Czechoslovak Mathematical Journal

Miroslav Fiedler

Über das Gräffesche Verfahren

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 506–516

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100167`

ÜBER DAS GRÄFFESCHE VERFAHREN

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Eingelangt 21. V. 1955.)

In diesem Artikel handelt es sich um eine Modifikation des Verfahrens, das BRODETSKY und SMEAL (1924) entworfen haben. Es werden auch einige Ergänzungen und Anwendung auf das Eigenwertproblem angeführt.

1. Das Verfahren von BRODETSKY und SMEAL [1], das die Unbestimmtheit des Wurzelziehens beim Gräffeschen Verfahren zur Lösung einer algebraischen Gleichung beseitigt, beruht darin, dass man ausser der Gräffeschen Folge von Polynomen $f_k(x)$, die die 2^k-ten Potenzen von Wurzeln der gegebenen Gleichung als ihre Nullstellen besitzen, eine neue Folge von Polynomen $g_k(x)$ bildet. Diese Folge dient dann zur Bestimmung der gesuchten Wurzeln aus ihren 2^k-ten Potenzen.

Wir werden die Sache etwas allgemeiner fassen, Näherungsformeln für die Wurzeln angeben und zeigen, dass diese Wurzeln sich durch die 2^k-ten Potenzen rationell ausdrücken lassen. Schliesslich werden diese Ergebnisse zur Bestimmung der im Betrag maximalen Eigenwerte einer Matrix angewandt.

2. Wir werden zuerst das Gräffesche Produkt $f \circ g$ von zwei Polynomen $f(x)$ und $g(x)$ als dasjenige Polynom $h(x)$ definieren, für das

$$h(x^2) = \tfrac{1}{2}[f(x)\, g(-x) + f(-x)\, g(x)] \tag{1}$$

gilt. Es folgt offenbar, dass für den maximalen Grad n und

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\,, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i\,,$$

$$f \circ g = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

ist mit

$$c_i = \sum_{k=\max(0,\, 2i-n)}^{\min(2i,\, n)} (-1)^k\, a_k b_{2i-k}\,. \tag{2}$$

Wir werden noch zwei Hilfssätze beweisen, die uns nützlich sein werden:

Hilfssatz 1. *Es sei für komplexe* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $f(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$; *man definiere zwei Polynomfolgen* $f_k(x)$, $g_k(x)$ *folgendermassen* (f' *ist die Ableitung von* f):

$$f_0 = (-1)^n f\,, \quad g_0 = nxf - x^2 f'\,, \tag{3}$$

$$f_{k+1} = f_k \circ f_k\,, \quad f_{k+1} = f_k \circ g_k \quad \text{für } k \geqq 0\,.$$

Dann gilt für $k \geqq 0$ *und* $m = 2^k$

$$f_k(x) = (-1)^n c^m \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i^m)\,, \tag{4}$$

$$g_k(x) = -c^m x \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x - \alpha_j^m)\,. \tag{5}$$

Beweis durch vollständige Induktion. Nach (3) ist

$$g_0(x) = cx\left[\sum_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x - \alpha_j) - \sum_{i=1}^{n} x \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x - \alpha_j)\right] =$$

$$= -cx\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x - \alpha_j)\,,$$

sodass (5) und auch (4) gilt für $k = 0$. Setzen wir die Gültigkeit von (4) und (5) für $k \geqq 0$ voraus; dann ist

$$f_{k+1}(x^2) = f_k(x)\, f_k(-x) = c^{2m}\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i^m)\prod_{i=1}^{n}(-x - \alpha_i^m) =$$

$$= (-1)^n c^{2m}\prod_{i=1}^{n}(x^2 - \alpha_i^{2m})\,,$$

$$g_{k+1}(x^2) = \frac{(-1)^n}{2}\, c^{2m} x \left[\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i^m)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}(-x - \alpha_j^m) - \right.$$

$$\left. - \prod_{i=1}^{n}(-x - \alpha_i^m)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x - \alpha_j^m)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2}\, c^{2m} x \sum_{i=1}^{n}\alpha_1 [(x - \alpha_i^m) - (-x - \alpha_i^m)]\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(-x^2 + \alpha_j^{2m}) =$$

$$= -c^{2m}x^2 \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x^2 - \alpha_j^{2m})\,,$$

sodass (4) und (5) auch für $k + 1$ gelten.

