Ivo Vrkoč

Об обращении теоремы Четаева

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 451–461

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100161`

ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЧЕТАЕВА

ИВО ВРКОЧ (Ivo Vrkoč), Прага.

(Поступило в редакцию 7/I 1955 г.)

В настоящей статье доказывается, что теорема Четаева и Ляпунова о неустойчивости нулевого интеграла системы дифференциальных уравнений допускает обращение и дается характеризация области неустойчивости.

О дифференциальных уравнениях

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

будем на протяжении всей статьи предполагать, что их правые части, равно как и частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны для $|x_i| \leqq a$ (a — положительная постоянная), $t \geqq 0$. Кроме того будем предполагать, что

$$X_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0\,, \quad i = 1, \ldots, n$$

так что уравнения (1) имеют решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Определение 1. *Решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ системы дифференциальных уравнений* (1) *мы назовем устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что для всех решений $x_i(t)$ системы* (1), *для которых выполняются неравенства*

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(0)| < \delta$$

будут выполняться неравенства

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(t)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \geqq 0\,.$$

Множество точек $[t, x_1, \ldots, x_n]$, для которых имеет место $t \geqq 0$

$$\max |x_i| < h,$$

мы обозначим через $P(h)$.

Приведем прежде всего несколько видоизмененную теорему Четаева.

Теорема 1. *Пусть для дифференциальных уравнений* (1) *существует функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, определенная на множестве $P(h)$ (где $0 < h \leqq a$),* *на котором она непрерывна, неотрицательна и ограничена, и пусть эта функция обладает еще следующими свойствами:*

1. *Если* $Q(h)$ *обозначает множество точек* $[t, x_1, \ldots, x_n]$, *в которых* $V(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$, *то* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ *имеет непрерывные частные производные в* $Q(h)$. *Для любого* $\alpha > 0$ *существует* $\beta > 0$ *так, что для всех точек* $[t, x_1, \ldots, x_n]$, *для которых* $V(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq \alpha > 0$, *имеет место*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \geqq \beta > 0\,.$$

2. *В каждой окрестности точки* $[0, \ldots, 0]$ *существует точка* $[x_1, \ldots, x_n]$ *такая, что*

$$V(0, x_1, \ldots, x_n) > 0\,.$$

Тогда решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *неустойчиво.*

В теореме Четаева обычно требуется существование функции

$$V(t, x_1, \ldots, x_n),$$

которая определена на открытом подмножестве $P(h)$, где она может принимать и отрицательные значения; однако на множестве $Q(h)$ она ограничена, непрерывна вместе с частными производными и выполняет условия 1. и 2. теоремы 1. Притом еще предполагается, что множсетво точек, для которых $V(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$, т. е. $Q(h)$, ограничено поверхностью $V = 0$ внутри множества $P(h)$.

Если положить

$$V^*(t, x_1, \ldots, x_n) = \max\,(0, V(t, x_1, \ldots, x_n))$$

и

$$V^*(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

в точках $P(h)$, где $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ не определено, то функция $V^*(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Доказательство теоремы Четаева станет ясным, если доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Для каждого решения* $x_i(t)$ *системы дифференциальных уравнений* (1), *для начальной точки которого* $[0, x_1(0), \ldots, x_n(0)]$ *имеет место*

$$V(0, x_1(0), \ldots, x_n(0)) > 0$$

существует $\tau > 0$ *так, что* $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i(\tau)| = h$.

Доказательство этой леммы проведем от противного. Предположим, что для любого $t \geqq 0$ имеет место $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i(t)| < h$. Тогда будет иметь место

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) > V(0, x_1(0), \ldots, x_n(0)) = V_0 \tag{2}$$

для всех $t > 0$.

Неравенство (2) справедливо для достаточно малых t, так как по первому условию теоремы Четаева будет $\frac{dV}{dt}(0, x_1(0), \ldots, x_n(0)) > 0$. Если бы существовало $T > 0$ так, что бы

$$V(T, x_1(T), \ldots, x_n(T)) = V_0$$

то ввиду того, что $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$ является непрерывной функцией t, существовало бы наименьшее T_1 такое, что

$$V(T_1, x_1(T_1), \ldots, x_n(T_1)) = V_0 .$$

Имеем

$$0 = V(T_1, x_1(T_1), \ldots, x_n(T_1)) - V(0, x_1(0), \ldots, x_n(0)) =$$

$$= \int_0^{T_1} \frac{dV}{dt}(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))\, dt . \tag{3}$$

Так как для $t \in \langle 0, T_1 \rangle$ имеет место $V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqq V_0 > 0$, то по первому условию будет и $\frac{dV}{dt}(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqq \beta > 0$, что противоречит равенству (3). Этим доказано неравенство (2).

