Eduard Čech

Déformation projective des congruences W

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 401–414

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100205`

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

DÉFORMATION PROJECTIVE DES CONGRUENCES W

EDUARD ČECH, Praha.

(Reçu le 5 janvier 1956.)

Le résultat principal de ce Mémoire est la déscription géométrique et la détermination analytique de toutes les congruences W dont les déformées projectives dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable.

1. Au Mémoire *Transformations développables des congruences des droites*, ce Journal, t. *6* (*81*), 1956, p. 260-286, que je vais citer par TD, j'ai considéré une congruence non parabolique L dans S_3 faisant usage d'un repère

$$A_1, A_2, A_3, A_4\,, \tag{1.1}$$

assujetti à la condition

$$[A_1A_2A_3A_4] = 1 \tag{1.2}$$

et tel que $[A_1A_2]$ soit la droite génératrice de L et que $[A_1A_3]$, $[A_2A_4]$ en soient les deux transformées de Laplace. Nous avons vu [TD, (1.12)] que la congruence L est déterminée, abstraction faite de sa position dans l'espace projectif S_3, par les équations

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,,\\ dA_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4\,,\\ dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,,\\ dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4 \end{aligned} \tag{1.3}$$

dont les conditions d'intégrabilité sont [TD, (1.20)]

$$\begin{aligned} [\omega_{32}\omega_1] + [d\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})\,\omega_2] &= 0\,,\\ [d\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})\,\omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] &= 0\,,\\ -[\omega_{41}\omega_1] + [d\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44})\,\omega_2] &= 0\,,\\ [d\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33})\,\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dans ce travail, nous ne considérons que le cas

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0 \tag{1.5}$$

où la congruence L possède deux surfaces focales (A_1) et (A_2) non dégénérées et non développables. Les asymptotiques des surfaces focales sont données par les équations [TD, (2.3)]

$$\beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0\,, \quad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0\,. \tag{1.6}$$

Notons aussi les équations [TD, (1.15)]

$$[\mathrm{d}\omega_1] = [\omega_{11} - \omega_{33}\,\omega_1]\,, \quad [\mathrm{d}\omega_2] = [\omega_{22} - \omega_{44}\,\omega_2]\,, \tag{1.7}$$

qui mettent en évidence que les équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ sont complètement intégrables; si v et u en sont des intégrales premières, alors u, v sont des *paramètres développables* de la congruence L. Pour $v = \text{const.}$ ou $\omega_1 = 0$ on a la première famille des développables de L dont les arêtes de rebroussement sont situées sur la première surface focale (A_1), pour $u = \text{const.}$ ou $\omega_2 = 0$ la seconde famille des développables à arêtes de rebroussement situées sur (A_2).

Le repère (1.1) dépend des deux paramètres principaux u, v et de 5 paramètres secondaires. Si l'on pose $\omega_{ik}(\delta) = e_{ik}$, la différentiation δ ne se rapportant qu'aux paramètres secondaires, on a [TD, (2.1)]

$$\begin{aligned}
\delta\omega_1 &= (e_{11} - e_{33})\,\omega_1\,, & \delta\omega_2 &= (e_{22} - e_{44})\,\omega_2\,,\\
\delta\alpha_1 &= (e_{11} - 2e_{22} + e_{44})\,\alpha_1\,, & \delta\alpha_2 &= (e_{22} - 2e_{11} + e_{33})\,\alpha_2\,,\\
\delta\beta_1 &= -\,(e_{22} + e_{33} - 2e_{44})\,\beta_1\,, & \delta\beta_2 &= -\,(e_{11} + e_{44} - 2e_{33})\,\beta_2\,,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

tandis que les expressions $e_{11} - e_{22}$, $e_{11} - e_{33}$, $e_{11} - e_{44}$, e_{31}, e_{42} sont des combinaisons linéaires indépendantes des différentielles des paramètres secondaires. Il en résulte (TD, n° 2) que les formes différentielles

$$\varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2\,, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2\,, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1\frac{\omega_2^3}{\omega_1}\,, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2\frac{\omega_1^3}{\omega_2}\,, \tag{1.9}$$

liées par l'identité

$$\varphi\,.\,\varphi^* = F_1\,.\,F_2\,, \tag{1.10}$$

ne dépendent pas du choix des paramètres secondaires et sont par suite des invariants différentiels projectifs de la congruence L. Nous avons donné le nom d'élément linéaire projectif de L à l'ensemble des quatre formes (1.9) et nous avons prouvé (TD, n° 4) qu'une transformation développable (v. TD, n° 3) de la congruence L est une déformation projective si et seulement si elle conserve l'élément linéaire projectif.

A côté de l'espace ponctuel S_3, il convient de considérer aussi son espace corrélatif S_3^*, dont les points sont les plans de S_3. Nous considérons les droites de S_3 comme des ensembles de points; à chaque droite g de S_3 correspond alors une droite bien déterminée g^* de S_3^* que nous appelons la *dualisation* de g; g^* est donc le faisceau des plans de S_3 qui passent par g. En remplaçant chaque droite g de la congruence L par sa dualisation g^*, on obtient une congruence L^* de l'espace S_3^*. Le passage $g \to g^*$ considéré comme une transformation biunivoque de L en est une transformation développable appelée *dualisation de la congruence* L. Pour l'étudier il convient de considérer le repère corrélatif

$$E_1, E_2, E_3, E_4 \tag{1.11}$$

de (1.1), où

$$E_1 = [A_2A_3A_4]\,, \quad E_2 = -\,[A_1A_3A_4]\,, \quad E_3 = [A_1A_2A_4]\,, \quad E_4 = -\,[A_1A_2A_3]\,. \tag{1.12}$$

