František Šik

К теории структурно упорядоченных групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 1, 1–25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100175

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 6 (81) ПРАГА 10. V. 1956 г. • No 1

К ТЕОРИИ СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

ФРАНТИШЕК ШИК (František Šik), Брно
(Поступило в редакцию 1/III 1955 г.)

В этой статье автор занимается изучением строения некоторых типов структурно упорядоченных групп (l-групп). В значительной части рассуждений занимают особое место компоненты (множества, замкнутые в определеннон отношению — дизьюнктности).

Понятие дизьюнктной пары элементов (см. определение в § 1) ввел Биркгоф [1]. По теории дизьюнктности в полуупорядоченных пространствах и в полных l-группах достигли значительного совершенства авторы монографии [5] (см. также [6]). Поскольку мне известно, возможности и эффективность этой теории не были до сих пор испробованы на неполных l-группах. Это послужило толчком для возникновения этой работы. Я пробовал обобщить указанную теорию уже в заметке [8]. Результатом рассуждений явилась теорема (A), которая цитируется в § 1 настоящей работы и несколько ее приложений к прямым разложениям (неупорядоченных) групп. В предлагаемой работе ряд приложений дополнился дальнейшими, касающимися на сей раз l-групп.

§ 1 носит подготовительный характер; он посвящен леммам, используемым в разных частях этой работы.

В § 2 изучается структура компонент (см. определение в § 1), структура компонент, которые представляют собой l-идеалы, и структура прямых факторов l-группы. Затем при помощи компонент дается характеризация прямых сумм просто упорядоченных групп.

Главным результатом § 3, в котором главным образом уделяется внимание системам прямых факторов на l-группе, является теорема о погружении и об однозначности представления; раньше были уже выведены аналогичные результаты, касающиеся полных l-групп [5, 6].

Центром рассуждений § 4 является утверждение, что сумма полной системы компонент архимедовой l-группы будет полной во всей группе, в которую введена топология при помощи упорядочения.

Работа завершается характеризацией l-групп по отношению к частично упорядоченным группам (§ 5).

§ 1

Символ G будет во всей работе — если не будет иначе оговорено — означать структурно упорядоченную группу, коротко l-группу.

В теории l-групп еще твердо не установились некоторые обозначения. Во избежание недоразумений приведу здесь те обозначения, которыми буду пользоваться.

Если x есть элемент G, то будем обозначать: его положительную часть $x_+ = x \vee 0$, его отрицательную часть $x_- = x \wedge 0$, модуль $|x| = x \vee -x$ ([2], XIV, § 4, Определение). Если $A \subset G$, то под символом A_+ разумеем множество всех положительных частей всех элементов из A.

Элементы x, y, $\in G$ назовем дизьюнктными, символически $x \,\delta\, y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Соотношение $x \,\delta\, A$ говорит, что элемент x и каждый из элементов множества A образуют пару дизьюнктных элементов.

Множество $A \subset G$ имеет нормальное свойство, если $a \in A$, $b \in G$, $|b| \leqq |a| \Rightarrow b \in A$. Известно, что подгруппа с нормальным свойством есть ни что иное как выпуклая подгруппа, т. е. подгруппа H, в которой $a, b \in H$, $a \wedge b \leqq x \leqq a \vee b \Rightarrow x \in H$. Я придерживаюсь первого понятия, введенного в [5, 6].

Компонентой (дизьюнктной со множеством A) назову систему A' всех элементов из G, которые дизьюнктны с каждым элементом множества A. Компоненту A' будем также называть дизьюнктным дополнением множества A.

Подгруппу l-группы G, которая является одновременно подструктурой в G, будем называть l-подгруппой в G. l-идеалом в l-группе G назовем нормальную подгруппу в G, обладающую нормальным свойством.

Введем в l-группу G квази-упорядочение $\precsim$ следующим образом: $a \precsim b \Longleftrightarrow |a| \leqq |b|$, и отношение дизьюнктности δ так, как было указано выше. Отношения $\precsim$ и δ обладают, очевидно, следующими свойствами:

α) в квази-упорядочении $\precsim$ существует наименьший элемент $e \in G$ (а именно, нуль l-группы),

β) δ является симметричным, антирефлексивным бинарным отношением в G;

оба отношения $\precsim$ и δ связаны друг с другом следующими соотношениями ($x, y, z \in G$):

а) $x \succsim y$, $x \,\delta\, y \Rightarrow y \precsim e$,

б) $e \,\delta\, e$,

в) $x \,\delta\, y$, $z \precsim x \Rightarrow z \,\delta\, y$,

г) $x \,\bar{\delta}\, y \Rightarrow$ существует элемент $z \in G$, $z \operatorname{non-}\!\precsim e$, $z \precsim x$, $z \precsim y$.

В работе [8] (теорема 14,4) я доказал следующую общую теорему:

(A) Если G — произвольное множество, в котором введены отношения $\prec$ и δ, удовлетворяющие условиям (α, β), (а, б, в, г) и если в G ввести по выше описанному методу понятие компонентны относительно отношения δ, то система всех компонент в G образует полную булеву алгебру (упорядоченную отношением множественного включения, и с пересечением в качестве инфимума; дизъюнктное дополнение является дополнением в смысле булевы алгебры).

Теорему (A) можно, следовательно, применить к системе компонент l-группы G.

Легко можно доказать, что дизъюнктное дополнение A'' компоненты A' (которая является дизъюнктным дополнением множества $A \subset G$) есть пересечение всех компонент в G, содержащих A, и далее, что дизъюнктное дополнение A''' компоненты A'' является компонента A' (см. [8], 1,4,7 и 1,4,5(3)).

Компоненты A', A'' будем называть взаимно дополнительными компонентами.

Теперь приведу несколько известных или легко проверяемых утверждений, которыми буду в дальнейшем часто пользоваться. Малыми буквами латинского алфавита обозначаю элементы l-группы G.

(1) $a\,\delta\, x,\ b\,\delta\, x \Rightarrow (a \pm b)\,\delta\, x,\ (a \wedge b)\,\delta\, x,\ (a \vee b)\,\delta\, x$ ([2], XIV, § 11);

(2) $x - (x \wedge y) = (x \vee y) - y$ (обе части равны, то-есть, $(x - y) \vee 0$);

(3) $x \wedge y = 0 \Rightarrow x + y = x \vee y = y + x$ [следует из (2)];

(4) $(\pm\, x_+)\,\delta\,(\pm\, x_-)$ ([2], XIV, § 4, Лемма 4);

(5) $x = x_+ + x_-$ ([2], XIV, § 4, Cor. 2);

(6) $|x| \geqq 0$; $|x| = x_+ \vee - x_- = x_+ - x_-$ (неравенство см. [1], Лемма 4; первое равенство: $|x| \geqq x_+ \vee - x_- \geqq x \vee - x = |x|$; второе равенство следует из (4) и (3));

(7) $x\,\delta\, y \Rightarrow x + y = y + x,\ |x + y| = |x| + |y| = |x| \vee |y| = |y| + |x|$ (первое утверждение: $x + y = x_+ + x_- + y_+ + y_- = y_+ + y_- + x_+ + x_- = y + x$ при этом заменимость x_+, x_-, y_+, y_- допустима в силу (4) и (3); остальные равенства в (7) доказываются при помощи первого так же, как и в коммутативном случае (см., напр., [5], I 1,63, стр. 32);

(8) l-Идеалы на l-группе образуют полную дистрибутивную структуру, в которой инфимумом (супремумом) является пересечение (сумма) соответствующей системы l-идеалов ([1], Теорема 21; [2], XIV, § 5, Теорема 10);

(9) Если существует выражение $\bigvee_\alpha x_\alpha$, существует также $\bigvee_\alpha (y \wedge x_\alpha)$, причем $y \wedge \bigvee_\alpha x_\alpha = \bigvee_\alpha (y \wedge x_\alpha)$, ([2], XIV, § 10).

Ряд последующих лемм послужит нам введением к рассуждениям в дальнейших параграфах:

Лемма 1. $|a + b - a| = a + |b| - a$.

Доказательство. $-b \leqq |b|$, $b \leqq |b| \Rightarrow a - |b| - a \leqq a + b - a \leqq \leqq a + |b| - a \Rightarrow \pm (a + b - a) \leqq a + |b| - a \Rightarrow |a + b - a| \leqq a + |b| - a$. Отсюда $-a + |a + b - a| + a \geqq |-a + a + b - a + a| = |b|$, следовательно, $|a + b - a| \geqq a + |b| - a$.

Лемма 2. $b \,\delta\, x \Rightarrow (a + b - a) \,\delta\, (a + x - a)$.

Доказательство. Из леммы 1 следует $|a + b - a| \wedge |a + x - a| = \{a + |b| - a\} \wedge \{a + |x| - a\} = a + \{|b| \wedge |x|\} - a = 0$.

Лемма 3. *Компонента l-группы является l-подгруппой, обладающей нормальным свойством; дизъюнктное дополнение нормальной подгруппы есть l-идеал.*

Доказательство. Первая часть утверждения непосредственно получается из определения дизъюнктности и из (1). Доказательство 2-ой части: Если A — нормальная подгруппа в G, $a, b \in G$, то $b \,\delta\, A \Rightarrow (a + b - a) \,\delta\, \delta\, (a + A - a)$, как видно из леммы 2, следовательно, $(a + b - a) \,\delta\, A$.

Лемма 4. *Если пересечением множеств A, B, обладающих нормальным свойством, является лишь элемент 0, то $A \,\delta\, B$.*

Доказательство. Если для $a \in A$, $b \in B$ $|a| \wedge |b| = c (\geqq 0)$, то $|c| = c \leqq \leqq |a| \Rightarrow c \in A$; аналогично $c \in B$; отсюда следует $c = 0$.

l-Идеал A l-группы G, к которому существует l-идеал B в G такой, что $A \cap B = 0$, $A + B = G$ называем прямым фактором в G, и пару A, B — прямым разложением l-группы G. Обозначаем $A \dot{+} B = G$.

Прямые факторы A, B l-группы G назовем взаимно дополнительными, если $A \dot{+} B = G$; прямой фактор B называем также прямым дополнением фактора A.

Лемма 5. *Дополнительные прямые факторы являются взаимно дополнительными компонентами.*

Доказательство. Пусть $A \dot{+} B = G$ есть прямое разложение l-группы G. Так как по лемме 4 $A \,\delta\, B$, то будет $B \subset A'$. Но так как $A \dot{+} A' = G$, $B \subset A'$, то $B = A'$. Посредством симметричности докажется, что $B' = A$.

Лемма 6. *Пусть $J_1 \dot{+} J_2 \dot{+} \ldots \dot{+} J_n = G$ есть прямое разложение l-группы G в сумму конечного числа факторов, пусть K — l-идеал в G. Если обозначить $A_k = J_k \cap K$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то*

$$A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n = K\,.$$

Доказательство. $K = K \cap G = K \cap (J_1 \dot{+} J_2 \dot{+} \ldots \dot{+} J_n) = (K \cap J_1) \dot{+} \dot{+} (K \cap J_2) \dot{+} \ldots \dot{+} (K \cap J_n)$; это вытекает из дистрибутивности в структуре l-идеалов (см. (8)).

