Czechoslovak Mathematical Journal

Ján Jakubík

Прямые разложения единицы в модулярных структурах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 399–411

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100155`

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЕДИНИЦЫ В МОДУЛЯРНЫХ СТРУКТУРАХ

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице.

(Поступило в редакцию 17/XII 1954 г.)

Пусть S — структура с наименьшим элементом 0 и наибольшим 1. В работе исследуются условия существования общего уплотнения двух прямых разложений единицы $1 = \cup a_\alpha$, $1 = \cup b_\beta$ в случае 1. полной, 2. модулярной структуры S.

Пусть S — структура с наименьшим элементом 0 и наибольшим 1. Понятие прямого разложения элемента 1 было в работах [2], [3] определено для полных структур S; это определение нетрудно, однако, распространить на структуры общего типа (см. опр. 5). Пусть

$$1 = \cup a_\alpha \quad (\alpha \in M) \quad (\mathrm{I}), \quad 1 = \cup b_\beta \quad (\beta \in N) \quad (\mathrm{II})$$

два прямых разложения элемента 1. Возникает вопрос (**P**) *какого необходимое и достаточное условие сущесмвования общего уплотнения разложений* (I), (II)?

А. Г. Курош исследовал вопрос (**P**) для случая, когда структура S вполне модулярна (вполне дедекиндова). Он пишет об этом (цитируем дословно по [3], стр. 288): „Понятие дедекиндовой структуры применимо и в том случае, когда рассматриваются полные структуры. Для построения теории прямых разложений приходится, однако, наложить на полные структуры более сильное ограничение, а именно: полная структура S называется вполне дедекиндовой (см. Курош, [13]),[1]) если ...“ (следует определение вполне модулярной структуры и замечание, что требование полной модулярности сильнее требования полноты и модулярности).

Для формулировки результата А. Г. Куроша нам понадобятся следующие обозначения. Обозначим (для случая полной структуры $S^{1'}$)

$$\cup a_i \, (i \in M, i \neq \alpha) = \bar{\bar{a}}_\alpha \,, \quad \cup b_i \, (i \in N, i \neq \beta) = \bar{b}_\beta$$

[1]) См. [2].

[1']) Этими обозначениями мы будем в дальнейшем пользоваться.

и для любого $x \in S$

$$x\varphi_\alpha = a_\alpha \cap (x \cup \bar{a}_\alpha)\,, \quad x\bar{\varphi}_\alpha = \bar{a}_\alpha \cap (x \cup a_\alpha)\,,$$
$$x\Theta_\beta = b_\beta \cap (x \cup \bar{b}_\beta)\,, \quad x\bar{\Theta}_\beta = \bar{b}_\beta \cap (x \cup b_\beta)\,.$$

Для случая вполне модулярной структуры S А. Г. Курош доказал теорему

(K) *Разложения* (I), (II) *имеют общее уплотнение тогда и только тогда, если для любых* $\alpha \in M$, $\beta \in N$ *имеет место*

$$1\bar{\varphi}_\alpha\Theta_\beta\varphi_\alpha = 0\,.$$

Теорема **(K)** останется, очевидно, в силе, если вместо предположения полной модулярности структуры S ограничиться следующим препдоложением:

(A) *Существует подструктура* $S_1 \subset S$, *обладающая следующими свойствами:* а) S_1 — *полная подструктура структуры* S, б) S_1 — *вполне модулярна*, в) *все элементы* a_α, b_β *лежат в структуре* S_1.

Предположение **(A)** назовем утверждением о полной модулярности.

Метод настоящей статьи отличается от метода, используемого Курошом в его работах [2], [3]. Курош получает утверждение **(K)** в результате подробного исследования свойств операций $\varphi_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha, \Theta_\beta, \bar{\Theta}_\beta$. В настоящей работе вопрос **(P)** мы сводим к вопросу о существовании общего уплотнения двух разложений на прямое произведение

$$S_0 \simeq \Pi A_i \quad (i \in M)\,, \quad S_0 \simeq \Pi B_i \quad (i \in N)$$

для соответственно выбранной подструктуры $S_0 \subset S$. Результаты являются углублением результата Куроша **(K)** и их можно срезюмировать следующим образом (теоремы 3, 4, 5, 6):

Предположим, что S — полная и модулярная структура. Тогда имеет место:

1. *разложения* (I), (II) *обладают общим уплотнением тогда и только тогда, если полная подструктура структуры* S, *образованная множеством всех элементов* a_α, b_β, *дистрибутивна.*

2. *Теорема* **(K)** *справедлива и без предположения о полной модулярности структуры* S.

