Béla Szökefalvi-Nagy

Contribution en Hongrie à la théorie spectrale des transformations linéaires

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 2, 166–176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100190

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

CONTRIBUTION EN HONGRIE À LA THÉORIE SPECTRALE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

BÉLA SZÖKEFALVI-NAGY, Szeged.

Conférence faite le 2 septembre 1955 au IV[e] Congrès des mathématiciens tchécoslovaques.

La théorie spectrale des transformations linéaires, théorie de haute importance aussi par ses applications en Physique théorique, a été enrichie par plusieurs mathématiciens de Hongrie, en premier lieu par FRÉDÉRIC RIESZ et JEAN NEUMANN, dont les contributions sont fondamentales; citons aussi les noms d'ALFRED HAAR, PAUL HALMOS, BÉLA LENGYEL, AURÉLIEN WINTNER, et du rapporteur. Puisque Neumann, Wintner, Halmos et Lengyel résident depuis longtemps à l'étranger, le présent rapport n'embrassera pas leurs contributions, exception faite d'un article de Lengyel, qui a été publié en Hongrie. On ne parlera non plus des aspects plutôt algébriques de la théorie des opérateurs, notamment des anneaux d'opérateurs, dont la théorie, inaugurée par MURRAY et Neumann, est le sujet des recherches d'un jeune aspirant mathématicien hongrois, L. PUKÁNSZKY.

Voici la liste des travaux dont on fera mention:

Alfred Haar: [1] Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Zs. *41* (1930), 769—798.

Béla Lengyel: [1] On the spectral theorem of selfadjoint operators, Acta Sci. Math., *9* (1939), 174—186.

Frédéric Riesz: [1] Über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Göttinger Nachr. 1910, 190—195; [2] Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (Paris, 1913); [3] Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. *41* (1917), 71—98; [4] Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, Acta Sci. Math. *5* (1930), 23—54; [5] Über Sätze von Stone und Bochner, ibidem *6* (1933), 184—198; [6] Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, ibidem *7* (1935), 147—159; [7] Sur la théorie ergodique, Commentarii Math. Helvetici, *17* (1945), 221—239.

F. Riesz — E. R. Lorch: [1] The integral representation of unbounded selfadjoint transformations in Hilbert space, Transactions Amer. Math. Soc. *39* (1936), 331—340.

F. Riesz — Béla Sz.-Nagy: [1] Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, Acta Sci. Math. *10* (1943), 202—205; [2] Leçons d'analyse fonctionnelle (Budapest, 1952, 1953, 1955).

Béla Sz.-Nagy: [1] Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen, Math. Annalen, *112* (1936), 286—296; [2] On semigroups of selfadjoint transformations in Hilbert space, Proc. Nat. Acad. USA, *24* (1938), 559—560; [3] Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgeb., V/5 (Berlin, 1942; Ann Arbor, 1947); [4] Perturbációk a Hilbert-féle térben. I., Math. és Term.-tud. Értesitö, *61* (1942), 755—775; [5] Perturbációk a Hilbert-féle térben. II., ibidem, *62* (1943), 63—79; [6] Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, Commentarii Math. Helvetici, *19* (1947), 347—366; [7] Vibrations d'une corde non homogène, Bulletin Soc. Math. France, *75* (1947), 193—208; [8] Uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, Acta Sci. Math. *11* (1947), 152—157; [9] Perturbations des transformations linéaires fermées, ibidem *14* (1951), 125—137; [10] A moment problem for self-adjoint operators, Acta Math. Acad. Sci. Hung., *3* (1952), 285—293; [11] Sur les contractions de l'espace de Hilbert, Acta Sci. Math., *15* (1953), 87—92; [12] Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, ibidem, *15* (1954), 104—114; [13] Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace (Appendice à la 3ième édition des „Leçons d'analyse fonctionnelle", 1955).

1. Transformations autoadjointes bornées

1. Les travaux de F. Riesz établissant les fondements des espaces fonctionnels linéaires et des opérations linéaires sont aujourd'hui classiques. Rappelons le théorème de Riesz-Fischer, les espaces des fonctions continues et les espaces L^p, et leurs opérations linéaires, etc. Rappelons en particulier son théorème établissant un critère pour que le problème des moments

$$\int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x) = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

avec $f_n(x)$, c_n données, admette une solution à variation bornée $\alpha(x)$.