Лемма 7. $a_+ \,\delta\, b_+,\ a_+ \,\delta\, b_-,\ a_- \,\delta\, b_+,\ a_- \,\delta\, b_- \Longleftrightarrow a \,\delta\, b$.

Доказательство. Пусть справедливо отношение в левой части; тогда из (4) следует: $|a| \wedge |b| = (a_+ \vee - a_-) \wedge (b_+ \vee - b_-) = (a_+ \wedge b_+) \vee (a_+ \vee - b_-) \vee \vee (- a_- \wedge b_+) \vee (- a_- \wedge - b_-) = 0$. Обратная импликация очевидна.

Лемма 8. *Если $a \in G$, $b, c \in G_+$, $a = b - c$, $b \,\delta\, c$, то $b = a_+$, $c = - a_-$.*

Доказательство. Имеют место равенства $c = - a + b$, $0 = b \wedge c = b \wedge (- a + b) = (0 \wedge - a) + b = - a_+ + b$. Отсюда $b = a_+$, следовательно, также $c = - a_-$.

Пусть отображение ϑ отображает l-группу G в l-группу $\mathfrak{G}$. Если ϑ является группово-гомоморфным отображением группы G в группы $\mathfrak{G}$ и структурно-гомоморфным отображением структуры G в структуру $\mathfrak{G}$, то его называем гомоморфным отображением l-группы G в l-группу $\mathfrak{G}$.

Лемма 9. *Пусть ϑ — группово-гомоморфное отображение l-группы G в l-группу $\mathfrak{G}$. Пусть для $x, y \in G_+$ будет $(x \vee y)\, \vartheta = x\vartheta \vee y\vartheta$, $(x \wedge y)\, \vartheta = x\vartheta \wedge y\vartheta$. Тогда ϑ является структурно-гомоморфным отображением G на подструктуру в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что $x \in G_+ \Rightarrow x\vartheta \in \mathfrak{G}_+$: $x \geqq 0 \Rightarrow x\vartheta = (x \vee 0)\, \vartheta = x\vartheta \vee 0 \Rightarrow x\vartheta \geqq 0$. Для $a \in G$ будет $a = a_+ - (-a_+)$, следовательно, и $a\vartheta = a_+\vartheta - (- a_-)\, \vartheta$. Далее, $0 = (a_+ \wedge - a_-)\, \vartheta = a_+\vartheta \wedge \wedge (- a_-)\, \vartheta$. Так как $a_+\vartheta \in \mathfrak{G}_+$, $(- a_-)\, \vartheta \in \mathfrak{G}_+$, то по лемме 8 будет: $a_+\vartheta = (a\vartheta)_+$, $a_-\vartheta = (a\vartheta)_-$. Если $a, b \in G$, то $(a \vee b)\, \vartheta = [(a_+ + a_-) \vee (b_- + b_+)]\vartheta = [b_- + (- b_- + a_+) \vee (b_+ - a_-) + a_-]\, \vartheta = (b\vartheta)_- + [- (b\vartheta)_- + (a\vartheta)_+] \vee \vee [(b\vartheta)_+ - (a\vartheta)_-] + (a\vartheta)_- = [(a\vartheta)_+ + (a\vartheta)_-] \vee [(b\vartheta)_- + (b\vartheta)_+] = a\vartheta \vee b\vartheta$. Аналогично $(a \wedge b)\, \vartheta = a\vartheta \wedge b\vartheta$.

Определение. Если $J \dotplus J'$ — прямое разложение l-группы G, то проекцией элемента $x \in G$ в J назовем однозначно определенный элемент $a \in J$, который удовлетворяет соотношению $x = a + a'$, где $a' \in J'$.

Проекцией множества $A \subset G$ в J разумеем множество проекций всех элементов множества A в J.

Отображение, которое каждому элементу из G ставит в соответствие его проекцию на фиксированный прямой фактор J в G, называем проектором, подробнее, проектором l-группы G на ее прямой фактор J.

Лемма 10. *Проектор l-группы G на ее прямой фактор J есть гомоморфное отображение G на J, которое каждому элементу $x \in G$, $x \geqq 0$ ставит в соответствие элемент $a \in J$, обладающий свойством $x \geqq a \geqq 0$.*

Доказательство. Пусть $J \dotplus J' = G$ есть прямое разложение l-группы G, $x \in G$, $x = a + a'$, $a \in J$, $a' \in J'$. Прежде всего докажем, что $x \geqq 0 \Rightarrow x \geqq \geqq a \geqq 0$. Из того, что элементы a, a' дизъюнктны и из их однозначности следует: $x \geqq 0 \Rightarrow x = |x| = |a + a'| = |a| + |a'| \Rightarrow |a| = a$, $|a'| = a' \Rightarrow a \geqq 0$, $a' \geqq 0$. Также и первое неравенство теперь очевидно.

Проектор является, очевидно, группово-гомоморфным отображением. Чтобы доказать, что он является также структурно-гомоморфным отображением, достаточно, ввиду леммы 9, доказать это утверждение только об элементах из G_+. Пусть $x,\ y \in G_+$, $x = a + a'$, $y = b + b'$, $a, b \in J$, $a', b' \in J'$. Тогда $x \vee y = (a + a') \vee (b + b') = a \vee b \vee a' \vee b' = (a \vee b) + (a' \vee b')$ [в силу (7)]; $x \wedge y = (a \vee a') \wedge (b \vee b') = (a \wedge a') \vee (a' \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a' \wedge b') = (a \wedge b) + (a' \wedge b')$. Этим лемма доказана.

Лемма 11. *Проекция l-идеала есть l-идеал.*

Доказательство. Пусть $A \dot{+} B = G$ — прямое разложение l-группы G, K — l-идеал в G, H — его проекция на A. H является, очевидно, нормальной подгруппой в G. Покажем, что H обладает нормальным свойством в G. Пусть $a \in H \subset A$, $|a_1| \leqq |a|$. Существует $x \in K$, $b \in B$ так, что $x = a + b$. Тогда $a_1 \in A$, и для $x_1 = a_1 + b$ будет $|x_1| = |a_1 + b| = |a_1| + |b| \leqq |a| + |b| = |a + b| = |x|$, как видно из леммы 4 и из (7). Значит, $x_1 \in K$. Отсюда $a_1 \in H$.

Лемма 12. *Проекция пары взаимно дополнительных прямых факторов l-группы G в прямой фактор из G есть прямое разложение этого фактора.*

Доказательство. Пусть $A \dot{+} B = G$, $K \dot{+} K' = G$ — прямые разложения в G, пусть H, H' — проекции l-идеалов K, K' в A. Из леммы 10 следует: $K\,\delta\,K' \Rightarrow H\,\delta\,H'$. Далее $H + H' = A$: если ϑ будет проектор G на A, то для $z \in A$ будет $z = x + x'(x \in K,\ x' \in K')$, и отсюда $z = z\vartheta = x\vartheta + x'\vartheta$, $x\vartheta \in H$, $x'\vartheta \in H'$. Отсюда, далее $H + H' = A$. Так как H и H' являются по лемме 11 l-идеалами и $H\,\delta\,H' \Rightarrow H \cap H' = 0$, то $H \dot{+} H' = A$.

§ 2

В § 1 было доказано, что отношение дизьюнктности δ, введенное выше, совместно с квази-упорядочением $\prec$ l-группы G, выполняет условия (α, β), (а, б, в, г). Отсюда следует, что теорема (А) справедлива для компонент на l-группе. Можно высказать несколько более широкое утверждение.

Теорема 1. *Компоненты на l-группе образуют полную булеву алгебру Γ_0 (упорядоченную отношением множественного включения, с пересечением в качестве инфимума); компоненты, которые являются l-идеалами, образуют ее (полную) подалгебру Γ_1, а прямые факторы в G образуют (не обязательно полную) подалгебру Γ_2 алгебры Γ_1, где супремумом является сумма факторов.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы (А). Доказательство второго утверждения: Как вообще принято, черточкой обозначим дополнение элемента алгебры Γ_0, символы $\bigvee$ и $\bigwedge$ будут обозначать супремум и инфимум в Γ_0. Если $\{K_\alpha\}$ есть система компонент, $\bigvee\limits_\alpha K_\alpha = (\bigwedge\limits_\alpha K'_\alpha)'$. Если все K_α — l-идеалы, то по лемме 3 будут l-идеалами и все

K'_α, а также $\bigwedge\limits_\alpha K'_\alpha$, следовательно и $\bigvee\limits_\alpha K_\alpha$ будет l-идеал (опять-таки по лемме 3). Остальное доказывается уже легко.

Доказательство третьего утверждения: По лемме 5 все прямые факторы являются компонентами и l-идеалами, следовательно $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$. Пусть $J_k \dotplus J'_k = G$ $(k = 1, 2)$ — два прямых разложения l-группы G. Обозначим $A = J_1 \cap J_2$, через A' дизъюнктное дополнение компоненты A. По лемме 3 A' есть l-идеал. Из (8) следует $G \supset A' + A = A' + (J_1 \cap J_2) = (A' + J_1) \cap \cap (A' + J_2) \supset (J'_1 + J_1) \cap (J'_2 + J_2) = G$; здесь пользуемся соотношением $A' \supset J'_{1,2}$, которое вытекает из того, что $A \subset J_1$, $A \subset J_2$. Итак, пересечение двух прямых факторов является прямым фактором, а его дизъюнктное дополнение является его прямым дополнением.

Докажем наконец, что сумма двух прямых факторов является тоже прямым фактором. Очевидно, $J_1 + J_2 \subset (J'_1 \cap J'_2)'$. l-идеалы $J'_1 \cap J'_2$ и $J_1 + J'_1 \cap J_2$ образуют прямое разложение l-группы G, как видно из дистрибутивности структуры l-идеалов. Второй из этих идеалов равен $J_1 + J_2$, так как $J_1 + J_2 \supset J_1 + J'_1 \cap J_2 = (J'_1 \cap J)' \supset J_1 + J_2$. Следовательно, сразу же получаем $J_1 + J_2 = (J'_1 \cap J'_2)'$, что значит, что сумма двух прямых факторов есть прямой фактор.