3. *Из существования общего уплотнения разложений* (I), (II) *вытекает утверждение о полной модулярности, как следствие.*

4. *Пусть* A — *множество всех элементов структуры* S, *имеющих дополнение. Необходимое и достаточное условие существования прямого разложения* $1 = \bigcup c_i$ $(i \in L)$, *которое было бы уплотнением всех прямых разложений элемента* 1, *следующее: полная подструктура структуры* S, *образованная множеством* A, *вполне дистрибутивна.*

Выражения: алгебра, подалгебра, отношение конгруэнтности и фактор-алгебра по отношению к данному отношению конгруэнтности мы будем применять в том же смысле, как в книге [1] (предварительные сведения из алгебры). Если e — элемент алгебры S и если одноэлементное множество $\{e\}$ есть подалгебра в S, то мы называем e идемпотентным элементом в S. Разбиение алгебры S, соответствующее отношению конгруэнтности R на S, будем называть производящим разбиением и обозначать той же буквой R. Далее будем пользоваться выражением примитивный класс алгебр в том же смысле, как и в работе [4].

Определение 1. *Пусть $\{A_i\}$ ($i \in M$) — некоторое множество алгебр, принадлежащее примитивному классу алгебр $\mathfrak{A}$; пусть B — множество всех функций h с областью определения M, для которых имеет место*

$$i_0 \in M \Rightarrow h(i_0) \in A_{i_0} .$$

Если $f(a_1, \ldots, a_n)$ — операция, определенная в алгебрах примитивного класса $\mathfrak{A}$, то для $h_k \in B$, $k = 1, \ldots, n$ и для каждого $i \in M$ положим

$$f(h_1, \ldots, h_n)(i) = f(h_1(i), \ldots, h_n(i)) .$$

Тогда $f(h_1, \ldots, h_n)(i)$ есть функция, определенная на M, принадлежащая множеству B. Множество B с определенными таким образом операциями называется прямым произведением алгебр A_i ($i \in M$) и записывается так:

$$B = \Pi A_i \quad (i \in M) .$$

Замечания. 1. Очевидно, алгебра B также принадлежит примитивному классу $\mathfrak{A}$.

2. Если $x \in B$, то будем писать вместо $x(i)$ также x_i, x_i называем проекцией элемента x на A_i или i-й компонентой элемента x. Если $B_0 \subset B$, то через $(B_0)_i$ обозначим множество всех элементов $a_i \in A_i$, для которых существует $x \in B_0$ так, что $x_i = a_i$. Алгебры A_i называем факторами (сомножителями) прямого произведения.

3. В книге [1] не дается явного определения понятия прямого произведения бесконечного числа факторов. В книге [3] прямое произведение бесконечного числа факторов (для случая, когда $\mathfrak{A}$ есть класс всех групп) определяется иначе; прямое произведение в смысле опрделения 1 называется там полным прямым произведением.

4. Если B_0 — подалгебра из B, то $(B_0)_i$ будет, очевидно, подалгеброй из A_i.

Определение 2. *Будем пользоваться обозначениями из определения 1. Пусть B_0 — подалгебра алгебры B. Говорим, что B_0 является полупрямым произведением алгебр $(B_0)_i$ и пишем $B_0 = s\Pi(B_0)_i$ ($i \in M$).*[2])

---

[2]) См. [1], стр. 136 (русский перевод.)

Замечание. Если B_0, B_0' — подалгебры из B и если для любого $i \in M$ имеет место $(B_0)_i = (B_0')_i$, то, очевидно, еще не должно быть $B_0 = B_0'$ (т. е. отношение $= s$ нетранзитивно).

Следующая теорема о полупрямых произведениях является лишь другой формулировкой теоремы 9 гл. VI, [1], доказанной там для случая конечного числа сомножителей и высказанной без доказательства для бесконечного числа сомножителей. Ход доказательства не отличается от примененного в цитированной теореме.

Теорема 1. *Пусть A — алгебра, пусть R_i ($i \in M$) — производящие разбиения на A, пусть $\Pi R_i = 0$ и пусть A_i есть фактор-алгебра разбиения R_i. Тогда алгебра A изоморфна некоторому полупрямому произведению алгебр A_i ($i \in M$).*

Доказательство. Пусть $x \in A$. Элементу x поставим в соответствие функцию $f(i) = \bar{x}^i$, где $\bar{x}^i$ есть класс разбиения R_i, содержащий элемент x. Очевидно, $f \in \Pi A_i$ $(i \in M) = B$. Множество всех образованных таким образом функций обозначим через B_0. Нетрудно обнаружить, что B_0 есть подальгебра из B. Очевидно, $(B_0)_i = A_i$, $B_0 = s\Pi A_i$ $(i \in M)$. Нетрудно обнаружить, что соответствие $x \to f$ определяет гомоморфное отображение алгребы A на B_0. Для завершения доказательства достаточно показать, что двум различным элементам $x_1, x_2 \in A$ соответствуют различные функции $f_1, f_2 \in B_0$. Пусть $x_1 \neq x_2$. Так как $\Pi R_i = 0$, то существует разбиение R_k $(k \in M)$ такое, что $x_1 \not\equiv x_2(R_k)$. Тогда получим $f_1(k) \neq f_2(k)$.

