Eduard Čech

Transformations développables des congruences des droites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 2, 260–286

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100196

TRANSFORMATIONS DÉVELOPPABLES DES CONGRUENCES DES DROITES

EDUARD ČECH, Praha.

(Reçu le 19 november 1955.)

Ce Mémoire contient un exposé détaillé des résultats annoncés dans une conférence tenue par l'auteur à Turin le 1 février 1955 (v. Università e Politecnico di Torino, Rendiconti del Seminario Matematico, vol. *14*, 1954—55, p. 55—66).

1. Dans l'espace projectif S_3 à trois dimensions soit L une congruence engendrée par la droite

$$g = [A_1 A_2] \tag{1.1}$$

dépendante (de manière analytique) de deux paramètres u, v. Alors

$$[A_1 \quad A_2 \quad \mathrm{d}A_1 \quad \mathrm{d}A_2] \tag{1.2}$$

est une forme quadratique en du, dv que nous supposons à dicsriminant différent de zéro de sorte que la congruence L est *non parabolique*. Nous négligeons des questions de réalité et, par conséquence, nous pouvons supposer que la forme (2) soit proportionnelle à du dv. Les développables contenues dans L sont alors données par u = const. et par v = const. et nous appellerons les u, v *paramètres développables* de la congruence L. De tels paramètres ne sont pas déterminés sans ambiguïté et on peut les remplacer soit par

$$u_1 = f(u) \,, \qquad v_1 = g(v) \tag{1.3}$$

soit par

$$u_2 = g(v) \,, \qquad v_2 = f(u) \,; \tag{1.4}$$

mais nous écartons les transformations (4) en supposant la congruence L *orientée* ce qui veut dire que nous distinguons la *première* et la *seconde famille de développables*, la première famille étant donnée par v = const. et la seconde par u = const.

Le point de rebroussement de la développable de la congruence L décrite par la droite (1.1) pour v = const. sera appelé le *premier foyer* de L et le plan qui touche cette développable le long de la droite (1.1) sera appelé le *premier* *plan focal* de L; pour $u =$ const. on obtient le *second foyer* et le *second plan focal*. On peut supposer que A_1 soit le premier foyer et que A_2 soit le second; alors on a

$$\left[A_1 A_2 \frac{\partial A_1}{\partial u}\right] = 0\,, \quad \left[A_1 A_2 \frac{\partial A_2}{\partial v}\right] = 0\,.$$

La premier (second) plan focal joint la droite g à la droite $g_2(g_1)$ qui est la tangente à la courbe décrite par le second (premier) foyer pour $v =$ const. (pour $u =$ = const.). On a

$$g_1 = \left[A_1 \frac{\partial A_1}{\partial v}\right], \quad g_2 = \left[A_2 \frac{\partial A_2}{\partial u}\right];$$

les droites g_1 et g_2 sont les *transformées de Laplace* de la droite g.

Dans ce qui suit, nous faisons usage du repère mobile

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \tag{1.5}$$

tel que A_1 (A_2) soit le premier (second) foyer et que A_3 (A_4) soit situé sur la droite g_1 (g_2); les facteurs scalaires des points (1.5) soient soumis à la condition

$$[A_1 A_2 A_3 A_4] = 1\,. \tag{1.6}$$

Le premier plan focal est $[A_1 A_2 A_4]$, le second $[A_1 A_2 A_3]$. Le repère (1.5) dépend des deux *paramètres principaux* u, v et d'autres 5 *paramètres secondaires* que nous laissons en ce moment complètement arbitraires. Nous faisons usage de la notation habituelle

$$\mathrm{d}A_i = \omega_{i1} A_1 + \omega_{i1} A_2 + \omega_{i3} A_3 + \omega_{i4} A_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)\,. \tag{1.7}$$

Posons encore

$$\omega_{13} = \omega_1\,, \qquad \omega_{24} = \omega_2 \tag{1.8}$$

et remarquons que l'on a

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0 \tag{1.9}$$

en vertu de (1.6). On démontre sans peine que les conditions que nous avons imposé au choix du repère (1.5) sont exprimées analytiquement par les équations

$$\begin{gathered} \omega_{14} = 0\,, \qquad \omega_{23} = 0\,, \\ [\omega_{12}\omega_2] = 0\,, \qquad [\omega_{21}\omega_1] = 0\,. \end{gathered} \tag{1.10}$$

De (1.10) on déduit par différentiation extérieure

$$[\omega_{34}\omega_1] = 0\,, \qquad [\omega_{43}\omega_2] = 0\,.$$

On peut donc poser

$$\omega_{12} = \alpha_1\omega_2,\ \ \omega_{21} = \alpha_2\omega_1,\ \ \omega_{34} = \beta_2\omega_1,\ \ \omega_{43} = \beta_1\omega_2. \tag{1.11}$$

Les équations (1.7) deviennent alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2 A_2 + \omega_1 A_3 \, , \\
\mathrm{d}A_2 &= \alpha_2\omega_1 A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2 A_4 \, , \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1 A_4 \, , \\
\mathrm{d}A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2 A_3 + \omega_{44}A_4 \, .
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

On voit que l'on a

$$
[\omega_1 \ \ \mathrm{d}v] = 0 \, , \qquad [\omega_2 \ \ \mathrm{d}u] = 0 \, ; \tag{1.13}
$$

en outre

$$
[\omega_1\omega_2] \neq 0 \, , \tag{1.14}
$$

puisque la droite (1.1) dépend essentiellement des deux paramètres u, v.

Il est aussi utile de noter les relations

$$
[\mathrm{d}\omega_1] = [\omega_{11} - \omega_{33} \ \ \omega_1], \qquad [\mathrm{d}\omega_2] = [\omega_{22} - \omega_{44} \ \ \omega_2] \, . \tag{1.15}
$$

Simultanément avec le repère ponctuel (1.5), il convient de considérer le repère planaire

$$
E_1, E_2, E_3, E_4 \, , \tag{1.16}
$$

où

$$
E_1 = [A_2A_3A_4], \ E_2 = -[A_1A_3A_4], \ E_3 = [A_1A_2A_4], \ E_4 = -[A_1A_2A_3] \, . \tag{1.17}
$$

On voit sans peine qu'aux équations (1.12) correspondent les équations

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}E_1 + \omega_{11}E_1 + \alpha_2\omega_1 E_2 + \omega_{31}E_3 + \omega_{41}E_4 = 0 \, , \\
&\mathrm{d}E_2 + \alpha_1\omega_2 E_1 + \omega_{22}E_2 + \omega_{32}E_3 + \omega_{42}E_4 = 0 \, , \\
&\mathrm{d}E_3 + \omega_1 E_1 + \omega_{33}E_3 + \beta_1\omega_2 E_4 = 0 \, , \\
&\mathrm{d}E_4 + \omega_2 E_2 + \beta_2\omega_1 E_3 + \omega_{44}E_4 = 0 \, ;
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

il est aussi utile d'écrire les équations relatives au repère réglé associé au repère ponctuel (1.5) qui sont manifestement

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}[A_1A_2] &= (\omega_{11} + \omega_{22})\,[A_1A_2] + \omega_2[A_1A_4] - \omega_1[A_2A_3] \, , \\
\mathrm{d}[A_1A_3] &= \omega_{32}[A_1A_2] + (\omega_{11} + \omega_{33})\,[A_1A_3] + \beta_2\omega_1[A_1A_4] + \alpha_1\omega_2[A_2A_3] \, , \\
\mathrm{d}[A_2A_4] &= -\,\omega_{41}[A_1A_2] + \alpha_2\omega_1[A_1A_4] + \beta_1\omega_2[A_2A_3] + (\omega_{22} + \omega_{44})\,[A_2A_4] \, , \\
\mathrm{d}[A_1A_4] &= \omega_{42}[A_1A_2] + \beta_1\omega_2[A_1A_3] + (\omega_{11} + \omega_{44})[A_1A_4] + \alpha_1\omega_2[A_2A_4] + \\
&\quad + \omega_1[A_3A_4] \, , \\
\mathrm{d}[A_2A_3] &= -\,\omega_{31}[A_1A_2] + \alpha_2\omega_1[A_1A_3] + (\omega_{22} + \omega_{33})[A_2A_3] + \beta_2\omega_1[A_2A_4] - \\
&\quad - \omega_2[A_3A_4] \, , \\
\mathrm{d}[A_3A_4] &= -\,\omega_{41}[A_1A_3] + \omega_{31}[A_1A_4] - \omega_{42}[A_2A_3] + \omega_{32}[A_2A_4] + \\
&\quad + (\omega_{33} + \omega_{44})[A_3A_4] \, .
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Pour étudier les questions d'existence de la théorie des congruences qui forment le sujet principal de ce Mémoire et des autres qui en seront la continuation, il faut écrire les conditions d'intégrabilité du système (1.12) qui s'obtiennent en différentiant extérieurement les équations (1.11) et sont

$$
\begin{aligned}
&[\omega_{32}\omega_1] + [d\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}) \quad \omega_2] = 0\,, \\
&[d\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) \quad \omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] = 0\,, \\
-&[\omega_{41}\omega_1] + [d\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44}) \quad \omega_2] = 0\,, \\
&[d\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33}) \quad \omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] = 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Nous avons introduit la supposition que le congruence L envisagée soit orientée, mais nous avons aussi fait le choix des notations de telle sorte que le changement d'orientation soit exprimé analytiquement par une substitution simple qui est

$$
\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 & E_2 & E_1 & E_4 & E_3 & \omega_2 & \omega_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}. \tag{1.21}
$$

La dualité est exprimée par la substitution

$$
\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ E_3 & E_4 & E_1 & E_2 & A_3 & A_4 & A_1 & A_2 & -\omega_1 & -\omega_2 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \tag{1.22}
$$

2. En suivant E. Cartan, nous employons le symbole δ pour indiquer une différentiation relative au changement des paramètres secondaires seuls de sorte que $\delta u = \delta v = 0$ et nous posons $\omega_{ik}(\delta) = e_{ik}$. Comme le nombre des paramètres secondaires est égal à 5, il y a 5 combinaisons linéaires indépendantes de leurs différentielles qui sont $e_{11} - e_{22}$, $e_{11} - e_{33}$, $e_{11} - e_{44}$, e_{31}, e_{42}. Les relations (1.15) et (1.20) montrent que

$$
\begin{aligned}
\delta\omega_1 &= (e_{11} - e_{33})\,\omega_1\,, & \delta\omega_2 &= (e_{22} - e_{44})\,\omega_2\,, \\
\delta\alpha_1 &= (e_{11} - 2e_{22} + e_{44})\,\alpha_1\,, & \delta\alpha_2 &= (e_{22} - 2e_{11} + e_{33})\,\alpha_2\,, \\
\delta\beta_1 &= -(e_{22} + e_{33} - 2e_{44})\,\beta_1\,, & \delta\beta_2 &= -(e_{11} + e_{44} - 2e_{33})\,\beta_2\,.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Il en résulte que les formes différentielles

$$
\varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1\frac{\omega_2^3}{\omega_1}\,, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2\frac{\omega_1^3}{\omega_2}\,, \tag{2.2}
$$

liées par l'identité

$$
\varphi\,.\,\varphi^* = F_1\,.\,F_2 \tag{2.3}
$$

sont invariantes ($\delta\varphi = \delta\varphi^* = \delta F_1 = \delta F_2 = 0$); de même les équations

$$
\beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0\,, \qquad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0\,. \tag{2.4}
$$

Nous appellerons

φ la *forme ponctuelle* ,
φ^* la *forme planaire* ,
F_1 la *première forme focale* ,
F_2 la *seconde forme focale*

de la congruence L étudiée. Les raisons pour ces dénominations s'éclaircirons au n° 5. Nous appellerons aussi *élément linéaire projectif* de la congruence L

l'ensemble des quatre formes (2.2) et des deux équations (2.4). D'ailleurs, il est clair qu'en général les équations (2.4) sont univoquement déterminées si les formes (2.2) sont connues; mais ceci n'est plus vrai si $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ ou si $\alpha_2 = \beta_1 = 0$. Il résulte de (1.21) que le changement d'orientation de L entraîne la substitution

$$\begin{pmatrix} \varphi & \varphi^* & F_1 & F_2 \\ \varphi & \varphi^* & F_2 & F_1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

et de (1.22) que la dualité conduit à la substitution

$$\begin{pmatrix} \varphi & \varphi^* & F_1 & F_2 \\ \varphi^* & \varphi & F_1 & F_2 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

En 1933 A. TERRACINI introduisit sous le nom d'élément linéaire projectif de la congruence L une forme différentielle fractionnaire qui dans nos notations est égale à

$$\frac{(\alpha_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2)(\alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2)}{4\omega_1\omega_2} = \tfrac{1}{4}(\varphi + \varphi^* + F_1 + F_2)\,. \tag{2.7}$$

V. A. Terracini *Su alcuni elementi lineari proiettivi,* Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, série II, vol. 2, 1933, p. 401—428; v. aussi A. Terracini, *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette,* Atti del R. Istituto Veneto vol. *94*, 1934, p. 75—86. La forme différentielle (2.7) reste inaltérée par les substitutions (2.5) et (2.6) et, *en général,* elle détermine les formes (2.2) à ces substitutions près.