Теперь из (2) следует: для всех $t \geqq 0$

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqq V_0 > 0 .$$

Следовательно, по первому условию теоремы Четаева можно найти $\beta' > 0$ такое, что для всех $t \geqq 0$ будет

$$\frac{dV}{dt}(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \geqq \beta' > 0 .$$

Но тогда

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) - V(0, x_1(0), \ldots, x_n(0)) =$$

$$= \int_0^t \frac{dV}{dt}(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))\, dt \geqq \int_0^t \beta'\, dt = \beta' t$$

что противоречит предположению об ограниченности функции

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Этим доказана лемма 1.

Обращение теоремы Четаева

Теорема 2. *Если при справедливости предположений о системе дифференциальных уравнений* (1) *решение* $x_1 = \ldots, = x_n = 0$ *неустойчиво, то существует функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *обладающая следующими свойствами:*

1. *Она определена на множестве* $P(h)$ $\left(\text{где } 0 < h < \frac{a}{2\sqrt{n}}\right)$, *неотрицательна,*

ограничена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

2. *Имеет место* $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i = V$.

3. *В каждой окрестности точки* $[0, \ldots 0]$ *существует точка* $[x_1, \ldots, x_n]$ *такая, что*

$$V(0, x_1, \ldots, x_n) > 0 .$$

Представляется целесообразным расширить область определения правых частей дифференциальных уравнений (1) на все полупространство $t \geqq 0$.

Мы это сделаем следующим образом: определим непрерывную функцию $\lambda(r^2)$ с непрерывной производной так, чтобы было

$$\lambda(r^2) = 1 \quad \text{для} \quad 0 \leqq r^2 \leqq (\tfrac{3}{4}a)^2 , \quad \lambda(r^2) = 0 \quad \text{для} \quad r^2 \geqq (\tfrac{4}{5}a)^2 .$$

В точках $[t, x_1, \ldots, x_n]$, $t \geqq 0$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| > a$, для которых $X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ не было определено, положим $X_i(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Правые части новой системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) X_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

непрерывны со своими частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ во всем полупространстве $t \geqq 0$. В точках $[t, x_1, \ldots, x_n]$, $t \geqq 0$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leqq \frac{a}{2\sqrt{n}}$ эта система совпадает с системой (1).

Докажем прежде всего

Лемму 2. *Пусть* $\hat{\varepsilon}$ — *положительное число. Пусть на множестве точек* $[x_1, \ldots, x_n]$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| < \hat{\varepsilon}$ *дано счетное количество окрестностей* $N^{(m)}$ *вида* $|x_i - a_i^{(m)}| < d^{(m)}$, *где точка* $[a_1^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)}]$ *есть центр окрестности, а* $2d^{(m)}$ — *ее ребро; пусть для каждого* $N^{(m)}$ *существует* $\tau^{(m)} > 0$ *и* $\gamma_m > 0$ *так, что для каждого решения* $x_i(t)$ *системы дифференциальных уравнений* (4), *для которого* $[x_1(0), \ldots, x_n(0)] \in N^{(m)}$, *имеет место*

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(\tau^{(m)})| > \hat{\varepsilon} + \gamma_m \tag{5}$$

Тогда существует функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *выполняющая первые два условия теоремы 2 в* $P(\hat{\varepsilon})$ *и кроме того:*

Если $[x_1, \ldots, x_n]$ — *точка какого-либо* $N^{(m)}$, *то*

$$V(0, x_1, \ldots, x_n) > 0$$

Обозначения. Так как решения системы дифференциальных уравнений (4) существуют для всех $t \geqq 0$, можно их записать в зависимости от начальных значений

$$x_i(t) = x_i(t, x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{где} \tag{6}$$
$$x_i^0 = x_i(0)$$

Систему (6) можно решить относительно начальных значений $x_1^0, \ldots, x_n^0$; полученные функции обозначим через F_i

$$x_1^0 = F_i(t, x_1, \ldots, x_n) .$$

Из предположений о системе дифференциальных уравнений следует, что F_i являются непрерывными функциями всех аргументов и обладают непрерывными частными производными $\dfrac{\partial F_i}{\partial t}, \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ во всем полупространстве $t \geqq 0$.