C'est sur ce théorème qu'il a basé, en 1910, sa première démonstration [1] de la décomposition spectrale des formes quadratiques bornées à une infinité de variables, décomposition obtenue pour la première fois par Hilbert. Ce théorème est équivalent à ce qu'on appelle aujourd'hui théorème de décomposition spectrale des transformations autoadjointes bornées (ou encore: hermitiennes bornées).

Dans son livre [2] de 1913, Riesz a donné une nouvelle démonstration de ce théorème. C'est ici qu'il fait usage pour la première fois systématiquement de sa méthode de calcul avec les transformations, méthode qui s'est montrée très féconde dans tout le développement ultérieur de la théorie. A étant une transformation autoadjointe bornée, avec les bornes inférieure et supérieure m et M, Riesz commence à faire correspondre à tout polynome à coefficients réels

$$p(\mu) = c_0 + c_1\mu + c_2\mu^2 + \ldots + c_n\mu^n$$

le polynome analogue de la transformation A, c'est-à-dire la transformation

$$p(A) = c_0A^0 + c_1A^1 + c_2A^2 + \ldots + c_nA^n$$

où $A^0 = I$ (la transformation identique), $A^1 = A$, $A^2 = AA$, etc. Il constate que cette correspondance est additive, homogène et multiplicative (ce qui est immédiat) et que de plus elle est de type positif, c'est-à-dire que si $p(\mu) \geqq 0$ pour $m \leqq \mu \leqq M$, on a aussi $p(A) \geqq 0$ dans le sens que $(p(A) f, f) \geqq 0$ pour tout élément f de l'espace hilbertien. Il étend alors correspondance à des fonctions de type plus général, définies dans l'intervalle $[m, M]$, notamment aux limites des suites monotones bornées de polynômes et aux différences de ces limites; les propriétés énumérées de la correspondance restent conservées. Cette classe plus vaste de fonctions contient en particulier la fonction caractéristique $e_\lambda(\mu)$ de l'intervalle $(-\infty, \lambda]$. La transformation correspondante E_λ est autoadjointe et idempotente, donc une projection orthogonale. En fonction de λ, E_λ forme une *famille spectrale* étalée sur $[m, M]$, c'est-à-dire qu'on a

$$E_\lambda \leqq E_{\lambda'} \text{ pour } \lambda < \lambda' \,, \tag{i}$$
$$E_\lambda \to E_{\lambda_0} \text{ pour } \lambda \to \lambda_0 + 0 \,, \tag{ii}$$
$$E_\lambda = 0 \quad \text{pour } \lambda < m \text{ et } E_\lambda = I \text{ pour } \lambda \geqq M \,. \tag{iii}$$

De la formule évidente

$$\mu^n = \int_{m-0}^{M} \lambda^n \, \mathrm{d}e_\lambda(\mu) \qquad \begin{matrix}(m \leqq \mu \leqq M)\\ (n = 0, 1, \ldots)\end{matrix}$$

il s'ensuit que

$$A^n = \int_{m-0}^{M} \lambda^n \, \mathrm{d}E_\lambda \qquad (n = 0, 1, \ldots) \,,$$

c'est-à-dire, pour $n = 1$, la décomposition spectrale de A.

2. Une partie de ces raisonnements reste en valeur même si l'on donne le rôle de la suite des itérées $A^0, A^1, A^2, \ldots$ d'une même transformation autoadjointe bornée A, à une suite quelconque $A_0, A_1, A_2, \ldots$, de transformations autoadjointes bornées, assujettie seulement à la condition que pour chaque polynome $c_0 + c_1\mu + c_2\mu^2 + \ldots + c_n\mu^n$, à valeurs positives dans un intervalle fixé $[m, M]$, la transformation $c_0A_0 + c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n$ soit aussi positive. On aboutit ainsi à la formule analogue

$$A_n = \int_{m-0}^{M} \lambda^n \, \mathrm{d}F_\lambda \qquad (n = 0, 1, \ldots) \,,$$

mais la correspondance entre polynomes et transformations n'étant plus multiplicative, la transformation autoadjointe F_λ ne sera pas en général une projection. Mais, dans le cas où $A_0 = I$, F_λ jouit des mêmes propriétés (i)—(iii); on dit que F_λ forme une *famille spectrale généralisée* étalée sur $[m, M]$. Or, un théorème de M. NEUMARK affirme que toute famille spectrale généralisée $\{F_\lambda\}$ est la „projection" d'une famille spectrale ordinaire, dans le sens suivante: il existe, dans un espace de Hilbert plus vaste K, contenant l'espace original H

