Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Kosmák

Une note sur les fonctions convexes

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 420–425

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100207

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

UNE NOTE SUR LES FONCTIONS CONVEXES

LADISLAV KOSMÁK, Praha.

(Reçu le 17 novembre 1955.)

On établit une propriété d'approximation caractérisant les fonctions convexes.

Étant donnée une fonction $f(x)$, définie et continue sur un segment quelconque $\langle a, b\rangle$ $(a < b)$, désignons par $P^{(n)}_{\langle a, b\rangle}(x)$ le polynôme de degré n (au plus) représentant la meilleure approximation de la fonction $f(x)$ sur le segment $\langle a, b\rangle$. Posons ensuite

$$E^{(n)}_{\langle a, b\rangle} = \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - P^{(n)}_{\langle a, b\rangle}(x)| \,.$$

D'après le théorème classique de Tchebyscheff le polynôme $P^{(n)}_{\langle a, b\rangle}(x)$ jouit de la propriété caractéristique suivante: Il existe sur le segment $\langle a, b\rangle$ $n + 2$ points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$$

tels que l'on a ou bien

$$f(x_i) - P^{(n)}_{\langle a, b\rangle}(x_i) = (-1)^i E^{)n)}_{\langle a, b\rangle}$$

ou bien

$$f(x_i) - P^{(n)}_{\langle a, b\rangle}(x_i) = (-1)^{i+1} E^{(n)}_{\langle a, b\rangle}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n + 2$. Un tel point x_i sera appelé point d'écart maximum de sens positif ou négatif sur le segment $\langle a, b\rangle$ de la fonction $f(x)$ du polynôme $P^{(n)}_{\langle a, b\rangle}(x)$, suivant que

$$f(x_i) > P^{(n)}_{\langle a, b\rangle}(x_i)$$

ou

$$f(x_i) < P^{(n)}_{\langle a, b\rangle}(x_i)$$

respectivement.

Soit maintenant $n = 2$. Si $f(x) \not\equiv P^{(2)}_{\langle a, b\rangle}(x)$, désignons par $m_{\langle a, b\rangle}$ le nombre maximum de membres de la suite finie

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_k \,,$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ sont les points d'écart maximum de la fonction $f(x)$ du polynôme $P^{(2)}_{\langle a, b\rangle}(x)$, avec des sens alternés; si ξ_1 ou ξ_k est un point d'écart maximum de sens positif, il doit en plus être situé à l'intérieur du segment $\langle a, b\rangle$.*) Si $f(x) \equiv P^{(2)}_{\langle a, b\rangle}(x)$, mettons $m_{\langle a,b\rangle} = 3$. Maintenant nous pouvons énoncer notre résultat.

Théorème. *La fonction $f(x)$ définie et continue sur le segment $\langle a, b\rangle$ y est convexe si et seulement si pour tout segment $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$, $(\alpha < \beta)$, on a*

$$E^{(2)}_{\langle \alpha, \beta\rangle} \leqq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2(m_{\langle \alpha, \beta\rangle} - 1)^2}\, c_{\langle \alpha, \beta\rangle} \tag{1}$$

*où $c_{\langle \alpha, \beta\rangle}$ est le coefficient du membre quadratique do polynôme $P^{(2)}_{\langle \alpha, \beta\rangle}(x)$.***)

Démonstration. I. Supposons que $f(x)$ soit une fonction convexe sur le segment $\langle a, b\rangle$. Nous pouvons supposer encore, pour la démonstration, que la fonction $f(x)$ et le segment $\langle a, b\rangle$ soient tels que

$$P^{(2)}_{\langle a, b\rangle}(x) = cx^2 ,$$

où $c \geqq 0$; il suffit également de se borner à un seul segment, soit donc $\langle a, b\rangle$.