Zum Beweis der Annäherungsformeln werden wir den Hilfssatz 2 gebrauchen. Es werden dort einige Symbole benutzt. Zuerst $\ll$ und $\doteq$ bedeuten „sehr kleiner“ und „angenähert“ und haben den folgenden Sinn: für $a \geqq 0$ und $b > 0$ bedeutet $a \ll b$, dass $\frac{a}{b} < \varepsilon$ ist, wo ε eine vorher festgestellte genug kleine Zahl ist. Je ε kleiner ist, desto genauer gilt die angenäherte Gleichheit $\doteq$. Bei der Rechnung mit angenäherten Gleichheiten benutzt man nämlich nur die Tatsache, dass für $|a| \ll |b|$ $a + b \doteq b$ ist. Die angenäherte Gleichheit von Polynomen bedeutet die angenäherte Gleichheit von entsprechenden Koeffizienten.

Schliesslich schreiben wir für ein Polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ und $k \leqq l$

$$[P(x)]_{x^k}^{x^l} = \sum_{i=k}^{l} p_i x^i . \tag{6}$$

Hilfssatz 2. *Es seien $u_1, \ldots, u_n$ komplexe Zahlen derart, dass für feste Indizes p, q, $0 \leqq p \leqq q \leqq n$ und beliebige ganze i, j, k, $1 \leqq i \leqq p < j \leqq q < k \leqq n$ stets*

$$|u_k| \ll |u_j| \ll |u_i| \tag{7}$$

gilt.

Dann ist

$$\left[\prod_{i=1}^{n} (x + u_i)\right]_{x^{n-q}}^{x^{n-p}} \doteq u_1 \ldots u_p x^{n-q} \prod_{i=p+1}^{q} (x + u_i) . \tag{8}$$

Sind noch $\omega_1, \ldots, \omega_n$ solche komplexe Zahlen, dass für positive Konstanten c_1, c_2 mit $c_1 < c_2$, aber in keiner Weise $c_1 \ll c_2$,[1]

$$c_1 < |\omega_i| < c_2 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

gilt, dann

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x + u_j)\right]_{x^{n-q-1}}^{x^{n-p-1}} \doteq u_1 \ldots u_p \left[x^{n-q} \sum_{i=p+1}^{q} \omega_i \prod_{\substack{j=p+1\\ j\neq i}}^{q} (x + u_j) + \right.$$
$$\left. + x^{n-q-1} \sum_{k=q+1}^{n} \omega_k \prod_{i=p+1}^{q} (x + u_i)\right] . \tag{9}$$

Beweis. Es ist nämlich für $\varepsilon_j = 0$ oder 1

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (x + u_i)\right]_{x^{n-q}}^{x^{n-p}} = \sum_{k=p}^{q} \sum_{\Sigma \varepsilon_i = k} u_1^{\varepsilon_1} \ldots u_n^{\varepsilon_n} x^{n-k} \doteq$$
$$\doteq x^{n-q} \sum_{k=p}^{q} u_1 \ldots u_p \sum_{\Sigma \varepsilon_i = k-p} u_{p+1}^{\varepsilon_{p+1}} \ldots u_q^{\varepsilon_q} x^{q-k} =$$
$$= u_1 \ldots u_p x^{n-q} \sum_{k=0}^{q-p} \sum_{\Sigma \varepsilon_i = k} u_{p+1}^{\varepsilon_{p+1}} \ldots u_q^{\varepsilon_q} x^{q-p-k} =$$
$$= u_1 \ldots u_p x^{n-q} \prod_{i=p+1}^{q} (x + u_i) .$$

[1]) Wir brauchen, dass noch für $1 \leqq i \leqq p < j \leqq q < k \leqq n$ und beliebige $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$ $|\omega_\alpha u_k| \ll |\omega_\beta u_j| \ll |\omega_\gamma u_i|$ gelte.