comme un sous-espace, une famille spectrale ordinaire $\{E_\lambda\}$, étalée sur $[m, M]$, de sorte que, en désignant par P la projection dans K sur H, on ait dans H

$$F_\lambda = PE_\lambda .$$

Il en résulte la représentation

$$A_n = P \int_{m-0}^{M} \lambda^n \, \mathrm{d}E_\lambda = PA^n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

dans H, où l'on a désigné par A la transformation autoadjointe

$$A = \int_{m-0}^{m} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$$

de l'espace K. Voici donc la suite $\{A_n\}$ représentée comme la „projection" de la suite des itérées d'une même transformation autoadjointe (cf. Sz.-Nagy [10, 13]). De cette représentation découle simplement l'inégalité $A_1^2 \leqq A_2$, avec le signe d'égalité dans le cas où $A_n = A_1^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, et dans ce cas seulement. Cette inégalité, démontrée antérieurement par une autre voie par R. V. Kadison, a été utilisée par cet auteur dans ses recherches sur les invariants algébriques des algèbres d'opérateurs.

2. Transformations autoadjointes non bornées

1. La méthode de la correspondance entre polynomes de la variable μ et de la transformation autoadjointe A, ne s'étend pas au cas où A n'est pas bornée. En effet, la transformation A n'étant pas alors définie pour tous les éléments de l'espace, on ne sait d'avance même pas s'il existe, outre 0, d'autres élements de l'espace, pour lesquels toutes les itérées A^n soient definies.

Mais peu après J. Neumann et M. H. Stone avaient publié leurs premières démonstrations du théorème spectral des transformations autoadjointes non bornées, théorème qui s'exprime succintement par la formule

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$$

où $\{E_\lambda\}$ est une famille spectrale étalée sur l'axe entier ($E_\lambda \to 0$ pour $\lambda \to -\infty$, $E_\lambda \to I$ pour $\lambda \to +\infty$), Riesz a donné une troisième démonstration [4]. Celle-ci procède en réduisant le problème au cas des transformations autoadjointes bornées en envisageant la transformation bornée

$$D = (A - iI)^{-1} + (A + iI)^{-1} .$$

Plus tard, il a ajouté, en collaboration avec E. R. Lorch (Riesz-Lorch [1]) encore deux démonstrations du même théorème, chacune réduisant le problème au cas borné, notamment en envisageant les transformations bornées

$$B = (A^2 + I)^{-1} , \qquad C = A(A^2 + I)^{-1} ,$$

dont l'existence s'ensuit aisément par la méthode des ,,graphiques" des transformations, inventée par J. Neumann.

Par contre, la démonstration par B. Lengyel [1] est directe, elle ne réduit pas le problème au cas borné. Elle adapte, d'une manière non triviale, au cas des transformations non bornées, la méthode par laquelle HELLINGER a démontré, en 1909, le théorème spectral des transformations autoadjointes bornées.

2. On trouve chez J. Neumann, quoique implicitement, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation linéaire bornée T d'un espace hilbertien séparable soit une ,,fonction" d'une transformation autoadjointe donnée $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$, c'est-à-dire qu'on ait

$$T = F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda \, .$$

C'est que T soit permutable avec toutes les transformations linéaires bornées qui, à leur tour, sont permutables avec A. C'est naturellement la suffisance de la condition dont la démonstration présente des difficultés. Riesz en a donné [6] une démonstration directe. Il commence à remarquer que si $T = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda$, on a $T_\mu = \int_{-\infty}^{\mu} F(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda$ pour

$$T_\mu = TE_\mu = E_\mu T \, .$$

Cela lui donne l'idée d'arriver à la fonction cherchée $F(\lambda)$ par une certaine sorte de dérivation de T_λ par rapport à E_λ. Il réussit de le faire par un raisonnement fin; la difficulté essentielle est de comparer entre elles les dérivées stieltjesiennes $\mathrm{d}(T_\lambda f, f)/\mathrm{d}(E_\lambda f, f)$ correspondant à de différents éléments f de l'espace.

Cette démonstration a été ensuite partiellement simplifiée par le japonais Y. MIMURA. Une démonstration a été donnée aussi par le rapporteur en son fascicule d'Ergebnisse [3]; son démonstration diffère de celles de Riesz et de Mimura surtout en ce qu'elle ne fait pas usage de procédés de dérivation, elle s'appuit plutôt au théorème de Riesz-Fischer.