Определение 3. *Пусть e — идемпотент алгебры A, пусть A_i ($i \in M$) — подалгебры алгебры A и пусть для всех $i, j \in M$, $i \neq j$, имеет место $A_i \cap A_j = \{e\}$. Скажем, что алгебра A является прямым произведением своих подалгебр A_i ($i \in M$), если* 1. $A \sim \Pi A_i$ $(i \in M)$ (1)[3]), 2. *в изоморфизме* (1) *для каждого $x \in A_\alpha$ ($\alpha \in M$) выполняется условие*

$$x \to f \Rightarrow f(\alpha) = x, \quad f(i) = e \ (i \neq \alpha) \ .$$

В таком случае мы пишем $A \simeq \Pi A_i$ $(i \in M)$.

Замечания. 1. Пусть S — структура с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, пусть (по отношению к элементу $e = 0$)

$$S \simeq \Pi S_i \ (i \in M) \quad (1), \quad S \simeq \Pi S_j' \quad (j \in N) \quad (2)$$

(Эти условия мы считаем выполненными и в последующих замечаниях 2—6. Кроме того мы считаем в дальнейшем изложении, если структуру S выразить в виде прямого произведения ее подструктур, что выполнено условие $e = 0$.) По теореме 7, гл. II, [1] (справедливость которой можно легко распространить и на бесконечное число сомножителей) существует общее уплотнение прямых разложений (1),(2) структуры S. Более подробно: имеет место $S \simeq \Pi S_{ij}''$ $(i \in M, j \in N)$, так что для любых $\alpha \in M$, $\beta \in N$

---

[3]) Знаком $\sim$ мы обозначаем изоморфизм.

$$S_\alpha \simeq \Pi S''_{\alpha j} \quad (j \in N)\,, \quad S'_\beta \simeq \Pi S''_{i\beta} \quad (i \in M)\,.$$

Некоторые из структур S''_{ij} могут содержать только один элемент (а именно 0); такие множители можно в рассматриваемых разложениях выпустить. Пусть $\{S''_k\}$ $(k \in L)$ есть множество всех структур $S''_{ij} \neq \{0\}$. Тогда (для всех $\alpha \in M$, $\beta \in N$)

$$S \simeq \Pi S''_k \ (k \in L)\,, \quad S_\alpha \simeq \Pi S''_k \ (k \in L(\alpha))\,, \quad S'_\beta \simeq \Pi S''_k \ (k \in L(\beta))\,,$$
$$L(\alpha)\,, \ L(\beta) \subset L\,.$$

2. Пусть $S \simeq \Pi A_i$ $(i \in M)$. Пусть каждый элемент $x \neq 0$ множества $C \subset S$ лежит в одном из множеств A_i, $i \in M$, пусть каждое из множеств $C \cap A_i$ $(i \in M)$ содержит не более одного элемента. Тогда в структуре S имеются элементы

$$\cup\, x \ \ (x \in C)\,, \quad \cap\, x \ \ (x \in C)\,.$$

3. Пусть S — полная структура, пусть $S \simeq \Pi B_j$ $(j \in N)$, пусть b_j — наибольший элемент в структуре B_j, пусть $a_i \in S$ $(i \in M)$, пусть $\cup\, a_i$ $(i \in M) = 1$. Обозначим $c_{ij} = a_i \cup b_j$. Нетрудно доказать справедливость уравнений

$$a_\alpha = \cup\, c_{\alpha j} \quad (j \in N)\,, \quad b_\beta = \cup\, c_{i\beta} \quad (i \in M)\,.$$

4. Из того обстоятельства, что пересечения и объединения элементов структуры $S \simeq \Pi A_i$ $(i \in M)$ можно вычислять в компонентах относительно рассматриваемого прямого разложения, следует: если каждая из структур A_i $(i \in M)$ полная, то и структура S полная. Действительно, если $\{f^k\}$ — произвольное подмножество множества $B = \Pi\, A_i$ $(i \in M)$, то определим для каждого $i \in M$

$$(\cap\, f^k)(i) = \cap\, (f^k(i))\,, \quad (\cup\, f^k)(i) = \cup (f^k(i))\,.$$

Нетрудно убедиться в том, что выражения в правой части лежат в B и что элементы, компонентами которых являются эти выражения, образуют соответственно пересечение и объединение рассматриваемого множества $\{f_k\}$. Итак, структуры B, S — полные.

5. Структуру S будем называть вполне дистрибутивной, если выполнятся условие (22′), [1], стр. 208. Понятие полной модулярности определено в [3], стр. 288. Аналогичным рассуждением, как и в предыдущем замечании (исходя из возможности вычислять пересечения и объединения в компонентах), убедимся в справедливости утверждения: если каждая из структур A_i $(i \in M)$ вполне дистрибутивна (вполне модулярна), то и структура ΠA_i $(i \in M)$ вполне дистрибутивна (вполне модулярна). Нетрудно доказать, что полная дистрибутивность влечет за собой полную модулярность.