Schliesslich

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x+u_j)\right]_{x^{n-q-1}}^{x^{n-p-1}}=\left[\prod_{k=p+1}^{n}(x+u_k)\sum_{i=1}^{p}\omega_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(x+u_j)\right]_{x^{n-q-1}}^{x^{n-p-1}}+$$

$$+\left[\prod_{k=1}^{p}(x+u_k)\prod_{l=q+1}^{n}(x+u_l)\sum_{i=p+1}^{q}\omega_i\prod_{\substack{j=p+1\\ j\neq i}}^{q}(x+u_j)\right]_{x^{n-q-1}}^{x^{n-p-1}}+$$

$$+\left[\prod_{k=1}^{q}(x+u_k)\sum_{i=q+1}^{n}\omega_i\prod_{\substack{j=q+1\\ j\neq i}}^{n}(x+u_j)\right]_{x^{n-q-1}}^{x^{n-p-1}}; \qquad (10)$$

nach (8) gilt

$$\left[\prod_{k=p+1}^{n}(x+u_k)\sum_{i=1}^{p}\omega_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(x+u_j)\right]_{x^{n-q}}^{n-p}\doteq\left(\sum_{i=1}^{p}\omega_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}u_j\right)x^{n-p}\prod_{k=p+1}^{q}(x+u_k), \qquad (11)$$

$$\left[\prod_{k=1}^{p}(x+u_k)\prod_{l=q+1}^{n}(x+u_l)\sum_{i=p+1}^{q}\omega_i\prod_{\substack{j=p+1\\ j\neq i}}^{q}(x+u_j)\right]_{x^{n-q}}^{x^{n-p-1}}\doteq$$

$$\doteq u_1\ldots u_p x^{n-q}\sum_{i=p+1}^{q}\omega_i\prod_{\substack{j=p+1\\ j\neq 1}}^{q}(x+u_j), \qquad (12)$$

$$\left[\prod_{k=1}^{q}(x+u_k)\sum_{i=q+1}^{n}\omega_i\prod_{\substack{j=q+1\\ j\neq i}}^{n}(x+u_j)\right]_{x^{n-q-1}}^{x^{n-p-1}}\doteq$$

$$\doteq\left(\sum_{i=q+1}^{n}\omega_i\right)u_1\ldots u_p x^{n-q-1}\prod_{i=p+1}^{q}(x+u_i). \qquad (13)$$

Der Koeffizient bei x^{n-q-1} auf den linken Seite von (11) ist eine Summe von Produkten, von denen jedenfalls mindestens ein u_j mit $j < p$ ist. Dieser Koeffizient ist daher $\leqslant$ als der Koeffizient bei x^{n-q-1} in (13). Ähnlicherweise beweist man, dass auch der Koeffizient bei x^{n-q-1} auf der linken Seite von (12) $\leqslant$ als der zugehörige in (13) ist. Vergleichen wir endlich die linken Seiten von (11) und (13). Es zeigt sich, dass jeder Koeffizient in (11) und (13) bei x^k mit $k \leqq n - p - 1$ (nur diese k interessieren uns) eine Summe von Produkten (bis auf ω_i) der u_l ist, wobei die Zahl der u_l mit $l > p$ in (11) um Eins grösser ist als in (13). In Vergleichung mit (13) ist also die linke Seite von (11) $\doteq 0$. Hieraus folgt (19).

3. Es sei nun eine Gleichung

$$f(x)\equiv\sum_{i=0}^{n}a_i x^{n-i}=0, \quad a_0 a_n \neq 0,\text{ [2]} \qquad (14)$$

---

[2]) Die Voraussetzung $a_n \neq 0$ ist nicht wesentlich und ist nur der Kürze halber getan.

mit reellen Koeffizienten gegeben. Ihre Wurzeln seien

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \ldots, \alpha_{p_1} \ (p_1 \geqq 1) \text{ vom Betrag } r_1 \,, \\ \alpha_{p_1+1}, \ldots, \alpha_{p_2} \ (p_2 > p_1) \text{ vom Betrag } r_2 \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{p_{v-1}+1}, \ldots, \alpha_{p_v} \ (p_v > p_{v-1}) \text{ vom Betrag } r_v, \text{ wobei} \\ \qquad r_1 > r_2 > \ldots > r_v > 0 \,. \end{array} \tag{15}$$

Für $v = 1$ ist (14) eine Gleichung, die durch die Substitu $= r_1 y$ $r_1 = \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}$ und Abspaltung der reellen Wurzeln in eine reziproke Gleichung überführt werden kann.

