Czechoslovak Mathematical Journal

Antonín Špaček

Zufällige Gleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 462–466

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100162

ZUFÄLLIGE GLEICHUNGEN

ANTONÍN ŠPAČEK, Praha.

(Eingelangt 24. I. 1955.)

In dieser Arbeit wird eine wahrscheinlichkeitstheoretische Verallgemeinerung des BANACHschen Fixpunktsatzes formuliert und bewiesen. Zu diesem Zweck wird der Begriff der zufälligen Transformation, die der LIPSCHITZschen Bedingung genügt, eingeführt. Unter gewissen Voraussetzungen ist die Transformation, die jeder Realisation der zufälligen Transformation ihren Fixpunkt zuordnet, eine verallgemeinerte zufällige Grösse. Als Anwendungsbeispiel wird ein Existenzsatz für die Lösung linearer zufälliger Integralgleichungen bewiesen.

Es ist oft möglich, die Frage der Lösungen von Gleichungen auf die Anwendung des klassischen BANACHschen Fixpunktsatzes zurückzuführen. Es sei T eine Transformation des vollständigen Raumes $X \neq 0$ in sich, die der LIPSCHITZschen Bedingung mit der Konstante $0 \leq c < 1$ genügt, d. h. für jedes Paar $x, y \in X$

$$\varrho(T(x), T(y)) \leqq c\varrho(x, y) ,$$

wobei ϱ die Metrik in X bedeutet. Der BANACHsche Satz besagt, dass unter diesen Voraussetzungen genau ein Fixpunkt, d. h. genau ein $x_0 \in X$ mit der Eigenschaft $T(x_0) = x_0$ existiert. Den Anwendungen auf verschiedene Gleichungstypen entsprechen verschiedene Räume X. Wir wollen uns auf zwei wichtige Spezialfälle beschränken, nämlich auf den Fall $X = R$, wobei R den Raum der reellen Zahlen mit der üblichen Metrik $\varrho(x, y) = |x - y|$ bedeutet und $X = C$, wobei mit C der Raum aller reeller im abgeschlossenen Interval $[0,1]$ stetiger Funktionen mit der Metrik

$$\varrho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

bezeichnet wird. Es ist wohl bekannt [1], dass die Räume R und C beide vollständig und separabel sind.

Der BANACHsche Satz ist einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Verallgemeinerung fähig und man erhält hiermit ein Hilfsmittel zur Lösung zufälliger Gleichungen. Die Transformation T muss natürlich durch eine zufällige Transformation ersetzt werden. Es sei $(M, \mathfrak{M})$ ein Ereignisraum, d. h. eine Menge

$M \neq 0$ und eine σ-Algebra $\mathfrak{M}$ von Teilmengen von M, X ein vollständiger Raum mit der Metrik ϱ und $\mathfrak{S}$ die σ-Algebra der BORELschen Teilmengen von X mit einer Basis $\mathfrak{G}$. Eine Transformation g von M in X heisst verallgemeinerte zufällige Grösse, wenn

$$\{u : g(u) \in G\} \in \mathfrak{M}$$

für jede Menge $G \in \mathfrak{G}$, oder $G \in \mathfrak{S}$, was offenbar dasselbe bedeutet. Die Transformation $T(u, x)$, die für $u \in M$ und $x \in X$ definiert ist und deren Werte in X liegen, heisst zufällige Transformation, wenn sie für jeden festen Punkt $x \in X$ eine verallgemeinerte zufällige Grösse ist. Wir wollen sagen, dass die zufällige Transformation $T(u, x)$ der LIPSCHITZschen Bedingung mit der Konstante $c \geqq 0$ genügt, falls für alle $u \in M$, $x, y \in X$

$$\varrho(T(u, x), T(u, y)) \leq c\varrho(x, y) .$$

Wenn $X = R$ und $g(u)$ eine zufällige Grösse bedeutet, so ist z. B.

$$T(u, x) = g(u) + \tfrac{1}{2}x$$

eine zufällige Transformation, die der LIPSCHITZschen Bedingung mit der Konstante $c = \frac{1}{2}$ genügt. Wenn in $\mathfrak{M}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass definiert ist, so würde es genügen, die Erfüllung der LIPSCHITZschen Bedingung nur fast sicher, d. h. mit Wahrscheinlichkeit Eins zu fordern, oder nach [10] eine gleichwertige Anforderung anzugeben, dies kommt aber nach einem Satze von DOOB [2] im wesentlichen auf dasselbe hinaus und demzufolge ist die obenerwähnte Definition für den hier verfolgten Zweck völlig ausreichend.