6. Пусть S — полная структура, пусть $S \simeq \Pi A_i$ $(i \in M)$, пусть a_i — наибольший элемент структуры A_i $(i \in M)$, пусть $\bar{a}_i = \cup\, a_j$ $(j \in M, j \neq i)$. Тогда

$$\cap\, \bar{a}_j \ (j \in M, j \neq i) = a_i\,.$$

Во всем последующем изложении знак S обозначает структуру с наименьшим элементом 0 и наибольшим 1. Если $\{x_i\}$ $(i \in M)$ — бесконечное множество элементов структуры S, то в структуре S может (но не должен) существовать элемент $\cup x_i$ $(i \in M)$ соотв. $\cap x_i$ $(i \in M)$. При помощи уравнения $\cup x_i (i \in M) = a$ будем выражать, что 1. элемент $\cup x_i (i \in M)$ в структуре S существует и 2. этот элемент равен элементу a.

Определение 4. *а) Пусть A — подмножество структуры S. Знаком A' обозначим пересечение всех подструктур структуры S, содержащих множество A.*

б) Скажем, что S_0 есть полная подструктура структуры S, если для каждого множества $\{x_i\}$ $(i \in M)$, $x_i \in S_0$ в имеются структуре S элементы $\cap x_i$ $(i \in M)$, $\cup x_i$ $(i \in M)$, и если эти элементы в то же время лежат и в структурe S_0.

в) Пусть S — полная структура, $A \subset S$. Пересечение всех полных подструктур структуры S, содержащих множество A, обозначим через A^* и назовем полной подструктурой структуры S, образованной множеством A.

г) Пусть S_0 — подструктура структуры S, пусть $A \subset S_0$. Пересечение всех производящих разбиений структуры S_0, в которых элементы множества A лежат в одном классе, обозначим через $R(A; S_0)$.

Определение 5. *а) Пусть S — структура с наименьшим элементом 0 и наибольшим 1. Пусть $\{a_i\}$ $(i \in M) \subset S$, пусть для любого $\alpha \in M a_\alpha \neq 0 \cup a_i (i \in M,$ $i \neq \alpha) = \bar{a}_\alpha$, пусть $a_\alpha \cap \bar{a}_\alpha = 0$, $\cup a_i$ $(i \in M) = a$ (I). Тогда мы скажем, что элемент a является прямой суммой элементов a_i $(i \in M)$ и запишем $a = \dot{\cup}\, a_i (i \in M)$. Мы скажем, что разложение $a = \dot{\cup}\, b_i (i \in N)$ (II) является уплотнением разложения (I), если для любого $i \in M$ существует множество $N(i) \subset N$ так, что $a_i = \cup b_j$ $(j \in N(i))$. Элемент a назовем прямо неразложимым, если его нельзя выразить в виде прямой суммы, имеющей хотя бы два слагаемых.*

Замечание. Смысл выражения „общее уплотнение двух прямых разложений" не требует пояснений. Если $a = \dot{\cup}\, a_i$ $(i = 1, 2)$, то можно написать и $a = a_1 \dot{\cup}\, a_2$.

Теорема 2. *Пусть структура S является 1. полной, 2. модулярной. Пусть $1 = \dot{\cup}\, a_i$ $(i \in M)$. Обозначим $A_i = \langle 0, a_i \rangle$ $(i \in M)$. Существует полная подструктура $S_0 \subset S$, для которой имеет место $S_0 \simeq \Pi A_i$ $(i \in M)$.*

Доказательство. Обозначим $\langle 0, a_i \rangle = A_i$, $\langle 0, \bar{a}_i \rangle = \bar{A}_i$, $S_i = (A_i \cup \bar{A}_i)'$. По теореме 7 гл. V, [1] есть $S_i \simeq A_i \times \bar{A}_i$ (1). Так как $A_i, \bar{A}_i$ — полные подструктуры структуры S, то и S_i будет полной подструктурой структуры S. Для любого $j \in M$ будет $A_j \subset S_i$.

Обозначим $S_0 = \cap S_i$ $(i \in M)$. Структура S_0 является, очевидно, полной подструктурой структуры S, и $A_i \subset S_0$ $(i \in M)$. Обозначим $\overline{A}_i \cap S_0 = \overline{A}_i^1$. Из соотношения (1) следует

$$S_0 \simeq A_i \times \overline{A}_i^1 . \tag{2}$$

(Действительно, пусть $x \in S_0$, пусть при изоморфизме (1) $x \to (x_i, \overline{x}_i)$. Тогда $x_i \in A_i$, $\overline{x}_i = \overline{a}_i \cap x \in \overline{A}_i^1$; обратно, если $x_i \in A_i$, $\overline{x}_i \in \overline{A}_i^1$, $(x_i, \overline{x}_i) \to x$, то $x = x_i \cup \overline{x}_i \in S_0$.)

