующие услоеия:

Функция $V(x)$ определена для $x \in V$ и обладает непрерывными частными производными персого порядка.

$$V(0) = 0, \; V(x) > 0, \; x \neq 0. \; V(x) \to \infty \text{ если } \omega(x) \to \infty \, .$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_j} \right)^2 > 0 \, , \quad x \neq 0 \, .$$

Тогда существует гомеоморфное отображение $h(x)$ множества G на шар R, обладающее непрерывными производными любого порядка и отличным всюду от нуля якобианом.

Доказательство. Исследуем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = a_j(x_1, \dots, x_n) \, , \quad j = 1, 2, \dots, n \, , \tag{5,27}$$

где

$$a_j(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\partial}{\partial x_j} V(x_1, \ldots, x_n) .$$

Обратим внимание, что функции $V(x)$ и $a_j(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Из этой теоремы следует, что нулевой интеграл уравнения (5,27) сильно устойчив в G. Воспользуемся теоремой 8, и доказательство теоремы 9 закончено.

Содержание следующей теоремы приблизительно таково: если $V(x)$ — положительно определенная функция и если $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)^2 > 0$ для $x \neq 0$, то для достаточно малых положительных α множество $\underset{x}{\mathrm{E}}[V(x) < \alpha]$ гомеоморфно шару.

Теорема 10. *Пусть множество G открыто в E_n, $0 \in G$. Пусть существует функция $V(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

Функция $V(x)$ определена для $x \in G$, обладает непрерывными производными первого порядка и

$$V(0) = 0,\ V(x) > 0 \text{ для } x \neq 0,\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)^2 > 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0 .$$

Тогда существуют числа $\alpha_1 > 0$ и $r > 0$ так, что для любого α, $0 < \alpha < \alpha_1$ справедливо утверждение:

Множество $G(\alpha) = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in G,\ \|x\| < r,\ V(x) < \alpha]$ гомеоморфно шару R. Существует гомеоморфное отображение $h(x)$ множества $G(\alpha)$ на R, обладающее непрерывными проиввodными любого порядка и отличным всюду от нуля якобианом.

Доказательство. Возьмем число r так, чтобы было $x \in G$, коль скоро $x \in E_n$, $\|x\| \leq r$. Положим

$$\alpha_1 = \min_{\|x\|=r} V(x) .$$

Возьмем α, $0 < \alpha < \alpha_1$, и пусть $F(\alpha)$ есть дополнение множества $G(\alpha)$ в E_n. Нетрудно убедиться в справедливости утверждения: если $x^{(i)} \in G_\alpha$ и

$$\varrho(x^{(i)}, F(\alpha)) \to 0,$$

то $V(x^{(i)}) \to \alpha$. Положим $\chi(\eta) = \eta : (\alpha - \eta)$ для $0 \leq \eta < \alpha$ и доказательство теоремы 10 закончим, применив теорему 9 к множеству $G(\alpha)$ и к функции $\chi(V(x))$. Докажем еще справедливость

Теоремы 11. *Пусть дано открытое множество G; допустим, что существует гомеоморфное отображение $g(x)$ множества G на R, обладающее непрерывными производными первого порядка и отличным всюду от нуля якобианом.*

Тогда существует гомеоморфное отображение $h(x)$ множества G на R, обладающее непрерывными производными любого порядка и отличным всюду от нуля якобианом.

Доказательство. Можно предположить, что $g(0) = 0$. Положим $V(x) = \|g(x)\|^2(1 - \|g(x)\|^2)^{-1}$, $x \in G$. Нетрудно убедиться, что функция $V(x)$ выполняет все условия теоремы 9. В частности, не может быть $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = 0$ для $x \neq 0$. В таком случае мы положили бы $g(x) = y \neq 0$, $v(\lambda) = g^{-1}(\lambda y)$ для λ, близких к 1. $v(\lambda)$ есть кривая с непрерывной производной по λ, причем $V(v(\lambda)) = \lambda^2\|y\|^2(1 - \lambda^2\|y\|^2)^{-1}$.

Если бы для данного x имело место $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = 0$, должно было бы быть $\frac{d}{d\lambda} \lambda^2\|y\|^2(1 - \lambda^2\|y\|^2)^{-1}|_{\lambda=1} = 0$, что невозможно. Теорема 11 непосредственно следует из теоремы 9.

Наконец исследуем более подробно т. наз. автономное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,. \tag{5,28}$$

Предположим, что функция $f(x)$ определена и непрерывна в открытом множестве G, $0 \in G$ и что $f(0) = 0$. Функция $\omega(x)$ применяется и здесь в обычном смысле.

Нулевое решение уравнения (5,28) мы назовем *устойчивым,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ что выполняется условие:

если $y(t)$ есть решение уравнения (5,28), определенное для $0 \leqq t \leqq T$, $0 < T < \infty$ и если $\omega(y(0)) < \delta$, то существует решение $x(t)$ уравнения (5,28), определенное для $t \geqq 0$ и выполняющее условия

$$x(t) = y(t) \quad \text{для} \quad 0 \leqq t \leqq T\,, \quad \omega(x(t)) < \varepsilon \quad \text{для} \quad t \geqq 0\,.$$

Если кроме того существует такое число δ_0, $0 < \delta_0 < \delta(1)$, что справедливо утверждение:

если $x(t)$ — интеграл уравнения (5,28), определенный для $t \geqq 0$ и если $\omega(x(0)) < \delta_0$, то $x(t) \to 0$ для $t \to \infty$; тогда мы говорим, что тривиальный интеграл уравнения (5,28) *асимптотически устойчив.*

Эти определения являются очевидными обобщениями обычных определений на случай, когда решение уравнения (5,28) не определяется однозначно начальным условием.

Областью асимптотической устойчивости A уравнения (5,28) мы назовем множество таких точек $x_0 \in G$, для которых справедливо утверждение: если

$y(t)$ есть решение уравнения (5,28), $y(0) = x_0$, определенное для $0 \leqq t < T$, $(0 < T \leqq \infty)$, то существует решение $x(t)$, определенное для $t \geqq 0$ такое, что

$$x(t) = y(t)\,, \quad 0 \leqq t < T\,, \tag{5,29}$$

$$x(t) \to 0\,, \quad t \to \infty\,. \tag{5,30}$$

Предположим, что тривиалное решение уравнения (5,28) асимптотически устойчиво.

Очевидно, имеет место утверждение: если $\omega(x) < \delta_0$, то $x \in A$.

Докажем, что множество A открыто.

Предположим, что существуют точки $z^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ $z^{(i)} \in G - A$, $z^{(i)} \to z \in G$.

Докажем, что точка z не содержится в A. Для каждой точки $z^{(i)}$ существует решение $x^{(i)}(t)$ уравннеия (5,28) такое, что или

$$\begin{gathered} x^{(i)}(t) \text{ определено для } 0 \leqq t < T_i\,, \quad 0 < T_i < \infty\,, \\ x^{(i)}(0) = z^{(i)}\,, \quad \omega(x^{(i)}(t)) \to \infty \quad \text{для} \quad t \to T_i\,, \end{gathered} \tag{5,31}$$

или

$$x^{(i)}(t) \text{ определено для } t \geqq 0,\ x^{(i)}(0) = z^{(i)},\ \omega(x^{(i)}(t)) \geqq \delta_0,\ t \geqq 0\,. \tag{5,32}$$

Без ограничения общности можно предположить, что для всех функций $x^{(i)}(t)$ выполняется условие (5,31) или что для всех функций $x^{(i)}(t)$ выполняется условие (5,32), ибо этого можно всегда достигнуть переходом к выделенной последовательности.

Если все функции $x^{(i)}(t)$ выполняют условие (5,31), то пусть T^* есть верхняя граница чисел T, выполняющих условия

$$0 \leqq T < \liminf_{i \to \infty} T_i\,, \tag{5,33}$$

$$\limsup_{i \to \infty} (\max_{0 \leqq t \leqq T} \omega(x^{(i)}(t)) < \infty\,. \tag{5,34}$$

Если же все функции $x^{(i)}(t)$ выполняют условие (5,32), то пусть T^* есть верхняя граница чисел T, выполняющих условие (5,34). Нетрудно показать, что не может иметь места $\liminf\limits_{i \to \infty} T_i = 0$ и что $T^* > 0$. (Естественно, может быть $T^* = \infty$.)