On a alors [TD, (1.18)]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_1 + \omega_{11}E_1 + \alpha_2\omega_1E_2 + \omega_{31}E_3 + \omega_{41}E_4 &= 0\,, \\ \mathrm{d}E_2 + \alpha_1\omega_2E_1 + \omega_{22}E_2 + \omega_{32}E_3 + \omega_{42}E_4 &= 0\,, \\ \mathrm{d}E_3 + \omega_1E_1 + \omega_{33}E_3 + \beta_1\omega_2E_4 &= 0\,, \\ \mathrm{d}E_4 + \omega_2E_2 + \beta_2\omega_1E_3 + \omega_{44}E_4 &= 0\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

En comparant (1.3) et (1.13), on voit qu'à la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ E_3 & -E_4 & -E_1 & E_2 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

correspondent les substitutions

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

et

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{22} & \omega_{33} & \omega_{44} & \omega_{31} & \omega_{42} & \omega_{32} & \omega_{41} \\ -\omega_{33} & -\omega_{44} & -\omega_{11} & -\omega_{22} & \omega_{31} & \omega_{42} & -\omega_{41} & -\omega_{32} \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Il résulte de (1.9) et (1.15) [v. du reste TD, (2.6)] que la dualisation échange les formes φ, φ^* l'une à l'autre et laisse les formes F_1, F_2 inaltérées. En conséquence la dualisation d'une congruence L est une déformation projective si et seulement si la condition

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 \quad \text{ou} \quad \varphi = \varphi^* \tag{1.17}$$

est vérifiée. D'après (1.6), (1.17) signifie que la congruence L établit une correspondance asymptotique entre les deux surfaces focales, autrement dit que L est une congruence W.

2. Dans la suite de ce Mémoire, nous nous bornons à l'étude des congruences W. On voit sans peine qu'on peut particulariser le repère de manière à avoir

$$\alpha_1 = \beta_1\,, \quad \alpha_2 = \beta_2\,. \tag{2.1}$$

En posant

$$A_1' = E_3\,, \quad A_2' = -\,E_4\,, \quad A_3' = -\,E_1\,, \quad A_4' = E_2 \tag{2.2}$$

on reconnait tout de suite que les équations qui correspondent pour la dualisation (en tant que déformation projective de L) aux équations TD (3.3), TD (3.5) et TD (7.2) sont satisfaites et, en vertu de (1.16), on a le même pour les équations TD (7.3) de sorte que la corrélation H_0, pour laquelle

$$H_0A_1 = E_3\,, \quad H_0A_2 = -\,E_4\,, \quad H_0A_3 = -\,E_1\,, \quad H_0A_4 = E_2\,, \tag{2.3}$$

joue relativement à la dualisation le rôle de l'homographie osculatrice. Or (2.3) est, d'après (1.12), la polarité par rapport au complexe linéaire

$$\Omega = [A_1A_3] - [A_2A_4]\,. \tag{2.4}$$

Il est aisé de prévoir que Ω est le *complexe linéaire osculateur* de la congruence W considérée; pour le vérifier par calcul, il suffit de constater qu'en vertu de (1.3) on a

$$\Omega\,.\,[A_1A_2] = \Omega\,.\,\mathrm{d}[A_1A_2] = \Omega\,.\,\mathrm{d}^2[A_1A_2] = 0\,.$$

Observons que l'on a, en vertu de (1.4) et (2.1),

$$\begin{aligned}&[\omega_{32} + \omega_{41}\,\omega_1] - \alpha_1[\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}\,\omega_2] = 0\,,\\ &[\omega_{32} + \omega_{41}\,\omega_2] + \alpha_2[\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}\,\omega_1] = 0\,.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Or on déduit des équations (1.3) que

$$\mathrm{d}([A_1A_3] - [A_2A_4]) = (\omega_{32} + \omega_{41})[A_1A_2] + (\omega_{11} + \omega_{33})[A_1A_3] - (\omega_{22} + \omega_{44})\,.\,[A_2A_4] \tag{2.6}$$

de manière que, si le complexe Ω est fixe, on a nécessairement

$$\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44} = 0\,. \tag{2.7}$$

Inversement, si (2.7) est valable, il résulte de (2.5) que l'on a aussi $\omega_{32} + \omega_{41} = 0$ et alors (2.6) montre que le complexe Ω est fixe. Donc (2.7) est la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence L appartienne à un complexe linèaire. Il est du reste bien connu (et évident) que chaque congruence qui appartient à un complexe linéaire est une congruence W. Il est aussi clair que les congruences appartenant à un complexe linéaire dépendent d'une fonction arbitraire de deux variables, car on peut choisir arbitrairement une surface focale (pourvu qu'elle soit non développable) ainsi que le complexe Ω qui doit contenir la congruence cherchée, laquelle est alors univoquement déterminée.

Il convient de compléter la particularisation (2.1) du repère par la particularisation

$$\alpha_1 + \beta_2 = 0\,, \quad \alpha_2 + \beta_1 = 0$$

qui exprime, selon (1.6), que les asymptotiques des surfaces focales sont données par

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 0\,. \tag{2.8}$$

Rappelons que les asymptotiques de (A_1) correspondent à celles de (A_2), la congruence L étudiée étant W. Il convient de distinguer la première famille des asymptotiques, donnée par $\omega_1 - \omega_2 = 0$, et la seconde donnée par $\omega_1 + \omega_2 = 0$.