Um für $v > 1$ die Gleichung (14) angenähert zu lösen, bilden wir die Folgen $(k = 0, 1, \ldots)$

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \overset{(k)}{a}_i x^{n-i} \,, \quad g_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \overset{(k)}{b}_i x^{n-1} \tag{16}$$

nach der Vorschrift (3), sodass insbesondere

$$f_0(x) = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \,,$$

$$g_0(x) = \sum_{i=0}^{n} \overset{(0)}{b}_i x^{n-i}$$

gilt mit

$$\overset{(0)}{b}_i = (i+1)\, a_{i+1} \text{ für } 0 \leqq i < n, \ \overset{(0)}{b}_n = 0 \,.$$

Bezeichnen wir für $i = 1, \ldots, v$

$$\overset{(k)}{L}_i(x) = \frac{1}{x^{n-p_i}} \Big[f_k(x) \Big]_{x^{n-p_i}}^{x^{n-p_{i-1}}} \,,^{3)} \tag{17}$$

$$\overset{(k)}{M}_i(x) = \frac{1}{x^{n-p_i}} \Big[g_k(x) \Big]_{x^{n-p_i}}^{x^{n-p_{i-1}}} \,, \tag{18}$$

so gelten die folgenden drei Sätze:

Satz 1. *Falls für ein genügend grosses k und ein Index i,* $1 \leqq i \leqq v$,

$$r_{i+1}^{2^k} \ll r_i^{2^k} \ll r_{i-1}^{2^k} \,{}^{4)}$$

gilt, dann ist die Summe der Wurzeln

$$(-1)^n \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} \alpha_j \doteq \frac{\overset{(k)}{b}_{p_i}}{\overset{(k)}{a}_{p_i}} - \frac{\overset{(k)}{b}_{p_{i-1}}}{\overset{(k)}{a}_{p_{i-1}}} \,. \tag{19}$$

---

[3]) Mit $p_0 = 0$.

[4]) Mit $r_0 = \infty$, $r_{v+1} = 0$, sodass $r_{v+1} \ll r_i \ll r_0$ für $i = 1, \ldots, v$.

Beweis. Nach (4) und (8) gilt (für $u_i = -\alpha_i^{2^k}$)

$$\overset{(k)}{a}_{p_{i-1}} \doteq (-1)^{n+p_{i-1}} a_0^{2^k}\alpha_1^{2^k} \dots \alpha_{p_{i-1}}^{2^k}, \tag{20}$$

$$\overset{(k)}{a}_{p_i} \doteq (-1)^{n+p_i} a_0^{2^k}\alpha_1^{2^k} \dots \alpha_{p_i}^{2^k}, \tag{20'}$$

sowie nach (5) und (9) (für $\omega_j = \alpha_j$)

$$\overset{(k)}{b}_{p_{i-1}} = (-1)^{p_{i-1}+1} a_0^{2^k} \sum_{j=p_{i-1}+1}^{n} \alpha_j\alpha_1^{2^k} \dots \alpha_{p_{i-1}}^{2^k}, \tag{21}$$

$$\overset{(k)}{b}_{p_i} = (-1)^{p_i+1} a_0^{2^k} \sum_{j=p_i+1}^{n} \alpha_j\alpha_1^{2^k} \dots \alpha_{p_i}^{2^k}. \tag{21'}$$

Hieraus folgt ausser der bekannten Formel

$$r_i^{p_i-p_{i-1}} \doteq \sqrt[2^k]{(-1)^{p_i-p_{i-1}} \frac{\overset{(k)}{a}_{p_i}}{\overset{(k)}{a}_{p_{i-1}}}} \tag{22}$$

sogleich (19).