Dans ce fascicule d'Ergebnisse, de 1942, on trouve d'ailleurs un exposé concis, et en beaucoup de points simplifié ou précisé, des fondements de la théorie de l'espace hilbertien et de la théorie spectrale des transformations autoadjointes ou normales. On y trouve, entre autres, deux démonstrations simples du théorème de Neumann sur la décomposition simultanée d'un système commutatif de transformations autoadjointes, théorème dont une démonstration a été publiée antérieurement aussi par Alfred Haar [1]. Il a fait usage de ce théorème notamment dans ses recherches sur les caractères des groupes abéliens infinis, ainsi que sur la caractérisation des ,,tableaux de multiplication" des systèmes orthonormaux de fonctions.

3. Transformations linéaires de type général

Riesz a contribué, déjà dans son livre [2] de 1913, d'une manière fondamentale aussi au développement du concept et de la théorie des transformations linéaires de type général, non autoadjointes et même non normales; ses méthodes peuvent être appliquées non seulement dans le cas de l'espace hilbertien, mais dans le cas d'un espace de Banach quelconque.

Dans la terminologie généralement adoptée aujourd'hui, les résultats de Riesz sont essentiellement les suivants. Soit A une transformation linéaire bornée, il lui correspond une répartition des nombres complexes λ en deux classes suivant que la transformation $\lambda I - A$ admet une inverse partout définie et bornée, ou non. Les points de la première classe forment l'*ensemble résolvant* de A, et les autres le *spectre* de A. L'ensemble résolvant est un ensemble ouvert, et la *transformation résolvante* $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ est une fonction analytique régulière de λ, c'est-à-dire peut être développée en série entière de $\lambda - \lambda_0$ dans le voisinage de chaque point λ_0 de l'ensemble résolvant. On peut alors appliquer les méthodes de la théorie des fonctions analytiques, en particulier le calcul des résidus. Si C est un contour farmé rectifiable, passant dans l'ensemble résolvant de A, Riesz montre que la transformation

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_C R_\lambda \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\lambda I - A} \, d\lambda \tag{45}$$

est idempotente, donc une projection, en géneral oblique. Elle engendre une décomposition de l'espace entier H en somme vectorielle de ses sousespaces

$$M = PH \quad \text{et} \quad N = (I - P)\, H\,;$$

chacun de ces sousespaces réduit la transformation A; en désignant les parties de A dans M et N par A_M et A_N, le spectre de A_M et de A_N est constitué de celle partie du spectre de A, qui est, selon les cas, à l'intérieur ou à l'extérieur du contour C.

Cette décomposition, ainsi que le calcul opérationnel proposé par Riesz, basé sur l'intégration sur des contours, étaient le point de départ des théories spectrales récentes des transformations linéaires de type général et de la théorie des anneaux normés, développées par Gelfand, Lorch, Dunford, Taylor, etc.

Riesz lui-même faisait usage de son théorème de décomposition surtout dans la recherche des transformations complètement continues, notion due à Hilbert et à Riesz. D'après le définition donnée par Riesz, une transformation est complètement continue si elle porte tout ensemble borné en un ensemble compact. Les transformations qu'on rencontre dans la théorie des équations intégrales sont, dans des conditions générales concernant le noyau, complètement continues. L'importance de cette notion résulte de ce que toute transformation linéaire complètement continue T a un spectre n'ayant qu'un seul point d'accumulation possible, le point 0, et que pour l'équation fonctionnelle linéaire

$$\lambda f - Tf = g$$

l',,alternative" de Fredholm est valable. Une démonstration, basée sur le théorème de décomposition ci-dessus, en a été indiquée déjà dans le livre [2] par Riesz. Plus tard, en 1917, il en a donné une autre démonstration, détaillée, de nature plutôt géométrique. Elle est basée sur une étude approfondie de l'allure des ensembles linéaires M_n et N_n ($n = 0, 1, \ldots$), attachés à un point λ du spectre de T: M_n est constitué des éléments f qui sont annulés par $(\lambda I - T)^n$, tandis que N_n est constitué des vecteurs de la forme $(\lambda I - T)^n g$ avec g arbitraire.