Si on considère la dualisation d'une congruence W comme une déformation projective, on doit, selon (1.16), remplacer l'équation TD (7.14) par l'équation (2.7) du Mémoire présent. Il en résulte en premier lieu que la dualisation d'une congruence W ne peut être une déformation projective singulière que dans le cas où la congruence L considérée appartient à un complexe linéaire fixe Ω et alors la dualisation $L \to L^*$ se réduit à une transformation projective (polarité par rapport au complexe linéaire Ω). La dualisation est une déformation projective demisingulière si l'on a

$$[\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}\, \omega_1] = 0 \quad \text{ou bien} \quad [\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}\, \omega_2] = 0$$

Excepté les cas énumérés, l'équation (2.7) définit la *décomposition canonique* de L (c'est-à-dire décomposition canonique, au sens de TD n° 7, relative à la dualisation de L en tant que déformation projective), qui est une décomposition de L en ∞^1 surfaces réglées gauches R jouissant de la propriété que, pour chaque R, et pour chaque courbe asymptotique C de R, il existe une asymptotique C' de R (différente ou non de C) telle que, si B et B' sont les points de C et C' situés sur la même génératrice g de R, le plan tangent à R en B' est le plan polaire de B par rapport au complexe linéaire osculateur Ω de L correspondant à la génératrice g. Nous dirons que L est une congruence W à *dualisation asymptotique* de *première* ou *seconde sorte* si la décomposition canonique de L correspond à une des deux familles d'asymptotiques des surfaces focales, et précisément à la famille $\omega_1 - \omega_2 = 0$ pour la première sorte et à la famille $\omega_1 + \omega_2 = 0$ pour la seconde.

Les deux particularisations du repère introduites jusqu'à présent peuvent s'écrire

$$\alpha_1 = \beta_1 = -\alpha_2 = -\beta_2 \neq 0 \,.$$

On a donc, en vertu de (1.8), $e_{11} - e_{22} = e_{33} - e_{44} = 0$, et $e_{11} - e_{33}$, e_{31}, e_{42} restent arbitraires. En outre $\delta\alpha_1 = (e_{11} - e_{33})\,\alpha_1$, se qui permet de poser

$$\alpha_1 = \beta_1 = -\alpha_2 = -\beta_2 = 1 \,;$$

l'élément linéaire projectif (1.9) est alors

$$\varphi = \varphi^* = -\omega_1\omega_2 \,, \quad F_1 = \frac{\omega_2^3}{\omega_1} \,, \quad F_2 = \frac{\omega_1^3}{\omega_2} \,.$$

On a $e_{11} - e_{33} = 0$ avec e_{31}, e_{42} encore arbitraires. Or on calcule sans peine

$$\delta(\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44}) + 2(e_{31}\omega_1 - e_{42}\omega_2) = 0$$

ce qui montre que l'on peut achever la particularisation du repère en posant la condition

$$\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = 0 \,. \tag{2.10}$$

Il ne reste plus aucun paramètre secondaire, mais le repère (1.1) n'est déterminé qu'irrationnellement; on trouve sans difficulté qu'on peut encore le remplacer par

$$\varepsilon_1 A_1 \,, \quad \varepsilon_2 A_2 \,, \quad \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2} A_3 \,, \quad \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} A_4 \tag{2.11}$$

avec

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \pm 1 \,. \tag{2.12}$$

L'équation (2.10) permet de poser

$$\begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{33} = \omega_{22} - \omega_{44} = z_1\omega_1 + z_2\omega_2 \,, \\ \omega_{11} - \omega_{22} = \omega_{33} - \omega_{44} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Les équations (1.4) deviennent maintenant

$$\begin{aligned} [\omega_{32}\omega_1] + [2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}\,\omega_2] = 0 \,, \\ [2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}\,\omega_1] - [\omega_{41}\omega_2] = 0 \,, \\ -[\omega_{41}\omega_1] + [\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44}\,\omega_2] = 0 \,, \\ [\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33}\,\omega_1] + [\omega_{32}\omega_2] = 0 \,, \end{aligned}$$

de sorte que, d'après (2.13),

$$\begin{aligned} \omega_{32} = (z_2 - t_2)\,\omega_1 + (z_1 - t_1)\,\omega_2 \,, \\ \omega_{41} = -(z_2 + t_2)\,\omega_1 - (z_1 + t_1)\,\omega_2 \,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

La différentiation extérieure de (2.13) et (2.14) donne

$$[\omega_{31}\omega_1] - [\omega_{42}\omega_2] - 2[\omega_1\omega_2] = 0 \,, \tag{2.15}$$

$$[\mathrm{d}z_1 + \omega_{31}\,\omega_1] + [\mathrm{d}z_2 + \omega_{42}\,\omega_2] = 0 \,, \tag{2.16}$$

$$[\mathrm{d}t_1\omega_1] + [\mathrm{d}t_2\omega_2] + (z_1t_2 - z_2t_1)[\omega_1\omega_2] = 0 \,, \tag{2.17}$$

$$[\mathrm{d}t_2\omega_1] + [\mathrm{d}t_1\omega_2] + 3(z_1t_1 - z_2t_2)[\omega_1\omega_2] = 0 \,, \tag{2.18}$$

$$[\mathrm{d}z_2 - \omega_{42}\,\omega_1] + [\mathrm{d}z_1 - \omega_{31}\,\omega_2] + (2z_1^2 - 2z_2^2 + t_1^2 - t_2^2)[\omega_1\omega_2] = 0 \,. \tag{2.19}$$