Satz 2. *Es sei u eine genügend einfache*[5]) *Wurzel von* $L_i^{(k)}(x) = 0$ *unter Voraussetzungen des vorigen Satzes. Dann ist die Zahl*

$$\alpha = (-1)^{n-1} \frac{\overset{(k)}{M}_i(u)}{u\,\overset{(k)}{L'_i}(u)}. \tag{23}$$

angenähert gleich einer der Wurzeln

$$\alpha_{p_{i-1}+1}, \dots, \alpha_{p_i}.$$

Beweis. Da nach (17), (4) und (8) (für $u_j = -\alpha_j^{2^k}$)

$$\overset{(k)}{L}_i(x) \doteq (-1)^{n+p_{i-1}} a_0^{2^k}\alpha_1^{2^k} \dots \alpha_{p_{i-1}}^{2^k} \prod_{l=p_{i-1}+1}^{p_i} (x - \alpha_l^{2^k}), \tag{24}$$

ist u wegen der Einfachheit angenähert gleich einer der Zahlen $\alpha_{p_{i-1}+1}^{2^k}, \dots, \alpha_{p_i}^{2^k}$, z. B. $u \doteq \alpha_\mu^{2^k}$. Nach (18), (5) und (9) gilt

$$\overset{(k)}{M}_i(x) \doteq (-1)^{p_{i-1}+1} a_0^{2^k}\alpha_1^{2^k} \dots \alpha_{p_{i-1}}^{2^k} \Bigg[x \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} \alpha_j \prod_{\substack{l=p_{i-1}+1 \\ l \neq j}}^{p_i} (x - \alpha_l^{2^k}) + \\ + \sum_{j=p_i+1}^{n} \alpha_j \prod_{l=p_{i-1}+1}^{p_i} (x - \alpha_l^{2^k})\Bigg],$$

---

[5]) Das ist eine Wurzel, die in einer geeigneten Umgebung keine andere Wurzel besitzt.

sodass

$$\overset{(k)}{M}_i(u) \doteq \overset{(k)}{M}_i(\alpha_\mu^{2^k}) \doteq (-1)^{p_{i-1}+1}\, a_0^{2^k}\alpha_1^{2^k} \ldots \alpha_{p_{i-1}}^{2^k} \cdot \alpha_\mu^{2^{k+1}} \prod_{\substack{j=p_{i-1}+1 \\ j\neq\mu}}^{p_i} (\alpha_\mu^{2^k} - \alpha_j^{2^k}) \doteq$$

$$\doteq (-1)^{n-1}\, \alpha_\mu u\, \overset{(k)}{L}{}_i'(u)\,,$$

denn $\overset{(k)}{L}{}_i'(u) \neq 0$.

Anmerkung. Aus (23) folgt, dass im Falle, dass alle Wurzeln von $\overset{(k)}{L}_i(u) = 0$ genügend einfach sind, durch Elimination von u aus der Gleichungen

$$(-1)\, \overset{(k)}{M}_i(u) + xu\, \overset{(k)}{L}{}_i'(u) = 0\,, \quad \overset{(k)}{L}_i(u) = 0$$

eine Gleichung des Grades $p_i - p_{i-1}$ in x entsteht, deren Wurzeln angenähert $\alpha_{p_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{p_i}$ sind.

Die Formel (23) war angenähert. Im folgenden Satz wird eine exakte Formel für α_j mittels $\alpha_j^{2^k}$ angegeben:

Satz 3. *Es sei u eine einfache Wurzel von $f_k(x) = 0$. Dann ist*

$$\alpha = (-1)^{n-1} \frac{g_k(u)}{u\, f_k'(u)} \tag{24}$$

eine (einfache) Wurzel von $f(x) = 0$.

Beweis. Aus (4) folgt sogleich, dass $u = \alpha_j^{2^k}$ für ein bestimmtes j, $1 \leqq j \leqq n$. Nach (5) gilt

$$g_k(u) = -a_0^{2^k} u\alpha_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} (\alpha_j^{2^k} - \alpha_i^{2^k}) = (-1)^{n-1} u\alpha_j\, f_k'(u)\,;$$

da u eine einfache Wurzel von $f_k(x) = 0$ ist, folgt $f_k'(u) \neq 0$ und (24) ist bewiesen.

In folgenden zwei Sätzen werden wir das Verfahren zum Auffinden der im Betrag grössten Eigenwerte einer Matrix benutzen.