Доказательство леммы 2. Для каждого $N^{(m)}$ дадим следующее определение функций $\Phi_m(x_1, \ldots, x_n)$: если точка $[x_1, \ldots, x_n] \in N^{(m)}$, то пусть

$$\Phi_m(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{e}^{-\tau^{(m)}} \prod_{i=1}^{n} [x_i - a_i^{(m)} - d^{(m)}]^2 [x_i - a_i^{(m)} + d^{(m)}]^2$$

если же точка $[x_1, \ldots, x_n]$ не лежит в $N^{(m)}$, то пусть

$$\Phi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 .$$

Итак, $\Phi_m(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывные функции, имеющие повсюду непрерывные же частные производные, в чем нетрудно убедиться.

Определим теперь функцию $V_m(t, x_1, \ldots, x_n)$ на множестве $P(\hat{\varepsilon})$. Если точка $[t, x_1, \ldots, x_n] \in P(\hat{\varepsilon})$ обладает тем свойством, что $0 \leqq t \leqq \tau^{(m)}$, то

$$V_m(t, x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{e}^t \Phi_m[F_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(t, x_1, \ldots, x_n)] . \tag{7}$$

Если для точки $[t, x_1, \ldots, x_n] \in P(\hat{\varepsilon})$ имеет место $t > \tau^{(m)}$, то

$$V_m(t, x_1, \ldots, x_n) = 0 . \tag{8}$$

Из (7) следует, что функция $V_m(t, x_1, \ldots, x_n)$ и ее частыне производные $\dfrac{\partial V_m}{\partial t}, \dfrac{\partial V_m}{\partial x_i}$ непрерывны в точках $[t, x_1, \ldots, x_n] \in P(\hat{\varepsilon})$, где $0 \leqq t \leqq \tau^{(m)}$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| < \hat{\varepsilon}$. Из определения Φ_m следует, что V_m положительна только в точках $[t, x_1, \ldots, x_n]$, для которых $[F_1(t, x_1, \ldots, x_n) \ldots F_n(t, x_1, \ldots, x_n)] \in N^{(m)}$, но если $[F_1(\tau^{(m)}, x_1, \ldots, x_n) \ldots F_n(\tau^{(m)}, x_1, \ldots, x_n)] \in N^{(m)}$, то, как видно из (5), будет

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| > \hat{\varepsilon} + \gamma_m$$

и точка $[\tau^{(m)}, x_1, \ldots, x_n]$ не лежит в множестве $P(\hat{\varepsilon} + \gamma_m)$. Тогда, конечно, можно подобрать $\Theta_m > 0$ такое, что $V_m(t, x_1, \ldots, x_n)$ равна нулю для

$[t, x_1, \ldots, x_n]$, $\tau^{(m)} - \Theta_m < t \leqq \tau^{(m)}$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| < \hat{\varepsilon}$. Так как согласно (8), V_m равна нулю и в точках $[t, x_1, \ldots, x_n]$, $t > \tau^{(m)}$, $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| < \hat{\varepsilon}$, то можно утверждать, что $V_m(t, x_1, \ldots, x_n)$ и ее частные производные непрерывны во всем $P(\hat{\varepsilon})$. Для точек $[t, x_1, \ldots, x_n] \in P(\hat{\varepsilon})$, $0 \leqq t \leqq \tau^{(m)}$ производная функции V_m по времени будет ввиду дифференциальных уравнений (4), собственно говоря, обыкновенной производной функции $V(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ по t, если $\varphi_i(t)$ является решением этой системы, проходящим через данную точку. Так как функции $F_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ представляют собой первые интегралы системы (4), функции $F_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются постоянными, причем имеет место

$$\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}t} = V_m \quad \text{для} \quad [t, x_1, \ldots, x_n] \in P(\hat{\varepsilon}) , \quad 0 \leqq t \leqq \tau^{(m)} .$$

Если выполнены неравенства $t \geqq \tau^{(m)}$, $\max\limits_{i=1\ldots n} |x_i| < \hat{\varepsilon}$, то в точке $[t, x_1, \ldots, x_n]$

$$\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}t} = 0 = V_m ,$$

так как функция $V_m(t, x_1, \ldots, x_n)$ равна тождественно нулю для

$$t \geqq \tau^{(m)} - \Theta_m , \quad \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| < \hat{\varepsilon} .$$

Итак, для каждой точки из $P(\hat{\varepsilon})$ имеет место равенство

$$\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}t} (t, x_1, \ldots, x_n) = V_m(t, x_1, \ldots, x_n)$$

и функция V_m выполняет условие 2.