Предположим, что

$$T^* < \infty\,. \tag{5,35}$$

Пусть τ_i — такое положительное число, для которого справедливо утверждение: если $y(t)$ есть решение уравнения (5,28), определенное для $0 \leqq t \leqq \tau$, $0 < \tau \leqq 2\tau_i$, $\omega(y(0)) \leqq i$, то существует решение $x(t)$ уравнения (5,28), определенное для $0 \leqq t \leqq 2\tau_i$ и выполняющее условия

$$x(t) = y(t) \quad \text{для} \quad 0 \leqq t \leqq \tau\,, \quad \omega(x(t)) < i + 1 \quad \text{для} \quad 0 \leqq t \leqq 2\tau_i\,.$$

Нетрудно показать, что число τ_i можно подобрать так, чтобы оно выполняло указанное условие, и без ограничения общности можно предположить, что $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = 0$.

Пусть $x^{(1,i)}(t)$ — последовательность всех функций $x^{(i)}(t)$, выполняющих условия: $x^{(i)}(t)$ определено для $0 \leqq t \leqq T^* - \tau_1$, $\omega(x^{(i)}(T^* - \tau_1)) > 1$.[11] Из последовательности функций $x^{(1,i)}(t)$ выделим последовательность $x^{(2,i)}(t)$ всех функций $x^{(1,i)}(t)$, выполняющих условия: $x^{(1,i)}(t)$ определено для $0 \leqq \leqq t \leqq T^* - \tau_2$, $\omega(x^{(1,i)}(T^* - \tau_2)) > 2$, и. т. д.

Переходом к „диагональной" последовательности, найдем такую последовательность функций $\bar{x}^{(i)}(t)$, что

$$\omega(\bar{x}^{(i)}(T^* - \tau_j)) \geqq j\,, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Если взять произвольное число T, $0 < T < T^*$, и если выпустить в случае нужды (при соблюдении (119)) конечное число функций $\bar{x}^{(i)}(t)$, то функции $\omega(\bar{x}^{(i)}(t))$ будут равностепенно ограничены на интервале $0 \leqq t \leqq T$; известными рассуждениями можно доказать:

из последовательности $\bar{x}^{(i)}(t)$ можно выделить последовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$, равномерно сходящуюся на каждом интервале $\langle 0, T\rangle$, $0 < T < T^*$.

Функция $y(t) = \lim\limits_{i\to\infty} \tilde{x}^{(i)}(t)$, $0 \leqq t < T^*$ является решением уравнения (5,28), $y(0) = z$ и так как имеет место $\omega(y(T^* - \tau_j)) \geqq j$, не может существовать решение $x(t)$, определенное для $t \geqq 0$ и выполняющее условия (5,29) и (5,30). Итак, из предположения (5,35) следует, что точка z не содержится в множестве A.

Пусть теперь

$$T^* = \infty \tag{5,37}$$

и $\omega(x^{(i)}(t)) \geqq \delta_0$ для $0 \leqq t \leqq T_i$ при соблюдении условия (5,31) или для $0 \leqq t < \infty$ при соблюдении условия (5,32).

В таком случае можно снова показать, что из последовательности $x^{(i)}(t)$ можно выделить последовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$, равномерно сходящуюся на каждом интервале $\langle 0, т\rangle$, $T > 0$ и что функция $y(t) = \lim\limits_{i\to\infty} \tilde{x}^{(i)}(t)$ является

[11]) Докажем, что функции $x^{(1,i)}(t)$ образуют бесконечную последовательность.

Пусть I_1 — множество таких индексов i, что функция $x^{(i)}(t)$ не входит в последовательность $x^{(1,i)}(t)$. Если $i \in I_1$, то согласно выбору числа τ_1 получим, что функция $x^{(i)}(t)$ определена для $0 \leqq t \leqq T^* + \tau_1$ и что выполняется неравенство $\omega(x^{(i)}(t)) < 2$ для $T^* - \tau_1 \leqq t \leqq T^* + \tau_1$. Отсюда следует, что $\limsup\limits_{i \in T_1,\, i\to\infty} (\max\limits_{0 \leqq t \leqq T^* + \tau_1} \omega(x^{(i)}(t))) < \infty$ (*) так как $\limsup\limits_{i\to\infty} (\max\limits_{0 \leqq t \leqq T^* - \tau_1} \omega(x^{(i)}(t))) < \infty$. Ежели бы в последовательность $x^{(1,i)}(t)$ входило только конечное число функций $x^{(i)}(t)$, из неравенства (*) следовало бы $\limsup\limits_{i\to\infty} (\max\limits_{0 \leqq t \leqq T^* + \tau_1} \omega(x^{(i)}(t))) < \infty$, что противоречит определению числа Т*. Значит, последовательность $x^{(1,i)}(t)$ бесконечна.

решением уравнения (5,28), $y(0) = R$. Очевидно, имеет место $\omega(y(t)) \geqq \delta_0$, $t \geqq 0$, так что не может существовать функция $x(t)$, которая выполняла бы условия (5,29) и (5,30). Итак, из условия (5,37) следует, что точка z не содержится в множестве A.

Мы доказали, что множество A открыто; ясно, что множество A связно. Докажем еще справедливость

Теоремы 12. *Пусть нулевой интеграл уравнения* (5,28) *асимптотически устойчив.*

Тогда существует гомеоморфное отображение $h(x)$ множества A на сферу R. Гомеоморфизм $h(x)$ обладает непрерывными производными любого порядка и его якобиан всюду отличен от нуля.

Доказательство. Исследуем уравнение (5,28) на множестве A. Пусть C означает дополнение множества A и положим

$$\omega_1(x) = \max\left(\|x\|\,,\ \frac{1}{\varrho(x, C)} - \frac{2}{\varrho(0, C)}\right) \quad (\omega_1(x) = x \text{ если } A = E_n)\,.$$

Докажем, что нулевой интеграл уравнения (5,28) сильно устойчив в A (см. определение 1).

Возьмем число $\beta > 0$. Докажем, что существует число $B = B(\beta)$ такое, что справедливо утверждение:

если $x(t)$ есть решение уравнения (5,28), определенное для $t \geqq 0$ и если $\omega(x(0)) \leqq \beta$, то $\omega(x(t)) < B$ для $t \geqq 0$.

В противном случае существует последовательность решений $x^{(i)}(t)$ уравнения (5,28), определенных для и чисел $t \geqq 0$ таких, что

$$\omega(x^{(i)}(0)) \leqq \beta \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{и} \quad \omega(x^{(i)}(\tau_i)) > i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично тому, как мы это сделали при доказательстве, что множество A открыто, можно выделить последовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$ и число T^*, $0 < T^* \leqq \infty$ так, что последовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$ равномерно сходится к решению $x(t)$ уравнения (5,28) на каждом интервале $\langle 0, T\rangle$ $(0 < T < T^*)$ и $\omega(x(0)) \leqq \beta$, $\omega(x(t)) \to \infty$ для $t \to T^*$. Однако, это невозможно, так как $x(0) \in A$, значит число $B(\beta)$ существует. Условие, что функция $B(\beta)$ возрастает и что $B(\beta) \to 0$ для $\beta \to 0$, легко выполнимо ввиду предположения, что нулевой интеграл уравнения (5,28) устойчив.

Возьмем теперь положительные числа β, ε. Докажем, что существует число Т $= T(\beta, \varepsilon)$ такое, что справедливо утверждение:

если $x(t)$ есть решение уравнения (5,28), определенное для $t \geqq 0$, $\omega(x(0)) \leqq \beta$, то будет $\omega(x(t)) < \varepsilon$ для $t \geqq T(\beta, \varepsilon)$.

Действительно, в противном случае существует последовательность решений $x^{(i)}(t)$ уравнения (5,28), определенных для $t \geqq 0$, и чисел τ_i так, что

$$\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty\,, \quad \omega(x^{(i)}(0)) \leqq \beta\,, \quad \omega(x^{(i)}(\tau_i)) \geqq \varepsilon\,.$$

Так как нулевой интеграл уравнения (5,28) устойчив, существует число $\delta > 0$ такое, что каждый интеграл уравнения (5,28), определенный для $t \geqq \tau$ и выполняющий условие $\omega(x(\tau)) \leqq \delta$, выполняет также условие $\omega(x(t)) < \varepsilon$ для $t \geqq \tau$.