Satz 4. *Wenn $f(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ für eine quadratische n-reihige Matrix $A = \|a_{ij}\|$ (E ist die Einheitsmatrix), dann gilt für die Polynome $f_k(x)$, $g_k(x)$ aus* (3)

$$f_k(\lambda) = \det(A^{2^k} - \lambda E)\,, \tag{25}$$

$$-g_k(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11}, & \overset{(k)}{a}_{12}, & \ldots, & \overset{(k)}{a}_{1n} \\ \lambda a_{21}, & \overset{(k)}{a}_{22} - \lambda, & \ldots, & \overset{(k)}{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{n1}, & \overset{(k)}{a}_{n2}, & \ldots, & \overset{(k)}{a}_{nn} - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \overset{(k)}{a}_{11}-\lambda, & \lambda\overset{(k)}{a}_{12}, & \dots, & \overset{(k)}{a}_{1n} \\ \overset{(k)}{a}_{21}, & \lambda\overset{(k)}{a}_{22}, & \dots, & \overset{(k)}{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{(k)}{a}_{n1}, & \lambda\overset{(k)}{a}_{n2}, & \dots, & \overset{(k)}{a}_{nn}-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} \overset{(k)}{a}_{11}-\lambda, & \overset{(k)}{a}_{12}, & \dots, & \lambda\overset{(k)}{a}_{1n} \\ \overset{(k)}{a}_{21}, & \overset{(k)}{a}_{22}-\lambda, & \dots, & \lambda\overset{(k)}{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{(k)}{a}_{n1}, & \overset{(k)}{a}_{n2}, & \dots, & \lambda\overset{(k)}{a}_{nn} \end{vmatrix}, \tag{26}$$

wo $A^{2^k} = \|\overset{(k)}{a}_{ij}\|$.

Beweis. Die Gleichung (25) folgt direkt aus (4). Zum Beweis von (26) nehmen wir in Acht, dass in (26) $g_k(\lambda)$ gleich dem Koeffizienten bei der Unbestimmten x des Polynoms $\det(A^{2^k}-\lambda E-\lambda Ax)$ ist. Es genügt also zu beweisen, dass für $k \geqq 0$

$$g_k(\lambda) = \frac{1}{x}[\det(A^{2^k}-\lambda E-\lambda Ax)]_x^x \tag{26'}$$

gilt. Für $k = 0$ ist nach (3) die Gleichung (26), also auch (26′), wahr:

$$-g_0(\lambda) = -n\lambda\det(\lambda E-A)+\lambda\begin{vmatrix} \lambda, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ 0, & a_{22}-\lambda, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}+$$

$$+\dots+\lambda\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \dots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ \lambda a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \dots, & \lambda a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \dots, & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & \lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nehmen wir an, dass (26′) für eine ganze Zahl $k \geqq 0$ schon bewiesen ist. Dann gilt wegen $f_k(\lambda) = [\det(A^{2^k}-\lambda E-\lambda Ax)]_{x^0}^{x^0}$ und wegen der Formeln

$$[P(x)]_{x^0}^{x^0}[Q(x)]_x^x+[P(x)]_x^x[Q(x)]_{x^0}^{x^0} = [P(x)\,Q(x)]_x^x, \quad \frac{1}{2x}[P(2x)]_x^x = \frac{1}{x}[P(x)]_x^x:$$

$$g_{k+1}(\lambda^2) = \tfrac{1}{2}[f_k(\lambda)\,g_k(-\lambda)+g_k(\lambda)\,f_k(-\lambda)] =$$

$$= \frac{1}{2x}[\det(A^{2^k}-\lambda E-\lambda Ax)]_{x^0}^{x^0}[\det(A^{2^k}+\lambda E+\lambda Ax)]_x^x+$$

$$+\frac{1}{2x}\left[\det\left(A^{2^k}-\lambda E-\lambda Ax\right)\right]_x^x\left[\det\left(A^{2^k}+\lambda E+\lambda Ax\right)\right]_{x^0}^{x^0}=$$

$$=\frac{1}{2x}\left[\det\left(A^{2^{k+1}}-\lambda^2E-2\lambda^2Ax-\lambda^2A^2x^2\right)\right]_x^x=$$

$$=\frac{1}{x}\left[\det\left(A^{2^{k+1}}-\lambda^2E-\lambda^2Ax\right)\right]_x^x,$$

also gilt (26′) auch für $k+1$.

