Czechoslovak Mathematical Journal

Jaroslav Kurzweil

К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 382–398

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100154`

К ОБРАЩЕНИЮ ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага.

(Поступило в редакцию 2/XII 1954 г.)

В настоящей статье доказывается, что некоторые условия, достаточные для того, чтобы нулевой интеграл системы (1) был равномерно устойчивым, являются в то же время необходимыми.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t)\,, \quad s = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Для любого положительного h пусть $Q(h)$ есть множество точек $(x_1, \ldots, x_n, t)$, для которых имеет место $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2$, $t \geq 0$ ($x_1, \ldots, x_n, t$ — действительные числа). Предположим, что функции X_s определены на множестве $Q(H)$, $H > 0$, что они на этом множестве непрерывны, что на этом множестве существуют непрерывные производные $\frac{\partial X_s}{\partial x_j}$, $s = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и наконец, что имеет место $X_s\ (0, \ldots, 0, t) = 0$ для $t \geq 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$. При этих условиях через каждую точку множества $Q(H)$ проходит точно один интеграл системы (1) и функции $x_s(t) \equiv 0$ образуют нулевой интеграл системы (1).[1])

Нулевой интеграл системы (1) называется устойчивым, если для каждого ε, $0<\varepsilon<H$ существует $\delta > 0$ такое, что каждый интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1), выполняющий условие

$$x_1^2(0) + \ldots + x_n^2(0) < \delta^2\,,$$

[1]) При доказательстве теорем 1 и 2 достаточно предположить только непрерывность функций $X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Однако и при доказательстве теорем 2 и 4 можно ограничиться следующими несколько более слабыми предположениями: функции $X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ непрерывны, существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial X_s}{\partial x_j}$, $s, j = 1, 2, \ldots, n$ для $(x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(H)$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$,

$$X_s(0, \ldots, 0, t) = 0 \quad \text{для} \quad t \geq 0$$

и через каждую точку $(0, \ldots, 0, t)$, $t \geq 0$ проходит только нулевое решение системы (1).

определен для всех $t \geq 0$ и удовлетворяет условию

$$x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon^2 , \quad t \geq 0 .$$

Если нулевой интеграл системы (1) устойчив, то из непрерывной зависимости интеграла системы (1) от начальных условий легко вытекает: Для всяких ε и t_0, $0 < \varepsilon < H$, $t_0 \geq 0$, существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ так, что каждый интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1), выполняющий условие

$$x_1^2(t_0) + \ldots + x_n^2(t_0) < \delta^2 ,$$

определен для всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет условию

$$x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon^2 , \quad t \geq t_0 .$$

Нулевой интеграл системы (1) мы назовем равномерно устойчивым, если для всякого ε, $0 < \varepsilon < H$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и если умеет место:

если для какого-нибудь интеграла $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1) и для некоторого $t_0 \geq 0$ выполняется условие

$$x_1^2(t_0) + \ldots + x_n^2(t_0) < \delta^2 ,$$

то интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ определен для всех $t \geq t_0$, и выполняется условие

$$x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon^2 \quad \text{для} \quad t \geq t_0 .$$

Непрерывную функцию $U(x_1, \ldots, x_n)$, определенную на множестве тех $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2$ $(h > 0)$ назовем определенно-положительной, если

$$U(0, \ldots, 0) = 0 ,$$

$$U(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{для} \quad 0 < x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2 .$$

Непрерывную функцию $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенную на множестве $Q(h)$, мы назовем определенно-положительной, если

$$V(0, \ldots, 0, t) = 0 \quad \text{для} \quad t \geq 0$$

и если существует определенно-положительная функция $U(x_1, \ldots, x_n)$ так, что имеют место неравенства

$$V(x_1, \ldots, x_n, t) \geq U(x_1, \ldots, x_n) , \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2, \quad t \geq 0 .$$

Будем говорить, что непрерывная функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная на множестве $Q(h)$, допускает бесконечно малый высший предел, если существует определенно-положительная функция $\tilde{U}(x_1, \ldots, x_n)$ так, что

$$\tilde{U}(x_1, \ldots, x_n) \geqq |V(x_1, \ldots, x_n, t)| , \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2 , \quad t \geqq 0 .$$

Если функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ определена на множестве $Q(h)$, $0 < h \leqq H$ а имеет там непрерывные частные производные по всем своим аргументам,[2]) то можно определить функцию

---

[2]) Под производной $\frac{\partial}{\partial t} V(x_1, \ldots, x_n, t)$ для $t = 0$ мы всегда покимаем производную справа.

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} \cdot X_1(x_1, \ldots, x_n, t) + \ldots$$
$$+ \ldots \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} \cdot X_n(x_1, \ldots, x_n, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} .$$

(Функция W есть производная функции V по полю системы (1).)

Ляпунов[3]) установил следующее условие, достаточное для того, чтобы нулевой интеграл системы (1) был устойчивым:

Теорема 1. *Если существует функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная на множестве $Q(h)$, $0 < h \leq H$, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным и определенно-положительная, и если*

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) \leq 0 \quad \text{для} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(h) ,$$

то нулевой интеграл системы (1) *устойчив.*

Обращением теоремы 1 занимался Персидский.[4]) Мы приведем его результат в несколько измененном виде:

Теорема 2. *Если нулевой интеграл системы* (1) *устойчив, то существует функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная на множестве $Q(H)$, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным и определенно-положительная, причем имеет место*

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) \leq 0 , \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(H) .$$

Доказательство этой теоремы мы дадим в конце статьи.