Отсюда следует, что $\omega(x^{(i)}(t)) \geqq \delta$ для $0 \leqq t \leqq \tau_i$. Как мы доказали, функции $\omega(x^{(i)}(t))$, $t \geqq 0$ ограничены константой B и при помощи известных рассуждений можно выделить последовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$ из последовательности $x^{(i)}(t)$ так, что последовательность $\tilde{x}^{(i)}(t)$ будет равномерно сходиться на каждом интервале $\langle 0, T\rangle$, $T > 0$. Функция $x(t) = \lim\limits_{i\to\infty} \tilde{x}^{(i)}(t)$, $t \geqq 0$ является решением уравнения (5,28), причем $\omega(x(t)) \geqq \delta$, $t \geqq 0$. Это, однако, невозможно, так как $x(0) \in A$ и поэтому число $T(\beta, \varepsilon)$ существует. Мы доказали, что нулевой интеграл уравнения (5,28) сильно устойчив в A. Используя теорему 8, мы закончим доказательство теоремы 12.

6. Добавление

Понятие „асимптотически устойчивого тривиального решения“, введенное А. М. Ляпуновым, является локальным понятием, т. е. тривиальное решение $x(t) = 0$ уравнения (1,01) асимптотически устойчиво, если существует такое $H > 0$, что на множестве $\|x\| < H$, $t \geqq 0$ выполняются некоторые условия (см. введение). Это локальное понятие изучалось также в работе [5] Ж. Л. Массери и в работе [6] И. Г. Малкина (см. введение). Здесь мы покажем, что результаты, касающиеся обращения второй теоремы Ляпунова, доказанные в работах [5] и [6], могут быть выведены из теоремы 7.

Пусть функция $f(x, t)$ определена и непрерывна для $\|x\| < h$, $t \geqq 0$, $f(0, t) = 0$ $(t \geqq 0)$.

Определение 2. *Тривиальное решение $x(t) = 0$ уравнения (1,01) назовем локально сильно устойчивым, если существует число h, $0 < h < H$ и функции $\tilde{B}(\beta)$ и $\tilde{T}(\varepsilon)$ и если справедливо утверждение:*

Функция $\tilde{B}(\beta)$ определена для $0 < \beta \leqq h$, положительна, не убывает, $\tilde{B}(\beta) \to 0$ для $\beta \to 0$.

Если функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1,01) для $t_0 \leqq t < t_1$, $0 \leqq t_0 < t_1 \leqq \infty$ и условию $\|y(t_0)\| \leqq \beta$, то существует решение $x(t)$ уравнения (1,01), определенное для $t \geqq t_0$ и удовлетворяющее условиям $x(\ ) = y(t)$ для $t_0 \leqq t < t_1$, $\|x(t)\| < \tilde{B}(\beta)$ для $t \geqq t_0$, $\|x(t)\| < \varepsilon$ для $t \geqq t_0 + \tilde{T}(\varepsilon)$.

Замечание. Если функция $f(x, t)$ — периодическая относительно переменной t и если тривиальное решение уравнения (1,01) асимптотически устойчиво, то тривиальное решение уравнения (1,01) будет локально сильно устойчивым.

Пусть функция $f(x, t)$ обладает непрерывными и ограниченными частными производными первого порядка по координатам вектора x и пусть $x(t, t_0, x_0)$ означает интеграл уравнения (1,01), удовлетворяющий условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Пусть функции $x(t + t_0, t_0, x_0)$ стремятся к нулю для $t \to \infty$ равномерно относительно x_0 и t_0. При этих условиях тривиальное решение уравнения (1,01) является локально сильно устойчивым.

Оба эти утверждения доказываются весьма просто. Отсюда следует, что результаты Ж. Л. Массери [5] и И. Г. Малкина [6], касающиеся обращения второй теоремы Ляпунова, содержатся в теореме 14.

Обозначим $K = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in E_n, \|x\| < H]$. Теперь справедлива

Теорема 13. *Пусть тривиальное решение уравнения* (1,01) *является локально сильно устойчивым. Тогда существует функция* $g(x, t)$, *определенная и непрерывная для* $x \in K$, $t \geqq 0$, $g(x, t) \in E_n$ *так, что удовлетворяются условия*: $g(x, t) = f(x, t)$ *для* $\|x\| < h_1$ $(h_1 > 0)$, *тривиальный интеграл уравнения* $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x, t)$ *сильно устойчив в* K.

Притом $g(x, t + \omega_1) = g(x, t)$, *если* $f(x, t + \omega_1) = f(x, t)$.

Из теорем 7 и 13 легко следует.

Теорема 14. *Пусть функция* $f(x, t)$ *определена и непрерывна для* $\|x\| < H$, $t \geqq 0$, $f(0, t) = 0$ $(t \geqq 0)$, *Тогда тривиальное решение уравнения* (1,01) *будет локально сильно устойчивым в том и только в том случае, если существует функция* $V(x, t)$, *определенная для* $\|x\| < h_2$ $(0 < h_2 \leqq H)$, $t \geqq 0$ *так, что справедливо утверждение*:

Функция $V(x, t)$ *обладает непрерывными производными всех порядков,*

функция $V(x, t)$ *является положительно определенной,*

функция $-W(x, t)$[12]) *является положительно определенной.*

Замечание. Если $f(x, t + \omega_1) = f(x, t)$, то можно добиться того, чтобы функция $V(x, t)$ в теореме 14 имела период ω_1 относительно переменной t. В автономном случае теорема 13 лишена интереса. Этот случай был разобран в п. 5, и при доказательстве теоремы 12 мы пришли к выводу:

Если тривиальное решение уравнения $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$ асимптотически устойчиво, то оно сильно устойчиво в области асимптотической устойчивости A. Это значит, что в автономном случае можно всегда пользоваться теоремой 7 (на множестве A).

Доказательство теоремы 13. Возьмем числа h_3, h_4 $0 < h_4 < h_3 < H$, далее подберем числа h_5, h_6, h_7 так, чтобы было $0 < h_7 < h_6 < h_5 < h_4$, $\tilde{B}(h_5) < h_4$, $\tilde{B}(h_6) < h_5$, $\tilde{B}(h_7) < h_6$. Пусть непрерывная функция $M(v)$

[12]) См. введение, стр. 218.

удовлетворяет неравенству $M(v) > \|f(x, t)\|$ для $0 \leqq t \leqq v$, $\|x\| \leqq h_4$. Положим $t_7 = \tilde{T}(h_7)$, $\alpha = (H - (h_5 + h_6) : 2) : t_7$ и подберем положительные числа η, λ_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ так, чтобы удовлетворялись неравенства $\eta \leqq H - h_3$, $\eta < (h_5 - h_6) : 2$, $\lambda_j < t_7$, $\lambda_j < \alpha$, $\lambda_j < \dfrac{n}{\alpha}$,

$$\lambda_j < (h_5 - h_6) : [2nM(2j + 1)\, t_7 + 2n\alpha] \tag{6,01}$$

(n есть размерность пространства).