Замечание 1. В работе [8] я определил отношение дизъюнктности элементов a, b (неупорядоченных) групп $\mathfrak{G}$ следующим образом: $a, b \in \mathfrak{G}$ являются дизъюнктными, если $A \cap B = e$, где A соотв. B есть наименьший нормальный делитель $\mathfrak{G}$, содержащий элемент a соотв. b, и e есть единица группы $\mathfrak{G}$. Также и в l-группе G можно определить отношение дизъюнктности при помощи подгрупп в G так, что новое определение будет эквивалентным определению отношения дизъюнктности δ, данному в начале § 1 настоящей работы; ввиду леммы 3 и 4, сразу же ясно, что для $a, b \in G$ настанет $a\,\delta\,b$ тогда и только тогда, если $A \cap B = 0$, где A соотв. B суть наименьшие подгруппы, обладающие нормальным свойством и содержащие элементы a соотв. b. Сразу же видно: Если же мы еще требуем, чтобы для дизъюнктности $a, b \in G$ существовали l-идеалы A, B в G, обладающие свойством $A \cap B = 0$, $a \in A$, $b \in B$, то получим новое понятие дизъюнктности γ, отличной от δ; система компонент на G относительно дизъюнктности γ тождественна системе тех компонент относительно δ, которые являются l-идеалами. Утверждение легко следует из лемм 3 и 4.

Заметим, что под неразложимой l-группой будем разуметь, как это принято, l-группу, неразложимую в нетривиальную прямую сумму.

Следствие. *Прямые факторы l-группы G с конечными цепями прямых факторов образуют конечную булеву алгебру, атомы которой являются неразложимыми l-идеалами и образуют самое уплотненное прямое разложение на G.* (См. [2], XIV, § 5, Теор. 11.)

Доказательство. Условие конечных убывающих цепей прямых факторов гарантирует существование отличного от нуля неразложимого прямого фактора J_1. Его прямое дополнение J_1' опять-таки выполняет условие конечных цепей прямых факторов, ибо всякий прямой фактор в J_1' является прямым фактором в G. В J_1' существует неразложимый прямой фактор $J_2 \neq 0$ и т. д. Последовательность неразложимых прямых факторов J_1, $J_2, \ldots$ является по предложению конечной; покажем, что она образует систему всех атомов булевой алгебры прямых факторов и что $\dot{\sum\limits_k} J_k = G$. Действительно, возмем в G произвольный прямой фактор J. Из неразложимости прямых факторов $J_1, J_2, \ldots, J_n$ и из леммы 6 следует, что или $J_k \cap J = 0$ или $J_k \cap J = J_k$.

Замечание 2. Следующих четыре условия на l-группе эквивалентны:

(I) l-группа выполняет условие конечных цепей прямых факторов;

(II) l-группа выполняет условие конечных убывающих цепей прямых факторов;

(III) l-группа выполняет условие конечных возрастающих цепей прямых факторов;

(IV) на l-группе существует только конечное число прямых факторов.

Что условия (I), (II), (III) эквивалентны между собой, следует из того, что (строго) возрастающей цепи прямых факторов соответствует (строго) убывающая цепь их прямых дополнений и наоборот. Из следствия следует, что эквивалентны (I) и (IV).

Дальнейшей теореме предпошлем несколько замечаний.

Частично упорядоченную группу G (в отношении $<$) можно доупорядочить, если ее можно преобразовать в просто упорядоченную группу (в отношении $\prec$) так, что $a, b \in G$, $a < b \Rightarrow a \prec b$.

Шимбирева [9] доказала следующее достаточное условие для доупорядочения:

(10) Частично упорядоченная группа может быть доупорядочена, если она изоморфна подгруппе полной прямой суммы просто упорядоченных групп.

Замечание 3. Следующих четыре условия на l-группе эквивалентны:

1. Любая компонента является прямым фактором.

2. Сумма двух любых компонент есть опять-таки компонента.

3. Сумма любой пары взаимно дополнительных компонент есть компонента.

4. Всякая пара взаимно дополнительных компонент представляет собой прямое разложение в l-группе.

Доказательство. Импликация $1 \Rightarrow 2$ следует из того, что сумма двух прямых факторов в G является прямым фактором (следовательно, компонентой). Импликация $2 \Rightarrow 3$ очевидна. Докажем, что $3 \Rightarrow 4$. Пусть K, K' — пара взаимно дополнительных компонент в G. Из теоремы 1 следует, что $K + K' = G$, так как $K \vee K' = (K' \wedge K)' = (0)' = G$ (черточкой обозначаем дополнение соответствующего элемента алгебры Γ_0, символами $\vee, \wedge$ — структурные операции в Γ_0). Далее, $K \,\delta\, K', a \in K, b \in K' \Rightarrow \Rightarrow a + b = b + a$ [ввиду (7)], так что K, K' есть пара взаимно дополнительных прямых факторов в G. Импликация $4 \Rightarrow 1$ очевидна.

Теорема 2. *Следующие условия на l-группе эквивалентны:*

1°. *Объединение любой цепи компонент на G есть прямой фактор в G.*

2°. *G является прямой суммой системы просто упорядоченных групп.*

3°. *Сумма любой системы компонент в G есть компонента в G.*

Если какое-нибудь из этих условий выполнено, то система всех прямых факторов в G тождественна системе всех компонент в G и образует атомную булеву алгебру. Эти атомы неразложимы и, значит, просто упорядоченные l-идеалы в G. G является прямой суммой всех атомов алгебры. G можно доупорядочить.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1°. Тогда каждая компонента в G (как цепь, содержащая один элемент) есть прямой фактор в G.

I. Докажем, что свойство 1° наследует каждая из компонент (= прямой фактор) J из G; прежде всего скажем, что каждая компонента в J есть прямой фактор в J (следовательно, и в G). Если A, B — взаимно дополнительные компоненты в J, K — дополнительная компонента в G к A, K' — допольнительная компонента в G к K, то $K \dotplus K' = G$ является прямым разложением l-группы G, и по лемме 6, $J = (K' \cap J) \dotplus (K \cap J) = A \dotplus B$ является прямым разложением l-группы J; очевидно, то-есть, $B = K \cap J$, и следовательно, $A = K' \cap J$. Отсюда непосредственно вытекает, что объединение любой цепи компонент в J является прямым фактором в J.

II. Найдем в G неразложимый прямой фактор. Пусть $a, b \in G$, $a \neq b$; через $J(a, b)$ обозначим множество всех прямых факторов J из G, для которых $a - b \bar{\in} J$, частично упорядоченное при помощи отношения множественного включения. Множество $J(a, b)$ непусто, так как оно содержит по крайней мере нулевой прямой фактор. Если взять в $J(a, b)$ произвольную цепь $\{J_\lambda\}$, то $a - b \bar{\in} \bigcup\limits_\lambda J_\lambda$. По предположению $\bigcup\limits_\lambda J_\lambda$ является прямым фактором в G, так что $\bigcup\limits_\lambda J_\lambda \in J(a, b)$. Так как каждая цепь в $J(a, b)$ ограничена сверху, то по теореме Цорна существует над каждым $J \in J(a, b)$ максимальный прямый фактор $J_1' \in J(a, b)$. Прямое дополнение J_1 фактора J_1' неразложимо. Если бы, то-есть, $A \dotplus B = J_1$ было нетривиальное прямое разложение фактора J_1 (т. е. $A \neq 0$, $B \neq 0$), то ни один из прямых факторов $A = J_1'$, $B + J_1'$ не принадлежал бы $J(a, b)$, что видно из максимальности J_1' в $J(a, b)$. Следовательно, было бы $a - b \in A + J_1'$, $a - b \in B + J_1'$, а отсюда получается $a - b \in J_1'$, что неверно; получаем противоречие. Итак, J_1 есть неразложимый прямой фактор в G.

III. Но l-группа J, каждая компонента которой является прямым фактором, или просто упорядочена или разложима. Если, то-есть, она не будет просто упорядоченной, то найдется элемент $a \in J$, несравнимый с нулем. Тогда $a_+ \neq 0$, $a_- \neq 0$, $a_+ \in J$, $a_- \in J$, $a_+ \delta a_-$ [ввиду (4)], так что компонента, дизъюнктная с a_+, содержит a_- и не содержит a_+. Имеем пару нетривиальных взаимно дополнительных компонент, которая, в силу замечания 3, представляет собой нетривиальное прямое разложение l-группы J. Прямой фактор J, построенный в II., является, следовательно, просто упорядоченной l-группой.

IV. Если J_1 неравно G, то определим J_α трансфинитно следующим образом: если J_λ определены для всех $\lambda < \alpha$, то через $(\sum\limits_{\lambda<\alpha} J_\lambda)'$ обозначим компоненту, которая дизъюнктна с множеством $\sum\limits_{\lambda<\alpha} J_\lambda$; последняя или просто упорядочена, тогда $J_\alpha = (\sum\limits_{\lambda<\alpha} J_\lambda)'$ или в ней можно найти выше описанным способом отличиный от нуля неразложимый прямой фактор J_α — в силу I. части доказательства этой теоремы, выполняет компонента $(\sum\limits_{\lambda<\alpha} J_\lambda)'$ условие 1°. Пусть β — первое порядковое число, для которого $(\sum\limits_{\lambda<\beta} J_\lambda)' = 0$. Путем трансфинитной индукции докажем, что для любого $\alpha \leqq \beta$ $\sum\limits_{\lambda<\alpha} J_\lambda$ является прямым фактором в G и, следовательно, что $\sum\limits_{\lambda<\beta} J_\lambda = G$. J_1 есть прямой фактор в G; пусть при постоянном $\gamma \leqq \beta$ для всех $\alpha < \gamma$ будет $K_\alpha = \sum\limits_{\lambda<\alpha} J_\lambda$ прямым фактором в G. Тогда $\{K_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ образует цепь компонент в G; для предельного γ будет $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} K_\alpha = \sum\limits_{\lambda<\gamma} J_\lambda = K_\gamma$ по предположению 1° прямым фактором в G. Если же существует число $\gamma - 1$, то $\bigcup\limits_{\alpha\leq\gamma-1} K_\alpha = \sum\limits_{\lambda<\gamma-1} J_\lambda$ является по предположению 1° прямым фактором в G, также как и сумма $\sum\limits_{\lambda<\gamma-1} J_\lambda + J_{\gamma-1} = \sum\limits_{\lambda<\gamma} J_\lambda$ (последнее по теореме 1). Для доказательства, что G есть прямая сумма всех J_λ, $\lambda < \beta$, достаточно теперь припомнить, что $J_\alpha \cap J_\gamma = 0$ для $\alpha \neq \gamma$, α, $\gamma < \beta$. Из бесконечной дистрибутивности (в алгебре компонент) тогда следует $(\sum\limits_{\alpha\in A} J_\alpha) \cap (\sum\limits_{\substack{\gamma\bar{\in} A\\ \gamma<\beta}} J_\gamma) = 0$ (A — произвольная непустая система порядковых чисел $< \beta$).