Nous n'aurons guère occasion à considérer d'autres invariants de la congruence L outre les formes (2.2) et les équations (2.4). Remarquons seulement que l'invariant classique de Wälsch (*Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectignes*, Comptes Rendus Paris, t. *118*, 1894, p. 736—738) est égal à

$$W = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} = \frac{\varphi}{\varphi^*}\,. \tag{2.8}$$

Chacune des équations $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ est manifestement invariante. On voit sans peine[1]) qu'en négligeant l'orientation il y a les 10 *types* suivants *de congruences non paraboliques*:

Type I: $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0$ des congruences qui possèdent deux surfaces focales non développables.

Type II: $\alpha_1\beta_1\beta_2 \neq 0 = \alpha_2$ ou $\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0 = \alpha_1$ des congruences qui possèdent une surface focale non développable et une courbe directrice non rectiligne.

Type II*: $\alpha_1\alpha_2\beta_1 \neq 0 = \beta_2$ ou $\alpha_1\alpha_2\beta_2 \neq 0 = \beta_1$ corrélatif au type II.

---

[1]) Il faut remarquer que les équations (1.20) montrent que les relations $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ entraînent $\omega_{32} = 0$ et les relations $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ entraînent $\omega_{41} = 0$.

Type III: $\alpha_1\beta_2 \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ ou $\alpha_2\beta_1 \neq 0$, $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ des congruences qui possèdent une surface focale non développable et une droite directrice.

Type IV. $\alpha_2\beta_2 \neq 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ou $\alpha_1\beta_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ des congruences qui possèdent une surface focale développable et une courbe directrice non rectiligne.

Type V: $\beta_1\beta_2 \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ des congruences qui possèdent deux courbes directrices non rectilignes.

Type V*: $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ corrélatif au type V.

Type VI: $\beta_2 \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 0$ ou $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ des congruences qui possèdent une droite directrice et une courbe directrice non rectiligne.

Type VI*: $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ ou $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ corrélatif au type VI.

Type VII: $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ des congruences linéaires non paraboliques, c'est-à-dire des congruences qui possèdent deux droites directrices.

Les congruences des types IV, VI, VI* et VII se laissent décomposer en ∞^1 faisceaux de droites dont les centres décrivent une ligne d. Le plan du faisceau dont le centre est situé au point A de d n'est pas tangent à la ligne d au point A (autrement la congruence serait parabolique). Dans le cas du type VI les plans de tous les faisceaux passent par une droite fixe; dans le cas du type VI* la ligne d est droite.

Si l'on a $\alpha_1\beta_2 \neq 0$, le premier foyer A_1 décrit une surface (A_1) non développable, appelée la *première surface focale*; les asymptotiques de (A_1) sont données par la première des équations (2.4), puisqu'on déduit de (1.12) que

$$[A_1A_2A_3\, \mathrm{d}^2A_1] = \alpha_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2$$

et $[A_1A_2A_3]$ est le plan tangent à la surface (A_1) au point A_1. Pareillement pour $\alpha_2\beta_1 \neq 0$ le second foyer A_2 décrit la *seconde surface focale* (A_2) non développable dont les asymptotiques sont données par la seconde des équations (2.4). On ne doit pas oublier que le plan tangent à la *première* surface focale est le *second* plan focal.

Les formes différentielles φ, φ^* sont bien connues. En négligeant des infiniment petits du second ordre on a selon (1.12)

$$(A_1 + \mathrm{d}A_1)_{\omega_1=0} = A_1 + \alpha_1\omega_2A_2\,,$$
$$(A_2 + \mathrm{d}A_2)_{\omega_2=0} = A_2 + \alpha_2\omega_1A_1,$$

de sorte que le rapport anharmonique des quatre points

$$A_1,\ A_2,\ (A_1 + \mathrm{d}A_1)_{\omega_1=0}\,,\ (A_2 + \mathrm{d}A_2)_{\omega_2=0}$$

de la droite (1.1) est égal à la forme φ. Pareillement on déduit de (1.18) que le rapport anharmonique des quatre plans

$$E_3,\ E_4,\ (E_3 + \mathrm{d}E_3)_{\omega_1=0},\ (E_4 + \mathrm{d}E_4)_{\omega_2=0}$$

passants par la droite (1.1) est égal à la forme φ^*. Il s'ensuit, en appliquant un résultat obtenu par A. Terracini en 1927 (*Un'osservazione sugli invarianti di un'equazione di Laplace,* Boll. Un. Mat. Ital. t. *6*, 1927, p. 57—60) que la forme φ est égale à $h\, du\, dv$, où h est le premier invariant de Laplace-Darboux de l'équation qui exprime $\frac{\partial^2 A_2}{\partial u \partial v}$ en combinaison linéaire de $\frac{\partial A_2}{\partial u}$, $\frac{\partial A_2}{\partial v}$, A_2 et en même temps le second invariant de l'équation qui exprime $\frac{\partial^2 A_1}{\partial u \partial v}$ en combinaison linéaire de $\frac{\partial A_1}{\partial u}$, $\frac{\partial A_1}{\partial v}$, A_1; pareillement la forme φ^* est égale à $h^*\, du\, dv$, où h^* est le premier invariant de l'équation qui exprime $\frac{\partial^2 E_4}{\partial u \partial v}$ en combinaison linéaire de $\frac{\partial E_4}{\partial u}$, $\frac{\partial E_4}{\partial v}$, E_4 et le second invariant de l'équation qui exprime $\frac{\partial^2 E_3}{\partial u \partial v}$ en combination linéaire de $\frac{\partial E_3}{\partial u}$, $\frac{\partial E_3}{\partial v}$, E_3.

Posons

$$G_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_2}\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}, \qquad G_2 = -\frac{\alpha_2}{\beta_1}\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \tag{2.9}$$

de sorte que

$$F_1 = -\varphi^* \,.\, G_1 = -\frac{\varphi}{G_2},$$

$$F_2 = -\frac{\varphi}{G_1} = -\varphi^* G_2 . \tag{2.10}$$

Supposons que $\alpha_1\beta_2 \neq 0$ de manière que nous avons la première surface focale (A_1) non développable dont les asymptotiques sont données par la première des équations (2.4) qui peut s'écrire $G_1 = 1$. Dans le faisceau des tangentes à la surface (A_1) (centre du faisceau A_1, plan du faisceau E_4) considérons l'involution J_1 dont les droites doubles sont la droite $[A_1A_2]$ et sa transformée de Laplace $[A_1A_3]$. On voit sans peine que G_1 est le rapport anharmonique des quatre éléments suivants de l'involution J_1: la droite double $[A_1A_2]$, la droite double $[A_1A_3]$, le couple formé des tangentes asymptotiques de la surface (A_1) et le couple de l'involution J_1 contenant la tangente $[A_1 \;\; dA_1] = [A_1 \;\; \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3]$. Si l'on a $\alpha_2\beta_1 \neq 0$, alors G_2 s'interprète de manière analogue à l'aide de l'involution J_2 dans le faisceau des tangentes à la surface (A_2), les droites doubles de J_2 étant $[A_1A_2]$ et $[A_2A_4]$.

3. Outre la congruence L, nous allons considérer une autre congruence L' non parabolique dans un espace projectif S_3'; la position relative des deux espaces S_3 et S_3' est irrélévante pour les problèmes qui nous intéressent ici. Nous introduisons pour L' des notations analogues à celles employées pour

L, en indiquant avec des accents toutes les expressions relatives à L'. Il sera aussi commode de poser

$$\tau_{ik} = \omega'_{ik} - \omega_{ik} \tag{3.1}$$

de sorte que l'on a p. ex. [v. (1.9) et (1.10)]

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} + \tau_{44} = 0 \, , \tag{3.2}$$

$$\tau_{14} = 0 \, , \qquad \tau_{23} = 0 \, . \tag{3.3}$$

Or soit T une transformation (droite $\rightarrow$ droite) entre L et L'. Nous nous limitons à la considération des *transformations développables*, c'est-à-dire nous supposons que T porte chaque développable contenue dans L dans une développable contenue dans L'. On peut donc supposer que, pour une droite quelconque g de L, les deux droites g et $g' = Tg$ correspondent aux mêmes valeurs de u, v, les paramètres u, v étant développables simultanément pour L et pour L'. On voit sans peine que le repère

$$A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 \tag{3.4}$$

peut être soumis à la condition $\omega'_1 = \omega_1$, $\omega'_2 = \omega_2$ qui peut aussi s'écrire

$$\tau_{13} = 0 \, , \qquad \tau_{24} = 0 \, . \tag{3.5}$$

Notons explicitement les équations

$$\omega'_{12} = \alpha'_1\omega_2, \;\; \omega'_{21} = \alpha'_2\omega_1, \;\; \omega'_{34} = \beta'_2\omega_1, \;\; \omega'_{43} = \beta'_1\omega_2 \tag{3.6}$$

qui correspondent aux équations (1.11). De (3.5) on déduit par différentiation extérieure

$$[\tau_{11} - \tau_{33} \quad \omega_1] = 0 \, , \qquad [\tau_{22} - \tau_{44} \quad \omega_2] = 0 \, . \tag{3.7}$$

Les valeurs de u, v étant choisies de manière quelconque, une homographie H ($S_3 \rightarrow S'_3$) sera appelée *homographie tangente*, resp. *osculatrice* à la transformation T (dans la droite g de L correspondante aux valeurs choisies de u, v) si H réalise un contact analytique du premier, resp. second ordre entre les deux congruences L, L'. Il s'agit ici du contact au sens de géométrie réglée qui devient un contact ponctuel faisant usage de la représentation classique des droites de l'espace ordinaire moyennant les points d'une hyperquadrique de l'espace à 5 dimensions. Les conditions analytiques pour une homographie tangente H sont, en choisissant convenablement le facteur scalaire de H,

$$H[A_1A_2] = [A'_1A'_2] \, , \qquad H \, \mathrm{d}[A_1A_2] = \mathrm{d}[A'_1A'_2] + \vartheta[A'_1A'_2] \, ; \tag{3.8}$$

pour une homographie osculatrice il faut ajouter la condition ultérieure

$$H \, \mathrm{d}^2[A_1A_2] = \mathrm{d}^2[A'_1A'_2] + 2\vartheta\mathrm{d}[A'_1A'_2] + (.) \, [A'_1A'_2] \, . \tag{3.9}$$