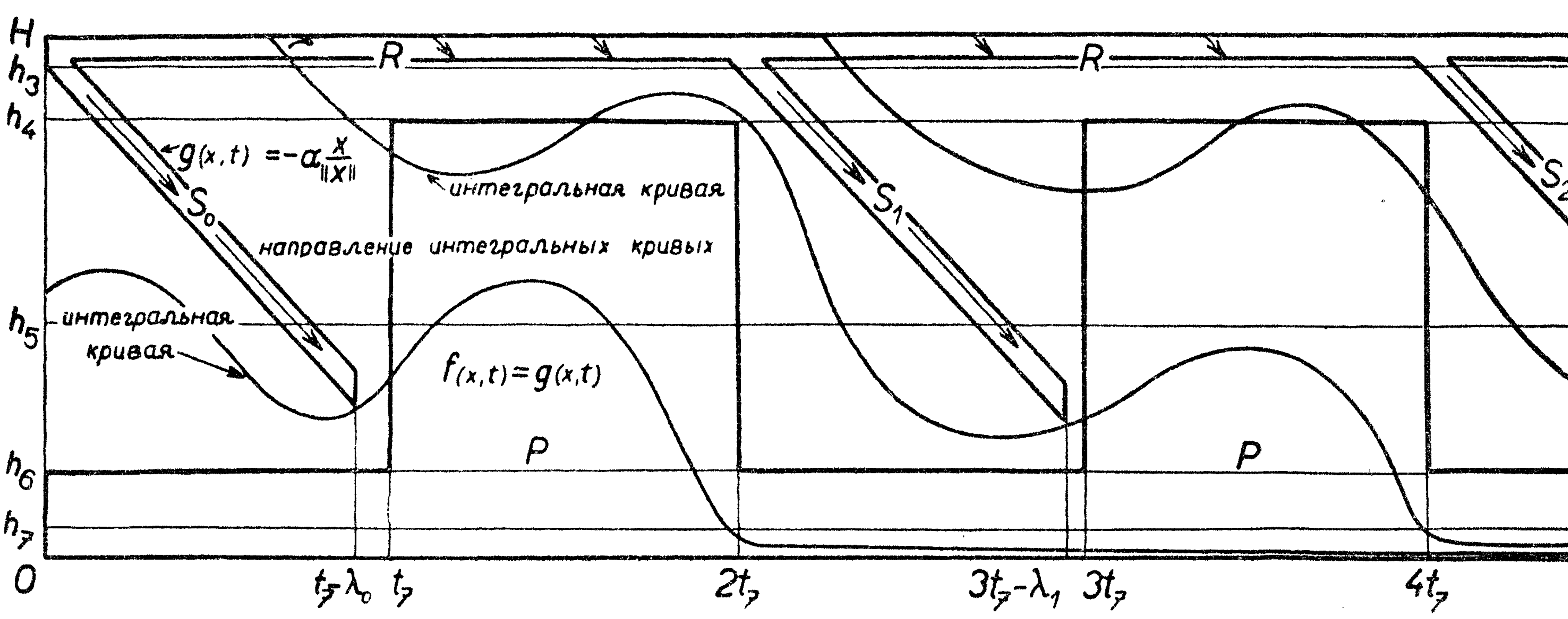

Рис. 1.

Пусть точка (x, t) принадлежит множеству P (см. рисунок), если имеет место или $2jt_7 < t < (2j + 1)\, t_7$, $\|x\| \leqq h_6$, или $(2j + 1)\, t_7 \leqq t \leqq (2j + 2)\, t_7$, $\|x\| \leqq h_4$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть множество R содержит точки (x, t), для которых $H - \eta \leqq \|x\| \leqq H$, $t \geqq 0$.

Пусть множество $S_j (j = 0, 1, 2, \ldots)$ содержит точки (x, t), удовлетворяющие неравенствам

$$2jt_7 \leqq t \leqq (2j + 1)\, t_7 - \lambda_j\,, \quad H - \alpha(t - 2jt_7) - \eta \leqq \|x\| \leqq H - \alpha(t - 2jt_7)$$

Определим функцию $\tilde{g}(x, t)$:

$$\tilde{g}(x, t) = f(x, t) \text{ для } (x, t) \in P\,, \quad \tilde{g}(x, t) = -\alpha\, \|x\|^{-1} x \text{ для } (x, t) \in R + \sum_{j=0}^{\infty} S_j\,.$$

Множества P и $R + \sum_{j=0}^{\infty} S_j$ замкнуты и дизъюнктны, функция $\tilde{g}(x, t)$ непрерывна. Применяя теорему о расширении непрерывной функции к каждой составляющей функции $\tilde{g}(x, t)$, мы без труда получим функцию $g(x, t)$, определенную и непрерывную для $\|x\| \leqq H$, $t \geqq 0$, $g(x, t) \in E_n$ и удовлетворяюъую условиям

$$g(x, t) = \tilde{g}(x, t) \quad \text{для} \quad (x, t) \in P + R + \sum_{j=0}^{\infty} S_j\,,$$

$$\|g(x, t)\| < n(M((2j + 1)\, t_7) + \alpha) \quad \text{для} \quad 0 \leqq t \leqq (2j + 1)\, t_7\,, \quad \|x\| \leqq H\,.$$

Докажем, что тривиальное решение уравнения

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x, t) \tag{6,03}$$

сильно устойчиво в K (см. определ. 1, стр. 221).

Положим $\psi(\lambda) = \max\left(\lambda, \dfrac{1}{H-\lambda} - \dfrac{2}{H}\right)$ для $0 \leqq \lambda < H$. Очевидно, будет $\omega(x) = \psi(\|x\|)$ (см. определение функции $\omega(x)$ на стр. 221).

Подберем возрастающую функцию $B(\beta)$, определенную для $0 \leqq \beta < \infty$ так, чтобы

$$B(\beta) \to 0 \quad \text{для} \quad \beta \to 0\,,$$

$$B(\beta) > \psi(\tilde{B}(\psi^{-1}(\beta))) \quad \text{для} \quad 0 < \beta \leqq h_7\,, \tag{6,04}$$

$$B(\beta) > \psi(\max(\beta, H - \eta)) \quad \text{для} \quad h_7 < \beta < H\,. \tag{6,05}$$

Наконец положим $T(\beta, \varepsilon) = T(\varepsilon) = 5t_7 + \tilde{T}(\psi^{-1}(\varepsilon))$. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (6,03), определенное для $t_0 \leqq t < t_1$. Подберем число β, $\beta > 0$, $\beta \geqq \omega(y(t_0)) = \psi(\|y(t_0)\|)$. Ввиду того, что

$$g(x, t) = -\alpha\|x\|^{-1}x \quad \text{для} \quad H - \eta \leqq \|x\| < H\,, \quad t \geqq 0 \tag{6,06}$$

существует решение $x(t)$ уравнения (6,03), определенное для $t \geqq t_0$ так, что $x(t) = y(t)$ для $t_0 \leqq t < t_1$. Если $\|x(t_0)\| \leqq h_7$, то $(x(t), t) \in P$ для $t \geqq t_0$, функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1,01), так что

$$\|x(t)\| < \tilde{B}(\psi^{-1}(\beta)) \quad \text{для} \quad t \geqq t_0\,. \tag{6,07}$$

Согласно (6,06), во всяком случае будет

$$\|x(t)\| \leqq \max(\|x(t_0)\|, H - \eta) \quad \text{для} \quad t \geqq t_0\,. \tag{6,08}$$

Таким образом мы получаем [см. (6,04), (6,05), (6,07), (6,08)]

$$\omega(x(t)) < B(\beta) \quad \text{для} \quad t \geqq t_0\,. \tag{6,09}$$

Найдем теперь такой индекс i ($i = 0, 1, 2, \ldots$), чтобы $2it_7 \leqq t_0 < (2i + 2)\,t_7$. Очевидно, будет $\|x((2i + 4)\,t_7)\| < H - \eta$ и [см. (6,01)]

$$\|x((2i + 5)\,t_7 - \lambda_{i+2})\| < (h_5 + h_6) : 2 - \eta + \alpha\lambda_{i+2} < (h_5 + h_6) : 2\,.$$

Согласно (6,02) и (6,01) имеем

$$\|x((2i + 5)\,t_7 - \lambda_{i+2}) - x((2i + 5)\,t_7)\| \leqq \lambda_{i+2}n(M((2i + 5)\,t_7) + \alpha) <$$
$$< (h_5 - h_6) : 2\,;$$

так что $\|x((2i + 5)\,t_7)\| < h_5$.

Так как $\tilde{B}(h_5) < h_4$, из последнего неравенства следует $\|x(t)\| < h_4$ для $t \geqq (2i + 5)\,t_7$ и в силу выбора числа t_7 будет $\|x(t)\| < h_7$ для $t \geqq (2i + 6)\,t_7$, так что мы получим $(x(t), t) \in P$ для $t \geqq (2i + 5)\, t_7$ и, окончательно, $\|x(t)\| < \bar{\varepsilon}$ если $t \geqq (2i + 5)\, t_7 + \tilde{T}(\bar{\varepsilon})$,

$$\omega(x(t)) = \psi(\|x(t)\|) < \varepsilon = \psi(\bar{\varepsilon})\,, \quad \text{если} \quad t \geqq t_0 + 5t_7 + \tilde{T}(\psi^{-1}(\varepsilon))\,. \quad (6{,}10)$$

Ввиду (6,09) и (6,10) соблюдаются условия определения 1 и доказательство теоремы 13 завершено.