V. Только что построенное прямое разложение $\dot{\sum\limits_{\lambda<\beta}} J_\lambda = G$ является наименьшим прямым разложением в G, каждый его элемент есть атом алгебры прямых факторов, и система факторов $\{J_\lambda\}_{\lambda<\beta}$ полностью исчерпывает множество атомов этой алгебры. Если, то-есть, $K \neq 0$ есть прямой фактор в G, то $K \cap J_\lambda$ $(\lambda < \beta)$ есть прямой фактор в J_λ. Следовательно, $J_\lambda \cap K = 0$ для всех $\lambda < \beta$ или $J_\lambda \subset K$ для некоторых λ (следует из неразложимости J_λ). Первый случай не может наступить, потому что по лемме 4 было бы тогда для всех $\lambda < \beta$, $J_\lambda \,\delta\, K$, следовательно $(\sum\limits_{\lambda<\beta} J_\lambda)\,\delta\, K$ [по (1)], или же $G \,\delta\, K$, т. е. $K = 0$, что противоречит предположению. Отсюда будет $J_\lambda \subset K$ для некоторых λ. Очевидно, что K является суммой всех J_λ, содержащихся в K. Этим доказана импликация $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ и конечное утверждение (G можно, ввиду (10), доупорядочить).

VI. Пусть G — прямая сумма просто упорядоченных групп J_λ, $G = \dot{\sum\limits_{\lambda}} J_\lambda$ (подгруппу в G, изоморфную J_λ, обозначим опять-таки J_λ). Докажем, что всякая компонента в G является прямым фактором в G. Пусть K, K' — пара взаимно дополнительных компонент в G. Через A обозначим множество всех индексов λ, для которых λ-тая составляющая какого-то элемента из K отлична от нуля. Из отношения $K \,\delta\, K'$ следует, что λ тая составляющая (для $\lambda \in A$) любого элемента из K' равна нулю. Отсюда следует, что $(\sum\limits_{\lambda\in A} J_\lambda)\,\delta\, K'$, и, следовательно, $\sum\limits_{\lambda\in A} J_\lambda \subset K$. Обратное включение очевидно, так как μ-тая составляющая (для $\mu \,\bar{\in}\, A$) каждого элемента из K равна нулю, и $\sum\limits_{\lambda\in A} J_\lambda$ есть множество всех элементов из G, обладающих этим свойством. Следовательно, будет $\sum\limits_{\lambda\in A} J_\lambda = K$. Значит, компонента K является прямым фактором в G. Для доказательства импликации $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ достаточно теперь вспомнить, что каждая компонента (прямый фактор) в G является суммой части множества факторов $\{J_\lambda\}$.

VII. Если выполняется условие 3°, то каждая компонента, в силу замечания 3, является прямым фактором. Так как суммой цепи компонент является их объединение, то предыдущее подтверждает справедливость импликации $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$.

Замечание 4. В теореме 2 речь идет о l-группе, в которой каждая компонента является прямым фактором. Легко можно построить l-группу, которая не обладает этим свойством. Это будет, например, l-группа G с тремя генераторами a, b, c бесконечного порядка, связанными соотношениями $a + b = b + a$, $a + c = c + b$, $b + c = c + a$, множество G_+ положительных элементов этой группы состоит из всех элементов вида $ma + nb + pc$, где $p > 0$ или $p = 0, m \geq 0$, $n \geq 0$ (см. [1], стр. 303, Ex. 9). В этой l-группе компонента, дизъюнктная с элементом a, не является нормальной подгруппой, следовательно, не может быть и прямым фактором: очевидно, что $a \,\delta\, b$; если бы компонента, дизъюнктная с элементом a, была нормальной подгруппой, то элемент $-c + b + c$, равный a, как видно из третьего соотношения, предписанного выше, должен был бы быть дизъюнктным с элементом a, что неверно, так как $a \neq 0$. Упомянутая l-группа не может, следовательно, удовлетворять даже условию 2° теоремы 2. Прямым путем это доказано в [9], стр. 161.

Замечание 5. Известно, что в полной l-группе каждая компонента является прямым фактором ([7], Теор. 1; [2], XIV, § 11, Теор. 19). Группа, выполняющая некоторое из условий 1°—3° теоремы 2, обладает также этим свойством. Легко можно доказать, сохраняя ход доказательства, примененный в части VI доказательства теоремы 2, что полная[1]) прямая сумма $\tilde{\sum\limits_{\alpha}} J_\alpha = G$ системы $\{J_\alpha\}$ просто упорядоченных групп обладает тоже этим свойством. Каждая компонента, то-есть, является полной прямой суммой подсистемы в $\{J_\alpha\}$. Если система $\{J_\alpha\}$ составляющих этой сумму бесконечна, то группа G не может удовлетворять условию теоремы 2; легко видно, что например, объединение цепи компонент $\{\sum\limits_{k=1}^{n} J_k\}_{n=1,2,\ldots}$ в G, где $J_k \in \{J_\alpha\}$, $k = 1, 2, \ldots$, не является прямым фактором в G (потому что оно не равно $\tilde{\sum\limits_{n=1,2,\ldots}} J_n$).

§ 3

В этом параграфе обратим внимание на системы прямых факторов на l-группах. Прежде всего припомним несколько понятий:

Соединением $\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$ системы $\{x_\alpha\}$ элементов l-группы (если только оно существует) называем элемент

$$\underset{\alpha}{S} x_\alpha = \bigvee_{\alpha} x_\alpha^+ + \bigwedge_{\alpha} x_\alpha^- \text{ }^{2})$$

(см. [5], I, 1,7; [6], стр. 37).

l-группу G можно погрузить в l-группу $\mathfrak{G}$, если существует изоморфное отображение (группы и структуры) G в $\mathfrak{G}$.

Систему компонент $\{K_\alpha\}$ в l-группе G называем полной в компоненте K, если $K \supset \bigcup\limits_{\alpha} K_\alpha$ и если $x \in K$, $x\, \delta \bigcup\limits_{\alpha} K_\alpha \Rightarrow x = 0$ ($=$ нуль l-группы G) ([8], 1,4,11; [5], II, 2,21; [6], стр. 43).

Имеет место утверждение (см. [8], 1,4,12):

(11) Система $\{K_\alpha\}$ компонент в l-группе G полна в компоненте K тогда и только тогда, если $\bigvee\limits_{\alpha} K_\alpha = K$ ($\bigvee$ означает супремум в алгебре компонент).

---

[1]) Полная прямая сумма (неупорядоченных) групп определена в [10, 11]. Структурные операции в полной прямой сумме l-групп можно ввести естественным способом по составляющим.

[2]) Вместо $(x_\alpha)^+$ здесь короче пишем x_α^+. Аналогично x_α^-.

Теорема 3. Теорема о погружении. *Если $\{J_\alpha\}$ — полная система прямых факторов в l-группе G, то G можно погрузить в полную прямую сумму*[3] $\mathfrak{G} = \tilde{\sum\limits_\alpha} J_\alpha$ *системы* $\{J_\alpha\}$.[4]

Доказательство. l-группа $\mathfrak{G}$ есть множество всевозможных систем $\{x_\alpha\}$, где $x_\alpha \in J_\alpha$; групповую операцию в ней определяем как сложение по составляющим, аналогично определяем и структурные операции $\vee$ и $\wedge$. Очевидно, что множество $\mathfrak{G}$ с такими операциями является l-группой. Также ясно, что в $\mathfrak{G}$ справедливо $\{x_\alpha\} \geqq \{y_\alpha\} \Longleftrightarrow x_\alpha \geqq y_\alpha$ для всех α.

Определим отображение ϑ группы G в $\mathfrak{G}$ следующим образом: если $x \in G$, x_α — его проекция в J_α, то $x\vartheta = \{x_\alpha\} \in \mathfrak{G}$. Отображение ϑ есть искомый изоморфизм между группой G и l-подгруппой в $\mathfrak{G}$. Прежде всего, ϑ по лемме 10 является гомоморфным отображеньем (группы и структуры) G в $\mathfrak{G}$. Покажем, что ϑ — простое отображение. Прежде всего, множество всех прообразов нуля в $\mathfrak{G}$ есть l-идеал L в G. Далее, возьмем произвольный элемент $a \in L_+$ и произвольный элемент $x_\alpha \in J_\alpha^+$. Тогда $x_\alpha \wedge a \in L \cap J_\alpha$, так как L и J_α l-идеалы в G. Следовательно, $(x_\alpha \wedge a)\,\vartheta = \{0\}$. Но единственный элемент из J_α, которому в отображении ϑ соответствует нуль, есть нуль, следовательно $x_\alpha \wedge a = 0$, значит $a\,\delta\,x_\alpha$, $a\,\delta\,J_\alpha^+$. Отсюда $a\,\delta\,J_\alpha$ и далее $a\,\delta \bigcup\limits_\alpha J_\alpha$. Из полноты системы $\{J_\alpha\}$ в G следует $a = 0$. Этим теорема 3 доказана.

Замечание 6. В теореме 3 даже условие дизъюнктности каждых двух факторов системы $\{J_\alpha\}$ не должно быть обязательно достаточным для того, чтобы $G \cong \mathfrak{G}$. Если G — прямая сумма (не полная прямая сумма!) бесконечной системы l-групп, то есть прямая сумма попарно дизъюнктных прямых факторов, и поэтому должна быть погрузимой в собственную часть полной прямой суммы $\mathfrak{G}$ этих факторов. Это обстоятельство не изменится, если G будет полная группа. См. также теорему 8.

Теорема 4. *Для проекции $P(x)$ элемента x l-группы G в прямой фактор J из G справедливо следующее равенство*:

$$P(x) = \bigvee_{t \in J} (x \wedge t)_+ + \bigwedge_{t \in J} (x \vee t)_- \,.$$

В предыдущей формуле достаточно, чтобы t в первом члене пробежало только J_+, или во втором только J_-.

Замечание 7. Специально для $x \geqq 0$ будет: $P(x) = \bigvee\limits_{t \in J} (x \wedge t)_+ = \bigvee\limits_{t \in J} (x \wedge t) = \bigvee\limits_{t \in J_+} (x \wedge t)$, так как $P(x) = \bigvee\limits_{t \in J} (x \wedge t)_+ \geqq \bigvee\limits_{t \in J} (x \wedge t) \geqq \bigvee\limits_{t \in J_+} (x \wedge t) =$

[3]) Полная прямая сумма — см. ссылку в замечании 5; см. также начало доказательства этой теоремы.

[4]) Аналогичная теорема о K-пространствах доказана в [5], II, 2, 45.

$= \bigvee_{t\in J_+}(x \wedge t)_+ \geq \bigvee_{t\in J}(x \wedge t)_+$. Аналогично для $x \leq 0$ будет: $P(x) = \bigwedge_{t\in J}(x \vee t)_- = \bigwedge_{t\in J}(x \vee t) = \bigwedge_{t\in J_-}(x \vee t)$.