Si l'on tient compte de la première équation (1.19) ainsi que de (3.5), on peut donner à la condition (3.8) la forme

$$H[A_1A_2] = [A_1'A_2'],\ H[A_2A_3] = [A_2' \quad A_3' + \lambda_1 A_1'],\ H[A_1A_4] = [A_1' \quad A_4' + \lambda_2 A_2'], \tag{3.10}$$

où

$$\vartheta = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 - (\tau_{11} + \tau_{22}) . \tag{3.11}$$

On voit que les homographies tangentes H existent pour chaque T développable (il est d'ailleurs évident qu'elles ne peuvent exister si T n'est pas développable) et sont

$$\begin{aligned} HA_1 &= \varrho A_1' , \\ HA_2 &= \varrho^{-1} A_2' , \\ HA_3 &= \varrho(A_3' + \lambda_1 A_1') + \mu_1 A_2' , \\ HA_4 &= \varrho^{-1}(A_4' + \lambda_2 A_2') + \mu_2 A_1' , \end{aligned} \tag{3.12}$$

où les quantités $\varrho \neq 0$, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 sont tout-à-fait arbitraires de sorte que, pour u, v données, il y a ∞^5 homographies tangentes. Il est utile de remarquer qu'un changement de signe de ϱ a une signification purement formelle; plus précisement, on voit que la substitution

$$\begin{pmatrix} \varrho & \lambda_1 & \lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ -\varrho & \lambda_1 & \lambda_2 & -\mu_1 & -\mu_2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

change seulement le facteur scalaire inessentiel de H. L'expression de H en coordonnées des plans est

$$\begin{aligned} HE_1 &= \varrho^{-1}(E_1' - \lambda_1 E_3') - \mu_2 E_4' , \\ HE_2 &= \varrho \ \ (E_2' - \lambda_2 E_4') - \mu_1 E_3' , \\ HE_3 &= \varrho^{-1} E_3' , \\ HE_4 &= \varrho \ \ E_4' \end{aligned} \tag{3.14}$$

et en coordonnées des droites

$$\begin{aligned} H[A_1A_2] &= [A_1'A_2'] , \\ H[A_1A_3] &= \varrho^2[A_1'A_3'] + \varrho\mu_1[A_1'A_2'] , \\ H[A_2A_4] &= \varrho^{-2}[A_2'A_4'] - \varrho^{-1}\mu_2[A_1'A_2'] , \\ H[A_1A_4] &= [A_1'A_4'] + \lambda_2[A_1'A_2'] , \\ H[A_2A_3] &= [A_2'A_3'] - \lambda_1[A_1'A_2'] , \\ H[A_3A_4] &= [A_3'A_4'] + [\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2][A_1'A_2'] + \lambda_1[A_1'A_4'] - \\ &\quad - \lambda_2[A_2'A_3'] - \varrho\mu_2[A_1'A_3'] + \varrho^{-1}\mu_1[A_2'A_4'] . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Il est clair que, T étant développable, l'orientation choisie pour L fixe celle de L'. En changeant l'orientation de L et par suite aussi de L' on a la substitution (1.21) à laquelle il faut maintenant ajouter la substitution

$$\begin{pmatrix} \varrho & \lambda_1 & \lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ \varrho^{-1} & \lambda_2 & \lambda_1 & \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

A la substitution (1.22) exprimant la dualité il faut maintenant ajouter la substitution

$$\begin{pmatrix} \varrho & \lambda_1 & \lambda_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ \varrho^{-1} & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\mu_2 & -\mu_1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Remarquons encore que la notion d'homographie tangente (ou osculatrice) est autoduelle et ne dépend pas de l'orientation.

Des équations (1.19) il résulte que

$$\begin{gathered} \mathrm{d}^2[A_1A_2] = (\mathrm{d}\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \overline{\omega_{11} + \omega_{22}}^2 + \omega_{31}\omega_1 + \omega_{42}\omega_2)\,[A_1A_2] + \\ + (\mathrm{d}\omega_2 + \overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44}} \,.\, \omega_2)\,[A_1A_4] - (\mathrm{d}\omega_1 + \overline{\omega_{11} + 2\omega_{22} + \omega_{33}} \,.\, \omega_1)\,. \\ [A_2A_3] + (\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)\,[A_1A_3] + (\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2)\,[A_2A_4] + 2\omega_1\omega_2\,[A_3A_4]\,; \end{gathered} \tag{3.18}$$

pour la congruence L' on a une équation analogue. Si l'on tient compte de (3.11) et de (3.15), on obtient

$$\begin{gathered} H\,\mathrm{d}^2[A_1A_2] = \mathrm{d}^2[A_1'A_2'] + 2\vartheta\mathrm{d}[A_1'A_2'] + (.)[A_1'A_2'] - \\ - (\tau_{11} - \tau_{33} - 2\lambda_1\omega_1)\,\omega_1[A_2'A_3'] + (\tau_{22} - \tau_{44} - 2\lambda_2\omega_2)\,\omega_2[A_1'A_4'] + \\ + \{(\alpha_2' - \varrho^2\alpha_2)\,\omega_1^2 - (\beta_1' - \varrho^2\beta_1)\,\omega_2^2 - 2\varrho\mu_2\omega_1\omega_2\}\,[A_1'A_3'] + \\ + \{(\beta_2' - \varrho^{-2}\beta_2)\,\omega_1^2 - (\alpha_1' - \varrho^{-2}\alpha_1)\,\omega_2^2 + 2\varrho^{-1}\mu_1\omega_1\omega_2\}\,[A_2'A_4']\,. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Rappelons enfin les équations (3.7) qui permettent de poser

$$\tau_{11} - \tau_{33} = f_1\omega_1\,, \qquad \tau_{22} - \tau_{44} = f_2\omega_2\,. \tag{3.20}$$

En comparant (3.19) et (3.9) on arrive à la conclusion fondamentale qu'une homographie tangente H est osculatrice si et seulement si

$$\alpha_1' = \varrho^{-2}\alpha_1,\ \alpha_2' = \varrho^2\alpha_2,\ \beta_1' = \varrho^2\beta_1,\ \beta_2' = \varrho^{-2}\beta_2, \tag{3.21}$$

$$2\lambda_1 = f_1,\ 2\lambda_2 = f_2,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0. \tag{3.22}$$

4. La transformation T (nécessairement développable) s'appelle, selon G. Fubini et E. Cartan, *déformation* (ou *applicabilité*) *projective* si, pour chaque choix dex paramètres u, v, il existe au moins une homographie osculatrice H. Nous avons prouvé que *condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable T d'une congruence non parabolique L soit une déformation projective est l'existence d'une quantité ϱ^2 satisfaisant aux équations* (3.21). Il est manifeste que le type (v. n° 2) de la congruence L est invariant par rapport aux déformations projectives. Si L, L' sont deux congruences linéaires (type VII), les équations (3.21) sont identiquement vérifiées de manière que chaque transformation développable $L \to L'$ est dans ce cas une déformation projective et, pour chaque choix de u, v, l'homographie osculatrice dépend encore d'un paramètre arbitraire $\varrho^2 \neq 0$. Pour tous les autres types, au contraire, les équations (3.21), supposées résolubles, déterminent ϱ^2 sans ambiguïté de sorte que, les u, v étant données, l'homographie osculatrice est univoquement

déterminée. Dans le cas du type VI ou VI* les équations (3.21) se réduisent à une seule et l'on a de nouveau que chaque transformation développable est une déformation projective. Ceci n'est plus vrai pour les autres types, mais nous renvoyons à un Mémoire qui fera la suite du présent pour la résolution des problèmes d'existence relatifs.

Notons encore que l'homographie osculatrice, que nous indiquerons par H_0, est donnée par

$$\begin{aligned} H_0A_1 &= \varrho A_1' , \\ H_0A_2 &= \varrho^{-1}A_2' , \\ H_0A_3 &= \varrho(A_3' + \tfrac{1}{2}f_1A_1') , \\ H_0A_4 &= \varrho^{-1}(A_4' + \tfrac{1}{2}f_2A_2') , \end{aligned} \tag{4.1}$$

où l'on doit déterminer ϱ selon (3.21); les quantités f_1, f_2 sont données par (3.20).

En éliminant ϱ^2 des équations (3.21) on voit tout de suite que *condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective d'une congruence non parabolique est l'invariance de l'élément linéaire projectif.*

Les équations (3.21) étant en nombre de quatre et contenant une quantité auxiliaire ϱ^2, on voit que la déformation projective impose une *condition triple* à la congruence L. Comme une congruence ne dépend que de *deux* fonctions arbitraires de deux variables, on est conduit à prévoir qu'une congruence est en général projectivement indéformable, ce qui est d'ailleurs bien connu. Or nous verrons plus tard (v. n. 5) que l'étude des homographies tangentes permet d'introduire des classes de transformations développables plus générales que les déformations projectives et telles que chaque congruence L en admet une infinité dépendant de six fonctions arbitraires d'une variable.

Commençons par une définition. Considérons deux points mobiles $A(t)$ et $A'(t)$ dépendant d'un paramètre commun de sorte qu'il y a une correspondance donnée entre la courbe C décrite par $A(t)$ et celle C' décrite par $A'(t)$. Supposons aussi que les deux points $A(0)$ et $A'(0)$ coïncident en position et que les deux courbes C, C' aient un contact géometrique du premier ordre (au moins) au point $A(0)$. On a alors

$$A'(0) = cA(0), \ \mathrm{d}A' = cj\,\mathrm{d}A + \vartheta A \ \text{ pour } t = 0 ,$$

où ϑ ne nous intéresse pas. C'est la quantité j qui nous intéresse et que nous appellerons *coefficient de dilatation* du contact considéré entre C et C'; c'est un invariant projectif (plus généralement, j est invariant par rapport à chaque transformation de l'espace qui est régulière au point $A(0)$) et l'on a $j = 1$ si et seulement si le contact considéré est analytique.

Ceci étant, considérons une transformation développable $T(L \to L')$ et, pour des valeurs choisies de u, v, soit (3.12) une homographie tangente à T. Si l'on a $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_1'$, alors pour $v =$ const. (ou $\omega_1 = 0$) le point A_1 décrit une courbe C_1 dont g est une tangente et le point A_1' décrit une courbe C_1' dont g' est une tangente. Comme l'homographie H porte A_1 en A_1' et g en g', il y a en A_1' un contact géométrique entre les deux courbes HC_1 et C_1'; soit j_1 le coefficient de dilatation de ce contact. (Nous dirons que H réalise un contact géométrique entre C_1 et C_1' à coefficient de dilatation j_1.) On trouve sans peine que l'on a

$$j_1 = \frac{\varrho^2 \alpha_1'}{\alpha_1} ; \tag{4.2}$$

pareillement, si $\alpha_2 \neq 0 \neq \alpha_2'$, H réalise un contact géométrique du premier ordre entre les courbes décrites pour $u = \text{const.}$ (ou $\omega_2 = 0$) par les points A_2 et A_2' dont le coefficient de dilatation est

$$j_2 = \frac{\alpha_2'}{\varrho^2 \alpha_2} . \tag{4.3}$$

En passant aux espaces S_3^*, $S_3'^*$ corrélatifs aux espaces S_3, S_3' (les points de S_3^*, p. ex., sont les plans de S_3), on a deux autres coefficients de dilatation

$$j_1^* = \frac{\beta_1'}{\varrho^2 \beta_1} , \tag{4.4}$$

$$j_2^* = \frac{\varrho^2 \beta_2'}{\beta_2} ; \tag{4.5}$$

j_1^* s'obtient (si $\beta_1 \neq 0 \neq \beta_1'$) en considérant le mouvement des plans E_3 et E_3' pour $\omega_1 = 0$ et j_2^* (si $\beta_2 \neq 0 \neq \beta_2'$) en considérant le mouvement des plans E_4 et E_4' pour $\omega_2 = 0$.