Les équations (1.7) s'écrivent, en vertu de (2.13),

$$[\mathrm{d}\omega_1] = -z_2[\omega_1\omega_2] \,, \quad [\mathrm{d}\omega_2] = z_1[\omega_1\omega_2] \,. \tag{2.20}$$

Observons encore que l'équation (2.17) peut s'écrire, d'après (2.20),

$$[\mathrm{d}(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)] = 0 \,, \tag{2.21}$$

de sorte que $t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ est une différentielle exacte. L'équation $t_1\omega_1 + t_2\omega_2 = 0$ fournit la décomposition canonique de L de manière que $t_1^2 - t_2^2 = 0$ est la condition pour une congruence W à dualisation asymptotique, avec $t_1 - t_2 = 0$ pour la première sorte, $t_1 + t_2 = 0$ pour la seconde. On a $t_1 = t_2 = 0$ pour les congruences appartenant à un complexe linéaire.

Condition pour que la dualisation de L soit demisingulière (en tant que déformation projective de L) est que l'on ait

$$t_2 = 0 \neq t_1 \tag{2.22}$$

ou bien $t_1 = 0 \neq t_2$, les deux possibilités ne différant que formellement l'une de l'autre. Supposons donc que (2.22) soit valable. Il résulte alors de (2.17) et (2.18) que

$$\mathrm{d}t_1 + t_1(3z_1\omega_1 + z_2\omega_2) = 0 \,, \tag{2.23}$$

d'où il découle par différentiation extérieure

$$3[dz_1\omega_1] + [dz_2\omega_2] - 2z_1z_2[\omega_1\omega_2] = 0\,. \tag{2.24}$$

Les congruences L considérées s'obtiennent donc en intégrant le système de Pfaff composé des équations

$$\omega_{14} = \omega_{23} = 0\,,\ \omega_{13} = \omega_1\,,\ \omega_{24} = \omega_2\,,\ \omega_{12} = \omega_{43} = \omega_2\,,\ \omega_{21} = \omega_{34} = -\,\omega_1$$

et des équations (2.13), (2.14) et (2.23), sous la condition (2.22). Les conditions d'intégrabilité sont (2.15), (2.16), (2.19) et (2.24). Il y apparaissent, outre ω_1, ω_2, quatre formes de Pfaff dz_1, dz_2, ω_{31}, ω_{42} à déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & 3\omega_1 \\ 0 & \omega_2 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_1 & -\omega_2 & 0 \\ -\omega_2 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix} = -\,8\omega_1^3\omega_2 \neq 0\,.$$

Par suite *les congruences W à dualisation demisingulière dépendent de quatre fonctions arbitraires d'une variable.*

3. Passons à l'étude du problème de la détermination de toutes les congruences W à élément linéaire projectif donné. Ce problème est extrêmement compliqué et nous n'obtiendrons que des résultats franctionnaires, mais importants et intéressants. Ayant introduit une particularisation du repère qui donne à l'élément linéaire projectif l'expression (2.9), nous voyons que la connaissance de cet élément équivaut à celle des deux formes de Pfaff ω_1, ω_2. On peut donc supposer que l'on ait

$$\omega_1 = \lambda\, dv\,,\quad \omega_2 = \mu\, du\,, \tag{3.1}$$

λ et μ étant des fonctions données de u, v. Comme les congruences W ne dépendent que d'*une* fonction arbitraire de deux variables, les fonctions λ et μ sont soumis à des relations que du reste nous ne sommes pas capables d'écrire explicitement. Les équations (2.20) montrent que, si l'on connaît les formes (3.1), on connaît aussi les expressions z_1, z_2 et il résulte de ce qui précède que le problème en vue consiste dans la détermination des quantités t_1, t_2 et des formes de Pfaff ω_{31}, ω_{42} de telle sorte que les conditions (2.15)—(2.19) soient vérifiées et, en particulier, il s'agit de décider si une telle détermination est possible et dans le cas de possibilité de calculer la généralité de la solution.

Il convient de poser pour $i, j, k, \ldots = 1, 2$

$$\begin{aligned} dz_i &= z_{i1}\omega_1 + z_{i2}\omega_2\,, \\ dz_{ij} &= z_{ij1}\omega_1 + z_{ij2}\omega_2\,, \\ dz_{ijk} &= z_{ijk1}\omega_1 + z_{ijk2}\omega_2 \ \text{ etc.} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il résulte de (2.20) que l'on a

$$\begin{aligned} z_{i12} - z_{i21} &= z_1z_{i2} - z_2z_{i1}\,, \\ z_{ij12} - z_{ij21} &= z_1z_{ij2} - z_2z_{ij1} \ \text{ etc.} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les quantités $z_{ij}, z_{ijk}, z_{ijkl}, \dots$ $(i, j, k, l, \dots = 1, 2)$ peuvent être nommées *dérivées covariantes* de z_1, z_2; elles sont connues si on connaît les formes ω_1, ω_2.

Remarquons que les conditions (2.15)—(2.19) restent inaltérées en effectuant la substitution

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \omega_{31} & \omega_{42} \\ -t_1 & -t_2 & \omega_{31} & \omega_{42} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

ce qui signifie géométriquement que les congruences cherchées apparaissent en couples, chaque congruence étant la dualisation de l'autre congruence du même couple.