Обозначим $\overline{R}_i = R(\overline{A}_i^1; S_0)$, $S_0/\overline{R}_i = A_i^1$. Из соотношения (2) получим

$$A_i^1 \sim A_i . \tag{3}$$

Притом, если $\overline{x}^i \in A_i^1$, то при изоморфизме (3)

$$\overline{x}^i \to x , \quad \text{где} \quad \{x\} = \overline{x}^i \cap A_i . \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что $\Pi \overline{R}_i$ $(i \in M) = 0$. По теореме 1 S_0 изоморфна некоторому полупрямому произведению структур A_i^1, т. е. существует $S_0^1 \subset \Pi A_i^1$ $(i \in M)$,

$$S_0^1 \sim S_0 . \tag{5}$$

Согласно (3) и (5), существует подструктура $S_0^2 \subset \Pi A_i$ $(i \in M)$,

$$S_0 \sim S_0^2 . \tag{6}$$

По построению изоморфизма (3) (т. е. согласно соотношению 4) и по построению изоморфизма (5) (см. доказательство теоремы 1) при изоморфизме (6) элементу $x \in S_0$ соответствует тот элемент $g \in S_0^2$, для которого имеет место

$$g(i) = x_i , x_i \in A_i , x_i \equiv x(\overline{R}_i) . \tag{7}$$

Для завершения доказательства достаточно доказать равенство

$$S_0^2 = \Pi A_i \ (i \in M) . \tag{8}$$

Пусть $g \in \Pi A_i$ $(i \in M)$, $g(i) = x_i$, $x_i \in A_i$. Рассмотрим элемент $x = \cup x_i$ $(i \in M)$. Для любого $\alpha \in M$ выразим x в виде

$$x = x_\alpha \cup (\cup x_i \ (i \in M, i \neq \alpha)) = x_\alpha \cup \overline{x}_\alpha .$$

Очевидно, $x, x_\alpha, \overline{x}_\alpha \in S_0$. Так как $\overline{x}_\alpha \in \overline{A}_\alpha$, $\overline{x}_\alpha \equiv 0(\overline{R}_\alpha)$. Отсюда следует $x \equiv x_\alpha(\overline{R}_\alpha)$. Согласно (7), при изоморфизме (6) будет, следовательно, $x \to g$, т. е. $g \in S_0^2$. Этим доказано равенство (8).

Замечания. 1. В виду соотношения (1) нетрудно обнаружить, что $\langle a_i, 1 \rangle \subset S_i$, $\langle \overline{a}_i, 1 \rangle \subset S_i$.

2. Нетрудно доказать, что S_0 — полная подструктура структуры S, образованная множеством $\{\cup A_i \ (i \in M)\}$.

3. Предыдущая теорема тесно связана с теоремой 7, гл. V, [1]. Эту теорему легко обобщить на случай конечного числа a_i. На примерах, однако, выяснится, что для бесконечного числа a_i теорема несправедлива [другими

словами: условие 1. теоремы 2 (что S_0 — полная подструктура, образованная множественной суммой всех A_i) существенно].

Лемма 1. *Путь выполнены условия теоремы 2, пусть структура S дистрибутивна. Тогда $S_0 = S$.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 2. Пусть $x \in S$. Тогда

$$x = (x \cap a_i) \cup (x \cap \bar{a}_i) ,$$

т. е. $x \in S_i$ для любых $i \in M$, $x \in S_0$, $S = S_0$.

Теорема 3. *Пусть S — полная и модулярная структура, пусть $1 = \dot{\cup}\, a_i$ $(i \in M)$ (I), $1 = \dot{\cup}\, b_i$ $(i \in N)$ (II). Обозначим $A = \{a_i\}$ $(i \in M)$, $B = \{b_i\}$ $(i \in N)$, $D = (A \cup B)^*$. Разложения* (I), (II) *имеют общее уплотнение тогда и только тогда, если структура D дистрибутивна.*

Доказательство. а) Пусть структура D дистрибутивна. Пусть A_i (B_i) есть интервал $\langle 0, a_i \rangle$ $(\langle 0, b_i \rangle)$ в структуре D. Применим к структуре D теорему 2. На основании леммы 1

$$D \simeq \Pi A_i \;(i \in M) \quad (1)\, , \quad D \simeq \Pi B_i \;(i \in N) \quad (2)\, .$$

Согласно замечанию 1 за определением 3, прямые разложения (1), (2) структуры D имеют общее уплотнение $D \simeq \Pi C_{ij}$ $(i \in M, j \in N)$, причем

$$A_i \simeq \Pi C_{ij} \;(j \in N)\, , \quad B_j \simeq \Pi C_{ij} \;(i \in M)\, .$$

Так как структура S имеет наибольший элемент, то и каждая из структур C_{ij} должна иметь наибольший элемент; обозначим его через c_{ij}. Пусть L — множество всех пар (i, j) $(i \in M,\ j \in N)$, для которых $c_{ij} \neq 0$. Нетрудно проверить, что имеет место $1 = \dot{\cup}\, c_k$ $(k \in L)$ (III) и что разложение (III) является уплотнением разложений (I), (II).