Il importe de remarquer que les quantités j_1, j_2, j_1^*, j_2^* ne dépendent que de ϱ^2, tandis que l'homographie tangente envisagée H dépend encore de λ_1, λ_2, μ_1, μ_2. Or H porte la ponctuelle $[A_1A_2]$ dans la ponctuelle $[A_1'A_2']$ moyennant une projectivité π:

$$\pi A_1 = \varrho A_1' , \qquad \pi A_2 = \varrho^{-1} A_2' \tag{4.6}$$

et le faisceau de plans à l'axe $[A_1A_2]$ dans le faisceau de plans à l'axe $[A_1'A_2']$ moyennant une projectivité π^*:

$$\pi^* E_3 = \varrho^{-1} E_3' , \qquad \pi^* E_4 = \varrho E_4' . \tag{4.7}$$

La projectivité π porte A_1 en A_1' et A_2 en A_2'; π^* porte E_3 en E_3' et E_4 en E_4'; pour des valeurs données de u, v, on a encore ∞^1 projectivités π et ∞^1 projectivités π^*. En choisissant ϱ^2, les deux projectivités sont bien déterminées; inversement le choix d'une d'elles détermine ϱ^2 et par suite aussi l'autre projectivité.

La relation mutuelle des deux projectivités π, π^* peut être décrite géométriquement. La transformation T porte chaque droite g de L dans une droite g' de L'; ce n'est pas une transformation ponctuelle ni une transformation planaire. Mais si l'on choisit ϱ^2 en fonction de u, v, on peut transformer les points de chaque droite g de L moyennant la projectivité (4.6) correspondante et les plans passants par g moyennant la projectivité (4.7). On obtient ainsi d'une part une *extension ponctuelle* de T que je désigne par $T(\varrho^2)$ et qui porte (pour chaque choix de u, v) le point $x_1A_1 + x_2A_2$ de S_3 au point $\varrho x_1A_1' + \varrho^{-1}x_2A_2'$ de S_3' et d'autre part une *extension planaire* de T que je désigne par $T^*(\varrho^2)$ et qui porte (pour chaque choix de u, v) le plan $x_1E_3 + x_2E_4$ de S_3 au plan $\varrho^{-1}x_1E_3' + \varrho x_2E_4'$ de S_3'. Il s'agit de décrire géométriquement la relation entre les deux transformations $T(\varrho^2)$ et $T^*(\varrho^2)$. A ce but, considérons une surface réglée gauche R de la congruence L et la surface réglée gauche R' correspondante de la congruence L' obtenues en substituant pour u, v des fonctions arbitraires d'un paramètre t telles que $[\omega_1 \ \mathrm{d}t] \neq 0 \neq [\omega_2 \ \mathrm{d}t]$. Alors si $X = x_1A_1 + x_2A_2$ est un point arbitraire de R et πX le point correspondant de R', on voit sans peine que, X^* étant le plan tangent à R au point X, π^*X^* est le plan tangent à R' au point πX. En effet, les deux plans tangents sont manifestement

$$[A_1 \ A_2 \ \mathrm{d}(x_1A_1 + x_2A_2)] = [A_1 \ A_2 \ x_1\omega_1A_3 + x_2\omega_2A_4] = x_2\omega_2E_3 - x_1\omega_1E_4 ,$$
$$[A_1' \ A_2' \ \mathrm{d}(\varrho x_1A_1' + \varrho^{-1}x_2A_2')] = [A_1' \ A_2' \ \varrho x_1\omega_1A_3' + \varrho^{-1}x_2\omega_2A_4'] =$$
$$= \varrho^{-1} x_2\omega_2E_3' - \varrho x_1\omega_1E_1' .$$

Remarquons encore que l'on a

$$[A_1 \ A_2 \ \mathrm{d}^2(x_1A_1 + x_2A_2)] = (2\omega_1 \,\mathrm{d}x_1 + x_1 \,\mathrm{d}\omega_1 + x_1 \ \overline{\omega_{11} + \omega_{33}} \ \omega_1 +$$
$$+ x_2 \ \overline{\alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2}) \, [A_1A_2A_3] + (2\omega_2 \,\mathrm{d}x_2 + x_2 \,\mathrm{d}\omega_2 + x_2 \ \overline{\omega_{22} + \omega_{44}} \ \omega_2 +$$
$$+ x_1 \ \overline{\alpha_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2}) \, [A_1A_2A_4]$$

de sorte que l'équation différentielle des asymptotiques de la surface R est

$$2\omega_1 w_2(x_2 \,\mathrm{d}x_1 - x_1 \,\mathrm{d}x_2) - x_1^2(\alpha_1\omega_2^2 + \beta_2\omega_1^2) \, \omega_1 + x_2^2(\alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2) \, \omega_2 +$$
$$+ x_1x_2(\omega_2 \,\mathrm{d}\omega_1 - \omega_1 \,\mathrm{d}\omega_2 + \overline{\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}} \,.\, \omega_1\omega_2) = 0 . \qquad (4.8)$$

Pour les asymptotiques de R' on obtient l'équation analogue

$$2\omega_1\omega_2(x_2 \,\mathrm{d}x_1 - x_1 \,\mathrm{d}x_2) - \varrho^2x_1^2(\alpha_1'\omega_2^2 + \beta_2'\omega_1^2) \, \omega_1 + \varrho^{-2}x_2^2(\alpha_2'\omega_1^2 + \beta_1'\omega_2^2) \, \omega_2 +$$
$$+ x_1x_2\left(\omega_2 \,\mathrm{d}\omega_1 - \omega_1 \,\mathrm{d}\omega_2 + 4\,\overline{\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44} + \tau_{11} - \tau_{22} +}\right.$$
$$\left. \overline{+ \tau_{33} - \tau_{44}} \,.\, \omega_1\omega_2\right) = 0 .$$

La soustraction fournit l'équation

$$x_1^2(\overline{\alpha_1 - \varrho^2\alpha_1'} \,.\, \omega_2^2 + \overline{\beta_2 - \varrho^2\beta_2'} \,.\, \omega_1^2) \, \omega_1 - x_2^2(\overline{\alpha_2 - \varrho^{-2}\alpha_2'} \,.\, \omega_1^2 +$$
$$+ \overline{\beta_1 - \varrho^{-2}\beta_1'} \,.\, \omega_2^2) \, \omega_2 + x_1x_2 \left(4\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{11} - \tau_{22} + \tau_{33} - \tau_{44}\right) \omega_1\omega_2 = 0 \quad (4.9)$$

dont l'étude donne des conséquences que je ne considère qu'incomplètement au Mémoire présent en me limitant d'ailleurs au cas où T est une déformation projective (v. n° 7).

5. Pour abréger, je ne considère dans ce n° que le cas du type I

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0 \neq \alpha'_1\alpha'_2\beta'_1\beta'_2 \tag{5.1}$$

où la congruence L possède deux surfaces focales (A_1), (A_2) non développables et pareillement L'.

Nous avons vu que les quatre équations (3.21) donnent l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation développable T soit une déformation projective. Nous passons à la considération des telles T qui ne satisfont qu'à une partie des conditions (3.21). Remarquons avant tout qu'en vertu de notre supposition (5.1) tous les quatre coefficients de dilatation j_1, j_2, j_1^*, j_2^* [v. (4.2) — (4.5)] sont bien définis et $\neq 0$; l'un d'eux peut être préscrit arbitrairement, la quantité $\varrho^2 \neq 0$ étant à notre disposition. Nous savons que $j_1 = 1$ est la condition pour que l'homographie tangente H donnée par (3.12) réalise un contact analytique du 1^er^ ordre $A_1 \to A'_1$ pour $\omega_1 = 0$, $j_2 = 1$ est la condition pour que H réalise un contact analytique du 1^er^ ordre $A_2 \to A'_2$ pour $\omega_2 = 0$, $j_1^* = 1$ est la condition pour que H réalise un contact analytique du 1^er^ ordre $E_3 \to E'_3$ pour $\omega_1 = 0$, $j_2^* = 1$ est la condition pour que H réalise un contact analytique du 1^er^ ordre $E_4 \to E'_4$ pour $\omega_2 = 0$. Or on déduit de (1.12), (1.18) et (3.12), (3.14)

$$\begin{aligned}
HA_1 &= \varrho A'_1, & H\,\mathrm{d}A_1 &= \mathrm{d}(\varrho A'_1) + (.)\,A'_1 + (\mu_1\omega_1 + \overline{\varrho^{-1}\alpha_1 - \varrho\alpha'_1}\,.\,\omega_2)\,A'_2,\\
HA_2 &= \varrho^{-1}A'_2, & H\,\mathrm{d}A_2 &= \mathrm{d}(\varrho^{-1}A'_2) + (.)\,A'_2 + (\mu_2\omega_2 + \overline{\varrho\alpha_2 - \varrho^{-1}\alpha'_2}\,.\,\omega_1)\,A'_1,\\
HE_3 &= \varrho^{-1}E'_3, & H\,\mathrm{d}E_3 &= \mathrm{d}(\varrho^{-1}E'_3) + (.)\,E'_3 + (\mu_2\omega_1 - \overline{\varrho\beta_1 - \varrho^{-1}\beta'_1}\,.\,\omega_1)\,E'_4,\\
HE_4 &= \varrho E'_4, & H\,\mathrm{d}E_4 &= \mathrm{d}(\varrho E'_4) + (.)\,E'_4 + (\mu_1\omega_2 - \overline{\varrho^{-1}\beta_2 - \varrho\beta'_2}\,.\,\omega_2)\,E'_3
\end{aligned}$$

d'où il résulte (*sans les limitations* $\omega_1 = 0$ *ou* $\omega_2 = 0$):

$$\left.\begin{array}{l}
j_1 = 1,\ \mu_1 = 0\\
j_2 = 1,\ \mu_2 = 0\\
j_1^* = 1,\ \mu_2 = 0\\
j_2^* = 1,\ \mu_1 = 0
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{est la condition}\\
\text{pour que } H \text{ réalise}\\
\text{un contact analytique}\\
\text{du premier ordre}
\end{array}
\left\{\begin{array}{l}
A_1 \to A'_1,\\
A_2 \to A'_2,\\
E_3 \to E'_3,\\
E_4 \to E'_4.
\end{array}\right.$$