Les équations (2.17) et (2.18) expriment qu'il existe des quantités r, s telles qu'on ait

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t_1 &= (s - 3z_1t_1)\,\omega_1 + (r - z_2t_1)\,\omega_2\,, \\ \mathrm{d}t_2 &= (r - z_1t_2)\,\omega_1 + (s - 3z_2t_2)\,\omega_2\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

D'après (2.15), (2.16) et (2.19) on peut poser

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= (p + z_{11} + 2z_1^2 + t_1^2)\,\omega_1 + \tfrac{1}{2}(z_{21} - z_{12} - 2)\,\omega_2\,, \\ \omega_{42} &= \tfrac{1}{2}(z_{12} - z_{21} - 2)\,\omega_1 + (p + z_{22} + 2z_2^2 + t_2^2)\,\omega_2\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

La différentiation extérieure de (3.6) fournit la relation

$$\mathrm{d}p + (2\,.\,\overline{z_1p + t_2r} + Z_1)\,\omega_1 + (2\,.\,\overline{z_2p + t_1z} + Z_2)\,\omega_2 = 0 \tag{3.7}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_{221} + \tfrac{1}{2}z_{212} - \tfrac{1}{2}z_{122} + 2z_1z_{22} + 5z_2z_{21} - z_2z_{12} + 4z_1z_2^2 + 4z_2\,, \\ Z_2 &= z_{112} + \tfrac{1}{2}z_{121} - \tfrac{1}{2}z_{211} + 2z_2z_{11} + 5z_1z_{12} - z_1z_{21} + 4z_1^2z_2 + 4z_1\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

La différentiation extérieure de (3.5) conduit à introduire des quantités q_1, q_2 telles que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r &= (q_1 - 4z_1r - 3z_{12}t_1)\,\omega_1 + (q_2 - 4z_2r - 3z_{21}t_2)\,\omega_2\,, \\ \mathrm{d}s &= (q_2 - 2z_1r - \overline{z_{12} - 2z_1z_2}\,.\,t_2)\,\omega_1 + (q_1 - 2z_2s - \overline{z_{21} - 2z_1z_2}\,.\,t_1)\,\omega_2\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

De (3.7) on déduit par différentiation extérieure

$$t_1q_1 - t_2q_2 - 4(z_1t_1 - z_2t_2)\,r - (z_{12} - z_{21})\,p - 3(z_{12}t_1^2 - z_{21}t_2^2) + Z_3 = 0 \tag{3.10}$$

où

$$2Z_3 = Z_{21} - Z_{12} - 3z_2Z_1 + 3z_1Z_2\,, \tag{3.11}$$

$$\mathrm{d}Z_1 = Z_{11}\omega_1 + Z_{12}\omega_2\,, \quad \mathrm{d}Z_2 = Z_{21}\omega_1 + Z_2\omega_2\,. \tag{3.12}$$

Si l'on pose

$$\mathrm{d}q_1 = q_{11}\omega_1 + q_{12}\omega_2\,, \quad \mathrm{d}q_2 = q_{21}\omega_1 + q_{22}\omega_2\,,$$

on obtient par différentiation extérieure de (3.9)

$$\begin{aligned} q_{21} - q_{12} &+ 5(z_1q_2 - z_2q_1) + 7(z_{12} - z_{21})\,q + 3(z_{122} + 4z_2z_{12})\,t_1 - \\ &- 3(z_{211} + 4z_1z_{21})\,t_2 = 0\,, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} {}_{11} - q_{22} &+ 3(z_1q_1 - z_2q_2) + 3(z_{12} - z_{21})s - (z_{211} - 2z_2z_{11} - 2z_1z_{21})\,t_1 + \\ &+ (z_{122} - 2z_1z_{22} - 2z_2z_{12})\,t_2 = 0\,. \end{aligned}$$

La différentiation de (3.10) fournit les relations

$$\begin{aligned} t_1 q_{11} - t_2 q_{21} &+ (s - 7z_1 t_1 + 4z_2 t_2)\, q_1 - (r - z_1 t_2)\, q_2 + 4r(z_2 r - z_1 s) - \\ &- 4(z_{11} - 7z_1^2)\, t_1 r + 2(z_{12} + 4z_{21} - 10 z_1 z_2) - 6 z_{12} t_1 s + \\ &+ (z_{211} - z_{121} + 2r_1 \,.\, \overline{z_{12} - z_{21}})\, p - 3(z_{121} - 10 z_1 z_{12})\, t_1^2 - \\ &- 12 z_2 z_{12}\, t_1 t_2 + 3(z_{211} - 2z_1 z_{21})\, t_2^2 + Z_4 = 0 \,, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} t_1 q_{12} - t_1 q_{22} &+ (r - z_2 t_1)\, q_1 - (s + 4z_1 t_1 - 7z_2 t_2)\, q_2 - 4r(z_1 r - z_2 s) - \\ &- 2(4z_{12} + z_{21} - 10 z_1 z_2)\, t_1 r + 4(z_{22} - 7z_2^2)\, t_2 r + 6 z_{21} t_2 s + \\ &+ (z_{212} - z_{122} + 2z_2 \,.\, \overline{z_{12} - z_{21}})\, p - 3(z_{122} - 2z_2 z_{12})\, t_1^2 + 12 z_1 z_{21} t_1 t_2 + \\ &+ 3(z_{212} - 10 z_2 z_{21})\, t_2^2 + Z_5 = 0 \,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

où

$$Z_4 = (z_{12} - z_{21})\, Z_1 + Z_{31} \,, \quad Z_5 = 2(z_{12} - z_{21})\, Z_2 + Z_{32} \,, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{d}Z_3 = Z_{31}\omega_1 + Z_{32}\omega_2 \,. \tag{3.18}$$