Aus diesem Satz folgt, dass es in diesem Fall genügt, die Folge A^{2^k} durch aufeinanderfolgende Quadrieren und das Polynom $g_k(\lambda)$ nur für das einzige geeignete k auszurechnen und zur Bestimmung von Eigenwerten von A zu benützen. Das ist ein Vorteil; dagegen müsste man die Elemente $\overset{(k)}{a}_{ij}$ mit sehr hohen Genauigkeit ausrechnen, damit man alle Eigenwerte erhalte. Deswegen werden wir uns im folgenden Satz nur auf die im Betrag grössten Eigenwerte beschränken, wobei diese Genauigkeit nicht so dringend nötig ist.

Satz 5. *Falls A einen einzigen Eigenwert λ vom maximalen Betrag besitzt, so gilt für ein genügend grosses k angenähert*

$$\lambda \doteq \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ij}\overset{(k)}{a}_{ji}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ii}}, \tag{27}$$

$$|\lambda| \doteq \sqrt[2^k]{\sum_{i=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ii}}. \tag{28}$$

Besitzt A zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 vom maximalen Betrag, dann gilt angenähert

$$\lambda_1\lambda_2 \doteq \sqrt[2^{k+1}]{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ii}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ij}\overset{(k)}{a}_{ji}}, \tag{29}$$

$$\lambda_1+\lambda_2 \doteq 2\,\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ll}\sum\limits_{i,j=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ij}\overset{(k)}{a}_{ji}-\sum\limits_{i,j,l=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{i,j}\overset{(k)}{a}_{jl}\overset{(k)}{a}_{li}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ii}\right)^2-\sum\limits_{i,j=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ij}\overset{(k)}{a}_{ji}}. \tag{30}$$

B e w e i s. Aus (25) und (26) folgt für

$$f_k(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}A_i\lambda^{n-i},\quad g_k(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}B_i\lambda^{n-i},$$

$$A_0=(-1)^n,\quad A_1=(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\overset{(k)}{a}_{ii},\quad A_2=(-1)^n\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\begin{vmatrix}\overset{(k)}{a}_{ii}, & \overset{(k)}{a}_{ij}\\ \overset{(k)}{a}_{ji}, & \overset{(k)}{a}_{jj}\end{vmatrix}=$$

$$= \frac{(-1)^n}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ii}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ij}\overset{(k)}{a}_{ji}\right],$$

$$B_0 = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,, \quad B_1 = (-1)^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{ii}, & \overset{(k)}{a}_{ij} \\ a_{ji}, & \overset{(k)}{a}_{jj} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \sum_{i=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ii} + (-1)^n \sum_{i,j=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ij} a_{ji}\,,$$

$$B_2 = (-1)^n \sum_{\substack{i,j,l=1 \\ j<l}}^{n} \begin{vmatrix} a_{ii}, & \overset{(k)}{a}_{ij}, & \overset{(k)}{a}_{il} \\ a_{ji}, & \overset{(k)}{a}_{jj}, & \overset{(k)}{a}_{jl} \\ a_{li}, & \overset{(k)}{a}_{lj}, & \overset{(k)}{a}_{ll} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2} \sum_{i}^{n} a_{ii} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ii}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ij}\overset{(k)}{a}_{ji}\right] +$$

$$+ (-1)^n \sum_{i,j,l=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ij}\overset{(k)}{a}_{jl} a_{li} + (-1)^{n-1} \sum_{l=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ll} \sum_{i,j=1}^{n} \overset{(k)}{a}_{ij} a_{ji}\,.$$

Für ein genügend grosses k gelten, falls λ der einzige Eigenwert vom maximalen Betrag ist, nach (19) bzw. (22) für $i = 1$, $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ wirklich die Gleichungen (27) bzw. (28). Falls es zwei Eigenwerte $\lambda_1 \lambda_2$ vom grössten Betrag gibt, so folgen die Gleichungen (29), (30) direkt aus (22) und (19) für $i = 1$, $p_0 = 0$, $p_1 = 2$.