Доказательство теоремы 4. Пусть J, J' — взаимно дополнительные прямые факторы в G, $x \in G$, $x = a + a'$, где $a \in J$, $a' \in J'$. Если $x \geq 0$, то $a \geq 0$, $a' \geq 0$ (лемма 10); отсюда и из соотношения $a\, \delta\, a'$ следует $x = a \vee a'$ [см. (7)], следовательно, для любого $t \in J$ будет $t \wedge x \leq t_+ \wedge x = t_+ \wedge (a \vee a') = (t_+ \wedge a) \vee (t_+ \wedge a') = (t_+ \wedge a) \vee 0 = t_+ \wedge a$. Отсюда $P(x) = a \geq x \wedge t$ для всех $t \in J$. Для $t = a$ будет $t \wedge x = a \wedge x = a$. Отсюда $x \geq 0 \Rightarrow P(x) = \bigvee_{t\in J}(x \wedge t) = \bigvee_{t\in J_+}(x \wedge t)$. Для любого элемента $x \in G$ будет $P(x_+) = \bigvee_{t\in J_+}(x_+ \wedge t) = \bigvee_{t\in J_+}(x \wedge t)_+$, так как $x_+ \wedge t = (x \vee 0) \wedge t = (x \wedge t)_+$ при $t \geq 0$. Далее $P(-x_-) = \bigvee_{t\in J}(-x_- \wedge t) = \bigvee_{t\in J_-}(-x_- \wedge -t) = \bigvee_{t\in J_-} -[(x \wedge 0) \vee t] = \bigvee_{t\in J_-} -[(x \vee t) \wedge (t \vee 0)] = -\bigwedge_{t\in J_-}(x \vee t)_- = -\bigwedge_{x\in J}(x \vee t)_-$. Последнее равенство проверяется в расширении структуры G, полученном добавлением сечений (см. [2] IV, § 7, Теор. 12): $\bigwedge_{t\in J_-}(x \vee t)_- \geq \bigwedge_{t\in J}(x \vee t)_- \geq \bigwedge_{t\in J}(x \vee t_-)_- = \bigwedge_{t\in J_-}(x \vee t)_-$. Так как в G существует $\bigwedge_{t\in J_-}(x \vee t)_-$, то в G существует также $\bigwedge_{t\in J}(x \vee t)_-$. Аналогично $\bigvee_{t\in J_+}(x \wedge t)_+ = \bigvee_{t\in J}(x \wedge t)_+$. В итоге (используя лемму 10):

$$P(x) = P(x_+ + x_-) = P(x_+) + P(x_-) = \bigvee_{t\in J}(x \wedge t)_+ + \bigwedge_{t\in J}(x \vee t)_- .$$

В последнем выражении можно произвести изменения, описанные в теореме. Теорема 4 полностью доказана.

Теорема 5. Теорема о разложении. *Если $\{J_\alpha\}$ — полная система прямых факторов в l-группе G, то для любого элемента $x \in G$ будет $x = \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$, где x_α — проекция элемента x в J_α.*[5])

Доказательство. Отображение ϑ, которое каждому $x \in G$ ставит в соответствие множество $\{x_\alpha\}$ проекций элемента x в прямые факторы J_α, является по теореме 3 изоморфизмом между l-группой G и l-подгруппой в $\tilde{\sum\limits_{\alpha}} J_\alpha$.

Прежде всего докажем следующее: $x \geq 0 \Rightarrow x = \bigvee_{\alpha} x_\alpha$. Для всех α, то-есть, справедливо $x \geq x_\alpha \geq 0$ (лемма 10); если $y \geq x_\alpha$ для всех α, y_α-проекция элемента y в J_α, то $y_\alpha \geq x_\alpha$. Так как ϑ есть изоморфизм, то $y \geq x$. Доказано: $x \geq 0 \Rightarrow x = \bigvee_{\alpha} x_\alpha$. Отсюда, очевидно, следует $x \leq 0 \Rightarrow x = \bigwedge_{\alpha} x_\alpha$. Если индекс α означает проекцию соответствующего элемента в J_α, то для любого $x \in G$ будет: $x = x_+ + x_-$, $(x_+)_\alpha = x_\alpha^+$, $(x_-)_\alpha = x_\alpha^-$ (так как проектор представляет собой гомоморфное отображение), следовательно $x_+ =$

[5] Для K-пространств и полных l-групп доказана аналогичная теорема; в [5], II, 2,24 [6], стр. 43.

$= \bigvee_\alpha (x_+)_\alpha = \bigvee_\alpha x_\alpha^+,\ \ x_- = \bigwedge_\alpha (x_-)_\alpha = \bigwedge_\alpha x_\alpha^-$, в итоге $x = \bigvee_\alpha x_\alpha^+ + \bigwedge_\alpha x_\alpha^- = \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$.

Лемма 13. *Если* $\{x_\alpha\}$ *— произвольная система элементов l-группы G и если существует* $\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$, *то*

а) $y \in G,\ y\,\delta\, x_\alpha$ *для всех* $\alpha \Rightarrow y\,\delta\, \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$;

б) *если все* x_α *попарно дизъюнктны, то* $(\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_+ = \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha^+ = \bigvee_\alpha x_\alpha^+,\ \ (\underset{\alpha}{S} x_\alpha)_- = = \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha^- = \bigwedge_\alpha x_\alpha^- = (\bigwedge_\alpha x_\alpha)_-$.

Доказательство. а) Если y, x_α для всех α суть положительные элементы, то в силу (9) будет $y \wedge \bigvee_\alpha x_\alpha = \bigvee_\alpha (y \wedge x_\alpha) = 0$. Итак, для положительных элементов утверждение доказано. Расширение на любые элементы получается следующим образом: Пусть существует $\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$. Тогда

$$(\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_+ = (\bigvee_\alpha x_\alpha^+ + \bigwedge_\alpha x_\alpha^-) \vee 0 = \bigvee_\alpha x_\alpha^+ + [(\bigwedge_\alpha x_\alpha^-) \vee \bigwedge_\alpha -(x_\alpha^+)] =$$
$$= \bigvee_\alpha x_\alpha^+ + [(\bigwedge_\alpha x_\alpha^-) \vee \bigwedge_\alpha (-x_\alpha)_-] \leqq \bigvee_\alpha x_\alpha^+ = \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha^+ .$$

Отсюда и из (9) следует $0 \leqq y_+ \wedge (\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_+ \leqq y_+ \wedge \bigvee_\alpha x_\alpha^+ = \bigvee_\alpha (y_+ \wedge x_\alpha^+) = 0$, так как $y\,\delta\, x_\alpha \Rightarrow y_+\,\delta\, x_\alpha^+ \Rightarrow y_+ \wedge x_\alpha^+ = 0$. Следовательно $y_+\,\delta\,(\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_+$. Далее

$$-(\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_- = -[(\bigvee_\alpha x_\alpha^+ + \bigwedge_\alpha x_\alpha^-) \wedge 0] = [\bigvee_\alpha (-x_\alpha)_+ + \bigwedge_\alpha (-x_\alpha)_-] \vee 0 =$$
$$= [\underset{\alpha}{S}\,(-x_\alpha)]_+ \leqq \underset{\alpha}{S}\,(-x_\alpha)_+ .$$

Отсюда

$$0 \leqq y_+ \wedge -[(\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_-] \leqq y_+ \wedge \underset{\alpha}{S}\,(-x_\alpha)_+ = y_+ \wedge \bigvee_\alpha (-x_\alpha)_+ = \bigvee_\alpha [y_+ \wedge (-x_\alpha)_+] = 0 .$$

Из этого получаем $y_+\,\delta\,(\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_-$. Аналогично доказывается $y_-\,\delta\,(\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_-$, $y_-\,\delta\,(\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_-$. Из леммы 7 затем следует требуемое утверждение: $y\,\delta\,\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$.

б) Пусть x_α — попарно дизъюнктны. Утверждение будет доказано, как только докажем, что $\bigvee_\alpha x_\alpha^+\ \delta \bigwedge_\alpha x_\alpha^-$. Тогда, то-есть, по лемме 8 будет $(\underset{\alpha}{S} x_\alpha)_+ = = \bigvee_\alpha x_\alpha^+ = (\bigvee_\alpha x_\alpha)_+ = \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha^+;\ (\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_- = \bigwedge_\alpha x_\alpha^- = (\bigwedge_\alpha x_\alpha)_- = \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha^-$.

Но элементы $\bigvee_\alpha x_\alpha^+$ и $\bigwedge_\alpha x_\alpha^-$ дизъюнктны, так как

$$\bigvee_\alpha x_\alpha^+ \wedge -\bigwedge_\alpha x_\alpha^- = \bigvee_\alpha x_\alpha^+ \wedge \bigvee_\alpha (-x_\alpha)_+ = \bigvee_\alpha \bigvee_\beta [x_\alpha^+ \wedge (-x_\beta)_+] =$$
$$= \bigvee_\alpha [x_\alpha^+ \wedge (-x_\alpha)_+] = \bigvee_\alpha [x_\alpha^+ \wedge -x_\alpha^-] = 0.$$

Лемма 14. *Если* $\{J_\alpha\}_{\alpha\in A}^{\alpha}$ — *система попарно дизъюнктных подмножеств* l-*группы* G, *если* $x_\alpha \in J_\alpha$ *и если существует* $\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$, *то существует также* $\underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, x_\alpha$ (*для любого* $\alpha_0 \in A$) *и* $\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha = x_{\alpha_0} + \underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, x_\alpha$.

Доказательство: (I) Пусть прежде всего $x_\alpha \geqq 0$ для всех $\alpha \in A$. Тогда $\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha = \underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha$. Для $m = (\underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha) - x_{\alpha_0}$ будет (при всех $\alpha \in A$, $\alpha \neq \alpha_0$):

$$m \vee x_\alpha = [(\underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha) - x_{\alpha_0}] \vee x_\alpha = [(\underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha) \vee (x_\alpha + x_{\alpha_0})] - x_{\alpha_0} =$$
$$= [(\underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha) \vee x_\alpha \vee x_{\alpha_0}] - x_{\alpha_0} = (\underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha) - x_{\alpha_0} = m\,,$$

следовательно $m \geqq x_\alpha$ для всех $\alpha \neq \alpha_0$. Если $z \geqq x_\alpha$ для всех $\alpha \neq \alpha_0$, то $z + x_{\alpha_0} \geqq x_\alpha + x_{\alpha_0} = x_\alpha \vee x_{\alpha_0}$ и отсюда $z + x_{\alpha_0} \geqq \underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha$; значит, $z \geqq (\underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha) - x_{\alpha_0} = m$. В итоге $m = \underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigvee}\, x_\alpha$.

(II) Если x_α — произвольный элемент из J_α и если существует $\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$, то существует также $\underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha^+$, $\underset{\alpha}{\bigvee} - (x_\alpha^-)$; следовательно, существует также $\underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigvee}\, x_\alpha^+$, $\underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigvee} - (\,x_\alpha^-) = -\underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigwedge}\, x_\alpha^-$. Отсюда следует, что $\underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, x_\alpha = \underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigvee}\, x_\alpha^+ - \underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigvee} - (x_\alpha^-)$ тоже существует. Из леммы 13 и 7 следует, что $x_{\alpha_0}\, \delta\, \underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, x_\alpha$, $x_{\alpha_0}^{\pm}\, \delta\, \underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigvee}\, x_\alpha^+$, $x_{\alpha_0}^{\pm}\, \delta\, \underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigwedge}\, (x_\alpha^-)$. Отсюда, из (7) и из части (I) этого доказательства следует $x_{\alpha_0} + \underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, x_\alpha = x_{\alpha_0}^+ + x_{\alpha_0}^- + \underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigvee}\, x_\alpha^+ - \underset{\alpha\neq\alpha_0}{\bigvee} - (x_\alpha^-) = \underset{\alpha}{\bigvee}\, x_\alpha^+ + \underset{\alpha}{\bigwedge}\, x_\alpha^- = \underset{\alpha}{S}\, x_\alpha$.