Для точек $[0, x_1, \ldots, x_n]$ имеет место $F_i = x_i$ и если $[x_1, \ldots, x_n] \in N^{(m)}$, то будет

$$V_m(0, x_1, \ldots, x_n) > 0 .$$

Докажем, что функции V_m и частные производные $\dfrac{\partial V_m}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V_m}{\partial x_i}$ ограничены. С этой целью построим функцию $V'_m(t, x_1, \ldots, x_n)$ точно так же, как $V_m(t, x_1, \ldots, x_n)$, с той разницей, что в качестве области ее определения возьмем $P(\hat{\varepsilon} + \frac{1}{3}\gamma_m)$.

Для точек $[t, x_1, \ldots, x_n] \in P(\hat{\varepsilon})$ имеем

$$V_m(t, x_1, \ldots, x_n) = V'_m(t, x_1, \ldots, x_n) .$$

Тогда $V'_m(t, x_1, \ldots, x_n)$ и ее частные производные $\dfrac{\partial V'_m}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V'_m}{\partial x_i}$ должны быть непрерывны в $P(\hat{\varepsilon} + \frac{1}{3}\gamma_m)$. Так как $P(\hat{\varepsilon})$ принадлежит к $P(\hat{\varepsilon} + \frac{1}{3}\gamma_m)$ и со своим замыканием, то в силу (8) ясно, что $\dfrac{\partial V_m}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V_m}{\partial x_i}$, V_m ограничены.

Теперь можно из функций V_m с коэффициентами $a_m > 0$ составить ряды $\sum_{m=1}^{\infty} a_m V_m$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left|\frac{\partial V_m}{\partial t}\right|$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left|\frac{\partial V_m}{\partial x_i}\right|$, $i = 1, \ldots, n$, равномерно сходящиеся в $P(\hat{\varepsilon})$.

Функция

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m V_m(t, x_1, \ldots, x_n)$$

в силу того, что было доказано относительно V_m, обладают всеми требуемыми в лемме 2 свойствами.

Доказательство теоремы 2. Так как решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ неустойчиво, то существует $\bar{\varepsilon} > 0$, $0 < \bar{\varepsilon} < \frac{a}{2\sqrt{n}}$ такое, что для каждой окрестности точки $[0 \ldots 0]$ можно подыскать решение $x_i(t)$ так, чтобы точка $[x_1(0); \ldots, x_n(0)]$ принадлежала данной окрестности и чтобы было $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(\tau)| = \bar{\varepsilon}$ для некоторого $\tau > 0$ (τ зависит от выбора решения). Теперь возьмем фиксированное $0 < h < \bar{\varepsilon}$ и выделим из этих решений некоторую последовательность.

Для $\delta_m = \frac{1}{m}$ возьмем решение $x_i^{(m)}(t)$ такое, что $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(0)| < \delta_m$; тогда существует $\tau^{(m)} > 0$ такое, что $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i^{(m)}(\tau^{(m)})| = \bar{\varepsilon} > h$.

Как видно из непрерывной зависимости решений от начальных значений, можно вокруг точки $[x_1^{(m)}(0), \ldots, x_n^{(m)}(0)]$ описать окрестность типа

$$|x_i - x_i^{(m)}(0)| < \eta^{(m)},$$

которую назовем $N^{(m)}$, чтобы для решения $x_i(t)$, для которого имеет место $[x_1(0), \ldots, x_n(0)] \in N^{(m)}$, было $|x_i(t) - x_i^{(m)}(t)| < \varepsilon$ для $t \in \langle 0, \tau^{(m)} \rangle$.

Если выбрать

$$\varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon} - h}{2},$$

то будет

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(\tau^{(m)})| > \frac{h + \bar{\varepsilon}}{2} = h + \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon > 0.$$

Теперь можно воспользоваться леммой 2.