4. In diesem letzten Paragraphen werden noch einige praktische Winke wegen der Vollständigkeit erwähnt. Zuerst ist es bei der Lösung einer Gleichung durch das Gräffesche Verfahren wichtig, die Zahl der Wurzeln von demselben oder fast demselben Betrag, d. h. diejenige Zahlen p_i aus dem vorigen Paragraphen festzulegen. Das geschieht bekanntlich so, dass man bei der Bildung der Folge $f_k(x)$ in Acht nimmt, welche der Koeffizienten $\overset{(k)}{a}_i$ sich beim festen i nach einigen Schritten *regelmässig* benehmen in dem Sinne, dass

$$\overset{(k+1)}{a}_i \doteq (-1)^i \,[\overset{(k)}{a}_i]^2\,,$$

besser gesagt, der in der Formel

$$\overset{(k+1)}{a}_i = \sum_{j=\max(0,2i-n)}^{\min(2i,n)} (-1)^j \,\overset{(k)}{a}_j \overset{(k)}{a}_{2i-j}$$

das Glied $(-1)^i[\overset{(k)}{a}_i]^2$ immer mehr vorwiegt.

Die Indizes i der regelmässig sich benehmenden Koeffizienten sind dann (im allgemeinen) die Zahlen $p_0 = 0,\ p_1, \ldots, p_v = n$.

Der am meisten auftretende Fall für eine Gleichung ist derjenige, wenn $p_k - p_{k-1}$ gleich 1 bzw. 2 ist, d. h., dass es eine reelle Wurzel $\alpha_{p_{k+1}+1}$ vom Betrag

r_k bzw. ein Paar imaginärer Wurzeln vom Betrag r_k gibt. Im ersten Fall wird aus (19) die Wurzel $\alpha_{p_{i-1}+1}$ bestimmt, bzw. durch (22) noch verbessert. Im zweiten Fall berechnet man den Betrag von $\alpha_{p_{k-1}+1}$ und α_{p_k} aus (22) und ihre Summe aus (19), sodass diese zwei Wurzeln die Gleichung

$$\alpha^2 + (-1)^n \left(\frac{\overset{(k)}{b}_{p_{k-1}}}{\overset{(k)}{a}_{p_{k-1}}} - \frac{\overset{(k)}{b}_{p_k}}{\overset{(k)}{a}_{p_k}} \right) \alpha + \sqrt[2^k]{\frac{\overset{(k)}{a}_{p_k}}{\overset{(k)}{a}_{p_{k-1}}}} = 0$$

angenähert erfüllen.

Wenn doch mehrere Wurzeln fast den gleichen Betrag besitzen, kann man die zugehörige Gleichung $\overset{(k)}{L}_i(x) = 0$ aus (17) auflösen und die Wurzeln durch (23) bzw. (24) ermitteln.

Was die Genauigkeit der numerischen Ausrechnung betrifft, kann man empfehlen, die anfänglichen $f_k(x)$ um zwei relative Dezimalstellen genauer ausrechnen als der maximale zulässige relative Fehler der Wurzeln angibt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *S. Brodetsky, G. Smeal*: On Graeffe's Method for Complex Roots of Algebraic Equations, Proc. Cambridge Phil. Soc. *22* (1924), 83—87.

[2] *D. H. Lehmer*: The Graeffe Process As Applied to Power Series, MTAC *1* (1945), 377—383.

Резюме

О МЕТОДЕ ГРЭФЕ

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага.

(Поступило в редакцию 21/V 1955 г.)

Работа посвящается видоизменению метода Бродетского и Смила [1] для решения алгебраического уравнения по методу Грэфе. В теоремах 2 и 3 приводятся приближенные и точные формулы, определяющие корни исходного уравнения в виде рациональных функций соответственно приближенных и точных 2-х степеней этих корней, которые можно получить по методу Грэфе. В теореме 5 этот метод применяется к вычислению собственных чисел матрицы наибольшей абсолютной величины, даже и в том случае, когда эти собственные числа мнимы.