Um von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Fixpunkte einer zufälligen Transformation sprechen zu können, muss die spezielle Transformation f, die jedem $u \in M$ den Fixpunkt der Transformation $T(u, x)$ zuordnet, eine verallgemeinerte zufällige Grösse sein. Unter gewissen Voraussetzungen ist dies tatsächlich der Fall. Ein ganz einfaches Resultat in dieser Richtung ist der

Satz 1. *Wenn $X = R$ und die zufällige Funktion $T(u, x)$ der* LIPSCHITZ*schen Bedingung mit $0 \leq c < 1$ genügt, so ist die Funktion f, die jedem $u \in M$ den Fixpunkt der Funktion $T(u, x)$ zuordnet, eine zufällige Grösse. Die Verteilungsfunktion von f ist durch die Identität*

$$\{u : f(u) < a\} = \{u : T(u, a) < a\} , \tag{1}$$

die für alle $a \in R$ gilt, bestimmt.

Beweis: Dass f tatsächlich eine zufällige Grösse ist, folgt sofort aus der Identität (1), die durch Ausnützung der im Satze 1 angegebenen Voraussetzungen ohne Schwierigkeiten verifiziert werden kann.

Der Inhalt des Satzes 1 ist besonders anschaulich und die Identität (1) gestattet, die Verteilungsfunktion des ,,zufälligen Fixpunktes“ numerisch zu berechnen.

Für die Anwendung auf zufällige Funktionalgleichungen ist folgender Satz nützlich:

Satz 2. *Es sei* $(M, \mathfrak{M})$ *ein Ereignisraum und* $T(u, x)$ *eine zufällige Transformation, die folgenden Bedingungen genügen:* (a) *in* M *existiert eine Metrik* δ, *sodass* M *in Bezug auf diese Metrik separabel ist,* (b) $\mathfrak{M}$ *enthält alle sphärische Umgebungen in* M, (c) $T(u, x)$ *genügt der* LIPSCHITZ*schen Bedingung mit der Konstante* $0 \leq c < 1$, (d) *für jedes feste* $z_0 \in X$ *ist die Transformation* $T(u, z_0)$ *von* M *in* X *stetig. Dann ist die Transformation* f, *die jedem* $u \in M$ *den Fixpunkt der Transformation* $T(u, x)$ *zuordnet, eine verallgemeinerte zufällige Grösse.*

Beweis: Nach (a) und (b) sind alle BORELsche Teilmengen von M in $\mathfrak{M}$ enthalten und es genügt also zu beweisen, dass f stetig ist. Aus (c) folgt sofort

$$\varrho(f(u), f(v)) \leq \frac{1}{1-c} \varrho\,(T(u, f(v)), T(v, f(v))). \tag{2}$$

Nach (d) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\vartheta(\varepsilon, v) > 0$, sodass

$$\varrho(T(u, f(v)), T(v, f(v))) < \varepsilon(1-c)$$

für $\delta(u, v) < \vartheta(\varepsilon, v)$, also wegen (2)

$$\varrho(f(u), f(v)) < \varepsilon$$

für $\delta(u, v) < \vartheta(\varepsilon, v)$, w. z. b. w.

Durch Spezialisierung der Voraussetzungen im Satze 2 erhält man den

Satz 3. *Es sei* M *die Menge der für* $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ *definierten, stetigen und durch die Konstante* $\alpha > 0$ *beschränkten Funktionen* $u(t, s)$ *und* $\mathfrak{M}$ *eine* σ*-Algebra von Teilmengen von* M, *welche alle Teilmengen* $\{u : u(t, s) < r\}$ *von* M *für* $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ *und* $r \in R$ *enthält. Dann ist die Transformation* f, *die jedem* $u \in M$ *die zu* $X = C$ *gehörige Lösung der Integralgleichung*

$$x(t) = x_0(t) + \beta \int_0^1 u(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s \tag{3}$$

für $x_0 \in X = C$ *und* $|\beta| < \frac{1}{\alpha}$ *zuordnet, eine verallgemeinerte zufällige Grösse.*