Or soit

$$t_1^2 - t_2^2 \neq 0 \,, \tag{3.19}$$

ce qui veut dire que nous considérons les congruences W dont la décomposition canonique correspond à une décomposition des surfaces focales suivant ∞^1 courbes non asymptotiques. D'après ce qui précède, la détermination des congruences W possédant un élément linéaire donné se fait en intégrant le système de Pfaff

$$(3\,.\,5) + (3\,.\,7) + (3\,.\,9) + (3\,.\,13)$$

dont les inconnues $t_1, t_2, r, s, p, q_1, q_2, q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ sont liées par les conditions

$$(3\,.\,10) + (3\,.\,14) + (3\,.\,15) + (3\,.\,16)\,.$$

Si l'on suppose que l'inégalité (3.19) soit vérifiée, alors les conditions (3 . 14) + + (3 . 15) + (3 . 16) permettent d'éliminer $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ de façon qu'il ne reste que les inconnues $t_1, t_2, r, s, p, q_1, q_2$ liées par la relation (3 . 10). Si le système de Pfaff ainsi défini est complètement intégrable, on obtient ∞^6 congruences W possédant l'élément linéaire projectif donné et satisfaisant à l'inégalité (3.19). Or un calcul pénible que j'omets montre que le système de Pfaff envisagé n'est complètement intégrable que si l'on a

$$z_1 = z_2 = 0 \,, \tag{3.20}$$

ce qui veut dire [v. (2.20)] que les formes de Pfaff ω_1, ω_2, dont dépend l'élément linéaire projectif (2.9) donné, sont des différentielles exactes. Donc *chaque congruence W admet au plus ∞^6 déformées projectives qui n'appartiennent pas à un complexe linéaire et qui ne sont pas à dualisation asymptotique; le nombre maximum ∞^6 n'est atteint que dans le cas* (3.20). Remarquons que nous n'avons fait aucune supposition sur la validité de l'inégalité (3.19) pour la congruence W initiale.

4. Avant de passer au cas $t_1^2 - t_2^2 = 0$, considérons le cas ou la congruence W admet une déformation projective singulière, bien que nous n'obtenons qu'un résultat bien connu. Dans le cas considéré, les formes ω_1, ω_2 ainsi que les quantités z_1, z_2, t_1, t_2 sont les mêmes pour les deux congruences L, L' en relation de déformation projective singulière, mais si la déformation ne se réduit pas à une simple projectivité, les formes ω_{31}, ω_{42} relatives à L ne peuvent coincider aux formes analogues relatives à L', de manière que, d'après (3.6), la quantité p relative à L est différente de la quantité analogue p' relative à L'. D'autre part il résulte de (3.5) que les quantités r, s sont les mêmes pour les deux congruences, de sorte que

$$\mathrm{d}(p' - p) + 2(p' - p)(z_1\omega_1 + z_2\omega_2) = 0 \,. \tag{4.1}$$

Condition nécessaire pour la déformabilité projective singulière est donc que l'équation (4.1) possède une solution $p' - p \neq 0$, ou bien que l'on ait

$$[\mathrm{d}(z_1\omega_1 + z_2\omega_2)] = 0 \,, \tag{4.2}$$

ou enfin, selon (2.20),

$$z_{12} = z_{21} \,. \tag{4.3}$$

On vérifie sans difficulté que la condition trouvée est aussi suffisante.

Il résulte de (2.20) que (4.3) est la condition pour que les deux formes ω_1, ω_2 aient un facteur intégrant commun ou bien qu'on puisse choisir les paramètres développables u, v de la congruence de telle sorte que l'équation (2.8) des asymptotiques des surfaces focales prenne la forme $\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 = 0$. Nous arrivons ainsi au résultat bien connu que les congruences W projectivement déformables de façon singulière sont identiques aux congruences R, c'est-à-dire aux congruences W isotherme-conjuguées. Nous avons aussi vérifié, ce qui de même est bien connu, que chaque congruence R admet précisément ∞^1 déformations projectives singulières. On sait du reste que les congruences du type (1.5) qui ne sont pas W ne peuvent admettre aucune déformation projective singulière.

5. Passons à l'étude du cas $t_1^2 - t_2^2 = 0$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que

$$t_1 = t_2 \,. \tag{5.1}$$

Si l'on a $t_1 \neq 0$, alors il découle de (2.17) et (2.18) d'une part

$$[\mathrm{d}t_1\, \omega_1 + \omega_2] = 0 \tag{5.2}$$

et d'autre part

$$z_1 = z_2 \,. \tag{5.3}$$

De (2.20) et (5.3) il résulte que $\omega_1 + \omega_2$ est une différentielle exacte, soit

$$\omega_1 + \omega_2 = \mathrm{d}w \,, \tag{5.4}$$

et alors (5.2) donne

$$t_1 = \varphi(w) \,. \tag{5.5}$$

L'inspection des formules (2.15)—(2.19) montre immédiatement que, L étant une congruence W de la sorte (5.1), on en obtient des déformées projectives L' de la même sorte en laissant ω_1, ω_2 (par suite aussi $z_1 = z_2$) et ω_{31}, ω_{42} inaltérées et en changeant arbitrairement la fonction φ qui apparaît dans (5.5). On voit donc que *chaque congruence W à dualisation asymptotique admet des déformées projectives qui sont à dualisation asymptotique de la même sorte et qui dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable.* Rien n'enpêche d'ailleurs de choisir $t_1 = t_2 = 0$ pour la congruence déformée, d'où: *chaque congruence W à dualisation asymptotique admet une déformée projective qui est une congruence appartenant á un complexe linéaire.*