Заметим еще, что теорема 14 позволяет опустить предположение, что функция $f(x, t)$ обладает непрерывными производными, в таких теоремах, доказательство которых опирается на существование функции Ляпунова $V(x, t)$. Так, например, справедливо утверждение:

Если функция $f(x, t)$ — периодическая относительно переменной t (если $f(x, t)$ не зависит от t) и если тривиальное решение уравнения (1,01) локально сильно устойчиво, то оно устойчиво и при постоянно действующих возмущениях. См. [2], стр. 308.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. М. Ляпунов:* Общая задача об устойчивости движения, Москва, Ленинград 1950.

[2] *И. Г. Малкин:* Теория устойчивости движения. Москва, Ленинград 1952.

[3] *К. П. Персидский:* Об одной теореме Ляпунова, ДАН XIV, № 9 (1937).

[4] *Я. Курцвейль:* К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения, Чехословацкий математический журнал, т. *5* (*80*), 1955.

[5] *J. L. Massera:* On Liapunoff's condition of stability, Annals of Mathematics, *50, 3* (1949).

[6] *И. Г. Малкин:* К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, Прикладная математика и механика, т. XVIII, *2* (1954).

[7] *Е. А. Барбашин* и *Н. Н. Красовский:* О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. Прикладная математика и механика, т. XVIII, *3* (1954).

[8] *В. И. Зубов:* К теории второго метода А. М. Ляпунова. ДАН XCIX, *3* (1954), 341—344.

[9] *В. И. Зубов:* Вопросы теории второго метода Ляпунова, построение общего решения в области асимптотической устойчивости. Прикладная математика и механика, XIX (1955).

[10] *H. Whitney:* Analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets, Transactions of the American Mathematical Society, *36* (1934) 63—80.

[11] *E. Kamke:* Differentialgleichungen reeller Fnnktionen, Leipzig 1952.

Summary

THE CONVERSE SECOND LYAPUNOV'S THEOREM CONCERNING THE STABILITY OF MOTION

JAROSLAV KURZWEIL, Praha.

(Received July 6, 1955.)

Introduction. Let us consider the system of differential equations

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t)\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n\ ,$$

which we shall write in the vector form

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)\ . \tag{1,01}$$

We suppose that the function $f(x, t)$ is defined and continuous for $t \geqq 0$, $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} < H$, that $f(0, t) = 0$ for $t \geqq 0$ and that every solution of (1,01) is uniquely determined by the initial condition. According to LYAPUNOV the trivial solution $x(t) = 0$ of (1,01) is called stable if to every $\varepsilon > 0$ there exists such a $\delta > 0$ that every solution $x(t)$ of (1,01) which fulfils the condition $\|x(0)\| \leqq \delta$ fulfils the inequality $\|x(t)\| < \varepsilon$ for $t \geqq 0$. If in addition to that there is such a $\delta_0 > 0$ that $\|x(0)\| < \delta_0$ implies $x(t) \to 0$ with $t \to \infty$, then the trivial solution is called asymptotically stable. In order to be able to formulate the result of Lyapunov let us introduce the following definitions and notations:

A continuous function $U(x) = U(x_1, \ldots, x_n)$, which is defined for $\|x\| < h$, is called positive definite if $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ for $x \neq 0$.

A continuous function $V(x, t)$, which is defined for $\|x\| < h$, $t \geqq 0$ is called positive definite if $V(0, t) = 0$ for $t \geqq 0$ and if there exists such a positive definite function $U_1(x)$ that $V(x, t) \geqq U_1(x)$ $(\|x\| < h,\ t \geqq 0)$.

A continuous function $V(x, t)$, which is defined for $\|x\| < h$, $t \geqq 0$, is said to admit an infinitely small upper bound if there exists such a positive definite function $U_2(x)$ that $|V(x, t)| \leqq U_2(x)$ $(\|x\| < h,\ t \geqq 0)$.

Let the function $V(x, t)$ have continuous partial derivatives of the first order and let us define the function

$$W(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i + \frac{\partial V}{\partial t}\ .$$

Apparently we have

$$W(x_0, t_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t), t)|_{t=t_0}\ ,$$

where $x(t)$ is the solution of (1,01) fulfilling the condition $x(t_0) = x_0$. The following theorem is due to Lyapunov:

Let us suppose that there exists a function $V(x, t)$ which fulfils the following conditions:

the function $V(x, t)$ is defined for $\|x\| < h$, $t \geqq 0$ and has continuous partial derivatives of the first order,

the function $V(x, t)$ is positive definite and has an infinitely small upper bound,

the function $- W(x, t)$ is positive definite.

Then the trivial solution of (1,01) *is asymptotically stable.*

Naturally the question arises whether the reciprocal theorem is true. The first to solve this question was MASSERA. Massera proved in the paper [5] that there exists a function $V(x, t)$ fulfilling the assumptions of the Lyapunov's theorem, if the trivial solution of (1,01) is asymptotically stable, if the function $f(x, t)$ is periodic in the variable t (if $f(x, t)$ does not depend on t) and if the partial derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial t}$ are continuous. This result was improved by MALKIN in the papper [6]. Malkin noticed that it is possible to draw stronger consequences than the asymptotic stability of the trivial solution, if the assumptions of the Lyapunov's theorem are fulfilled. Let us denote by $x(t, t_0, x_0)$ the solution of (1,01) which fulfils the condition $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. If there exists a function $V(x, t)$ satisfying the assumptions of the Lyapunov's theorem, then the solutions $x(t + t_0, t_0, x_0)$ tend to zero with $t \to \infty$ uniformly with respect to the variables t_0, x_0. Conversely, if $x(t + t_0, t_0, x_0) \to 0$ with $t \to \infty$ uniformly and if the derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial t}$ are continuous and bounded, then there exists a function $V(x, t)$ which fulfils the assumptions of the Lyapunov's theorem. In an analogous manner BARBAŠIN and KRASOVSKIJ in the paper [7] investigated the case of the asymptotic stability in the large (that means $f(x, t)$ is defined for all x, $t \geqq 0$ and $x(t, t_0, x_0) \to 0$ for all x_0, $t_0 \geqq 0$).

ZUBOV in the communication [8] examines another modification of the notion "asymptotically stable trivial solution" and in the paper [9] investigates the autonomous case. Let us emphasize the fact that Zubov does not construct the function $V(x, t)$ for $t \geqq 0$ and $\|x\| < h_1$ where h_1 is small enough, but that he defines the function $V(x, t)$ on the greatest possible set.

Now it is natural to put the following problem: *to prove the converse of the Lyapunov's theorem under the "weakest" possible assumptions concerning the function $f(x, t)$*. This paper is devoted to the solution of this problem.[1])

The Lyapunov's theorem mentioned above and even its proof is valid if we suppose only that the function $f(x, t)$ is continuous; it is not necessary to suppose that every solution is uniquely defined by the initial condition. The aim of

---

[1]) While this paper was prepared for press, the author learned from a letter that *J. Massera* formulated and solved independently an analogous problem. Massera's solution is not yet published and will appear in the *Annals of Mathematics*.

this paper is to prove the converse of the Lyapunov's theorem. The Lyapunov's theorem has a local character and enables us to state under certain conditions that $x(t, t_0, x_0) \to 0$ with $t \to 0$ if $\|x_0\|$ is small enough. We prove therefore at first a modification of the Lyapunov's theorem (see theorem 1) which rends it possible to conclude under certain assumptions that all solutions of (1,01) tend to zero. The chief result of this paper consists in proving that the converse of theorem 1 is true (see theorem 7). We use only the assumption that the function $f(x, t)$ is continuous.

Finally we examine the topologic properties of the set on which equation (1,01) is defined. Specially we prove that the so called "set of asymptotic stability" of the equation $\frac{dx}{dt} = f(x)$ is homeomorphic with the interior of a sphere. We construct a homeomorphism which has continuous derivatives of all orders with respect to the coordinates of the vector x. The corresponding Jacobian is different from zero at every point.