б) Пусть существует общее уплотнение $1 = \dot{\cup}\, c_k$ $(k \in L)$ (III) разложений (I), (II). По теореме 2 (примененной к прямому разложению (III)) существует полная подструктура $S_0 \subset S$, содержащая вс еэлементы c_k, и для которой имеет место $S \simeq \Pi C_k$ $(k \in L)$, $C_k = \langle 0, c_k \rangle$. Обозначим $C_k^1 = \{0, c_k\}$, $S_0^1 = \Pi C_k^1$ $(k \in L)$. Пусть $S_0^2 \subset S_0$ есть образ множества S_0^1 при изоморфизме (6). S_0^1 есть прямое произведение дистрибутивных структур, следовательно, структуры S_0^1 и S_0^2 дистрибутивны. Нетрудно обнаружить, что 1. структура S_0^2 полная и 2. структура S_0^2 содержит все элементы c_k, значит, и все элементы a_i и все элемтны b_i. Итак, должно быть $D \subset S_0^2$, т. е. структура D дистрибутивна.

Лемма 2. *Пусть структура S — полная и модулярная. Разложения* (I), (II) *выполняют условие $1\bar{\varphi}_\alpha \Theta_\beta \varphi_\alpha = 0$ (4) тогда и только тогда, если $(\bar{a}_\alpha \cup \bar{b}_\beta) \cap b_\beta \leqq \bar{a}_\alpha$.*

Доказательство. Пусть условие (4) выполнено. Легко обнаружить (используя модулярность структуры S), что для $z \in S$ $z\varphi_\alpha = 0$ тогда и только тогда, если $z \leqq \bar{a}_\alpha$. Далее, очевидно, $1\bar{\varphi}_\alpha = \bar{a}_\alpha$. Значит условие (4) равносильно требованию $\bar{a}_\alpha \Theta_\beta \leqq \bar{a}_\alpha$, т. е. $b_\beta \cap (\bar{a}_\alpha \cup \bar{b}_\beta) \leqq \bar{a}_\alpha$.

Лемма 3. *Пусть S — модулярная структура, $x, y, z \in S$, пусть $x \cap \cap (z \cup y) \leqq z$. Тогда $z = (x \cup z) \cap (y \cup z)$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Так как $z \leqq y \cup z$, то, согласно L5 ([1], стр. 103),

$$(x \cup z) \cap (y \cup z) = [x \cap (y \cup z)] \cup z = z\,.$$

Теорема 4. *Пусть структура S — полная и модулярная. Разложения (I), (II) обладают общим уплотнением тогда и только тогда, если для любых $\alpha \in M$, $\beta \in N$ $1\bar{\varphi}_\alpha \Theta_\beta \varphi_\alpha = 0$.*

Доказательство. а) Пусть условия леммы выполнены, пусть существует общее уплотнение разложений (I), (II). Рассмотрим дистрибутивную и полную подструктуру S_0^2 структуры S, описанную в доказательстве теоремы 3 (часть б). Элементы $\bar{a}_\alpha$, b_β, $\bar{b}_\beta$ лежат, очевидно, в S_0^2. Из дистрибутивности следует

$$b_\beta \cap (\bar{a}_\alpha \cup \bar{b}_\beta) = (b_\beta \cap \bar{a}_\alpha) \cup (\bar{b}_\beta \cap b_\beta) = b_\beta \cap \bar{a}_\alpha \leqq \bar{a}_\alpha\,,$$

и согласно лемме 2 имеет место $1\bar{\varphi}_\alpha \Theta_\beta \varphi_\alpha = 0$.

б) Пусть структура S — полная и модулярная, пусть для любых $\alpha \in M$, $\beta \in N$ $1\bar{\varphi}_\alpha \Theta_\beta \varphi_\alpha = 0$. Рассмотрим разложение (II) и построим соответствующую структуру S_0 по теореме 2 (вместо элементов a_i мы берем теперь элементы b_i).

Рассмотрим структуру $S_\beta = \{B_\beta \cup \bar{B}_\beta\}' \simeq B_\beta \times \bar{B}_\beta$. По лемме 2 и 3 получим $\bar{a}_\alpha = (\bar{a}_\alpha \cup b_\beta) \cap (\bar{a}_\alpha \cup \bar{b}_\beta)$. Очевидно, $\bar{a}_\alpha \cup b_\beta \in \langle b_\beta, 1\rangle$, $\bar{a}_\alpha \cup \bar{b}_\beta \in \langle \bar{b}_\beta, 1\rangle$, так что (согласно замечанию 1 за теоремой 2) $\bar{a}_\alpha \in S_\beta$ для любого $\beta \in N$. Значит, будет и $\bar{a}_\alpha \in S_0$ для любого $\alpha \in M$. Согласно замечанину 7 за определением 3, будет также $a_\alpha \in S_0$ для любого $\alpha \in M$.