Donc: $\varphi = \varphi'$ *si et seulement si pour* u, v *arbitrairement données il existe une homographie qui réalise un contact analytique du premier ordre* $A_1 \to A'_1$ *et en même temps un contact analytique du premier ordre* $A_2 \to A'_2$ (on voit sans peine qu'une telle homographie est nécessairement tangente pour T, c'est-à-dire qu'elle réalise aussi un contact analytique du premier ordre $[A_1A_2] \to [A'_1A'_2]$); $\varphi^* = \varphi^{*\prime}$ *si et seulement s'il existe une homographie qui réalise un contact analytique du premier ordre* $E_3 \to E'_3$ *et en même temps un contact analytique du premier ordre* $E_4 \to E'_4$. En outre: $F_1 = F'_1$ *si et seulement s'il existe une homographie qui réalise simultanément les trois contacts analytiques du premier ordre* $A_1 \to A'_1$, $E_3 \to E'_3$, $[A_1A_2] \to [A'_1A'_2]$; $F_2 = F'_2$ *si et seulement s'il existe une homographie qui réalise simultanément les trois contacts analytiques du premier ordre* $A_2 \to A'_2$, $E_4 \to E'_4$, $[A_1A_2] \to [A'_1A'_2]$. On voit que la condition $\varphi = \varphi'$

concerne seulement la manière dont se comportent les foyers A_1 et A_2, la condition $\varphi^* = \varphi^{*\prime}$ concerne les plans focaux E_3 et E_4, la condition $F_1 = F_1'$ concerne le premier foyer A_1 et le premier plan focal E_3, la condition $F_2 = F_2'$ concerne le second foyer A_2 et le second plan focal E_4. Ceci explique la raison qui nous a conduit à nommer φ la forme ponctuelle, φ^* la forme planaire, F_1 la première et F_2 la seconde forme focale. Conséquemment, nous allons introduire des dénominations pour des classes particulières de transformations développables d'une congruence non parabolique: les *déformations ponctuelles* caractérisées par $\varphi = \varphi'$, les *déformations planaires* caractérisées par $\varphi^* = \varphi^{*\prime}$, les *déformation focales de première* resp. *seconde espèce* caractérisées par $F_1 = F_1'$ resp. $F_2 = F_2'$. En outre nous introduirons encore la dénomination de *déformations asymptotiques de première* resp. *seconde espèce* pour les transformations développables T qui induisent une transformation asymptotique $(A_1) \to (A_1')$ resp. $(A_2) \to (A_2')$ des premières resp. secondes surfaces focales. Analytiquement, les déformations asymptotiques de première (seconde) espèce sont caractérisées par la condition $\alpha_1\beta_2' = \alpha_1'\beta_2$ $(\alpha_2\beta_1' = \alpha_2'\beta_1)$ ou bien, dans la notation (2.8), $G_1 = G_1'$ $(G_2 = G_2')$. Nous avons ainsi introduit six catégories particulières de transformations développables T qui peuvent être aussi caractérisées comme satisfaisant deux équations choisies parmi les quatre équations (3.21). Les transformations T appartenant simultanément à toutes les six catégories sont identiques aux déformations projectives.

Puisque la congruence L ne dépend que de *deux* fonctions arbitraires de deux variables, on ne peut préscrire arbitrairement, en fonction des u, v, toutes les *trois* formes différentielles φ, φ^*, F_1 qui, d'après (2.3), déterminent sans ambiguïté aussi la quatrième forme F_2. Mais nous allons montrer que l'on peut préscrire tout-à-fait arbitrairement deux relations entre ces formes. On voit sans peine que l'on peut, sans restreindre la généralité, choisir le repère (1.5) de telle façon qu'on ait

$$\omega_1 = \mathrm{d}v\,, \qquad \omega_2 = \mathrm{d}u \tag{5.2}$$

et par suite

$$\varphi = \alpha_1\alpha_2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1\,\frac{\mathrm{d}u^3}{\mathrm{d}v}\,. \tag{5.3}$$

Nous cherchons les congruences L satisfaisant à deux relations indépendantes de la forme

$$\Phi(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1, u, v) = 0, \quad \Psi(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1, u, v) = 0. \tag{5.4}$$

Il s'agit d'intégrer le système de Pfaff

$$(1.10) + (1.11) + (5.2) \tag{5.5}$$

sous la condition (5.4) et en supposant que les coefficients de (5.3) soient $\neq 0$.

En différentiant (5.4), on obtient deux relations de la forme

$$\begin{aligned}&\lambda_1\,\mathrm{d}(\alpha_1\alpha_2) + \lambda_2\,\mathrm{d}(\beta_1\beta_2) + \lambda_3\,\mathrm{d}(\alpha_1\beta_1) + \lambda_4\,\mathrm{d}u + \lambda_5\,\mathrm{d}v = 0\,,\\ &\mu_1\,\mathrm{d}(\alpha_1\alpha_2) + \mu_2\,\mathrm{d}(\beta_1\beta_2) + \mu_3\,\mathrm{d}(\alpha_1\beta_1) + \mu_4\,\mathrm{d}u + \mu_5\,\mathrm{d}v = 0\,,\end{aligned} \tag{5.6}$$

où λ_i, μ_i sont des fonctions connues de 5 variables $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\alpha_1\beta_1$, u, v telles que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 même si les relations (5.4) sont satisfaites. La différentiation extérieure du système de Pfaff considéré donne les équations

$$[\omega_{11} - \omega_{33}\,\mathrm{d}v] = 0\,, \qquad [\omega_{22} - \omega_{44}\,\mathrm{d}u] = 0 \tag{5.7}$$

et les équations (1.20), où les quantités α_1, α_2, β_1, β_2 et leurs différentielles sont liées par les relations (5.4) et (5.6). En posant

$$\begin{aligned}D\alpha_1 &= \mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(\omega_{22} - \omega_{11}),\; D\alpha_2 = \mathrm{d}\alpha_2 - \alpha_2(\omega_{22} - \omega_{11}),\\ D\beta_1 &= \mathrm{d}\beta_1 - \beta_1(\omega_{22} - \omega_{11}),\; D\beta_2 = \mathrm{d}\beta_2 + \beta_2(\omega_{22} - \omega_{11}),\end{aligned}$$

on peut donner aux équations (5.6) la forme

$$\begin{gathered}\lambda_1(\alpha_1 D\alpha_2 + \alpha_2 D\alpha_1) + \lambda_2(\beta_1 D\beta_2 + \beta_2 D\beta_1) + \lambda_3(\alpha_1 D\beta_1 + \beta_1 D\alpha_1) + \lambda_4\,\mathrm{d}u + \\ + \lambda_5\,\mathrm{d}v = 0\,,\\ \mu_1(\alpha_1 D\alpha_2 + \alpha_2 D\alpha_1) + \mu_2(\beta_1 D\beta_2 + \beta_2 D\beta_1) + \mu_3(\alpha_1 D\beta_1 + \beta_1 D\alpha_1) + \mu_4\,\mathrm{d}u + \\ + \mu_5\,\mathrm{d}v = 0\end{gathered}$$

et aux équations (1.20)

$$\begin{gathered}[\omega_{32}\omega_1] + [D\alpha_1\;\;\omega_2] = 0\,, \qquad [D\alpha_2\;\;\omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] = 0\,,\\ -[\omega_{41}\omega_1] + [D\beta_1 - \beta_1(\omega_{11} - \omega_{33})\;\;\omega_2] = 0\,,\\ [D\beta_2 - \beta_2(\omega_{22} - \omega_{44})\;\;\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] = 0\,.\end{gathered}$$

On vérifie sans peine que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v & 0 & 0 & -\mathrm{d}u & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{d}u & -\mathrm{d}v & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{d}u & 0 & 0 & 0 & \lambda_1\alpha_2 + \lambda_3\beta_1 & \mu_1\alpha_2 + \mu_3\beta_1 \\ 0 & \mathrm{d}v & 0 & 0 & \lambda_1\alpha_1 & \mu_1\alpha_1 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}u & 0 & \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\alpha_1 & \mu_2\beta_2 + \mu_3\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{d}v & \lambda_2\beta_1 & \mu_2\beta_1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{gathered}= (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(\alpha_1\beta_1\,\mathrm{d}u^4 - \alpha_2\beta_2\,\mathrm{d}v^4) + (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)\,\beta_1\,\mathrm{d}v^2(\alpha_1\,\mathrm{d}u^2 + \beta_2\,\mathrm{d}v^2) + \\ + (\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3)\,\alpha_1\,\mathrm{d}v^2(\beta_1\,\mathrm{d}u^2 + \alpha_2\,\mathrm{d}v^2)\end{gathered}$$

ne peut s'évanouir identiquement. Il en résulte que le système de Pfaff (5.5) est en involution et nous arrivons au résultat que *pour les congruences L du type I on peut préscrire arbitrairement, outre la relation évidente* (1.3), *deux autres relations indépendantes, qui peuvent dépendre aussi de u, v, entre les formes diffé-*

rentielles (2.2), *supposées exprimées en fonction de* u, v, $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ (u, v étant des paramètres développables); *des telles congruences L existent toujours et dépendent de six fonctions arbitraires d'une variable.*

Ce théorème est très général et il convient d'en signaler des cas particuliers remarquables. P. ex. *chaque congruence L du type I admet des transformations développables qui* [1] *sont en même temps des déformations ponctuelles et planaires,* [2] *sont des déformtaions focales simultanément de première et de seconde espèce,* [3] *induisent des transformations asymptotiques de toutes les deux surfaces focales; dans chacun de ces trois cas, les transformations développables de L considérées dépendent de six fonctions arbitraires d'une variable.* Le dernier exemple peut être généralisé. En effet, *considérons deux équations differentielles de la forme*

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 = f_1(u, v)\,, \tag{5.8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 = f_2(u, v)\,; \tag{5.9}$$

il existe des congruences L du type I dont u, v sont des paramètres développables et pour lesquelles (5.8) *donne les asymptotiques de la première surface focale et* (5.9) *celles de la seconde; des telles congruences dépendent de six fonctions arbitraires d'une variable.* Il est intéressant que ceci contient comme cas extrêmement particulier une nouvelle démonstration du résultat classique d'E. Cartan que les congruences R dépendent de six fonctions arbitraires d'une variable. On sait en effet que les congruences R peuvent être définies comme les congruences du type I possédant des paramètres développables u, v tels que, sur toutes les deux surfaces focales, l'équation différentielle des asymptotiques soit $\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 = 0$.

6. L et L' étant deux congruences du type I, considérons une transformation développable $T(L \to L')$. Nous avons déterminé les homographies tangentes (3.12) de T qui dépendent de u, v et en outre de cinq autres paramètres $\varrho^2 \neq 0$, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2. Or si l'on fixe ϱ^2 on peut considérer l'extension ponctuelle $T(\varrho^2)$ de T (v. n° 4) et il s'agit de caractériser géométriquement les homographies tangentes H appartenant à la valeur choisie de ϱ^2. A ce but il suffit de faire usage de ce qu'il résulte de (1.12) et (3.12)

$$\begin{gathered}\varrho x_1 A_1' + \varrho^{-1} x_2 A_2' = H(x_1 A_1 + x_2 A_2)\,,\\ \mathrm{d}(\varrho x_1 A_1' + \varrho^{-1} x_2 A_2') = H\,\mathrm{d}(x_1 A_1 + x_2 A_2) +\\ + \left\{\varrho x_1 \left(\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{11} - \lambda_1\omega_1\right) + x_2(\overline{\varrho^{-1}\alpha_2' - \varrho\alpha_2}\,.\,\omega_1 - \mu_2\omega_2)\right\} A_1' +\\ + \left\{x_1(-\mu_1\omega_1 + \overline{\varrho\alpha_1' - \varrho^{-1}\alpha_1}\,.\,\omega_2) + \varrho^{-1}x_2\left(-\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{22} - \lambda_2\omega_2\right)\right\} A_2'\,.\end{gathered}$$

On en déduit sans peine que si le point $x_1A_1 + x_2A_2$ décrit dans l'espace S_3 une courbe quelconque C, alors la transformée C' de C moyennant $T(\varrho^2)$ a la propriété qu'au point $\varrho x_1 A_1' + \varrho^{-1} x_2 A_2'$ transformé de $x_1 A_1 + x_2 A_2$ les tangentes aux deux courbes C' et HC sont situées dans un plan qui contient la droite $[A_1' A_2']$ ce qui se trouve aisément être une propriété caractéristique des homographies tangentes appartenantes à la valeur considérée de ϱ^2.