4. Perturbations du spectre

Le calcul des perturbations des valeurs propres et des fonctions propres, tel comme on l'emploie depuis Lord Rayleigh et Schrödinger dans la Physique théorique, est basé sur l'hypothèse que si une transformation autoadjointe A_0 est ,,perturbée" d'une manière analytique régulière, c'est-à-dire remplacée par la transformation $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots$ où ε est un paramètre réel, les valeurs propres et les éléments propres de A_0 varient eux aussi en functions analytiques régulières de ε. C'était F. Rellich qui en a donné, en 1936, la première démonstration rigoureuse, notamment pour les valeurs propres isolées de A_0, de multiplicité *finie*, et il a réussi même d'évaluer la rapidité de convergence des séries entières des valeurs et des élements perturbés.

Dans ses Notes [4], [6], le rapporteur a étudié la perturbation d'une partie quelconque isolée du spectre de A_0. Sa méthode est entièrement différente de celle employée par Rellich, elle repose sur une intégration de la transformation $R_\lambda(\varepsilon) = [\lambda I - A(\varepsilon)]^{-1}$ sur un contour enfermant la partie du spectre en question et, dans le cas d'une valeur propre isolée de multiplicité finie, elle raisonne par induction par rapport à cette multiplicité; les résultats acquis sont plus généraux et les évaluations plus précises que ceux obtenus par Rellich.

Dans une autre Note, [5], le rapporteur a étudié un problème de perturbation de type différent, notamment le problème

$$Af = \lambda J(\varepsilon)\, f$$

où A est une transformation autoadjointe fixée et $J(\varepsilon)$ une transformation autoadjointe de la forme $I + \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \ldots$. En d'autres termes, il s'agit ici de transformer aux ,,axes principales" la forme quadratique fixée (Af, f) par rapport à la forme métrique perturbée

$$(f, f)_\varepsilon = (J(\varepsilon)\, f, f)\,.$$

Dans la Note [7] le rapporteur applique ses résultats au problème classique de la corde vibrante.

Dans sa Note [9], il étend, du moins partiellement, ses résultats au cas des transformations non autoadjointes, notamment aux transformations fermées, de type général, d'une espace de Hilbert ou de Banach. Les résultats de cette Note ont été précisés et généralisés ensuite par plusieurs auteurs, notamment par F. Wolf et T. Katô.

5. Groupes et semi-groupes de transformations

1. *Groupes de transformations unitaires.* Une famille $\{T_s\}$ de transformations linéaires bornées, dépendant du paramètre réel s et satisfaisant aux conditions.

$$T_0 = I\,, \qquad T_{s_1+s_2} = T_{s_1} T_{s_2}\,,$$

s'appelle un *groupe* ou un *semi-groupe* à un paramètre selon que le domaine du paramètre s est l'axe entier, ou le demi-axe $[0, \infty)$ seulement.

D'après un théorème important de M. H. Stone tout groupe à un paramètre de transformations unitaires $\{U_s\}$ de l'espace hilbertien admet la représentation spectrale suivante:

$$U_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, \mathrm{d}E_\lambda\,,$$

$\{E_\lambda\}$ étant une famille spectrale étalée sur l'axe des λ. Le théorème est valable notamment si U_s dépend de s de façon faiblement continue, c'est-à-dire si les produits scalaires $(U_s f, g)$ sont, pour f et g arbitraires, fonctions continues de s. Dans le cas d'un espace séparable il suffit même de supposer que ces fonctions soient mesurables. L'une des démonstrations de ce théorème, celle de Bochner, partit en remarquant que les fonctions $p_f(s) = (U_s f, f)$ sont de type positif, c'est-à-dire qu'on a

$$\sum_{\nu,\mu} p_f(s_\nu - s_\mu)\, \xi_\nu \bar{\xi}_\mu \geqq 0\,,$$

quels que soient les points $s_1, s_2, \ldots$ en nombre fini, et les valeurs complexes $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Or, d'après un théorème de cet auteur, toute fonction continue $p(s)$ de type positif admet la représentation

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda}\, \mathrm{d}V(\lambda)$$

avec une fonction non-décroissante bornée $V(\lambda)$. C'est alors aisé d'en conclure au théorème de Stone, mais cela seulement sous l'hypothèse de continuité. Dans sa Note [5], de 1933, Riesz a généralisé le théorème de Bochner aux fonctions de type positif *mesurables* et il a pu parvenir ainsi au théorème de Stone aussi sous l'hypothèse de mesurabilité. Une autre démonstration du théorème de Stone a été publié par le rapporteur, [1]. Tandis que les démonstrations antérieures font usage des transformations fonctionnelles sur l'axe entier $(-\infty, \infty)$, celles de Stone et de Bochner-Riesz notamment des transformations de Fourier, la démonstration proposée par le rapporteur procède par réduire le problème au cas périodique: $U_{s+1} = U_s$, et alors elle ne fait usage que de faits tout élémentaires sur les séries de Fourier. Cette méthode s'applique aussi bien sous l'hypothèse de mesurabilité que sous celle de continuité.

