Czechoslovak Mathematical Journal

Otakar Borůvka

Замечания к рецензии М. И. Ельшина моей статьи „О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-го порядка"

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 431–433

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100209

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

ЗАМЕЧАНИЯ К РЕЦЕНЗИИ М. И. ЕЛЬШИНА МОЕЙ СТАТЬИ „О КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ИНТЕГРАЛАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА"

(Чехосл. матем. ж., *3* (*78*), 1953, 199—255.)

ОТАКАР БОРУВКА (Otakar Borůvka), Брно.

(Поступило в редакцию 26/III 1956 г.)

В Реферативном Журнале, матем., 1956, № 1, 406, была помещена рецензия М. И. Ельшина, касающаяся упомянутой выше статьи; рецензия содержит с начала до конца неточности и ошибки. По поводу этой рецензии констатирую следующее.

Мною исследуется дифференциальное уравнение

$$y'' = Q(x)\, y \tag{1}$$

в предположениях, что функция $Q(x) < 0$ определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$ и что все нетривиальные решения дифференциального уравнения (1) колеблются.

1. Рецензент пишет, что, ссылаясь на Хамеля (*Hamel G.*, Math. Ann., *73*, 1913, 381), я представляю решение дифференциального уравнения (1) в форме Боля:

$$y = c\varrho \cos[\int_\xi^x \omega \, \mathrm{d}\xi + \gamma(\xi)]\,,$$

где $\varrho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, $\omega = w/\varrho^2$; $w = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \text{const}$ (y_1 и y_2 — фундаментальная система решений уравнения (1)).

В действительности я ссылаюсь на Хамеля в связи с тем, что функция ϱ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\varrho'' = Q\varrho + w^2/\varrho^3$ (a), которое в цитированной работе Хамеля встречается по всей вероятности впервые. Позднее дифференциальное уравнение (a) или эквивалентное ему дифференциальное уравнение для функции ω несколько раз выводилось снова или обобщалось (см. напр. Ельшин М. И., Докл. АН, *68*, 1949, № 2, 221—224, формула (16)).

2. Рецензент неправильно воспроизводит мое определение центральных дисперсий. Он смешивает понятия центральных дисперсий второго и третьего рода и разделяет центральные дисперсии 1-го, 2-го и 3-го рода на прямые и непрямые, смотря по тому, положительны ли их индексы или отрицательны.

В действительности я показал, что все центральные дисперсии 1-го рода (как с положительными, так и с неположительными индексами) являются прямыми дисперсиями, образуя центр группы всех собственных прямых дисперсий 1-го рода (21). Разделение дисперсий высших родов на прямые и непрямые в моей работе не встречается. Рецензент не приводит определения понятия дисперсии 1-го рода, изучению которого посвящается большая часть моей работы.

3. Рецензент пишет, что доказательства основных свойств дисперсий 1-го рода неоднократно встречаются в литературе (напр. у Н. В. Адамова, Матем. сб., *42*, 1935, 651—668).

В действительности в литературе случайно разбираются некоторые свойства одних только центральных дисперсий 1-го рода (в цитированной работе Н. В. Адамов кроме того предполагает, что функция Q — периодическая). Рецензент не упоминает о том обстоятельстве, что мои результаты, касающиеся основных свойств центральных дисперсий 1-го рода, выводятся систематически и всегда в виде ряда аналогичных результатов, касающихся свойств центральных дисперсий всех четырех родов (6, 7, 8, 9, 12).

4. Рецензент пишет, что я прихожу к непонятному выводу, а именно, что каждое решение дифференциального уравнения

$$\sqrt{|\zeta'|}\,(|\zeta'|^{-\frac{1}{2}})'' + \zeta'^2 Q(\zeta) = Q(x)\,, \tag{2}$$

определенное на интервале $(-\infty, +\infty)$, является собственной дисперсией (1-го рода). Ссылаясь на свою (цитированную в п. 1) работу, он утверждает, что общий интеграл дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$\int\limits_x^{\zeta(x)} [(Au + Bv)^2 + v^2)^{-1} A \,.\, \mathrm{d}\xi = C\pi\,, \tag{б}$$

где u и v — фундаментальная система решений уравнения (1) с начальными условиями $u_0 = 1$, $u_0' = 0$, $v_0 = 0$, $v_0' = 1$; $A = w \neq 0$, B и C — произвольные постоянные.

В действительности в упомянутой работе рецензента не встречается ни дифференциальное уравнение (2), ни какое-либо другое дифференциальное уравнение третьего порядка. Утверждение, что общий интеграл дифференциального уравнения (2) имеет вид (б), неверно, так как все интегралы, определяемые уравнением (б), возрастают ($\zeta'(x) > 0$), в то время как среди интегралов дифференциального уравнения (2) имеются всегда и убывающие (напр. $Q(x) = -1$, $\zeta(x) = -x$). Мой результат не является непонятным, так как собственные дисперсии 1-го рода удовлетворяют уравнению (2) (19,1) и зависят так же как и решения уравнения (2) от трех параметров (20,4; 23).

5. По словам рецензента связь дисперсий 1-го рода с функцией $Q(x)$ выражается теоремой: существуют x_1 и x_2 ($x_1 < x < x_2$) такие, что $\zeta'(x) = Q(x_1)/Q(x_2)$.

В действительности я доказал соответственную теорему (наряду с аналогичными результатами для основных центральных дисперсий всех четырех родов) только в случае, когда ζ — основная центральная дисперсия 1-го рода и когда $x < x_1 < x_2 < \zeta(x)$ (9).

6. Главные результаты моей работы касаются следующих проблем: 1. Группа собственных дисперсий 1-го рода, ее представление и строение (21, 22). 2. Существование и единственность решения дифференциального уравнения (2) (23), 3. Аналитическое и конструктивное интегрирование уравнения (2) (24, 25, 15). Обо всем этом, за исключением приведенного в п. 4 результата́, рецензент вообще не упоминает.

Résumé

REMARQUES SUR LE COMPTE RENDU DE M. M. I. YELCHINE CONCERNANT MON MÉMOIRE: „*SUR LES INTÉGRALES OSCILLATOIRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE*“

(Czechoslov. Math. J., *3* (78), 1953, 199—255.)

OTAKAR BORŮVKA, Brno.

(Reçu le 26 mars 1956.)

M. M. I. Yelchine vient de publier (Referativnyj žurnal, Mat., 1956, No 1, 406) un compte rendu concernant mon Mémoire cité dans l'inscription. Le compte rendu en question contient de nombreuses inexactitudes ou erreurs. Dans ces *Remarques* je donne une rectification de l'article de M. M. I. Yelchine.