On peut chercher la condition pour qu'il y ait en $\varrho x_1 A_1' + \varrho^{-1} x_2 A_2'$ un contact analytique du premier ordre des courbes C', HC. On trouve

$$\begin{vmatrix} \varrho x_1 & \varrho x_1 \left(\dfrac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{11} - \lambda_1 \omega_1\right) + x_2 (\overline{\varrho^{-1} \alpha_2' - \varrho \alpha_2 \,.\, \omega_1} - \mu_2 \omega_2) \\ \varrho x_2 & x_1 (- \mu_1 \omega_1 + \overline{\varrho \alpha_1' - \varrho^{-1} \alpha_1 \,.\, \omega_2}) + \varrho^{-1} x_2 \left(- \dfrac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{22} - \lambda_2 \omega_2\right) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\varrho x_1^2 (- \mu_1 \omega_1 + \overline{\varrho \alpha_1' - \varrho^{-1} \alpha_1 \,.\, \omega_2}) - \varrho^{-1} x_2^2 (\overline{\varrho^{-1} \alpha_2' - \varrho \alpha_2 \,.\, \omega_1} - \mu_2 \omega_2) -$$
$$- x_1 x_2 \left(2 \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{11} - \tau_{22} - \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2\right) = 0 \,. \tag{6.1}$$

Si on choisit $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et que l'on détermine λ_1, λ_2 de façon qu'on ait

$$2 \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{11} - \tau_{22} - \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 = 0 \,, \tag{6.2}$$

l'équation (6.1) devient, faisant usage de (4.2) et (4.3)

$$(j_1 - 1) \, \alpha_1 \omega_2 x_1^2 - (j_2 - 1) \, \alpha_2 \omega_1 x_2^2 = 0 \,. \tag{6.3}$$

Nous sommes ainsi arrivés à une homographie tangente que nous indiquons par $K(\varrho^2)$ et qui pour u, v, ϱ^2 données est déterminée sans ambiguïté. On a donc

$$\begin{aligned} K(\varrho^2) \, A_1 &= \varrho A_1' \,, & K(\varrho^2) \, A_2 &= \varrho^{-1} A_2' \,, \\ K(\varrho^2) \, A_3 &= \varrho (A_3' + \lambda_1 A_1') \,, & K(\varrho^2) \, A_4 &= \varrho^{-1} (A_4' + \lambda_2 A_2') \end{aligned} \tag{6.4}$$

où il faut déterminer λ_1, λ_2 de telle façon que l'équation (6.2) soit vérifiée. De ce qui précède résulte la caractérisation géométrique suivante de l'homographie tangente $K(\varrho^2)$: Pour les courbes C satisfaisant à $\omega_2 = 0$ on a au point $\varrho x_1 A_1' + \varrho^{-1} x_2 A_2'$ un contact analytique du 1$^{\text{er}}$ ordre entre C' et $K(\varrho^2)\, C$ ou bien (si $j_2 = 1$) *toujours* ou bien (si $j_2 \neq 1$) *si et seulement si* la courbe C passe par le point A_1; pour les courbes C satisfaisant à $\omega_1 = 0$ on a au point $\varrho x_1 A_1' + \varrho^{-1} x_2 A_2'$ un contact analytique du 1$^{\text{er}}$ ordre entre C' et $K(\varrho^2)\, C$ ou bien (si $j_1 = 1$) toujours ou bien (si $j_1 \neq 1$) si et seulement si C passe par le point A_2. Dans le cas particulier où T est une *déformation ponctuelle* on peut fixer ϱ^2 univoquement en demandant que l'on ait

$$j_1 = j_2 = 1 \,; \tag{6.5}$$

l'homographie $K(\varrho^2)$ correspondante soit nommée *homographie ponctuellement associée* à T et désignée par K_0. L'équation (6.3) devient une identité de sorte K_0

réalise un contact analytique du 1[er] ordre $S_3 \to S_3'$ (relativement à la transformation ponctuelle $T(\varrho^2)$. V. E. Čech, Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами V, ce Journal t. *2 (77)* 1952, p. 167—188; L. Muracchini, *Sulle transformazioni punctuali che sono inviluppi di omografie*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) *8*, 1953, p. 390—398; E. Čech, О точечных изгибаниях конгруенций прямых (avec un résumé détaillé en français), ce Journal t. *5 (80)*, 1955, p. 234—273.

Il convient de signaler aussi les résultats corrélatifs aux précédents, basés sur la considération de l'extention planaire $T^*(\varrho^2)$ de T. Au lieu de $K(\varrho^2)$ nous avons maintenant l'homographie tangente $K^*(\varrho^2)$:

$$\begin{aligned} K^*(\varrho^2)\, A_1 &= \varrho A_1' \,, & K^*(\varrho^2)\, A_2 &= \varrho^{-1} A_2' \,, \\ K^*(\varrho^2)\, A_3 &= \varrho(A_3' + \lambda_1^* A_1') \,, & K^*(\varrho^2)\, A_4 &= \varrho^{-1}(A_4' + \lambda_2^* A_2') \,, \end{aligned} \tag{6.6}$$

où λ_1^*, λ_2^* satisfont à l'équation

$$2\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{33} - \tau_{44} + \lambda_1^* \omega_1 - \lambda_2^* \omega_2 = 0\,; \tag{6.7}$$

l'équation corrélative à (6.3) est

$$(j_1^* - 1)\, \beta_1 \omega_2 x_1^2 - (j_2^* - 1)\, \beta_2 \omega_1 x_2^2 = 0\,. \tag{6.8}$$

Dans le cas particulier où T est une *déformation planaire* on peut fixer ϱ^2 univoquement en demandant que l'on ait

$$j_1^* = j_2^* = 1\,; \tag{6.9}$$

l'homographie $K^*(\varrho^2)$ correspondante soit nommée *homographie planairement associée* à T et designée par K_0^*.

Nous avons supposé dans ce n° que les deux congruences L, L' soient du type I. Mais il est facile de voir que les résultats restent valables en supposant seulement que le type de L soit le même que celui de L'. Seulement si l'on p. ex. $\alpha_1 = \alpha_1' = 0$, on doit poser $j_1 = 1$, quelque soit la valeur choisie de ϱ^2; pareillement, on doit poser $j_2 = 1$ pour $\alpha_2 = \alpha_2' = 0$, $j_1^* = 1$ pour $\beta_1 = \beta_1' = 0$, $j_2^* = 1$ pour $\beta_2 = \beta_2' = 0$.

Demandons nous encore quand est ce que, pour une valeur données de ϱ^2, les deux homographies $K(\varrho^2)$ et $K^*(\varrho^2)$ coïncident. On trouve facilement la condition

$$4\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} + \tau_{11} - \tau_{22} + \tau_{33} - \tau_{44} = 0\,. \tag{6.10}$$

L'équation (6.10) est complètement intégrable si et seulement si

$$\alpha_1'\alpha_2' - \alpha_1\alpha_2 = \beta_1'\beta_2' - \beta_1\beta_2\,,$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi^{*\prime} - \varphi' = \varphi^* - \varphi\,. \tag{6.11}$$

Si p. ex. la congruence L est W, on a $\varphi^* - \varphi = 0$ et la condition (6.11) est satisfaite si et seulement si L' aussi est une congruence W. La condition (6.11) étant satisfaite, (6.10) détermine ϱ^2 à une constante près; on peut choisir arbitrairement la projectivité π pour une valeur initiale de la droite (1.1), ce qui détermine univoquement toutes les $\infty^2\ \pi$.

7. Passons à l'étude de la *déformation projective* $T(L \to L')$. On voit sans peine que le repère (3.4) peut être particularisé de telle façon que les équations (4.1) de l'homographie osculatrice H_0 prennent la forme simple

$$H_0A_1 = A_1',\ H_0A_2 = A_2',\ H_0A_3 = A_3',\ H_0A_4 = A_4' \tag{7.1}$$

de sorte que, outre (3.5), on a encore d'une part

$$\alpha_1' = \alpha_1,\ \alpha_2' = \alpha_2,\ \beta_1' = \beta_1,\ \beta_2' = \beta_2$$

ou bien

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = 0\,, \tag{7.2}$$

et de l'autre

$$\tau_{11} - \tau_{33} = 0\,, \qquad \tau_{22} - \tau_{44} = 0\,. \tag{7.3}$$

Par différentiation extérieure on déduit de (7.2)

$$\begin{aligned} [\tau_{32}\omega_1] - \alpha_1[\tau_{11} - \tau_{22}\ \ \omega_2] &= 0\,,\\ \beta_2[\tau_{11} - \tau_{22}\ \ \omega_1] + [\tau_{32}\omega_2] &= 0\,,\\ [\tau_{41}\omega_1] - \beta_1[\tau_{11} - \tau_{22}\ \ \omega_2] &= 0\,,\\ \alpha_2[\tau_{11} - \tau_{22}\ \ \omega_1] + [\tau_{41}\omega_2] &= 0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

et de (7.3)

$$[\tau_{31}\omega_1] = 0\,, \qquad [\tau_{42}\omega_2] = 0\,. \tag{7.5}$$

Les équations (7.4) permettent de poser

$$\tau_{22} - \tau_{11} = c_1\omega_1 - c_2\omega_2\,, \tag{7.6}$$

$$\tau_{32} = \beta_2 c_2\omega_1 + \alpha_1 c_1\omega_2\,, \qquad \tau_{41} = \alpha_2 c_2\omega_1 + \beta_1 c_1\omega_2\,. \tag{7.7}$$

Une déformation projective T est simultanément une déformation ponctuelle et une déformation planaire[2]) de manière que, outre l'homographie osculatrice H_0 il y a lieu de considérer encore l'homographie ponctuellement associée K_0 et l'homographie planairement associée K_0^*. Pour ces homographies on a les équations (6.2), (6.4), (6.6) et (6.7), où l'on doit poser $\varrho^2 = 1$ de sorte que l'on a, d'après (7.3) et (7.6),

$$\begin{aligned} K_0A_1 &= A_1',\ K_0A_2 = A_2',\ K_0A_3 = A_3' - c_1A_1',\ K_0A_4 = A_4' - c_2A_2',\\ K_0^*A_1 &= A_1',\ K_0^*A_2 = A_2',\ K_0^*A_3 = A_3' + c_1A_1',\ K_0^*A_4 = A_4' + c_2A_2'. \end{aligned} \tag{7.8}$$

---

[2]) Les conditions pour que T soit simultanément une déformation ponctuelle et une déformation planaire consistent dans l'existence de telles valeurs de $\varrho_1^2 \neq 0$ et de $\varrho_2^2 \neq 0$ que

$$\alpha_1' = \varrho_1^{-2}\alpha_1\,, \quad \alpha_2' = \varrho_1^2\alpha_2\,, \quad \beta_1' = \varrho_2^2\beta_1\,, \quad \beta_2' = \varrho_2^{-2}\beta_2\,.$$

T est une déformation projective si et seulement si $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$.