2. *Groupes et semi-groupes de transformations autoadjointes.* Dans la même Note [1], le rapporteur a démontré encore deux théorèmes analogues sur la représentation spectrale des groupes à un paramètre de transformations autoadjointes bornées A_s et de transformations normales bornées N_s. Notamment, si les fonctions $(A_s f, f)$ de s sont supposées mesurables ou bornées dans tout intervalle fini de type $\varepsilon \leqq s \leqq \eta$, $\varepsilon > 0$, la représentation spectrale suivante est possible:

$$A_s = \int_{-0}^{\infty} \lambda^s \, dE_\lambda ,$$

avec une famille spectrale $\{E_\lambda\}$ étalée sur $[0, \infty)$. E. Hille et le rapporteur [2] ont observé plus tard que ce théorème est valable aussi pour les *semi-groupes* $\{A_s\}$. C'est le théorème qu'Einar Hille considère, dans son „Functional analysis and semi-groups“ (New York, 1948, p. 182), comme le premier résultat comportant directement sur des semi-groupes de transformations linéaires. Dans les recherches ultérieures, notamment par Hille, Dunford, Yosida, Phillips, Feller et autres, on envisage des semi-groupes de transformations linéaires de type plus général, d'un espace de Hilbert on de Banach.

3. *Groupes bornés.* Pour l'espace de Hilbert, il y a un théorème du rapporteur [8], qui affirme que les groupes à un paramètre $\{T_s\}$ uniformément bornés, c'est-à-dire tels que

$$\| T_s \| \leqq C \qquad (-\infty, < s < \infty) ,$$

ne diffèrent pas essentiellement des groupes considérés par Stone; en effet, tout groupe de cette espèce est semblable à un groupe de transformations unitaires, c'est-à-dire qu'il existe une transformation linéaire bicontinue Q telle que les transformations

$$U_s = QT_sQ^{-1} \qquad (-\infty < s < \infty)$$

sont toutes unitaires. Cela est vrai sans aucune restriction de continuité ou de mesurabilité. Le pendant „discret“ est aussi vrai: Toute transformation linéaire T telle que

$$\|T^n\| \leqq C \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ..) ,$$

est semblable à une transformation unitaire. La démonstration fait usage des limites généralisées (Lim) de Mazur-Banach, notamment dans la construction de nouvelles métriques dans l'espace:

$$\langle f, g\rangle = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} (T^n f, T^n g) ,$$

resp.

$$\langle f, g\rangle = \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} (T_s f, T_s g) .$$

Ces deux théorèmes peuvent être énoncés aussi comme suit:

Si G est le groupe additif des nombres entiers n ou des nombres réels s, toute représentation bornée de G par des transformations linéaires de l'espace de Hilbert est semblable à une représentation unitaire.

Plus tard, plusieurs auteurs ont étendu ce théorème à des groupes G plus généraux, notamment à tous ceux sur lesquels une „moyenne invariante" peut être definie, en particulier à tous les groupes abéliens. Tout récemment, F. MAUTUER et L. EHRENPREIS ont construit un groupe G pour lequel la proposition est en défaut [Proceedings Nat. Acad. Sci. USA, *41* (1955)].

4. *Contractions.* Il y a encore une relation, découverte par le rapporteur [11, 12, 13], qui relie les semi-groupes de transformations à un paramètre de l'espace de Hilbert, d'un certain type général, aux semi-groupes de transformations unitaires. Il s'agit notamment des semi-groupes $\{T_s\}$ de *contractions* de l'espace H, c'est-à-dire tels que

$$\|T_s\| \leqq 1 \qquad (s \geqq 0)\,,$$

et on suppose aussi que T_s dépend de s d'une manière faiblement continue. Le théorème en question affirme qu'un pareil semi-groupe $\{T_s\}$ peut être obtenu toujours comme la „projection" d'un semi-groupe de transformations unitaires $\{U_s\}$ d'un espace hilbertien plus vaste K, dans le sens qu'on a, dans H,

$$T_s = PU_s$$

P désignant l'opérateur de la projection orthogonale de l'espace K sur l'espace originel H qui est un sous-espace de K.