A modification of the Lyapunov's theorem. Let us accept the following notations:

Let G be an open subset of E_n, $0 \in G$ and let F be the complement of G. If $x \in E_n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $H \subset E_n$ we put

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}\,, \quad \varrho(x, H) = \inf_{x \in H} \|x - z\|\,.$$

Let us define the function $\omega(x)$ for $x \in G$,

$$\omega(x) = \max\left(\|x\|\,, \frac{1}{\varrho(x, F)} - \frac{2}{\varrho(0, F)}\right), \quad (\omega(x) = \|x\| \text{ if } G = E_n)\,.$$

Let $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots x_n, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, be a given system of differential equations. We shall use the vector form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)\,. \tag{1,01}$$

We suppose that the function $f(x, t)$ is defined and continuous for $x \in G$, $t \geqq 0$ and that $f(0, t) = 0$, $t \geqq 0$.

Definition: The trivial solution $x(t) = 0$ of (1,01) is called strongly stable in G, if for arbitrary positive numbers β and ε there exists such positive numbers $B = B(\varepsilon)$, $T = T(\beta, \varepsilon)$ that the following conditions hold:

$$B(\beta) \to 0 \quad \text{monotonously with} \quad \beta \to 0\,.$$

Let the function $y(t)$ fulfil (1,01) for $t_0 \leqq t < t_1$, $0 \leqq t_0 < t_1 \leqq \infty$ and let $\omega(y(t_0)) \leqq \beta$. Then there exists such a solution $x(t)$ of (1,01) which is defined for $t \geqq t_0$ and fulfils the conditions

$$x(t) = y(t) \text{ for } t_0 \leqq t < t_1\,, \quad \omega(x(t)) < B \text{ for } t \geqq t_0\,,$$
$$\omega(x(t)) < \varepsilon, \text{ for } t \geqq t_0 + T\,.$$

Now we are in position to formulate the following theorem:

Theorem 1. *Let us suppose that there exist functions $V(x, t)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ which fulfil the following conditions:*

I. *The function $V(x, t)$ is defined and continuous for $x \in G$, $t \geqq 0$ and has continuous partial derivatives of the first order with respect to the variables $x_1, \ldots, x_n, t$ for $x \in G$, $t > 0$.*

II. *The functions $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ are defined and continuous for $x \in G$,* $U_1(0) = U_2(0) = U_3(0) = 0$, $U_1(x) > 0$, $U_2(x) > 0$, $U_3(x) > 0$ for $x \in G$, $x \neq 0$, $U_2(x) \to \infty$ with $\omega(x) \to \infty$.

III. $U_2(x) \leqq V(x, t) \leqq U_1(x)\,, \quad x \in G,\ t \geqq 0\,.$

IV. $W(x, t) \leqq -U_3(x)\,, \quad x \in G,\ t \geqq 0\,.$

Then the trivial solution of equation (1,01) *is strongly stable in G.*

This theorem is analogous to the Lyapunov's theorem and contains the case of the asymptotic stability in the large. Its proof is a simple modification of the original Lyapunov's proof.

The converse of the theorem 1. Preliminary formulation. We prove at first the following theorem

Theorem 2. *Let us suppose that the trivial solution of* (1,01) *is strongly stable in G. Then there exist functions $V^*(x, t)$, $U_4(x)$, $U_5(x)$, $U_6(x)$ satisfying the conditions*

I'. *The function $V^*(x, t)$ is defined for $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$ and satisfies a local Lipschitz condition.*[2])

II'. *The functions $U_4(x)$, $U_5(x)$, $U_6(x)$ are defined and continuous for $x \in G$,*

$$U_4(0) = U_5(0) = U_6(0) = 0\,,$$
$$U_4(x) > 0,\ U_5(x) > 0,\ U_6(x) > 0 \ \text{for}\ x \in G,\ x \neq 0\,,$$
$$U_5(x) \to \infty \ \text{with}\ \omega(x) \to \infty\,.$$

III'. $U_5(x) \leqq V^*(x, t) \leqq U_4(x)\,, \quad x \in G,\ x \neq 0,\ t \geqq 0\,.$

IV'.
$$\limsup_{t \to t_0 -} \frac{V^*(x(t), t) - V^*(x(t_0), t_0)}{t - t_0} \leqq -U_6(x(t_0))\,,$$
$$0 < t_0 < \infty\,,$$

where $x(t)$ is an arbitrary solution of (1,01). *The function $V^*(x, t)$ does not depend on t if the function $f(x, t)$ does not depend on t. The function $V^*(x, t)$ is periodic in the variable t with the period ω_1, if $f(x, t) = f(x, t + \omega_1)$.*

We indicate the proof of this theorem. As we mentioned in the introduction J. Massera was the first to prove the converse of the Lyapunov's theorem in the paper [5]. I. G. Malkin in the paper [6] used the same method as Massera under more general assumptions. Malkin defined the function $V(x, t)$ in the following way: first of all he fixed a function $G(\zeta)$, $G(0) = 0$, $G(\zeta) > 0$ foı $\zeta > 0$. Let $y(\tau)$ be the solution of (1,01) which is defined for $\tau \geqq t$ and satisfies the condition $y(t) = x$. (This solution exists and is defined uniquely as Malkin supposed that the derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial t}$ are continuous and bounded and that the solutions of equation (1,01) tend to zero uniformly.) Malkin defined the function

$$V(x, t) = \int_t^\infty G(\|y(\tau)\|^2) d\tau \,. \tag{2,01}$$

He proved that the function $V(x, t)$ has an infinitely small upper bound if the function $G(\zeta)$ satisfies certain conditions. It follows from the assumption that the derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial f_i}$ are continuous and bounded and from some conditions imposed on the function $G(\zeta)$ that the function $V(x, t)$ has continuous and bounded partial derivatives with respect to the variables $x_1, \ldots, x_n, t$. From (2,01) we easily get

$$W(x, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V(y(\tau), \tau)|_{\tau = t} = - G(\|x\|^2)$$

and consequently the function $- W(x, t)$ is positive definite.

In order to prove the function $V(x, t)$ is positive definite Malkin requires that the function $\|f(x, t)\|$ is bounded if $\|x\|$ is bounded. This fact is a simple consequence of the assumptions that the derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ are continuous and bounded and that $f(0, t) = 0$. (If the function $\|f(x, t)\|$ were not bounded, there might exist a sequence of integrals $y^{(k)}(\tau)$ of (1,01) and a sequence of numbers $t_k \geqq 0, k = 1, 2, \ldots$ fulfilling the conditions $\|y^{(k)}(t_k)\| = 1$, $\|y^{(k)}(\tau)\| \leqq e^{-k(\tau - t_k)}$, $\tau \geqq t_k$; it follows that $V(y^{(k)}(t_k), t_k) \to 0$ with $k \to \infty$ and the function $V(x, t)$ is not positive definite.)

If we wish to work with more general assumptions we have to overcome following difficulties:

1. Let us suppose that the function $f(x, t)$ is continuous, that the solution of (1,01) is uniquely defined by the initial condition and let us define the function $V(x, t)$ in the same manner as Malkin. The function $V(x, t)$ is not necessarily positive definite. It is not difficult to prove, that the function $V(x, t)$ is continuous, that the function $V(y(\tau), \tau)$ has a continuous derivative and that $W(x, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} V(y(\tau), \tau) = - G(\|x\|^2)$. The function $V(x, t)$ need not have partial derivatives and need not admit an approximation by a smooth function which has all the desired properties.

---

[2]) That means: to every point (x_0, t_0), $0 \neq x_0 \in G$, $t_0 \geqq 0$ there exit such numbers $\delta > 0$ and $K > 0$ that

$$|V^*(x^{(1)}, t_1) - V^*(x^{(2)}, t_2)| < K(\|x^{(1)} - x^{(2)}\| + |t_1 - t_1|),$$

if

$$\|x^{(1)} - x_0\| < \delta, \ \|x^{(2)} - x_0\| < \delta, \ |t_1 - t_0| < \delta, \ |t_2 - t_0| < \delta, \ t_1 \geqq 0 . \ t_2 \geqq 0.$$

2. As we suppose only that the function $f(x, t)$ is continous, there need not exist only one solution $y(\tau)$ of (1,01) satisfying the condition $y(t) = x$.