Les équations de nos trois homographies en coordonnées des plans sont

$$\begin{gathered} H_0E_1 = E_1', \; H_0E_2 = E_2', \; H_0E_3 = E_3', \; H_0E_4 = E_4', \\ K_0E_1 = E_1' + c_1E_3', \; K_0E_2 = E_2' + c_2E_4', \; K_0E_3 = E_3', \; K_0E_4 = E_4', \\ K_0^*E_1 = E_1' - c_1E_3', \; K_0^*E_2 = E_2' - c_2E_4', \; K_0^*E_3 = E_3', \; K_0^*E_4 = E_4'. \end{gathered} \tag{7.9}$$

En général, les trois homographies H_0, K_0, K_0^* ne coïncident que pour les points de la droite $[A_1A_2]$. Si elles sont identiques entre elles, nous dirons que T est une *déformation projective singulière.* La condition analytique pour cette parricularité est $c_1 = c_2 = 0$ ou $\tau_{11} - \tau_{22} = 0$. La notion de déformation projective singulière a été introduite déjà en 1920 (E. Cartan, *Sur le problème général de la déformation*, Comptes Rendus du Congrès Intern. des Math. de Strasbourg en 1920, p. 397—406). Or il se peut encore que, T n'étant pas singulière, il existe toutefois hors de la droite $[A_1A_2]$ des points pour lesquels H_0, K_0, K_0^* coïncident. Je dis alors que T est une *déformation projective demisingulière.* Les points A tels que H_0A, K_0A, K_0^*A coïncident en position forment alors nécessairement un des deux plans focaux; si c'est le premier (second) plan focal $E_3(E_4)$, je parle de déformation projective demisingulière de première (seconde) espèce. La condition analytique est $c_2 = 0$ ou $[\tau_{22} - \tau_{11} \;\; \omega_1] = 0$ pour la première espèce, $c_1 = 0$ ou $[\tau_{22} - \tau_{11} \;\; \omega_2] = 0$ pour la seconde. En comparant (7.1) et (7.8) avec (7.9) on voit tout de suite que la notion de déformation projective singulière ou demisingulière est corrélative à elle même.

De (7.3), (7.6) et (7.7) il résulte, d'après (1.12) et (7.1),

$$\begin{aligned} A_1' &= H_0A_1 , \qquad \mathrm{d}A_1' = H_0 \, \mathrm{d}A_1 + \tau_{11}A_1' , \\ \mathrm{d}^2A_1' &= H_0 \, \mathrm{d}^2A_1 + 2\tau_{11} \, \mathrm{d}A_1' + (\beta_2c_2\omega_1^2 + 2\alpha_1c_1\omega_1\omega_2 - \alpha_1c_2\omega_2^2) \, A_2' + (.) \, A_1' , \end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned} A_2' &= H_0A_2 , \qquad \mathrm{d}A_2' = H_0 \, \mathrm{d}A_2 + \tau_{22}A_2' , \\ \mathrm{d}^2A_2' &= H_0 \, \mathrm{d}^2A_2 + 2\tau_{22} \, \mathrm{d}A_2' + (- \alpha_2c_1\omega_1^2 + 2\alpha_2c_2\omega_1\omega_2 + \beta_1c_1\omega_2^2) \, A_1' + (.) \, A_2' . \end{aligned} \tag{7.11}$$

Supposons que $\alpha_1\beta_2 \neq 0$ de sorte que le premier foyer A_1 décrit une surface (A_1) non développable (la première surface focale). L'équation (7.10) met en évidence le fait bien connu que si la déformation projective T est singulière, H_0 réalise un contact analytique du second ordre entre les surfaces (A_1) et (A_1'). Si T n'est pas singulière, ce contact est seulement du premier ordre, toutefois est du second ordre relativement aux courbes tracées sur (A_1) dont la tangente au point A_1 considéré satisfait à l'équation

$$\beta_2c_2\omega_1^2 + 2\alpha_1c_1\omega_1\omega_2 - \alpha_1c_2\omega_2^2 = 0 . \tag{7.12}$$

Appelons *tangentes caractéristiques* de la surface (A_1) relativement à la déformation projective T les deux tangentes satisfaisant à (7.12). En se rappelant que (2.4) donne les asymptotiques de (A_1), on voit que les deux tangentes (7.12) sont conjuguées ou bien coïncident dans une tangente asymptotique. De plus on voit que pour une déformation projective demisingulière de première espèce le couple des tangentes caractéristiques est donné par $\omega_1\omega_2 = 0$ et par suite est formé par la droite $[A_1A_2]$ et sa transformée de Laplace $[A_1A_3]$, tandis que pour une déformation projective demisingulière de la seconde espèce les tangentes (7.12) séparent harmoniquement $[A_1A_2]$ et $[A_1A_3]$. Si $\alpha_2\beta_1 \neq 0$, on a des résultats tout-à-fait analogues concernant les tangentes caractéristiques

$$- \alpha_2 c_1 \omega_1^2 + 2\alpha_2 c_2 \omega_1 \omega_2 + \beta_1 c_1 \omega_2^2 = 0 \tag{7.13}$$

de la seconde surface focale (A_2).

Les ∞^2 projectivités qui s'obtiennent en transformant chaque droite ponctuelle $[A_1A_2]$ moyennant l'homographie osculatrice H_0 correspondante, prises ensemble, forment l'extension ponctuelle $T(1)$ de T qu'on peut appeler *extension ponctuelle principale* de la déformation projective T. (Corrélativement, nous avons *l'extension planaire principale* $T^*(1)$ de T.) Or soit R une surface réglée gauche contenue dans la congruence L et R' sa transformée moyennant $T(1)$. Il résulte de (4.9), en y posant $\varrho^2 = 1$ et faisant usage de (7.2) et (7.3), que les asymptotiques de R' correspondent à celles de R si et seulement si on a le long de R

$$\tau_{11} - \tau_{22} = 0\,. \tag{7.14}$$

Par suite les déformations projectives singulières sont caractérisées par la propriété d'être *totalement asymptotiques*, c'est-à-dire de transformer asymptotiquement *chaque* surface reglée gauche contenue dans L. C'est un résultat connu (E. Čech, Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами IV, ce Journal, t. *2* (*77*), 1952, p. 149—166.) Si la déformation projective T n'est pas singulière, l'équation (7.14) définit une décomposition de la congruence L en ∞^1 surfaces réglées que nous appellerons *décomposition canonique* de L relative à T. Si T n'est pas demisingulière, alors les surfaces réglées de L satisfaisant à (7.14) sont gauches et sont caractérisées par la propriété de correspondre asymptotiquement à leurs images moyennant l'extension ponctuelle principale $T(1)$ de T.

La caractérisation géométrique de la décomposition canonique que nous venons de donner perd le sens dans le cas où la déformation projective T est demisingulière, car alors les surfaces réglées de L satisfaisant à (7.14) sont développables. Pour combler cette lacune considérons pour fixer les idées la première famille des développables donnée analytiquement par $\omega_1 = 0$ et désignons par $\doteq$ les égalités valables seulement pour $\omega_1 = 0$. La déformation projective T n'est pas soumise à aucune condition en ce moment. Soit D une développable de la première famille de L, de sorte que $\omega_1 = 0$ le long de D; soit t la transformation ponctuelle $D \to D'$ contenue dans $T(1)$. Soit M une homographie $S_3 \to S_3'$ tangente à t tout le long d'une génératrice $[A_1A_2]$. On peut évidemment choisir le facteur scalaire de M de manière que

$$MA_1 = A_1', \qquad MA_2 = A_2';$$

soit encore

$$MA_3 = p_1A_1' + p_2A_2' + p_3A_3' + p_4A_4' ,$$
$$MA_4 = q_1A_1' + q_2A_2' + q_3A_3' + q_4A_4' .$$

Or nous avons

$$M(x_1A_1 + x_2A_2) = x_1A_1' + x_2A_2' ,$$
$$M\,\mathrm{d}(x_1A_1 + x_2A_2) \equiv \mathrm{d}(x_1A_1' + x_2A_2') - x_1\tau_{11}A_1' - x_2\tau_{22}A_2' + x_2\omega_2(q_1A_1' + q_2A_2' + q_3A_3' + \overline{q_4 - 1} \,.\, A_4') ,$$

d'où il résulte sans peine [v. (7.6)] que condition nécessaire et suffisante pour que M soit tangente à t le long de $[A_1A_2]$ est $q_1 = 0$, $q_2 = -c_2$, $q_3 = 0$, $q_4 = 1$ ou bien

$$MA_4 = A_4' - c_2A_2' , \tag{7.16}$$

d'où

$$M\,\mathrm{d}(x_1A_1 + x_2A_2) \equiv \mathrm{d}(x_1A_1' + x_2A_2') - \tau_{11}(x_1A_1' + x_2A_2') .$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} M\,\mathrm{d}^2(x_1A_1 + x_2A_2) &\equiv \mathrm{d}^2(x_1A_1' + x_2A_2') - 2\tau_{11}\,\mathrm{d}(x_1A_1' + x_2A_2') - \\ &- \{(\mathrm{d}\tau_{11} - \tau_{11}^2)\,x_1 + (\tau_{41} - p_1\beta_1\omega_2)\,\omega_2x_2\}\,A_1' - \\ &- \{\mathrm{d}\tau_{11} - \tau_{11}^2 - (\mathrm{d}c_2 - \tau_{42} + c_2\,.\,\omega_{22} - \omega_{44} + p_2\,.\,\beta_1 - c_2^2\,.\,\omega_2)\,\omega_2\}\,x_2A_2' \\ &+ (p_3 - 1)\,\beta_1\omega_2^2x_2A_3' - (p_4\beta_1 - 2c_2)\,\omega_2^2x_2A_4' . \end{aligned}$$

L'homographie M est donc [v. (7.7)] osculatrice à la transformation t le long de la génératrice $[A_1A_2]$ de D si et seulement si l'on a premièrement $p_1 = c_1$, $p_3 = 1$, $\beta_1p_4 = 2c_2$ ou

$$\beta_1MA_3 = \beta_1(A_3 + c_1A_1 + p_2A_2) + 2c_2A_4 \tag{7.17}$$

et en second lieu

$$\mathrm{d}c_2 + c_2(\omega_{22} - \omega_{44}) - \tau_{42} + (\beta_1p_2 - c_2^2)\,\omega_2 \equiv 0 . \tag{7.18}$$

Les équations (7.15), (7.16) et (7.17) donnent l'expression ponctuelle de l'homographie M osculatrice à t le long de $[A_1A_2]$.

Nous écartons le cas $\beta_1 = 0$ où la développable se réduit au plan E_3 [d'après (1.18), on a $\mathrm{d}E_3 \equiv (.)\,E_3$ pour $\beta_1 = 0$ ce qui dit que E_3 est fixe en position pour $\omega_1 = 0$, si $\beta_1 = 0$]; l'équation (7.18) détermine p_2 univoquement et l'homographie M osculatrice à t le long de $[A_1A_2]$ est unique.