Notre théorème devient évident dans le cas où $f(x) \equiv P^{(2)}_{\langle a, b\rangle}(x)$; or, si ce n'est pas le cas, il existe, d'après le théorème de Tchebyscheff cité ci-dessus, sur le segment $\langle a, b\rangle$ au moins quatre points d'écart maximum dont un au moins est un point d'écart maximum de sens positif situé à l'intérieur de ce segment. Nous allons montrer que tout autre point d'écart maximum est éloigné de $\sqrt{\dfrac{2E^{(2)}_{\langle a, b\rangle}}{c}}$ au moins du point en question. Soit donc $x_1 \in (a, b)$ ce point d'écart maximum de sens positif, soit x_2 le point d'écart maximum de sens négatif le plus proche de x_1. Comme la fonction $f(x)$ est convexe, elle admet à l'intérieur de $\langle a, b\rangle$ une dérivée de gauche et une dérivée de droite; de là il résulte facilement qu'elle admet au point x_1 une dérivée

$$f'(x_1) = P^{(2)\prime}_{\langle a, b\rangle}(x) .$$

Soit maintenant

$$t(x) = (x - x_1)\, f'(x_1) + f(x_1) ;$$

alors, pour tout $x \in \langle a, b\rangle$, on aura

$$f(x) \geqq t(x)$$

de sorte qu'il existe un point x_2^* situé entre les points x_1 et x_2 tel que

$$t(x_2^*) = P^{(2)}_{\langle a, b\rangle}(x_2^*) - E^{(2)}_{\langle a, b\rangle} .$$

---

*) On se rend facilement compte que, dans les conditions citées, le nombre $m_{\langle a, b\rangle}$ est toujours défini; le théorème de Tchebyscheff implique d'ailleurs que $m_{\langle a, b\rangle} \geqq 3$. — Sauf les cas où un malentendu serait possible nous dirons souvent tout simplement „point d'écart maximum" au lieu de dire „point d'écart maximum de la function $f(x)$ du polynôme $P^{(2)}_{\langle a, b\rangle}(x)$ sur le segment $\langle a, b\rangle$".

**) D'après le théorème de Tchebyscheff, on a $c_{\langle \alpha, \beta\rangle} = 0$ si $f(x)$ est linéaire sur $\langle \alpha, \beta\rangle$; de même, on a $c_{\langle \alpha, \beta\rangle} > 0$ (ou $c_{\langle \alpha, \beta\rangle} < 0$) si la fonction $f(x)$ est convexe (ou concave).

En même temps

$$f'(x_1) = 2cx_1 ,$$
$$f(x_1) = cx_1^2 + E^{(2)}_{\langle a,\, b\rangle} ,$$

de sorte que

$$cx_2^{*2} - E^{(2)}_{\langle a,\, b\rangle} = t(x_2^*) = (x_2^* - x_1)\, 2cx_1 + cx_1^2 + E^{(2)}_{\langle a,\, b\rangle} ,$$
$$cx_2^{*2} - 2cx_1x_2^* + cx_1^2 = 2E^{(2)}_{\langle a,\, b\rangle} ,$$
$$|x_1 - x_2^*| = \sqrt{\frac{2E^{(2)}_{\langle a,\, b\rangle}}{c}} \leqq |x_1 - x_2| .$$

De là résulte l'inégalité

$$\frac{(b-a)\sqrt{c}}{\sqrt{2E^{(2)}_{\langle a,\, b\rangle}}} \geqq m_{\langle a,\, b\rangle} - 1 ,$$
$$E^{(2)}_{\langle a,\, b\rangle} \leqq \frac{(b-a)^2}{2(m_{\langle a,\, b\rangle} - 1)^2} \cdot c .$$

II. Supposons maintenant que la fonction continue $f(x)$ ne soit pas convexe sur tout le segment $\langle a, b\rangle$. Si $f(x)$ est concave on a $c_{\langle a,\, b\rangle} < 0$ et (1) ne peut pas être valable pour $\alpha = a$, $\beta = b$. Nous pouvons donc admettre que $f(x)$ ne soit ni convexe ni concave sur $\langle a, b\rangle$. Nous allons montrer qu'il existe alors un segment $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$ tel que $f(x)$ n'est pas linéaire sur $\langle \alpha, \beta\rangle$ et que le polynôme de degré 2 au plus représentant sa meilleure approximation sur ce segment est de degré 1 au plus. La démonstration du théorème sera par là achevée, car alors $c_{\langle \alpha,\, \beta\rangle} = 0$, $E^{(2)}_{\langle \alpha,\, \beta\rangle} > 0$ et (1) ne pourra pas être vérifié.