Hence it follows that in order to overcome these difficulties it is necessary to define the function $V^*(x, t)$ suitably. Let us describe the way in which we define the function $V^*(x, t)$:

First of all we choose a function $\psi(x, t)$ continuous and positive for $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$. Let Y be the set of functions $y(t)$ which satisfy the following conditions:

The functions $y(t)$ are defined and continuous for $t \geqq t_0$ (the number $t_0 \geqq 0$ being different for different functions $y(t) \in Y$) and the values of these functions belong to G.

The derivative $\dot{y}(t)$ exists and is continuous for $t \geqq t_0$ with the possible exception of a finite number of points.

$$\int_{t_0}^{\infty} \psi(y(t), t) \,.\, \|\dot{y}(t) - f(y(t), t)\| \, \mathrm{d}t < 1 \,.$$

If the function $\psi(x, t)$ satisfies certain estimations from below, it is possible to prove, that the functions $y(t) \in Y$ fulfil the same conditions as the integrals of (1,01), that means for arbitrary positive numbers β and ε there exist such positive numbers $B^*(\beta)$, $T^*(\beta, \varepsilon)$ that the following conditions hold

$$B^*(\beta) \to 0 \quad \text{monotonously with} \quad \beta \to 0 \,,$$

if $y(t) \in Y$, $\omega(y(t_0)) \leqq \beta$ then $\omega(y(t)) < B^*$ for $t \geqq t_0$, $\omega(y(t)) < \varepsilon$ for $t \geqq t_0 + T^*$.

Hence: if the function $y(t) \in Y$ is defined for $t \geqq t_0$ and if there is a $t_2 \geqq t_0$, $y(t_2) = 0$, then $y(t) = 0$ for $t \geqq t_2$ (2,02).

Let us choose functions $\chi(\eta)$ and $L(x, t, \eta)$. The function $\chi(\eta)$ is positive if η is positive, $\chi(0) = 0$ and the function $L(x, t, \eta)$ fulfils the conditions $L(x, t, \eta) = 1$ if η is "great" (the word "great" has different meanings for different x and t), $L(x, t, \eta) = (1 + \|f(x, t)\|)^{\frac{1}{2}}$ if η is "small" and both functions fulfil some further conditions.

Let us now choose a function $y = y(t) \in Y$ which is defined for $t \geqq t_0$, $y(t_0) \neq 0$. From (2,02) it follows that there exists such a $t_1 > t_0$ that $y(t) \neq 0$ for $t_0 \leqq t < t_1$ and $y(t) = 0$ if $t \geqq t_1$. (We put $t_1 = \infty$ if $y(t) \neq 0$ for $t \geqq t_1$.)

To the function $y(t)$ let us find the function $V_1(t)$ which is defined for $t_0 \leqq t < t$, and fulfils the differential equation

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = - \chi(\omega(y(t))) \, L(y(t), t, V_1(t)) \tag{2,03}$$

and the condition

$$V_1(t) \to 0 \text{ with } t \to t_1 - \,, \quad V_1(t) > 0 \text{ for } t_0 \leqq t < t_1 \,.$$

We prove that there exists just one function $V_1(t)$ satisfying these conditions. If it happens that the function $y(t)$ and the corresponding function $V_1(t)$ fulfil the relation $L(y(t), t, V_1(t)) = 1$ for $t_0 \leqq t < t_1$, then $V_1(t) = \int_t^{t_1} \chi(y(\tau))\, d\tau$ and we see that function $\chi(\eta)$ plays similar part as the Malkin's function $G(\zeta)$. Let us solve the equation (2,03). If the function $\omega(y(t))$ increases rapidly with t decreasing, the function $L(y(t), t, V_1(t))$ will reach "great" values and this is the reason why the function $V_1(t)$ will not be too small in comparison with the function $\omega(y(t))$ independently on t and on the function $y \in Y$. In other words:

To every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, that $V_1(t) > \delta$ if $\omega(y(t)) > \varepsilon$. (2,04)

If the function $y = y(t) \in Y$ is defined for $t \geqq t_0$ let the number $c(y)$ be defined by the relation $c(y) = V_1(t_0)$, where the function $V_1(t)$ corresponds to the function $y(t)$ in the manner described above.

For $x \in G$, $x \neq 0$, $t \geqq 0$ let $B(x, t)$ be the set of functions $y(\tau) \in Y$ which are defined for $\tau \geqq t$ and fulfil the condition $y(t) = x$. The set $B(x, t)$ apparently contains the solution $u(\tau)$ of (1,01) which fulfils the condition $u(t) = x$ and consequently the set $B(x, t)$ is not empty.

Let $c(x, t)$ be the set of numbers γ of the form

$$\gamma = c(y)(1 - \int_t^{\infty} \psi(y(\tau), \tau)\, \|\dot{y}(\tau) - f(y(\tau), \tau)\|\, d\tau)$$

where $y \in B(x, t)$. Let us put

$$V^*(x, t) = \sup_{\gamma \in C(x, t)} \gamma\,, \quad x \in G,\ x \neq 0,\ t \geqq 0\,.$$

The inequality $V^*(x, t) \leqq U_4(x)$ for a suitable function $U_4(x)$ is proved without difficulties from the properties of the differential equation (2,03). The inequality $V^*(x, t) \geqq U_5(x)$ follows from (2,04), and it is also not difficult to prove that condition IV' is satisfied. The most elaborate is the proof that the function $V^*(x, t)$ satisfies a local Lipschitz condition.

The converse of the theorem 1. The main result of this paper is the following

Theorem 7. *Let us suppose that the trivial solution of* (1,01) *is strongly stable in G. Then there exist functions $V_7(x, t)$, $U_{13}(x)$, $U_{14}(x)$, $U_{15}(x)$ which fulfil the following conditions:*

I. *The function $V_7(x, t)$ is defined and continuous for $x \in G$, $t \geqq 0$ and has continuous partial derivatives of all orders with respect to the variables $x_1, \ldots, x_n, t$ for $x \in G$, $t > 0$.*

II. *The functions $U_{13}(x)$, $U_{14}(x)$, $U_{15}(x)$ are defined and continuous for $x \in G$*

$$U_{13}(0) = U_{14}(0) = U_{15}(0) = 0\,,$$
$$U_{13}(x) > 0,\ U_{14}(x) > 0,\ U_{15}(x) > 0 \text{ for } 0 \neq x \in G\,,$$
$$U_{14}(x) \to \infty \text{ with } \omega(x) \to \infty\,.$$

III. $U_{14}(x) \leqq V_7(x, t) \leqq U_{13}(x)\,, \quad x \in G,\ t \geqq 0\,.$

$$\text{IV.} \qquad W_7(x, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_7}{\partial x_j} \cdot f_j + \frac{\partial V_7}{\partial t} \leqq - U_{15}(x) , \quad x \in G, \ t > 0 .$$

The function $V_7(x, t)$ does not depend on t if the function $f(x,t)$ does not depend on t.

Le us indicate the considerations which lead us from theorem 2 to theorem 7. The function $V^*(x, t)$ fulfils obviously the relation $\lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ t \to t_0}} V^*(x, t_0) = 0.$

We approximate the function $V^*(x, t)$ by a function $V_5(x, t)$. The function $V_5(x, t)$ is defined and continuous for $x \in G$, $t \geqq 0$ and has continuous partial derivatives of all orders with respect to the variables $x_1, \ldots, x_n, t$ for $0 \neq x \in G$, $t > 0$, $V_5(0, t) = 0$ for $t \geqq 0$. The function $V_5(x, t)$ satisfies conditions which are analogous to conditions II, III, IV of theorem 7. We find a function $v(\eta)$ satisfying the conditions:

The function $v(\eta)$ is defined for all real η and has continuous derivatives of all orders.

$$v(\eta) = 0 \text{ for } \eta \leqq 0 , \quad v(\eta) \text{ increases with } \eta \text{ for } \eta \geqq 0 .$$

$$v(\eta) \to \infty \text{ with } \eta \to \infty , \quad v(\eta) \text{ tends to zero “rapidly” with } \eta \to 0 + .$$

Finally we put $v(V_5(x, t)) = V_7(x, t)$ and prove that conditions I—IV of theorem 7 are satisfied.

The topologic structure of the set G. In this section we apply the results concerning the reversibility of the Lyapunov's theorem to the study of the topologic structure of the set G. Let us denote by R the interior of the unite sphere in E_n. The main result of this section is contained in the following theorem:

Theorem 8. *Let us suppose that the trivial solution of* (1,01) *is strongly stable in G.*

Then there exists a homeomorphic mapping $h(x)$ of the set G on the set R. The mapping $h(x)$ has continuous partial derivatives of all orders with respect to the coordinates of the vector x and the Jacobian of this mapping differs from zero at every point.