En coordonnées des plans on obtient

$$ME_1 = E_1' - c_1E_3' , \qquad ME_2 = E_2' - (p_2 + c_2p_4)\,E_3' + c_2E_4' ,$$
$$ME_3 = E_3' , \qquad ME_4 = E_4' - p_4E_3' , \qquad \beta_1p_4 = 2c_2$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned} ME_3 &= E_3' , \\ M\,\mathrm{d}E_3 &\equiv \mathrm{d}E_3' + (\tau_{11} + 2c_2\omega_2)\,E_3' , \\ M\,\mathrm{d}^2E_3 &\equiv \mathrm{d}^2E_3' + 2(\tau_{11} + 2c_2\omega_2)\,\mathrm{d}E_3' + (.)\,E_3' + 4c_2\omega_2^2E_4' . \end{aligned} \tag{7.19}$$

Or soit t^* la transformation des ∞^1 plans tangents à la développable D induite par la transformation ponctuelle t de D. Il résulte de (7.19) que l'homographie M qui est osculatrice à t est en général seulement *tangente* à t^*; pour qu'elle soit *osculatrice* à t^*, il faut et il suffit que l'on ait $c_2 = 0$. Mais D était une développable de la première famille de L et $c_2 = 0$ est la condition pour que la déformation projective T soit demisingulière de première espèee ou, ce qui est la même chose, pour que la décomposition canonique de L relative à T soit la décomposition en développables de la première famille.

En excluant toujours les déformations projectives singulières et en se limitant au cas $\alpha_1\beta_2 \neq 0$ où il existe la première surface focale (A_1) de L non développable, on peut considérer la décomposition de (A_1) en ∞^1 courbes C induite par la décomposition canonique de L. Pour la tangente t_0 de C au point A_1 de (A_1) on a $\tau_{11} - \tau_{22} = 0$ ou $c_1\omega_1 - c_2\omega_2 = 0$; en comparant à (7.12) on voit tout de suite que t_0 est la conjuguée harmonique de $[A_1A_2]$ par rapport au couple des tangentes caractéristiques de (A_1). Si $\alpha_2\beta_1 \neq 0$, on a un résultat analogue relatif à la seconde surface focale (A_2).

Il est important de déterminer la généralité des déformations projectives demisingulières. Nous le ferons ici seulement pour les congruences du type I; les autres types seront traités dans un Mémoire ultérieur. On peut manifestement se limiter au cas $c_1 \neq 0 = c_2$ des déformations projectives demisingulières de première espèce. On voit sans peine qu'il est possible de particulariser les repères de manière à avoir $\alpha_1 = \beta_1 = c_1 = 1$. Il s'agit alors de discuter le système de Pfaff

$$\begin{gathered}\omega_{14} = \omega_{23} = 0,\ \omega_{12} = \omega_2,\ \omega_{43} = \omega_2,\ \omega_{21} = \alpha_2\omega_1,\ \omega_{34} = \beta_2\omega_1,\\ \tau_{14} = \tau_{23} = \tau_{13} = \tau_{24} = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = 0\,,\\ \tau_{11} - \tau_{33} = \tau_{22} - \tau_{44} = 0\,,\quad \tau_{22} - \tau_{11} = \omega_1\,,\end{gathered} \tag{7.20}$$

en supposant que $\alpha_2\beta_2 \neq 0$. L3 différentiation extérieure donne

$$\begin{aligned}[\omega_{32}\omega_1] - [\omega_{11} - 2\omega_{22} + \omega_{44}\ \ \omega_2] &= 0\,,\\ [\omega_{41}\omega_1] - [\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44}\ \ \omega_2] &= 0\,,\\ [d\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})\ \ \omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] &= 0\,,\\ [d\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} - 2\omega_{33} + \omega_{44})\ \ \omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] &= 0\,,\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$[\tau_{32} - \omega_2\ \ \omega_1] = 0\,,\quad [\tau_{41} - \omega_2\ \ \omega_1] = 0,\quad [\tau_{32}\omega_2] = 0,\quad [\tau_{41}\omega_2] = 0, \tag{7.22}$$

$$[\omega_{11} - \omega_{33}\ \ \omega_1] = 0\,, \tag{7.23}$$

$$[\tau_{31}\omega_1] = [\tau_{42}\omega_2] = 0\,. \tag{7.24}$$

Les équations (7.22) conduisent à poser

$$\tau_{32} = \tau_{41} = \omega_2\,. \tag{7.25}$$

On en déduit par différentiation extérieure

$$[\beta_2\tau_{42} - \omega_{32} \quad \omega_1] - [\tau_{31} - 2\omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} - \omega_1 \quad \omega_2] = 0\,, \qquad (7.26)$$
$$[\alpha_2\tau_{42} - \omega_{41} \quad \omega_1] - [\tau_{31} + \omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{44} - \omega_1 \quad \omega_2] = 0\,.$$

Le système de Pfaff (7.20) + (7.25) a les conditions d'intégrabilité (7.21) + + (7.23) + (7.24) + (7.26). Il est donc en involution et nous arrivons au résultat que *les déformations projectives demisingulières* (des congruences du type I) *dépendent de neuf fonctions arbitraires d'une variable.*

Резюме

РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 19/XI 1955 г.)

Пусть L — непараболическая конгруэнция прямых в проективном прострахстве S_3. Подвижной репер $A_1A_2A_3A_4$ выберем так, что прямая $[A_1A_2]$ описывает конгруэнцию L, а прямые $[A_1A_3]$, $[A_2A_4]$ описывают ее преобразования Лапласа. Итак, A_1, A_2 — фокусы, а $[A_1A_2A_4]$, $[A_1A_2A_3]$ — фокальные плоскости конгруэнции L, соответствующие прямой $[A_1A_2]$. Конгруэнция L определяется уравнениями (1.12) с точностью до проективного преобразования. Если u, v — развертывающиеся параметры конгруэнции L, причем развертывающимся параметрам $v =$ konst. соответствуют первые фокусы A_1 и первые фокальные плоскости $[A_1A_2A_4]$, параметрам же $u =$ konst. — вторые фокусы A_2 и вторые фокальные плоскости $[A_1A_2A_3]$, то в (1.12) форма Пфаффа ω_1 пропорциональна $\mathrm{d}v$, а форма Пфаффа ω_2 пропорциональна $\mathrm{d}u$.

Простейшими проективными инвариантами конгруэнции L являются дифференциальные формы (2,2), связанные тождеством (2.3). Я называю φ *точечной формой*, φ^* — *плоскостной формой*, F_1 — *первой фокальной формой и* F_2 — *второй фокальной формой* конгруэнции L. Можно различать 10 типов конгруэнций L, смотря по тому, равны ли нулю какие-нибудь из величин α_1, α_2, β_2, β_2, и какие именно. В этом резюме я ограничусь типом I $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0$ конгруэнций с двумя различными невырожденными и неразвертывающимися фокальными поверхностями (A_1), (A_2). Асимптотические фокальных поверхностей даны уравнениями (2.4), так что $\varphi = \varphi^*$ является условием для конгруэнции W. Обратим внимание на то, что инвариантность уравнений(2.4) вытекает из инвариантности форм

(2.3). Влияние замены фокусов A_1, A_2 на дифференциальные формы (2.3) выражается подстановкой (2.5), влияние же двойственного преобразования — подстановкой (2.6). Система наших форм (2.3) в сущности эквивалентна проективному линейному элементу Террачини (2.7), который не изменяется при подстановках (2.5) и (2.6).

Развертывающееся преобразование T конгруэнции L ставит в соответствие каждой прямой p конгруэнции L прямую p' конгруэнции L' и притом так, что развертывающимся конгруэнции L соответствуют развертывающиеся конгруэнции L'; можно предположить, что u, v являются развертывающимися параметрами обеих конгруэнций L, L'. Коллинеацию $K = K(u, v)$ мы назовем *касательной* (*соприкасающейся*) *коллинеацией* развертывающегося преобразования T, если (при данных u, v) K осуществляет аналитическое касание первого (второго) порядка конгруэнций L, L'; порядок касания определяется в прямолинейных координатах прямой. При произвольно заданном развертывающемся преобразовании T для каждой пары (u, v) существует ∞^5 касательных коллинеаций, однако в общем случае не существует ни одной соприкасающейся коллинеации. T будет проективным изгибанием, если для всех (u, v) существуют соприкасающиеся коллинеации, которые тогда определяются однозначно. Необходимым и достаточным условием проективного изгибания является инвариантность всех форм (2,3). Если инвариантна только форма

$$\left.\begin{array}{l}\varphi,\\ \varphi^*,\\ F_1,\\ F_2,\end{array}\right\}\ \text{то } T \text{ называется} \left\{\begin{array}{l}\textit{точечным изгибанием}\\ \textit{плоскостным изгибанием}\\ \textit{фокальным изгибанием первого рода}\\ \textit{фокальным изгибанием второго рода.}\end{array}\right.$$

С развертывающимся преобразованием T, переводящим прямую p в прямую p', сопряжены два точечных преобразования, переводящих фокусы A_1, A_2 в фокусы A'_1, A'_2, и два плоскостных преобразования, переводящих фокальные плоскости $[A_1A_2A_4]$, $[A_1A_2A_3]$ в фокальные плоскости $[A'_1A'_2A'_4]$, $[A'_1A'_2A'_3]$. Точечные изгибания были подробно исследованы (для общего случая конгруэнций в пространстве S_n) в моей статье О точечных изгибаниях конгруэнций прямых [ЧМЖ, т. *5*(*80*), 1955, стр. 234—273]. Плоскостные изгибания двойственны точечным изгибаниям. Фокальное изгибание первого рода характеризуется тем, что для каждой пары (u, v) существует касательная коллинеация K, осуществляющая аналитическое касание первого порядка как для точечного преобразования $A_1 \to A'_1$, так и для плоскостного преобразования $[A_1A_2A_4] \to [A'_1A'_2A'_4]$.

Так как конгруэнция L зависит только от *двух* функций двух переменных, то в уравнениях

$$\varphi = \lambda_1\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,, \quad \varphi^* = \lambda_2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,, \quad F_1 = \lambda_3 \frac{\mathrm{d}u^3}{\mathrm{d}v}\,, \quad F_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3} \frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}u}$$

нельзя произвольно предписать все три функции λ_1, λ_2, λ_3 переменных u, v. Можно, однако, произвольно предписать два независимых соотношения вида

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, u, v) = 0\,,$$

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, u, v) = 0$$

и соответственные конгруэнции L зависит еще от шести произвольных функций одного переменного. Эта общая теорема о существовании обладает рядом частных следствий.

Пусть теперь T — проективное изгибание. Для каждой пары (u, v) существует однозначно определенная соприкасающаяся коллинеация K. Коллинеация K определяет проективное соответствие π между рядом точек на прямой $p = p(u, v)$ конгруэнции L и рядом точек на прямой $p' = p'(u, v)$ конгруэнции L', равно как и проективное соответствие π^* между пучками плоскостей с осями p, p'. Совокупность ∞^2 проективных соответствий π определяет точечное преобразование пространства S_3, являющееся огибающей ∞^2 коллинеаций $H = H(u, v)$. Двойственно при помощи ∞^2 проективных соответствий π^* определяются коллинеации $H^* = H^*(u, v)$. Для точек x на прямой p совпадут все три точки Kx, Hx, H^*x. Однако, если точка x не лежит на прямой p, то точки Kx, Hx, H^*x, вообще, отличны друг от друга. Исключение составляют прежде всего *особые проективные изгибания*, которые характеризуются тем, что соответственные преобразования фокальных поверхностей $A_1 \to A_1'$, $A_2 \to A_2'$ являются проективными изгибаниями (в смысле Фубини); если T — особое проективное изгибание, то для каждой точки x пространства S_3 совпадут все три точки Kx, Hx, H^*x. Однако, существуют еще *полуособые проективные изгибания*. Если T — полуособое проективное изгибание, то те точки x, для которых совпадают Kx, Hx, H^*x, образуют одну из двух фокальных плоскостей. Полуособые проективные изгибания T зависят от девяти произвольных функций одного переменного.