Третье свойство, требуемое в теореме 2, следует из того, что $\delta_m \to 0$, так как в таком случае начало координат является точкой конденсации множества $\sum_{m=1}^{\infty} N^{(m)}$.

Определение 2. *Пусть* $0 < \bar{\varepsilon} < a$. *Если* $x_i(t)$ — *решение системы дифференциальных уравнений* (1) *и если* $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(0)| < \bar{\varepsilon}$, $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(\tau)| > \bar{\varepsilon}$ *для не-*

которого $\tau > 0$, *то множество точек* $[x_1(0), \ldots, x_n(0)]$ *назовем областью неустойчивости* $Q(\bar{\varepsilon})$.

Лемма 3. *Область неустойчивости есть открытое множество.*

Эта лемма легко вытекает из непрерывной зависимости интегральных кривых от начальных значений. Построим теперь функцию $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ в $P(\bar{\varepsilon})$ так, что $V(0, x_1, \ldots, x_n)$ будет положительна на области неустойчивости $Q(\bar{\varepsilon})$ и только на ней.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \bar{\varepsilon} < \dfrac{a}{2\sqrt{n}}$. *Тогда для области неустойчивости* $Q(\bar{\varepsilon})$ *существует функция* $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющая следующим требованиям*:

1. *Она определена, неотрицательна, ограничена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные* $\dfrac{\partial V}{\partial t}, \dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ *в* $P(\bar{\varepsilon})$.

2. *Имеет место* $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} X_i = V$.

3. *Пусть точка* $[x_1, \ldots, x_n]$ *принадлежит области* $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| < \bar{\varepsilon}$; *тогда* $V(0, x_1, \ldots, x_n)$ *будет положительна в том и только в том случае, если* $[x_1, \ldots, x_n]$ *лежит в области неустойчивости* $Q(\bar{\varepsilon})$.

Доказательство. Через каждую точку из $Q(\bar{\varepsilon})$ проходит решение $x_i(t)$ системы дифференциальных уравнений (1) такое, что

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i(0)| < \bar{\varepsilon}\,, \quad \max_{i=1,\ldots,n} |x_i(\tau)| > \bar{\varepsilon} \quad \text{для некоторого } \tau > 0\,.$$

Из непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных значений следует, что для положительного ε можно вокруг точки $[x_1(0), \ldots, x_n(0)]$ описать окрестность

$$|x_i - x_i(0)| < \eta\,, \quad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

так, чтобы эта окрестность лежала в открытой области неустойчивости $Q(\bar{\varepsilon})$ и чтобы имело место: если $\varphi_i(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений (1) и если

$$|\varphi_i(0) - x_i(0)| < \eta\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

то

$$|\varphi_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad t \in \langle 0, \tau \rangle\,, \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

Если выбрать

$$\varepsilon = \frac{\max |x_i(\tau)| - \bar{\varepsilon}}{2}\,,$$

то будет

$$\max_{i=1,\ldots,n} |\varphi_i(\tau)| > \frac{\bar{\varepsilon} + \max|x_i(\tau)|}{2} = \bar{\varepsilon} + \varepsilon\,.$$

Так как $Q(\bar{\varepsilon})$ — сепарабельно, можно выбрать счетное количество таких окрестностей (9), которые образуют покрытие $Q(\bar{\varepsilon})$; обозначим их через $N^{(m)}$. Теперь можно воспользоваться леммой 2, если положить $\hat{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$.

Другое условие, которое обеспечивает неустойчивость невозмущенного движения — теорема Ляпунова:

Теорема 4. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что можно найти ограниченную функцию V, производная которой в силу этих уравнений приводилась бы к виду*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda V + W\,,$$

где λ — положительная постоянная, а W или тождественно равна нулю, или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае найденная функция V такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, насколько угодно численно малых, ее можно сделать величиною одинакового знака с W, то невозмущенное движение неустойчиво.

Из теоремы 2 вытекает, что функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, испольняющая условия теоремы Ляпунова, существует в случае неустойчивости невозмущённого движения.

Summary

ON THE INVERSE THEOREM OF ČETAEV

IVO VRKOČ, Praha.

(Received January 7, 1955.)

Let us consider the system of differential equations

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Let us denote by $P(\varepsilon)$ the set of points $(t, x_1, \ldots, x_n)$ which fulfil the inequalities $t \geqq 0$, $|x_i| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$.