We describe the proof of theorem 8. We suppose that the trivial solution of (1,01) is strongly stable in G. According to theorem 7 there exist such functions $V_7(x, t)$, $U_{13}(x)$, $U_{14}(x)$, $U_{15}(x)$ that conditions I, II, III, IV of this theorem are fulfilled.

By means of a lemma due to H. Whitney we find a function $\tilde{f}(x, t)$, which is defined and continuous for $x \in G$, $t \geqq 0$, has partial derivatives of all orders with respect to the variables $x_1, \ldots, x_n, t$ for $x \in G$, $x \neq 0$, $t > 0$ and fulfils the inequality

$$\|\tilde{f}(x, t) - f(x, t)\| < \frac{1}{2} \frac{U_{15}(x)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 1} , \quad x \in G, \ t > 0 .$$

Let us consider the equation

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tilde{f}(x, t) . \tag{5,01}$$

Apparently, we have $\tilde{f}(0, t) = 0$ and the total derivative $\tilde{W}_7(x, t)$ of the function $V_7(x, t)$ which is computed by means of the function $\tilde{f}(x, t)$ fulfils the condition

$$\tilde{W}_7(x, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_7}{\partial x_j} \tilde{f}_j + \frac{\partial V_7}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_7}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial V_7}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_7}{\partial x_j} (\tilde{f}_j - f_j) \leqq$$

$$\leqq - U_{15}(x) + \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V_7}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{f}(x, t) - f(x, t)\| \leqq - \tfrac{1}{2} U_{15}(x) . \tag{5,05}$$

According to theorem 1 the trivial solution of (1,01) is strongly stable in G (we use the conditions I, II, III of theorem 7 and the inequality (5,05)).

Let us choose the numbers $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots, \lim_{i \to \infty} r_i = r^*$, let the number r^* be small enough and let us put $R^{(i)} = \underset{x}{E}[x \in E_n, \|x\| < r_i]$.

The solutions of (5,01) depend smoothly on the initial values and tend to zero uniformly with $t \to \infty$. By means of these properties of equation (5,01) we construct a sequence of homeomorphic mappings $g^{(i)}$ of the set G on itself. Let us put $H^{(i)} = (g^{(i)})^{-1}(R^{(i)})$.

The mappings $g^{(i)}$ fulfil the following conditions:

Each mapping $g^{(i)}(x)$ has continuous partial derivatives (5,02) of all orders and the Jacobian is different from zero at every point.

$$H^{(i+1)} \supset \overline{H^{(i)}} , \quad i = 1, 2, 3, \ldots , \tag{5,03}$$

$$G = \sum_{i=1}^{\infty} H.^{(i)} \tag{5,04}$$

We put $h^{(1)}(x) = g^{(1)}(x)$ and use the lemma 7. The mappings $h^{(1)}$ and $g^{(2)}$ being given we find by means of the lemma 7 a homeomorphic mapping $h^{(2)}$ of the set G on itself, which fulfils the condition (5,02) and the conditions

$$h^{(2)}(x) = g^{(2)}(x) \text{ for } x \in G - H^{(2)} , \quad h^{(2)}(x) = h^{(1)}(x) \text{ for } x \in H^{(1)} .$$

To the mappings $h^{(2)}$ and $g^{(3)}$ we find by means of the lemma 7 a homeomorphic mapping $h^{(3)}$ of the set G on itself, which fulfils the condition (5,02) and the conditions

$$h^{(3)}(x) = g^{(3)}(x) \text{ for } x \in G - H^{(3)} , \quad h^{(3)}(x) = h^{(2)}(x) \text{ for } x \in H^{(2)} .$$

Analogously we find the mappings $h^{(4)}, h^{(5)}, \ldots$ As (5,03) is satisfied and as we have $h^{(i)}(x) = h^{(i+1)}(x) = h^{(i+2)}(x) = \ldots$ for $x \in H^{(i)}$; we define the mapping $h^*(x) = h^{(i)}(x)$ for $x \in H^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ and prove that the mapping $h(x) = \frac{1}{r^*} h^*(x)$ fulfils all the conditions of theorem 8.

The following two theorems are simple consequences of theorem 8:

Theorem 10. *Let G be an open subset of E_n, $0 \in G$ and let the function $V(x)$ fulfil the following conditions:*

The function $V(x)$ is defined for $x \in G$ and has continuous partial derivatives of the first order,

$$V(0) = 0\,, \quad V(x) > 0 \text{ for } x \neq 0\,, \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)^2 > 0 \quad \text{if } x \neq 0\,.$$

Then there exist such numbers $\alpha_1 > 0$ and $r > 0$ that for each α, $0 < \alpha < \alpha$, the set $G(\alpha) = \mathop{E}_{x}[x \in G,\ \|x\| < r,\ V(x) < \alpha]$ is homeomorphic with the interior R of a sphere. There exists a homeomorphic mapping $h(x)$ of the set $G(\alpha)$ on R which has continuous partial derivatives of all orders with the Jacobian different from zero at every point.

Theorem 11. *Let us suppose that G is an open set and that $g(x)$ is a homeomorphic mapping, which maps the set G on the interior R of a sphere and has continuous partial derivatives of the first order, the Jacobian being different from zero at every point.*

Then there exists a homeomorphic mapping $h(x)$ of G on R. The mapping $h(x)$ has continuous partial derivatives of all orders and the Jacobian is different from zero at each point.

Finally we examine more fully the autonomous equation

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)\,. \tag{5,28}$$

We suppose that the function $f(x)$ is defined and continuous in an open set G, $0 \in G$ and that $f(0) = 0$. The function $\omega(x)$ has its usual meaning.

The trivial solution of (5,28) is called stable, if for every $\varepsilon > 0$ there exists such a $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ that the following condition holds:

If $y(t)$ is a solution of (5,28) which is defined for $0 \leqq t \leqq T$, $0 < T < \infty$ and if $\|y(0)\| \leqq \delta$, then there exists such a solution $x(t)$ of (5,28), which is defined for $t \geqq 0$, that

$$x(t) = y(t) \text{ for } 0 \leqq t \leqq T\,, \quad \|x(t)\| < \varepsilon \text{ for } t \geqq 0\,.$$

The trivial solution of (5,28) is called asymptotically stable, if it is stable and if there such a $\delta_0 > 0$ that the following condition holds:

If $x(t)$ is a solution of (5,28) which is defined for $t \geqq 0$ and if $\|x(0)\| < \delta_0$, then $x(t) \to 0$ with $t \to \infty$.

These definitions are obvious generalisations of the usual ones for the case that the solution of (5,28) is not defined uniquely by the initial condition.

Let us denote by A the set of the points $x_0 \in G$ which have the following property:

If $y(t)$ is a solution of (5,28), which is defined for $0 \leqq t < T$, $0 < T \leqq \infty$ and if $y(0) = x_0$, then there exists such a solution $x(t)$ of (5,28) which is defined for $t \geqq 0$ that

$$x(t) = y(t) \text{ for } 0 \leqq t < T , \quad x(t) \to 0 \text{ with } t \to \infty .$$

The set A is called the set of asymptotical stability of equation (5,28).

Let us suppose that the trivial solution of (5,28) is asymptotically stable. Then the set A contains all points x for which $\|x\| < \delta_0$.

We prove that the set A is open and that the trivial solution of (5,28) is strongly stable in A. According to theorem 8 we get that the set A is homeomorphic with the interior R of a sphere and that there exists such a homeomorphic mapping of A on R which has continuous partial derivatives of all orders with the Jacobian different from zero at every point.

*

Appendix

The notion of the asymptotic stability is a local one, that means the trivial solution of equation (1,01) is asymptotically stable, if there exists such a positive H that certain conditions are satisfiedon the set $\|x\| < H$, $t \geqq 0$. This local notion was examined in the papers of J. L. MASSERA [5] and I. G. MALKIN [6] (see the introduction). In the appendix it is shown, that the results concerning the reversibility of the second Lyapunov's theorem, which are proved in the papers [5] and [6], follow from Theorem 7.