Теорема 6. Теорема об однозначности представления. *Если* $\{J_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — *система попарно дизъюнктных прямых факторов в* l-*группе* G, *то представление элемента* $x \in G$ *в виде* $x = \underset{\alpha}{S}\, y_\alpha$, *где* $y_\alpha \in J_\alpha$, *возможно только тогда, если* y_α *есть проекция элемента* x *в* J_α.[6])

Доказательство. Пусть $x = \underset{\alpha}{S}\, y_\alpha$, где $y_\alpha \in J_\alpha$. Если $\alpha_0 \in A$, то по лемме 14 получаем $x = \underset{\alpha}{S}\, y_\alpha = y_{\alpha_0} + \underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, y_\alpha$; через x_α обозначим проекцию элемента x в J_α; тогда

$$x_{\alpha_0} = (\underset{\alpha}{S}\, x_\alpha)_{\alpha_0} = (y_{\alpha_0} + \underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, y_\alpha)_{\alpha_0} = y_{\alpha_0} + (\underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, y_\alpha)_{\alpha_0} = y_{\alpha_0}\,,$$

так как $(\underset{\alpha\neq\alpha_0}{S}\, y_\alpha)\, \delta\, J_{\alpha_0}$.

Теоремы 5 и 6 теперь объединим в одну, причем их утверждения несколько расширим.

---

[6]) Аналогичная теорема для K-пространств доказана в [5], II, 2,25, а для полных l-групп в [6], стр. 43.

Теорема 7. *Если $\{J_\alpha\}$ — полная система попарно дизъюнктных прямых факторов в l-группе G, то*

а) *любой элемент $x \in G$ можно писать в виде $x = \underset{\alpha}{S}\, y_\alpha$, где $y_\alpha \in J_\alpha$ тогда и только тогда, если y_α есть проекция элемента x в J_α;*

б) *для любого элемента $x \in G$ верно: $x_+ = (\bigvee\limits_\alpha x_\alpha)_+$, $x_- = (\bigwedge\limits_\alpha x_\alpha)_-$, где x_α — проекция элемента x в J_α.*

Доказательство. Первое утверждение является лишь содержанием теорем 5 и 6, второе содержится в лемме 13б.

Теорема 8. *l-группа G является полной прямой суммой l-групп тогда и только тогда, если она содержит полную систему попарно дизъюнктных прямых факторов $\{J_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и если в ней существует $\bigvee\limits_\alpha x_\alpha$, $\bigwedge\limits_\alpha x_\alpha$ для любой системы элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где $x_\alpha \in J_\alpha$.*[7])

Доказательство. Если G является полной прямой суммой l-групп $\{\bar{J}_\alpha\}_{\alpha\in A}$, то для каждой $\bar{J}_\alpha$ $(\alpha \in A)$ найдется в G изоморфный ему прямой фактор J_α. Система всех J_α $(\alpha \in A)$ является, очевидно, полной системой попарно дизъюнктных прямых факторов в G. Если $\{\ldots 0\, x_\alpha\, 0 \ldots\}$ означает произвольный элемент из G, α-тая составляющая которого равна x_α (где x_α любой элемент из J_α), а все остальные равны нулю (значит $\{\ldots 0\, x_\alpha\, 0 \ldots\} \in J_\alpha$), то

$$\bigvee_{\alpha\in A}\{\ldots 0\, x_\alpha\, 0 \ldots\} = \{\ldots x_\alpha^+ \ldots\}_{\alpha\in A}, \quad \bigwedge_{\alpha\in A}\{\ldots 0\, x_\alpha\, 0 \ldots\} = \{\ldots x_\lambda^- \ldots\}_{\lambda\in A},$$

так что выполняется и последнее равенство.

Пусть в G существует полная система попарно дизъюнктных прямых факторов $\{J_\alpha\}_{\alpha\in A}$, обладающих указанным свойством. По теореме 3 l-группу G можно погрузить в $\tilde{\sum\limits_{\alpha\in A}} J_\alpha$. Покажем, что построенное в теореме 3 отображение ϑ есть изоморфизм между G и $\tilde{\sum\limits_{\alpha\in A}} J_\alpha$. Если $\{\ldots x_\alpha \ldots\}_{\alpha\in A} \in \tilde{\sum\limits_{\alpha\in A}} J_\alpha$, то по предположению существует $\bigvee\limits_{\alpha\in A} x_\alpha^+$, $\bigwedge\limits_{\alpha\in A} x_\alpha^-$, значит, и элемент $\underset{\alpha\in A}{S}\, x_\alpha$; обозначим его через x; по теореме 6 является тогда x_α проекцией элемента x в J_α, следовательно $x\vartheta = \{\ldots x_\alpha \ldots\}_{\alpha\in A}$ или же отображение ϑ отображает G на $\sum\limits_{\alpha\in A} J_\alpha$.

§ 4

В этом параграфе докажем, что на архимедовых l-группах компоненты играют „приблизительно“ роль прямых факторов.

Сначала приведу знакомые, в дальнейшем нам необходимые, теоремы.

[7]) Аналогичная теорема для K-пространств доказана в [5], стр. 70.

(12) Архимедову l-группу можно погрузить в полную l-группу ([3], Лемма 2 и Теор. 1; [2], XIV, § 9, Cor.).

Теорему (12) нужно еще дополнительно ближе пояснить. Полная l-группа $\bar{G}$, в которую погружена l-группа G, является системой подмножеств в G, которые получим следующим образом: Пусть X — любая непустая часть G, ограниченная сверху соотв. снизу; символом $U(X)$ соотв. $L(X)$ обозначим очевидно непустое множество всех верхних соотв. нижних границ множества X; $U(X)$ ограничено снизу. Непустое множество $L[U(X)]$ обозначим через X^*. Система $\bar{G}$ всех X^* образует условно полную структуру, упорядоченную посредством отношения множественного включения и с пересечением в качестве инфимума; групповое умножение можно на ней определить так, что G изоморфно (в групповом и структурном смысле) множеству всех $(a)^*$ $(a \in G)$. Множество $\bar{G}$ можно понимать как расширение множества G путем добавления непустых сечений $\{L[U(X)],\ U(X)\}$.

(13) Каждая пара взаимно дополнительных компонент на полной l-группе представляет собой ее прямое разложение ([7], Теор. 1; [2], XIV, § 11, Теор. 19).

Определение. l-подгруппа H l-группы G правильна в G, если для любого множества $\{x_\alpha\} \subset H$, ограниченного сверху в G, существует $\bigvee\limits_\alpha x_\alpha$ в G и если $\bigvee\limits_\alpha x_\alpha \in H$ ([5], II, 1,21; [6], стр. 42).

(14) Компонента полной l-группы G является правильной l-подгруппой в G ([2], XIV, § 11).

(15) Полная l-группа является в порядковой топологии топологической структурой и топологической группой ([3], Теор. 5; [2], XIV, § 10, Cor.).

(16) Архимедова l-группа коммутативна ([4], Теор. 3; [2], XIV, § 12, Cor.).

Замечание 8. Заметим, что под порядковой топологией частично упорядоченного множества G будем подразумевать топологию, относительную от порядковой топологии условно полной структуры $\bar{G}$ ($\bar{G}$ —расширение структуры G добавлением непустых сечений; см. (12)).

Лемма 15. *Пусть $r_\alpha \to r$ соотв. $s_\beta \to s$ — два сходящихся направленных множества элементов l-группы G с пределами r соотв. s. Образуем кардинальное произведение обеих множеств индексов. Положим $r_{(\alpha,\beta)} = r_\alpha$ для всех β, $s_{(\alpha,\beta)} = s_\beta$ для всех α. Множество упорядоченных пар $(\alpha, \beta,)$ индексов направлено и $r_{(\alpha,\beta)} \to r$, $s_{(\alpha,\beta)} \to s$.*

Доказательство следует из того, что

$$\bigwedge_{(\alpha,\beta) \geq (\gamma,\delta)} r_{(\alpha,\beta)} = \bigwedge_{\alpha \geq \gamma} r_\alpha, \qquad \bigvee_{(\alpha,\beta) \geq (\gamma,\delta)} r_{(\alpha,\beta)} = \bigvee_{\alpha \geq \gamma} r_\alpha .$$

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{G}$ — полная l-группа, G — ее l-подгруппа, обладающая свойством*

(1) $0 \leq x \in \mathfrak{G} \Rightarrow$ *существует подмножество* $\{a_\alpha\} \subset G$, $a_\alpha \geqq 0$ *для всех* α *так, что* $\bigvee_\alpha x_\alpha = x$.

Пусть $\{L_\nu\}$ — *полная система компонент в* G.
Тогда:

(а) $\bigcup_\nu L_\nu$ *имеет в* $\mathfrak{G}$ *свойство* (1);

(б) $\sum_\nu L_\nu$ — *множество, плотное в* $\mathfrak{G}$ *(значит, и в* G*) в порядковой топологии.*

Доказательство. (I) Пусть $\mathfrak{G}$ и G имеют описанные свойства. Пусть L_1, L_2 — взаимно дополнительная пара компонент в G. Пусть $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ — взаимно дополнительная пара компонент в $\mathfrak{G}$, для которой $\mathfrak{L}_1 \supset L_1$, $\mathfrak{L}_2 \supset L_2$. $\mathfrak{L}_1$ (соотв. $\mathfrak{L}_2$) правильная подгруппа в $\mathfrak{G}$, значит, полная и L_1 (соотв. L_2) — ее l-подгруппа, имеющая свойство (1): пусть, например, $x \in \mathfrak{L}_1$, $x \geqq 0$; тогда существует подмножество $\{a_\alpha\} \subset G$, $a_\alpha \geqq 0$ для всех α так, что $\bigvee_\alpha a_\alpha = x$. Следовательно, для всех α верно: $0 \leqq a_\alpha \leqq x$, следовательно, $|a_\alpha| \leqq |x|$, и так как $\mathfrak{L}_1$ обладает нормальным свойством, то $a_\alpha \in \mathfrak{L}_1$. Потому что, очевидно $\mathfrak{L}_1 \cap G = L_1$, будет $a_\alpha \in L_1$.