Рассмотрим элементы $c_{ij} = a_i \cap b_j$. Пусть $\{c_k\}$ $(k \in L)$-множество всех элементов $c_{ij} \neq 0$. Согласно замечанию 3 за определением 3, имеем $a_i = \bigcup c_k$ $(k \in L(i))$, $L(i) \subset L$ для любого $i \in M$ и аналогично для b_j. По предыдущему уравнению легко обнаружить, что

$$1 = \dot{\bigcup} c_k \quad (k \in L)$$

и что это разложение является уплотнением разложений (I), (II).

Теорема 5. *Пусть структура S — полная и модулярная, пусть существует общее уплотнение разложений (I), (II). Тогда существует полная подструктура $S_1 \subset S$, содержащая все элементы a_i, b_j $(i \in M, j \in N)$ и являющаяся вполне дистрибутивной.*

Доказательство. Пусть $1 = \dot{\bigcup} c_k$ $(k \in L)$ (1) есть общее уплотнение разложений (I), (II). Рассмотрим структуру S_0, построенную по теореме 2 относительно разложения (1). Имеем $S_0 \simeq \Pi C_k$ $(k \in L)$ (смысл C_k ясен из теоремы 2). Пусть $C_k^0 = \{0, c_k\}$. Пусть $S_1 \subset S$ — образ множества ΠC_k^0 $(k \in L)$ при изоморфизме (1). Согласно замечанию 5 и 6 за определением 3 структура S_1 является полной и вполне дистрибутивной. Очевидно, S_1 содержит все элементы c_k, а значит и все элементы a_i и все элементы b_i.

Определение 6. *Мы будем говорить, что прямое разложение* $1 = \dot{\cup}\, c_i$ $(i \in L)$ *минимально, если оно является уплотнением каждого прямого разложения элемента* 1. *Очевидно, существует не более одного минимального разложения.*

Теорема 6. *Пусть структура S — модулярная и полная. Пусть A — множество всех элементов структуры S, имеющих дополнение. Минимальное разложение элемента* 1 *существует тогда и только тогда, если полная подструктура $S^1 \subset S$, образованная множеством A, вполне дистрибутивна.*

Доказательство. а) Пусть существует минимальное разложение

$$1 = \dot{\cup}\, c_i \quad (i \in L)\,, \tag{1}$$

пусть $A^* = S^1$. Образуем структуру S_0 согласно доказательству теоремы 2 относительно разложения (1). Обозначим $C_i^1 = \{0, c_i\}$ $(i \in L)$; пусть $S_0^1 \subset \subset S_0$ — образ структуры ΠC_i^1 $(i \in L)$ при изоморфизме $S_0 \simeq \Pi C_i$ $(i \in L)$. Согласно замечанию 6 за определением 3 структура S_0^1 вполне дистрибутивна.

Пусть $a \in A$, пусть $\bar{a}$ — дополнение элемента a. Тогда будет $1 = a \,\dot{\cup}\, \bar{a}$. Из определения уплотнения следует, что $a = \cup\, c_i$ $(i \in L(a))$, $L(a) \subset L$. Итак, $A \subset S_0^1$, $A^* \subset S_0^1$ (так как структура S_0^1 является полной подструктурой в S). Этим доказано, что структура A^* вполне дистрибутивна. (Далее, нетрудно доказать, что $S_0^1 = A^*$.)

б) Пусть структура $S^1 = A^*$ вполне дистрибутивна. Пусть для α, пробегающего множество $\mathfrak{A}$, уравнение

$$1 = \dot{\cup}\, a_i^\alpha \quad (i \in M^\alpha) \tag{2}$$

выражает все прямые разложения элемента 1. Очевидно, каждый элемент a_i^α $(i \in M^\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A})$ имеет дополнение, следовательно, $a_i^\alpha \in A$. Пусть C — множество всех элементов c_j $(j \in B)$, которые можно построить следующим образом: из каждого разложения (2) (при фиксированном α) выберем некоторый элемент $a_{i(\alpha)}^\alpha$ и образуем элемент

$$\cap\, a_{i(\alpha)}^\alpha \quad (\alpha \in \mathfrak{A}) = c_j\,. \tag{3}$$

Очевидно, $C \subset S^1$. Из полной дистрибутивности структуры S^1 и из уравнений (2), (3) вытекает $1 = \cup\, c_j$. Пусть $\{c_i\}$ $(i \in L)$ — множество тех c_j, для которых $c_j \neq 0$. Очевидно,

$$1 = \cup\, c_i \quad (i \in L)\,. \tag{4}$$

Легко можно убедиться, что уравнение (4) дает прямое разложение единицы.