Le cas particulier de ce théorème où les transformations T_s sont *isométriques* a été démontré antérieurement par J. L. B. COOPER.

Ce théorème aussi a un pendant discret d'après lequel pour toute contraction T de l'espace de Hilbert H, les itérées T^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) peuvent être représentées simultanément dans la forme

$$T^n = PU^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

c'est-à-dire comme „projections" des itérées respectives d'une transformation unitaire, opérant dans un espace plus vaste K.

Grâce à ces relations, les théorèmes ergodiques, discret et continu, pour les contractions [cf. Riesz-Sz.-Nagy [1]], apparaissent comme conséquences des théorèmes ergodiques originels de J. Neumann, pour les transformations unitaires. En découlent aussi certaines inégalités de Neumann et Heinz pour les contractions.

La première démonstration que le rapporteur a donné pour ces théorèmes sur les contractions [11] fait usage entre autres du théorème de Neumark, déjà cité, sur les familles spectrales généralisées. Une seconde démonstration [12] évite les raisonnements avec les familles spectrales, elle est basée sur le théorème suivant:

Soit T_γ une transformation linéaire bornée de l'espace de Hilbert H, dépendant *de l'élément variable γ d'un groupe G. Supposons que T soit une fonction de type positif de γ, c'est-à-dire que*

a) $T_\varepsilon = I$ *(ε = élément unité de G),*

b) $T_{\gamma^{-1}} = T^*_\gamma$,

c) $\sum_{m,n=1}^{N} (T_{\gamma_m^{-1}\gamma_n} f_n, f_m) \geqq 0$

pour tout système fini d'éléments γ_i de G et de vecteurs f_i de l'espace H. Dans ces conditions il existe, dans un espace de Hilbert plus vaste K, une représentation du groupe G par des transformations unitaires U_γ de sorte qu'on ait, dans H,

$$T_\gamma = PU_\gamma ,$$

P désignant la projection orthogonale dans K sur le sous-espace H. Si le groupe G est topologique et T_γ est une fonction faiblement continue de γ, on peut exiger que U_γ soit aussi fonction faiblement (et alors fortement) continue de γ.

Dans le cas d'un espace H de dimension 1 ce théorème se réduit à un théorème de Gelfand et Raikov sur les fonctions numériques de type positif sur un groupe, théorème qui est fondamental dans les recherches des ces auteurs sur les représentations irréductibles des groupes topologiques.

Dans une Note tout récemment parue [13] le rapporteur a généralisé le théorème en donnant le rôle des groupes à des semi-groupes, avec élément unité, dans lesquels un antiautomorphisme involutif $\gamma \rightarrow \gamma^*$ est défini, opération qui prend le rôle de l'opération $\gamma \rightarrow \gamma^{-1}$ dans un groupe. Du théorème qu'il a obtenu découlent comme conséquences outre les deux théorèmes mentionnés sur les contractions, aussi le théorème de Neumark sur les familles spectrales généralisées, ainsi qu'un critère de Halmos pour qu'une transformation de l'espace de Hilbert admette, dans un espace plus vaste, un prolongement normal.

Pour terminer il convient de dire quelques mots sur les ,,Leçons d'analyse fonctionnelle" de Riesz et du rapporteur. Cet ouvrage introduit le lecteur aux théories modernes de l'intégration et de la dérivation, des espaces fonctionnels et leurs opérations linéaires, des équations intégrales, ainsi qu'aux théories spectrales. Il traite, d'une manière détaillée, la majeure partie des sujets dont on vient de parler dans ce rapport.

Резюме

ВКЛАД ВЕНГЕРСКИХ МАТЕМАТИКОВ В СПЕКТРАЛЬНУЮ ТЕОРИЮ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

БЭЛА С.-НАДЬ (Béla Sz.-Nagy), Сегед.

Прочитано на IV съезде чехословацких математиков в Праге 2/IX 1955 г.

Статья содержит обзор исследований венгерских математиков в области спектральной теории линейных операторов. Список работ о результатах, которых сообщает автор, приводится на стр. 166—167.