(II) Пусть $\{L_\nu\}$ — полная система компонент в G. Пусть множество индексов ν вполне упорядочено и имеет тип γ. В $\mathfrak{G}$ построим полную систему компонент $\{\mathfrak{L}_\nu\}$ такую, что $L\nu$ будет в $\mathfrak{L}\nu$ $(\nu < \gamma)$ иметь свойство (1). Обозначим для $M \subset \mathfrak{G}$: через M' соотв. $M^{\backprime}$ множество всех элементов в $\mathfrak{G}$ соотв. в G, дизъюнктных с M; $\overline{M} = M''$; символами $\vee$, $\wedge$, отнесенными к системе компонент в $\mathfrak{G}$ (в G), обозначаем sup, inf этой системы в алгебре компонент в $\mathfrak{G}$ (в G). Двоякое значение этих знаков не приведет нас к недоразумению.

Определим $\mathfrak{L}_1 = \overline{L}_1$, и для $2 \leqq \alpha < \gamma$, $\mathfrak{L}_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha \cap \mathfrak{N}'_\alpha$, где $\mathfrak{N}_\alpha = \overline{\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu}$, $\mathfrak{M}_\alpha = \overline{\bigvee_{\nu\leq\alpha} L_\nu}$. Пусть $0 \leqq x \in \mathfrak{L}_\alpha (\alpha < \gamma)$. Тогда, ввиду (I), справедливо: $0 \leqq x \in \mathfrak{L}_1 \Rightarrow$ существует множество $\{a_\xi\} \subset L_1$, $0 \leqq a_\xi$ так, что $\bigvee_\xi a_\xi = x$; для $2 \leqq a < \gamma$ будет: $0 \leqq x \in \mathfrak{M}_\alpha \Rightarrow$ существует множество $\{a_\xi\} \subset \bigvee_{\nu\leq\alpha} L_\nu$, $a_\xi \geqq 0$ так, что $\bigvee_\xi a_\xi = x$, а также $0 \leqq x \in \mathfrak{N}'_\alpha \Rightarrow$ существует множество $\{b_\eta\} \subset (\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)^{\backprime}$, $b_\eta \geqq 0$ так, что $\bigvee_\eta b_\eta = x$.

Если $c_\zeta = a_\xi \wedge b_\eta$, то $c_\zeta \geqq 0$, $\bigvee_\zeta c_\zeta = \bigvee_{\xi,\eta} (a_\xi \wedge b_\eta) = \bigvee_\xi [a_\xi \wedge (\bigvee_\eta b_\eta)] = (\bigvee_\xi a_\xi) \wedge (\bigvee_\eta b_\eta) = x$. Так как $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{N}'_\alpha$ имеют нормальное свойство и $|c_\zeta| \leqq |a_\xi|$, $|c_\zeta| \leqq |b_\eta|$, то $0 \leqq c_\zeta \in (\bigvee_{\nu\leq\alpha} L_\nu) \cap (\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)^{\backprime} = (\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)^{\backprime} \wedge [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu) \vee L_\alpha] = [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)^{\backprime} \wedge (\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)] \vee [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)^{\backprime} \wedge L_\alpha] = (\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)^{\backprime} \wedge L_\alpha \subset L_\alpha$, следовательно, $0 \leqq c_\zeta \in L_\alpha$. Отсюда следует уже, что L_α имеет в $\mathfrak{L}_\alpha$ $(\alpha < \gamma)$ свойство (1).

Система компонент $\{\mathfrak{L}_\nu\}$ полна в $\mathfrak{G}$: прежде всего докажем, что для β, для которого $3 \leqq \beta < \gamma$, будет $L_1 \vee \bigvee_{2\leqq\alpha<\beta} [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha] = \bigvee_{\nu<\beta} L_\nu$; при $\beta = 3$ отношение справедливо, ибо $L_1 \vee \bigvee_{2\leqq\alpha<3} [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha] = L_1 \vee [L_1' \wedge L_2] = (L_1 \vee L_1') \wedge \wedge (L_1 \vee L_2) = G \wedge (L_1 \vee L_2) = \bigvee_{\nu<3} L_\nu$. Если оно выполняется для β, то докажем, что оно выполняется и для $\beta + 1$.

$$L_1 \vee \bigvee_{2\leqq\alpha\leqq\beta} [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha] = L_1 \vee \bigvee_{2\leqq\alpha<\beta} [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha] \vee [(\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu)' \wedge L_\beta] =$$
$$= (\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu) \vee [(\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu)' \wedge L_\beta] = [(\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu) \vee (\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu)'] \wedge [(\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu) \vee L_\beta] =$$
$$= G \wedge [(\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu) \vee L_\beta] = (\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu) \vee L_\beta = \bigvee_{\nu\leqq\beta} L_\nu .$$

Если доказываемое равенство выполняется для всех $\beta < \delta$ (в случае предельного $\delta < \gamma$), то докажем его и для δ: по предположению индукции $\bigvee_{\nu<\beta} L_\nu = L_1 \vee \bigvee_{2\leqq\alpha<\beta} [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha]$; если на обе части уравнения произведем $\bigvee_{3\leqq\beta<\delta}$, получим

$$\bigvee_{\nu<\delta} L_\nu = L_1 \vee \bigvee_{3\leqq\beta<\delta} \{ \bigvee_{2\leqq\alpha<\beta} [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha]\} = L_1 \vee \bigvee_{2\leqq\alpha<\delta} [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha] .$$

Отсюда $L_1 \vee \bigvee_{2\leqq\alpha<\gamma} [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha] = \bigvee_{\nu<\gamma} L_\nu = G$ (из полноты системы компонент $\{L_\nu\}$ в G, см. (11)).

Пусть теперь $0 \leqq x \in \mathfrak{G}$, $x \,\delta \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathfrak{L}_\alpha$; так как существует множество $\{a_\xi\} \subset G$, $a_\xi \geqq 0$, так что $\bigvee_\xi a_\xi = x$, то $0 \leqq a_\xi \leqq x$ (для всех ξ). Отсюда для всех ξ следует $a_\xi \,\delta \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathfrak{L}_\alpha$ и, следовательно, для $\alpha < \gamma$: $a_\xi \,\delta\, (\mathfrak{L}_\alpha \cap G)$; отсюда $a_\xi \,\delta\, L_1$ для $2 \leqq \alpha < \gamma$ будет $\mathfrak{L}_\alpha \cap G = (\bigvee_{\nu\leqq\alpha} L_\nu) \cap (\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' = (\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha$, следовательно $a_\xi \,\delta\, [(\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha]$. Так как система компонент $\{L_1, (\bigvee_{\nu<\alpha} L_\nu)' \wedge L_\alpha \ (2 \leqq \leqq \alpha < \gamma)\}$ полна в G, то $a_\xi = 0$, откуда $x = \bigvee_\xi a_\xi = 0$. Итак, система компонент $\{\mathfrak{L}_\alpha\}$ полна в $\mathfrak{G}$.

Если $0 \leqq x \in \mathfrak{G}$, x_ν — проекция элемента x в $\mathfrak{L}_\nu$, то по теореме 5 будет $x = \bigvee_{\nu<\gamma} x_\nu$. Если $x_\nu = \bigvee_\zeta c_\zeta^\nu$, где $0 \leqq c_\zeta^\nu \in L_\nu$, то $x = \bigvee_{\nu,\zeta} c_\zeta^\nu$, где $\{c_\zeta^\nu\} \subset \bigcup_{\nu<\gamma} L_\nu$, $c_\zeta^\nu \geqq 0$. Этим утверждение (а) доказано.

(III) Доказательство утверждения (б). Из утверждения (а) следует: $0 \leqq x \in \mathfrak{G} \Rightarrow$ существует множество $\{c_\eta\} \subset \bigcup_{\nu<\gamma} L_\nu$, $c_\eta \geqq 0$, так что $\bigvee_\eta c_\eta = x$. Двойственно: $0 \geqq y \in \mathfrak{G} \Rightarrow$ существует множество $\{d_\xi\} \subset \bigcup_{\nu<\gamma} L_\nu$, $d_\xi \leqq 0$, так что $\bigwedge_\xi d_\xi = y$.

Если множество индексов η упорядочить по правилу $\eta \geqq \eta' \Longleftrightarrow c_\eta \geqq c_{\eta'}$, то, очевидно, $\bigwedge\limits_{\eta'} \bigvee\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta = \bigvee\limits_{\eta} c_\eta = \bigvee\limits_{\eta'} \bigwedge\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta$, следовательно $x = \bigvee\limits_{\eta} c_\eta = \lim\limits_{\eta} c_\eta$ (то есть, $\bigvee\limits_{\eta'} \bigwedge\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta \leqq \bigwedge\limits_{\eta'} \bigvee\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta$, $\bigwedge\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta = c_{\eta'}$, следовательно $\bigvee\limits_{\eta'} \bigwedge\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta = \bigvee\limits_{\eta'} c_{\eta'} = \bigvee\limits_{\eta} c_\eta \geqq$ $\geqq \bigwedge\limits_{\eta'} \bigvee\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta$, или же $\bigvee\limits_{\eta'} \bigwedge\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta = \bigwedge\limits_{\eta'} \bigvee\limits_{\eta \geq \eta'} c_\eta$). Аналогично $y = \lim\limits_{\xi} d_\xi$. Пусть $z \in \mathfrak{G}$, $z = z_+ + z_-$; тогда $z = \lim\limits_{\eta} c_\eta + \lim\limits_{\xi} d_\xi$. Приняв во внимание лемму 15, можем оба множества индексов считать тождественными, следовательно $z = \lim\limits_{\zeta}(c_\zeta + d_\zeta) = \lim\limits_{\zeta} z_\zeta$, где $\{c_\zeta\} \subset \bigcup\limits_{\nu<\gamma} L_\nu$, $\{d_\zeta\} \subset \bigcup\limits_{\nu<\gamma} L_\nu$, значит $\{z_\zeta\} \subset \sum\limits_{\nu<\gamma} L_\nu$.

Теорема 10. *Архимедова l-группа G имеет в своем расширении $\overline{G}$ непустыми сечениями свойство* (1) *из теоремы* 9.

Доказательство. Пусть $\overline{G}$ — расширение группы добавлением непустых сечений [см. (12)], $(0)^* \leqq X^* \in \overline{G}$, X^* есть подмножество в G, скажем $X^* = \{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset G$. Утверждаю, что $\bigvee\limits_{\alpha} (a_\alpha)^* = X^*$. Прежде всего, $(a_\alpha)^* \leqq X^*$, так как $a_\alpha \in X^*$ для всех $\alpha \in A$; отсюда $\bigvee\limits_{\alpha} (a_\alpha)^* \leqq X^*$. Если $\bigvee\limits_{\alpha} (a_\alpha)^* = Y^* \in \overline{G}$, то $Y^* \subset X^*$ (X^*, Y^* рассматриваем как части G). Но $(a_\alpha)^* \leqq Y^*$ для всех $\alpha \in A \Rightarrow X^* = \{a_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset Y^*$. Значит, $X^* = Y^* = \bigvee\limits_{\alpha} (a_\alpha)^*$. Но для каждого $(a_\alpha)^*$ будет, очевидно, $(a_\alpha)^* \leqq (a_\alpha^+)^* = [(a_\alpha)^*]^+ \leqq X^*$, $(0)^* \leqq$ $\leqq [(a_\alpha)^*]^+ = (a_\alpha^+)^*$, так что G имеет в $\overline{G}$ свойство (1).