Passons à examiner la question d'existence, dedans la classe des congruences W à dualisation asymptotique, de déformations projectives $L \to L'$ telles que les quantités ω_{31}, ω_{42} relatives à L ne coïncident pas aux quantités analogues $\omega_{31} + \tau_{31}$, $\omega_{42} + \tau_{42}$ relatives à L'. On reconnaît sans peine que la question se réduit à la résolubilité du système

$$\tau_{31} = h\omega_1\,, \quad \tau_{42} = h\omega_2\,, \tag{5.6}$$

où $h \neq 0$. La différentiation extérieure donne

$$\mathrm{d}h + 2z_1h(\omega_1 + \omega_2) = 0 \tag{5.7}$$

et une nouvelle différentiation extérieure fournit la condition

$$[\mathrm{d}z\ \omega_1 + \omega_2] = 0\,. \tag{5.8}$$

Les équations (5.4) et (5.8) entraînent manifestement (4.2) de sorte que L est une congruence R. Les formes ω_1, ω_2 ont donc un facteur intégrant commun de façon qu'on peut poser

$$\omega_1 = f\,\mathrm{d}v\,, \quad \omega_2 = f\,\mathrm{d}u \tag{5.9}$$

et (5.4) montre que

$$f = f(u + v) \neq 0\,. \tag{5.10}$$

De (2.20) et (5.9) on déduit ensuite

$$z_1 = z_2 = -\frac{f'}{f^2}\,. \tag{5.11}$$

Pour ω_{31} et ω_{42} on a alors en vertu de (2.15), (2.16) et (2.19) et tenant compte de (5.3) et (5.8)

$$\begin{aligned}
[\omega_{31}\omega_1] - [\omega_{42}\omega_2] - 2[\omega_1\omega_2] &= 0\,,\\
[\omega_{31}\omega_1] + [\omega_{42}\omega_2] &= 0\,,\\
[\omega_{42}\omega_1] + [\omega_{31}\omega_2] &= 0\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\omega_{31} = g\omega_1 - \omega_2\,, \quad \omega_{42} = -\,\omega_1 + g\omega_2\,.$$

La différentiation extérieure donne

$$\mathrm{d}g + 2z_1(g + 2)(\omega_1 + \omega_2) = 0 ,$$

d'où l'on obtient en tenant compte de (5.9) et (5.11)

$$g = -2 + cf^2 ,$$

ou bien

$$\omega_{31} = cf^3\,\mathrm{d}v - f\,.\,(\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}v) , \quad \omega_{42} = cf^3\,\mathrm{d}u - f\,.\,(2\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) \tag{5.12}$$

avec une constante arbitraire c. Nous avons ainsi obtenu l'expression explicite de toutes les quantités relatives aux congruences R à dualisation asymptotique. L'élément linéaire projectif des congruences de la classe envisagée dépend d'une fonction arbitraire $f(u + v)$ d'une variable et chaque congruence de la classe admet dedans la classe des déformées projectives dépendantes de la constante arbitraire c et de la fonction arbitraire $t_1 = t_2$ de la variable $u + v$; en choisissant $t_1 = t_2 = 0$, on obtient ∞^1 déformées projectives appartenant à un complexe linéaire.

Dans les recherches de ce n° il reste encore une lacune, en tant que nous n'avons pas examiné les déformations projectives $L \to L'$ telles qu'une seule des deux congruences W considérées soit à dualisation asymptotique.

Concernant cette question délicate, j'ai obtenu tout récemment des résultats positifs relatifs au cas particulier important des congruences R, que je communiquerai dans un Mémoire prochain.

6. Passons enfin à la recherche d'éléments linéaires projectifs réalisables simultanément par deux congruences W, soit L et L', telles que L soit à dualisation asymptotique de première sorte et L' à dualisation asymptotique de seconde sorte. Nous avons vu que la congruence L conduit à la condition (5.3) et, de manière analogue, L' conduit à la condition $z_1 + z_2 = 0$. On a donc

$$z_1 = z_2 = 0 \tag{6.1}$$

de sorte qu'on peut poser, selon (2.20),

$$\omega_1 = \mathrm{d}v , \quad \omega_2 = \mathrm{d}u . \tag{6.2}$$

Nous sommes donc conduits au problème de déterminer toutes les congruences W à propriété (6.1), qui sont manifestement toutes projectivement déformables à une quelconque d'entre elles, Les équations (2.15)—(2.19) prennent dans le cas actuel la forme

$$[\mathrm{d}t_1\,\omega_1] + [\mathrm{d}t_2\,\omega_2] = 0 , \quad [\mathrm{d}t_2\,\omega_1] + [\mathrm{d}t_1\,\omega_2] = 0 ,$$
$$[\omega_{31} + \omega_2\,\omega_1] = 0 , \quad [\omega_{42} + \omega_1\,\omega_2] = 0 ,$$
$$[\omega_{31}\omega_2] + [\omega_{42}\omega_1] = (t_1^2 - t_2^2)[\omega_1\omega_2] .$$

On peut aonc poser, d'après (6.2),

$$t_1 + t_2 = f_1 = f_1(u + v) , \quad t_1 - t_2 = f_2 = f_2(u - v) , \tag{6.3}$$

$$\omega_{31} = -\mathrm{d}u + (t_1^2 + y)\,\mathrm{d}v , \quad \omega_{42} = (t_2^2 + y)\,\mathrm{d}u - \mathrm{d}v . \tag{6.4}$$