La fonction $f(x)$ n'étant ni convexe ni concave sur $\langle a, b\rangle$, il existe un segment $\langle a_1, b_1\rangle \subset \langle a, b\rangle$ et deux points a_2, b_2 situés sur ce segment-ci tels que

$$f(a_2) > l(a_2) ,$$
$$f(b_2) < l(b_2) ,$$

où $l(x)$ est la fonction linéaire égale à $f(x)$ aux points a_1 at b_1. Nous pouvons supposer $a_2 < b_2$; car si $a_2 > b_2$ il suffira de considérer la fonction $-f(x)$. Posons maintenant

$$a_3 = \sup_{x \in A} x ,$$

où

$$A = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [x \in \langle a_1, a_2\rangle,\, l(x) = f(x)] ;$$

de la continuité de $f(x)$ s'ensuit l'existence d'une fonction linéaire

$$l_1(x) = p_1x + q_1$$

aux propriétés suivantes:

(I_1) pour tout $x \in \langle a_3, b_1)$, on a $l_1(x) \leqq f(x)$;

(I_2) $l_1(a_3) = f(a_3)$ et il existe un point $y_1 \in (a_2, b_1)$ tel que $l_1(y_1) = f(y_1)$.

On a alors évidemment

$$l_1(y_1) < l(y_1) ;$$

posons maintenant

$$b_3 = \inf_{x \in B} x ,$$

où

$$B = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [x \in \langle y_1, b_1 \rangle, l(x) = f(x)] .$$

De la continuité de $f(x)$ résulte qu'il existe une fonction linéaire

$$l_2(x) = p_2 x + q_2$$

vérifiant

(II_1) pour tout $x \in \langle a_3, b_3 \rangle$ on a $l_2(x) \geqq f(x)$;

(II_2) $l_2(b_3) = f(b_3)$ et il existe un point $y_2 \in (a_3, y_1)$ pour lequel $l_2(x_2) = f(y_2)$. Désignons

$$y_1^* = \inf_{y \in Y_1} y , \quad \text{où} \quad Y_1 = \mathop{\mathrm{E}}_{y} [y \in (a_3, b_3), l_1(y) = f(y)] ,$$

$$y_2^* = \sup_{y \in Y_2} y, \quad \text{où} \quad Y_2 = \mathop{\mathrm{E}}_{y} [y \in (a_3, b_3), l_2(y) = f(y)] .$$

Si $p_1 = p_2$, on a $q_1 \neq q_2$; dans ce cas-là on a évidemment

$$P^{(2)}_{\langle a_3, b_3 \rangle}(x) = p_1 x + \tfrac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

de sorte que le segment $\langle \alpha, \beta \rangle$ cherché est justement le segment $\langle a_3, b_3 \rangle$.

Soit maintenant $p_1 < p_2$; il est aisé de voir que ce cas se présente si et seulement si

$$l_2(a_3) - l_1(a_3) < l_2(b_3) - l_1(b_3) . \tag{2}$$

Soit alors

$$l_3(x) = p_1 x + q_3$$

une fonction linéaire telle que

(III_1) pour tout $x \in \langle a_3, y_1^* \rangle$ on ait $l_3(x) \geqq f(x)$;

(III_2) il existe un point $y_3 \in \langle a_3, y_1^* \rangle$ tel que $l_3(y_3) = f(y_3)$,

une telle fonction existant certainement. Maintenant on voit déjà aisement qu'on peut poser

$$\alpha = a_3 , \quad \beta = \inf_{x \in B^*} x ,$$

où

$$B^* = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [x \in \langle y_1^*, b_3 \rangle, \; l_3(x) = f(x)]$$