Следствие 1. *Полная система компонент в архимедовой l-группе имеет сумму, плотную во всей группе, топологизированной упорядочением.*

Замечание 9. Если $\mathfrak{G}$ — полная l-группа, а G — ее l-подгруппа, то G, очевидно, есть архимедова l-группа.

Возникает вопрос, можно ли обратить теорему 10: Пусть l-подгруппа G полной l-группы $\mathfrak{G}$ имеет свойство (1) из теоремы 9. Остается открытым вопрос, если $\mathfrak{G} = \overline{G}$ (где через $\overline{G}$ обозначено расширение l-группы G непустыми сечениями; см. (12)).

Следствие 2. *Две взаимно дополнительные компоненты архимедовой l-группы G правильны тогда и только тогда, если G — полная группа.*

Доказательство. Достаточность условия следует из (14).

Необходимость: Пусть L_1, L_2 — пара правильных взаимно дополнительных компонент архимедовой l-группы G. Из определения правильности следует, что L_1 и L_2 суть полные l-группы. Пусть $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ — взаимно дополнительные компоненты в $\overline{G}$ [см. (12)], для которых $\tilde{L}_1 \supset L_1$, $\tilde{L}_2 \supset L_2$. Пусть $a \in G$, $a \geqq 0$. Тогда $a = x + y$, где $x \in \tilde{L}_1$, $x \in \tilde{L}_2$, а по лемме 10 $a \geqq x \geqq 0$, $a \geqq y \geqq 0$. По теореме 10 будет $x = \bigvee\limits_{\alpha} x_\alpha$, где x_α пробегает все элементы из L_1, для которых $0 \leqq x_\alpha \leqq x$. Так как $a \geqq x \geqq x_\alpha$, то множество $\{x_\alpha\}$ элементов $x_\alpha \in L_1$ в G сверху ограничено, следовательно, в G существует $\bigvee_\alpha x_\alpha$ и $\bigvee_\alpha x_\alpha \in L_1$, значит $x \in L_1$; аналогично $y \in L_2$ и поэтому $a = x + y \in L_1 + L_2$. Так как любой элемент $b \in G$ является разностью положительных элементов из G, то также $b \in L_1 + L_2$. Отсюда получается, что l-группа G как прямая сумма полных l-групп является сама полной l-группой.

§ 5

В заключение работы приведем два замечания элементарного характера.

Клиффорд ([12], стр. 467; [2], XIV, § 3, Лемма 1) доказал, что (17) частично упорядоченная группа направлена[8]) тогда и только тогда, если каждый ее элемент является разностью положительных элементов.

В следующих двух замечаниях дадим характеристику l-группы, во-первых, по отношению к направленным группам, во-вторых, к частично упорядоченным группам.

Замечание 10. Направленная группа G является l-группой тогда и только тогда, если среди представлений любого ее элемента в виде разности двух положительных элементов существует „наименьшее" представление, т. е. тогда и только тогда, если для любого $a \in G$ существуют элементы $b_0 \geqq 0$, $c_0 \geqq 0$ такие, что $a = b_0 - c_0$ и если $a = b - c$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, то $b \geqq b_0$, $c \geqq c_0$.

Доказательство. Если G l-группа, то $a = b - c$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0 \Rightarrow b \geqq a_+$, $c \geqq -a_-$.

Достаточность условия: В силу (17), множество представлений данного элемента направленной группы G в виде разности двух положительных элементов, непусто. Пусть для любого элемента $a \in G$ существуют элементы $b_0 \geqq 0$, $c_0 \geqq 0$ такие, что $a = b_0 - c_0$, и если $a = b - c$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, то $b \geqq b_0$, $c \geqq c_0$. Так как $a \mp b_0 - c_0$ то $a \leqq b_0$; верно также $0 \leqq b_0$. Возьмем произвольное число $b \geqq 0$, для которого $b \geqq a$; тогда $-a + b \geqq 0$, значит, элемент $a = b - (-a + b)$ написан в виде разности двух положительных элементов. По предположению $b \geqq b_0$. Отсюда $b_0 = a \vee 0$. По теореме 2 из [2] (XIV, § 1) есть G l-группа.

Замечание 11. Частично упорядоченная группа G является l-группой тогда и только тогда, если существует одно единственное представление любого элемента $a \in G$ в виде $a = b - c$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, $b\, \delta\, c$.

В условии можно вместо „одно единственное" писать „по крайней мере одно".

---

8) Определение направленной группы см. [2], XIV, § 3.

Доказательство. Необходимость условия следует из леммы 8.

Достаточность: Пусть любой элемент a частично упорядоченной группы G можно записать в виде $a = b - c$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, $b \,\delta\, c$. Докажем, что $b = a \vee 0$. Очевидно, $b \geqq a$, $b \geqq 0$. Пусть $b' \geqq a$, $b' \geqq 0$ (верно, например, при $b' = b$). Если обозначим $c' = -a + b'$, то будет $c' \geqq 0$. Существуют элементы b_1, c_1 такие, что $b = b' + b_1$, $c = c' + c_1$, следовательно, $a = b' - c' = b - c = b' + b_1 - c_1 - c'$, откуда $b_1 = c_1 (= m)$. Далее, существует $h \geqq 0$ такое, что $b' \geqq h$, $c' \geqq h$. Тогда $b - m \geqq h$, $c - m \geqq h$, значит, $0 = b \wedge c \geqq h + m$ и далее $0 \geqq -h \geqq m$. Отсюда $b = b' + m \leqq b'$, или же $b = a \vee 0$. По теореме 2 из [2] (XIV, § 1) есть G l-группа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff:* Lattice-ordered groups, Annals of Math. *43* (1942), 298—331.

[2] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, New York, revised ed., 1948.

[3] *C. J. Everett* and *S. Ulam:* On ordered groups, Transactions Am. Math. Soc. *57* (1945), 208—216.

[4] *Kenkichi Iwasawa:* On the structure of conditionally complete lattice-groups, Jap. Journal of Math. *18* (1943), 777—789.

[5] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих* и *А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, ГТТИ, Москва (1950).

[6] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих* и *А. Г. Пинскер:* Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства, Успехи мат. наук, VI, *3* (43), 1951, стр. 31—98.

[7] *F. Riesz:* Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, Annals of Math. *41* (1940), 174—206.

[8] *F. Šik:* Über Anwendung der Polarität auf die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Чехословацкий математический журнал, Т *5* (*80*), 1955, 61—75.

[9] *Е. П. Шимбирева:* К теории частично упорядоченных групп, Математ. сборник, *20* (1947), 145—178.

[10] *М. И. Граев:* К теории полных прямых произведений групп, Математ. сборник, *17* (*59*), 1945, стр. 85—104.

[11] *А. Г. Курош:* Теория групп, изд. 2., ГТТИ, Москва, 1953.

[12] *A. H. Clifford:* Partially ordered abelian groups, Annals of Math. *41* (1940), 465—473.

Zusammenfassung

ZUR THEORIE DER HALBGEORDNETEN GRUPPEN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno.

(Eingelangt am 1. März 1955.)

Die vorliegende Arbeit behandelt die Struktur einiger Typen von halbgeordneten Gruppen (l-Gruppen).

Die Übersicht der Hauptergebnisse. Die Elemente x, y der l-Gruppe G nennt man disjunktiv, $x\delta y$, wenn $|x| \wedge |y| = 0$.

Unter der (zur Menge $A \subset G$ disjunktiven) Komponente versteht man die Menge aller Elemente der l-Gruppe G, die zu jedem Elemente von A disjunktiv sind.

Satz 1. Das System aller Komponenten auf der l-Gruppe bildet eine vollständige Boolesche Algebra Γ_0 (ihre teilweise Ordnung ist durch die mengentheoretische Inklusion gegeben, das Infimum eines beliebigen Systems von Komponenten ist sein Durchschnitt), die Komponenten, die gleichzeitig l-Ideale sind, bilden ihre (vollständige) Unteralgebra Γ_1 und die direkten Faktoren in G bilden (nicht notwendig vollständige) Unteralgebra Γ_2 von Γ_1, in der das Supremum Summe von Faktoren ist.

Satz 2. Die folgenden Bedingungen sind auf der l-Gruppe G äquivalent:
1° Die Vereinigung einer beliebigen Kette von Komponenten auf G ist ein direkter Faktor in G.
2° G ist eine direkte Summe von einfach geordneten Gruppen.
3° Die Summe eines beliebigen Systems von Komponenten in G ist Komponente in G.
Ist eine von diesen Bedingungen erfüllt, dann ist das System aller direkten Faktoren in G dasselbe wie das System aller Komponenten in G und es bildet eine atomische Boolesche Algebra. Ihre Atome sind irreducible und also einfach geordnete l-Ideale in G. G ist die direkte Summe aller Atome der Algebra.

Das System $\{J_\alpha\}$ der Teile J_α der l-Gruppe G heisst vollständig in G, wenn $x \in G$, $x\delta \bigcup\limits_\alpha J_\alpha \Rightarrow x = 0$.

Satz 3 (von der Einbettung). *Ist $\{J_\alpha\}$ ein vollständiges System von direkten Faktoren der l-Gruppe G, dann kann man G in die vollständige direkte Summe $\mathfrak{G} = \tilde{\sum\limits_\alpha} J_\alpha$ des Systems $\{J_\alpha\}$ einbetten.*

Ist $J + J' = G$ eine direkte Zerlegung der l-Gruppe G, $x \in G$, $x = a + a'$, $a \in J$, $a' \in J'$, dann nennt man das eindeutig bestimmte Element a eine Projektion des Elementes x in das direkte Faktor J.

Satz 7a. *Ist* $\{J_\alpha\}$ *ein vollständiges System von je zwei disjunktiven direkten Faktoren in einer l-Gruppe G, dann lässt sich ein beliebiges Element* $x \in G$ *in der Form* $x = \underset{\alpha}{S} y_\alpha$ *darstellen, wenn und nur wenn* y_α *die Projektion von x in* J_α *ist.*

Satz 8. *Die Gruppe G ist eine vollständige direkte Summe von l-Gruppen, wenn und nur wenn sie ein vollständiges System von je zwei disjunktiven direkten Faktoren* $\{J_\alpha\}$ *einschliesst und wenn in G für ein beliebiges System der Elemente* $\{x_\alpha\}$, *wo* $x_\alpha \in J_\alpha$, *die Ausdrücke* $\bigvee_\alpha x_\alpha$, $\bigwedge_\alpha x_\alpha$ *existieren.*

Korollar 1. des Satzes 10. *In der archimedischen l-Gruppe ist die Summe jedes vollständigen Systems von Komponenten dicht in dieser Gruppe in der Ordnungstopologie.*