We suppose that the functions $X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ are defined on the set $P(a)$, $(a > 0)$, real, continuous, that the partial derivatives $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_k}$ are continuous and that $X_i(t, 0, \ldots, 0) = 0$ for $t \geqq 0$. The following theorem of Četaev is well known.

Theorem 1. *Let us suppose that there is a function $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ fulfilling the following conditions:*

1. *The function* $V(t, x_1, \dots, x_n)$ *in defined on the set* $P(h)$, $(0 < h < a)$, *continuous and bounded.*

2. *Let us denote by* $Q(h)$ *the set of such points* $(t, x_1, \dots, x_n) \in P(h)$ *that* $V(t, x_1, \dots, x_n) > 0$.

The funtion $V(t, x_1, \dots, x_n)$ *has continuous partial derivatives* $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ *on the set* $Q(h)$.

3. *For every positive number* $\alpha > 0$ *there is a positive number* β *in such a way, that if the inequality*

$$V(t, x_1, \dots, x_n) \geqq \alpha$$

holds for some point $(t, x_1, \dots, x_n) \in P(h)$ *then the inequality*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \geqq \beta > 0$$

holds for the same point $(t, x_1, \dots, x_n)$.

4. *For every positive number* δ *there is such a point* $(x_1, \dots, x_n)$ *that*

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i| < \delta$$

and

$$V(0, x_1, \dots, x_n) > 0 .$$

Then the integral $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = 0$ *of the system* (1) *is unstable.*

The Četaev's theorem establishes conditions which are sufficient in order that the trivial solution of the system (1) is unstable. In this paper we show that these conditions are necessary at the same time. We prove the following.

Theorem 2. *Let us suppose that the solution* $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = 0$ *of the system* (1) *is unstable. Then there exists a function* $V(t, x_1, \dots, x_n)$ *which fulfils the conditions:*

1′) *The function* $V(t, x_1, \dots, x_n)$ *is defined in the set* $P(h)$, (h *is a suitable positive number,* $h < \frac{a}{2\sqrt{n}}$), *non-negative, continuous, bounded and has continuous partial derivatives*

$$\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n .$$

2′) *The relation*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i = V \text{ holds in } P(h) .$$

3′) *For every positive number* δ *there is such a point* $(x_1, \dots, x_n)$ *that* $\max_{i=1,\dots,n} |x_i| < \delta$ *and* $V(0, x_1. \dots, x_n) > 0$.

The theorem 2 may be improved in the following way. Let us choose a positive number $\varepsilon > 0$ and let us define the set $Q(\varepsilon)$:

The point $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ belongs to the set $Q(\varepsilon)$ if $\max |x_i^{(0)}| < \varepsilon$ and if there is such an integral $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ of the system (1) and such a number $\tau > 0$ that

$$x_1(0) = x_1^{(0)}, \ldots, x_n(0) = x_n^{(0)}$$

and

$$\max |x_i(\tau)| > \varepsilon .$$

It is obvious that the set $Q(\varepsilon)$ is open.

We state:

Theorem 3. *Let us suppose that the set $Q(\varepsilon)$ is non-empty. Then there exists a function $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ which satisfies the conditions 1′, 2′ and 3″):*

$$\begin{array}{lll} \textit{if } (x_1, \ldots, x_n) \in Q(\varepsilon), & \textit{then} & V(0, x_1, \ldots, x_n) > 0 \\ \textit{if } (x_1, \ldots, x_n) \text{ non} \in Q(\varepsilon), & \textit{then} & V(0, x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{array}$$

Other conditions which ensure that the trivial solution is unstable are contained in the following theorem due to A. M. Ljapunoff.

Theorem 4. *Let as suppose that there is a bounded function $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ which fulfils the following conditions:*

1″) *The function $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ is defined on the set $P(h)$ $0 < h < a$ and has continuous partial derivatives.*

2″) *For every positive number δ there is such a point $[x_1, \ldots, x_n]$ that* $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| < \delta$ *and*

$$V(0, x_1, \ldots, x_n) > 0$$

3″) *The relation*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \geqq V$$

holds in the set $P(h)$.

Then the trivial solution is unstable.

It follows from the theorem 2 that the conditions which are contained in the theorem of Ljapunoff are necessary in order that the trivial solution is unstable.