Beweis: Nach [11] bezw. [9] genügt die Metrik

$$\delta(u, v) = \max_{0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1} |u(t, s) - v(t, s)|$$

der Bedingung (a) des Satzes 2. Wegen

$$\{u : \delta(u, v) < r\} = \bigcap_{t, s \in I_0} \{u : v(t, s) - r < u(t, s) < v(t, s) + r\},$$

wobei I_0 die Menge der rationalen Zahlen des abgeschlossenen Intervals [0,1] bedeutet, ist auch die Bedingung (b) erfüllt. Es sei $T(u, x)$ die Transformation, die jedem $u \in M$ und jedem $x \in C = X$ die Funktion

$$y(t) = x_0(t) + \beta \int_0^1 u(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s \tag{4}$$

aus $X = C$ zuordnet. Diese Transformation genügt offenbar den Bedingungen (c) und (d) des Satzes 2. Sie ist eine zufällige Transformation, denn nach (d) ist die Menge $\{u : T(u, z_0) \in G\}$ für jedes feste $z_0 \in X$ und jede feste Menge G einer offenen Basis $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}$ offen, also nach (b) und (a) zu $\mathfrak{M}$ gehörig. Nach Satz 2 ist die Zuordnung f der Fixpunkte der durch (4) definierten Transformation $T(u, x)$, d. h. der Lösungen der Integralgleichungen (3) den Elementen $u \in M$ eine verallgemeinerte zufällige Grösse.

Nach [7] ist die Funktion, die jedem $u \in M$ und jeden $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ die Zahl $u(t, s)$ zuordnet, $\mathfrak{M}$-messbar, d. h. eine zufällige Funktion. Wir sind also berechtigt die Integralgleichung (3) zufällige Integrallgeichung zu benennen. Die Bedingungen, unter welchen in $\mathfrak{M}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass existiert, sind z. B. in [3], [8] und [10] zu finden. Zufällige Funktionalgleichungen wurden, soweit dem Verfasser aus den Math. Reviews (1951) bekannt ist, zum ersten Mal von K. Itô [4], [5], [6] untersucht.

Der Satz 3 kann folgendermassen ergänzt werden:

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 3 *ist die Lösung der zufälligen* FREDHOLM*schen Integralgleichung* (3) *eine für* $0 \leqq t \leqq 1$ *definierte stetige zufällige Funktion.*

Beweis: Es sei $h(u, t)$ eine reelle Funktion, die jedem $u \in M$ und jedem $0 \leq t_0 \leq 1$ den Wert der Funktion $x = f(u)$ für $t = t_0$ zuordnet. Im Beweise des Satzes 2 haben wir bereits festgestellt, dass f stetig ist, also wegen $|x(t_0) - - y(t_0)| \leq \varrho(x, y)$ für $x, y \in X$, ist die Funktion $h(u, t)$ für jedes feste $t = t_0$ stetig. Demzufolge ist $\{u : h(u, t_0) < a\}$ für jedes $a \in R$ offen, also nach den Bedingungen (b) und (a) des Satzes 2 zu $\mathfrak{M}$ gehörig, d. h. eine zufällige Funktion. Die Stetigkeit von $h(u, t)$ folgt aus $X = C$.

Literatur

[1] *S. Banach*: Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.

[2] *J. L. Doob:* Stochastic processes depending on a continuous parameter, Trans. Amer. Math. Soc. *42*, (1937), 107—140.

[3] *J. L. Doob:* Probability in function space, Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), 15—30.

[4] *K. Itô:* On a stochastic integral equation, Proc. Japan. Acad. *22* (1946), 32—35.

[5] *K. Itô:* Stochastic differential equations in a differentiable manifold, Nagoya Math. J. 1 (1950), 35—47.

[6] *K. Itô:* On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc. *4* (1950).

[7] *A. N. Kolmogorov:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933.

[8] *H. B. Mann:* On the realization of stochastic processes by probability distributions in function spaces, Sankhyā *11* (1951), 3—8.

[9] *L. Pukánsky, A. Rényi:* On the approximations of measurable functions, Publ. Math. *2* (1951), 146—149.

[10] *A. Špaček:* Regularity properties of random transforms, Czechoslovak Math. J. *5* (1955), 143—151.

[11] *M. H. Stone:* Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 375—481.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

АНТОН ШПАЧЕК (Antonín Špaček), Прага.

(Поступило в редакцию 24/I 1955 г.)

Эта работа содержит обобщение с точки зрения теории вероятностй классической теоремы существования неподвижной точки оператора сближения, формулировка которой была дана С. Банахом. С этой целью вводится понятие случайного оператора, который удовлетворяет условию Липшица. При определённых предположениях оператор, который каждой реализации случайного оператора ставит в соответствие её неподвижную точку, является обобщенной случайной величиной. В качестве примера доказывается теорема существования для решения случайного интегрального уравнения Фредгольма.