Or il est aisé de voir que, dans le cas actuel, $[d\omega_{31}] = [d\omega_{42}] = 0$ de façon que

$$t_1^2 + y = V\,, \quad t_2^2 + y = U\,, \tag{6.5}$$

où U dépend seulement de u et V seulement de v. En éliminant y de (6.5) on obtient, en tenant compte de (6.3),

$$f_1 \cdot f_2 = V - U\,. \tag{6.6}$$

La première manière de satisfaire à l'équation (6.6) s'obtient en choissant $f_1 = 0$ ou bien $f_2 = 0$; alors (6.6) donne

$$U = c\,, \quad V = c\,, \tag{6.7}$$

où c est une constante arbitraire. On reconnaît que c'est précisément le cas des congruences L, L' à dualisation asymptotique de première et seconde sorte, car $f_1 = 0$ signifie $t_1 + t_2 = 0$ (seconde sorte), $f_2 = 0$ signifie $t_1 = t_2$ (première sorte). On peut aussi choisir $f_1 = f_2 = 0$, ce qui fournit ∞^1 congruences appartenant à un complexe linéaire qui font partie de la classe envisagée.

D'après le résultat annoncé à la fin du n° 3, notre classe de congruences contient encore ∞^6 congruences satisfaisant à l'inégalité (3.19). On les obtient en supposant que

$$f_1 f_2 \neq 0\,. \tag{6.8}$$

Or de (6.6) il découle par différentiation

$$f_1' f_2 + f_1 f_2' = -U'\,, \quad f_1' f_2 - f_1 f_2' = V'\,,$$

et une nouvelle différentiation donne

$$f_1'' f_2 - f_1 f_2'' = 0$$

d'où, en tenant compte de (6.8),

$$f_1'' = c^2 f_1\,, \quad f_2'' = c^2 f_2 \tag{6.9}$$

avec une constante arbitraire c. Si l'on a $c \neq 0$, alors

$$f_1 = h_1 e^{c(u+v)} + k_1 e^{-c(u+v)}\,, \quad f_2 = h_2 e^{c(u-v)} + k_2 e^{-c(u-v)} \tag{6.10}$$

avec quatre nouvelles constantes arbitraires h_1, k_1, h_2, k_2 et ensuite (6.6) donne

$$\begin{aligned} U &= -h_1 h_2 e^{2cu} - k_1 k_2 e^{-2cu} + m\,, \\ V &= h_1 h_2 e^{2cv} + k_1 k_2 e^{-2cv} + m \end{aligned}$$

avec une sixième constante arbitraire m. Dans le cas $c = 0$ on obtient

$$f_1 = h_1(u + v) + k_1\,, \quad f_2 = h_2(u - v) + k_2\,, \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} U &= -h_1 h_2 u^2 - (h_1 k_2 + k_1 h_2)\,u + m\,, \\ V &= -h_1 h_2 v^2 + (h_1 k_2 + k_1 h_2)\,v + k_1 k_2 + m \end{aligned} \tag{6.13}$$

avec cinq constantes arbitraires h_1, h_2, k_1, k_2, m.

Il résulte de (2.9) et (6.2) que toutes les congruences W examinées dans ce n° admettent ∞^2 déformations projectives en elles mêmes. Dans un Mémoire prochain, nous examinerons de plus proche les congruences W qui admettent un groupe continu de déformations projectives en elles mêmes.

Резюме

ПРОЕКТИВНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОНГРУЭНЦИЙ W

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 5/I 1956 г.)

Если S_3^* — пространство, двойственное пространству S_3, то каждой прямой g пространства S_3 соответствует прямая g^* в пространстве S_3^*, которую назовем *дуализацией прямой* g; g^* является связкой плоскостей пространства S_3, осью которой служит прямая g. Если L — конгруэнция прямых в пространстве S_3 и если каждой прямой $g \in L$ поставить в соответствие ее дуализацию g^*, получим конгруэнцию L^* в пространстве S_3. Переход $L \to L^*$ назовем *дуализацией конгруэнции* L. Если L является конгруэнцией W, то дуализация $L \to L^*$ есть проективная деформация, являющаяся особой лишь в том тривиальном случае, когда L находится в фиксированном линейном комплексе. Конгруэнции W, дуализацией которых является полуособая проективная деформация (см. мою статью Transformation développables des congruences des droites, настоящий Журнал, т. *6* (*81*) стр. 260-286), существуют и зависят от четырех произвольных функций одной переменной. В цитированной работе Transformation développables ... введено понятие канонического разложения нетривиальной проективной деформации непараболической конгруэнции. Под *каноническим разложением конгруэнции* W мы разумеем каноническое разложение ее дуализации. Важным является случай *конгруэнции* W с *асимптотической дуализаней*, когда каноническое разложение соответствует одной системе асимптотик на фокальных плоскостях. Всякая конгруэнция W с асимптотической дуализацией допускает проективные деформации, при которых она переходит опять-таки в конгруэнцию W с асимптотической дуализацией. В случае произвольно заданной конгруэнции W с асимптотической дуализацией множество таких деформаций зависит от одной произвольной функции одной переменной. Напротив, если L — заданная конгруэнция W, то проективные деформации $L \to L'$ при которых L' не является конгруэнцией с асимптотической дуализацией, зависят самое больше от шести произвольных постоянных.