Для завершения доказательства достаточно показать, что каждый элемент a_i^α можно выразить в виде

$$a_i^\alpha = \cup c_j \ (j \in L(i, \alpha)) \ , \ L(i, \alpha) \subset L \ .$$

Имеем $\alpha_i^\alpha = a_i^\alpha \cap (\cup c_j \ (j \in L)) = \cup (a_i^\alpha \cap c_j) \ (j \in L)$. (5)

Согласно уравнению (3), для любого $j \in L$ имеет, однако, место (для данного a_i^α)

$$\text{или} \quad c_j \cap a_i^\alpha = c_j \quad (6) \quad \text{или} \ c_j \cap a_i^\alpha = 0 \ . \qquad (7)$$

Пусть $L(i, \alpha)$ — множество тех c_j, для которых справедливо равенство (6). Согласно уравнению (5), будет тогда $a_i^\alpha = \cup c_j \ (j \in L(i, \alpha))$, чем доказательство и завершается. Очевидно, элементы c_j прямо неразложимы.

Замечания. 1. В теоремах 2—5 вместо полноты и модулярности можно было бы, очевидно, ограничиться следующим более слабым предположением: существует подструктура $S_1 \subset S$ такая, что а) S_1 есть полная подструктура структуры S, б) S_1 модулярна, в) S_1 содержит все элементы a_i, b_j.

2. Пусть множества M, N конечны. Нетрудно проверить, что в таком случае для хода рассуждений в теоремах 2—5 нет необходимости предполагать полноту структуры S.

3. Было бы интересно выяснить, вытекают ли из теоремы 3 (требующей дистрибутивность полной структуры, образованной a_i, b_j) какие-либо нетривиальные результаты для теории групп. Направленные в эту сторону рассуждения могут оказаться в связи с результатом, который доказал О. Оре: структура всех подгрупп пруппы G дистрибутивна тогда и только тогда, если группа G — или циклическая или является теоретико-множественной суммой возрастающей последовательности циклических групп (см. [5]).

4. На работах Куроша базируются работы М. И. Граева [6] и А. Х. Лившица [7]. В обеих работах предполагается полная модулярность рассматриваемой структуры S. Притом в работе [7] исследуются только прямые разложения единицы с конечным числом слагаемых. Возникает вопрос, нельзя ли (подобно тому, как это сделано в предыдущем изложении) доказать некоторые результаты Граева и Лившица и без предположения полной модулярности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, New York, 1948 (Теория структур, Москва, 1952).

[2] *А. Г. Курош:* Изоморфизмы прямых разложений, Изв. Акад. Наук СССР, сер. мат. 7 (1943), 185—202.

[3] *А. Г. Курош:* Теория групп, изд. II, Москва 1953.

[4] *А. И. Мальцев:* К общей теории алгебраических систем, Мат. Сборник *35* (77) (1954), 3—20.
[5] *O. Ore*, Structures and group theory II, Duke Math. J. *4* (1938), 247—269.
[6] *М. Й. Граев:* Изоморфизмы прямых разложений в дедекиндовых структурах, Изв. Ак. Наук СССР *11* (1947), 33—47.
[7] *А. Х. Лившиц:* Прямые разложения вполне дедекиндовых структур, Мат. Сб. *28* (70) (1951), 481—503.

Summary

DIRECT DECOMPOSITIONS OF THE UNITY IN MODULAR LATTICES

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received December 17, 1954.)

Let S be a lattice with the least element O and the greatest element 1. The direct decomposition of the element 1 was defined in [2], [3]. Let

$$1 = \dot{\cup} a_\alpha \ (\alpha \in M)\,, \tag{I}$$

$$1 = \dot{\cup} b_\beta \ (\beta \in N) \tag{II}$$

be direct decompositions of the element 1. In the note there is considered the following *problem:*

(**P**) *What is the necessary and sufficient condition for the existence of a refinement of decompositions* (I), (II)?

A. G. Kuroš proved the following **theorem:**

(**K**) *Let S be a completely modular lattice. The decompositions* (I), (II) *have a common refinement if and only if for all $\alpha \in M$, $\beta \in N$ $1\bar{\varphi}_\alpha \Theta_\beta \varphi_\alpha = 0$.*

It is easy to see that instead of the complete modularity of the lattice S the following condition (**A**) is sufficient for the theorem (**K**) to be true:

(**A**) *There exists a sublattice $S_1 \subset S$ such that 1. S_1 is a complete sublattice of the (complete) lattice S, 2. S_1 is completely modular, 3. all elements a_α, b_β are contained in S_1.*

The method of this note differs from the method used in [2], [3]. The problem (**P**) will be reduced to the existence of a common refinement of two direct decompositions of certain sublattice $S_0 \subset S$. The results can be summarized as follows:

Let the lattice S be 1. complete and 2. modular.

1. A common refinement of decompositions (I), (II) *exists if and only if the complete sublattice of the lattice S, generated by the set of all elements a_α, b_β, is distributive.*

2. One can prove theorem (**K**) *without supposing the condition* (**A**).

3. *The condition* (**A**) *follows from the existence of a common refinement of decompositions* (I), (II).

4. Let A be the set of all elements of the lattice S which have a complement. The necessary and sufficient condition for the existence of a direct decomposition $1 = \dot{\cup}\, C_i$ which would be a refinement of all direct decompositions of the element 1 *is: the complete sublattice $S_1 \subset S$ generated by the set A is completely distributive.*