(il s'ensuit de (2) que $B^* \neq \emptyset$), et que

$$P^{(2)}_{\langle \alpha, \beta \rangle}(x) = p_1 x + \tfrac{1}{2}(q_1 + q_3) .$$

On peut établir d'une manière analogue que $p_1 > p_2$ si et seulement si

$$l_2(a_3) - l_1(a_3) > l_2(b_3) - l_1(b_3)$$

et l'on peut vérifier qu'il existe alors une fonction linéaire

$$l_4(x) = p_2 x + q_4$$

aux propriétés

(IV$_1$) pour tout $x \in \langle y_2^*, b_3 \rangle$, on a $l_4(x) \leqq f(x)$;

(IV$_2$) il existe sur le segment $\langle y_2^*, b_3 \rangle$ un point y_4 tel que $l_4(y_4) = f(y_4)$.

Nous pouvons poser alors

$$\beta = b_3 \, , \quad \alpha = \sup_{x \in A^*} x \, ,$$

où

$$A^* = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [x \in \langle a_3, y_2^* \rangle, l_4(x) = f(x)] \, ,$$

et nous aurons

$$P^{(2)}_{\langle \alpha, \beta \rangle}(x) = p_2 x + \tfrac{1}{2}(q_2 + q_4) \, .$$

La démonstration de notre théorème se trouve ainsi terminée.

Remarque. L'estimation (1) est la meilleure possible dans le sens que des fonctions existent pour lesquelles l'égalité a lieu, telle par exemple la fonction

$$f(x) = 2\sqrt{2}\, |x|$$

considérée sur le segment $\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle$.

Signalons enfin encore que pour une fonction convexe on a toujours

$$E^2_{\langle a, b \rangle} \leqq \frac{(b-a)^2}{8} c \, .$$

Резюме

ЗАМЕТКА О ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

ЛАДИСЛАВ КОСМАК (Ladislav Kosmák), Прага.

(Поступило в редакцию 17/XI 1955 г.)

Пусть $f(x)$ — действительная непрерывная на отрезке $a \leqq x \leqq b$ функция, пусть $P_{\langle a, b \rangle}(x) = c_{\langle a, b \rangle} x^2 + \ldots$ — ее полином наилучшей аппроксимации степени $\leqq 2$ для отрезка $\langle a, b \rangle$ и пусть, наконец,

$$E_{\langle a, b \rangle} = \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - P_{\langle a, b \rangle}(x)| \, .$$

Определим $m_{\langle a, b \rangle}$ так: если $E_{\langle a, b \rangle} = 0$, то пусть $m_{\langle a, b \rangle} = 3$; если же $E_{\langle a, b \rangle} >$ > 0, то пусть $m_{\langle a, b \rangle}$ равно наибольшему числу k, для которого существует последовательность

$$a \leqq \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_k \leqq b$$

так, что разности $(-1)^i\,(f(\xi_i) - P_{\langle a,\,b\rangle}(\xi_i))$ все равны одному и тому же числу $\pm E_{\langle a,\,b\rangle}$. При этом нужно исключить случай $\xi_1 = a$, $f(a) > P_{\langle a,\,b\rangle}(a)$, а также случай $\xi_k = b$, $f(b) > P_{\langle a,\,b\rangle}(b)$. В работе доказана теорема:

Функция $f(x)$, непрерывная в $\langle a,\ b\rangle$, выпукла в $\langle a,\ b\rangle$ тогда и только тогда, если для любого отрезка $\langle \alpha,\ \beta\rangle$ $(a \leqq \alpha < \beta \leqq b)$ справедливо

$$E_{\langle\alpha,\,\beta\rangle} \leqq \frac{(\beta-\alpha)^2}{(2m_{\langle\alpha,\beta\rangle} - 1)^2}\, c_{\langle\alpha,\,\beta\rangle}\ .$$

Для $\beta = -\alpha = 2\sqrt{2}$, $f(x) = \beta|x|$ имеет место знак равенства.