Обратимся теперь к подобной проблеме.

Теорему Ляпунова нетрудно модифицировать следующим образом:

Теорема 3. *Если существует функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная на множестве $Q(h)$, $0 < h \leq H$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным, определенно-положительная и допускающая бесконечно малый высший предел, и если*

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) \leq 0 \quad \text{для} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(h) ,$$

то нулевой интеграл системы (1) *равномерно устойчив.*

Для полноты мы приведем доказательство, которое является вполне элементарным. Пусть выполняются условия теоремы 3 и пусть $\tilde{U}(x_1, \ldots, x_n)$ и $U(x_1, \ldots, x_n)$ — такие определенно-положительные функции, что имеет место неравенство

$$\tilde{U}(x_1, \ldots, x_n) \geq V(x_1, \ldots, x_n, t) \geq U(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{для} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(h) .$$

---

[3]) См. [1], гл. 1, § 16, стр. 82.

[4]) См. [2]. *Персидский* предполагал, что система уравнений (1) определена на множестве S, открытом в E_{n+1}, и содержащем все точки $(0, \ldots, 0, t)$, $t \geq 0$, и доказал, что функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ существует на множестве $S' \subset S$, которое также открыто и содержит ось t.

Пусть дано произвольное число ε, $0 < \varepsilon < h$. Положим

$$\eta = \min_{x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon^2} U(x_1, \ldots, x_n) .$$

Очевидно, $\eta > 0$ и существует число $\delta > 0$ такое, что $\tilde{U}(x_1, \ldots, x_n) < \eta$ для $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \delta^2$. Теперь справедливо утверждение:

$$\text{если} \quad \tau \geq 0 \quad \text{и} \quad y_1^2 + \ldots + y_n^2 < \delta^2 ,$$

то интеграл системы (1) $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, зависящий от условий $x_1(\tau) = y_1, \ldots$, $\ldots, x_n(\tau) = y_n$,[5]) определен для всех $t \geq \tau$ и удовлетворяет условию

$$x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon^2 \quad \text{для} \quad t \geq \tau . \tag{3}$$

Действительно, если (2) не имеет места, то существует $\tau \geq 0$ и $(y_1, \ldots, y_n)$, $y_1^2 + \ldots + y_n^2 < \delta^2$ так, что интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1), зависящий от условий $x_1(\tau) = y_1, \ldots, x_n(\tau) = y_n$, или не будет определен для всех $t \geq \tau$ или не удовлетворяет условию (3). Но во всяком случае существует $T > \tau$ так, что интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ определен для всех t, $\tau \leq t \leq T$ и что

$$x_1^2(T) + \ldots + x_n^2(T) = \varepsilon^2 . \tag{4}$$

Однако, справедливо равенство

$$W(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) \leq 0 , \quad \tau \leq t \leq T ,$$

так что будет

$$V(x_1(T), \ldots, x_n(T), T) \leq V(x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau), \tau) \leq \tilde{U}(y_1, \ldots, y_n) < \eta .$$

Но в то же время

$$U(x_1(T), \ldots, x_n(T)) \leq V(x_1(T), \ldots, x_n(T), T) < \eta .$$

По определению числа η отсюда следует, что $x_1^2(T) + \ldots + x_n^2(T) \neq \varepsilon^2$, что противоречит соотношению (4). Итак, имеет место (2), и теорема 3 доказана.

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы доказать обратимость теоремы 3, т. е. доказать, что верна

Теорема 4. *Если нулевой интеграл системы* (1) *равномерно устойчив, то для любого h, $0 < h < H$ существует функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная на $Q(h)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным, определенно-положительная и допускающая бесконечно малый высший предел, причем имеет место неравенство*

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) \leq 0 , \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(h) .$$

Для доказательства теоремы 4 нам придется предварительно доказать следующую лемму:

[5]) Под интегралом системы (1) мы всегда понимаем интеграл, определенный на наибольшим из возможных интервалов.

Лемма 1. *Пусть функция* $P(x_1, \ldots, x_n, t)$ *определена для* $t \geq 0$, $-\infty < x_1, < \infty, \ldots, -\infty < x_n < \infty$, *непрерывна и пусть*

$$P(0, \ldots, 0, t) = 0 , \quad t \geq 0 ,$$
$$P(x_1, \ldots, x_n, t) > 0 ; \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0, t \geq 0 ,$$
$$P(x_1, \ldots, x_n, t_1) \geq P(x_1, \ldots, x_n, t_2) , \quad t_2 \geq t_1 \geq 0 .$$

Тогда существует функция $R(x_1, \ldots, x_n, t)$, *определенная для* $t \geq 0$, $-\infty < x_1 < \infty, \ldots, -\infty < x_n < \infty$, *непрерывная и удовлетворяющая условиям:*

частные производные $\frac{\partial R}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial R}{\partial x_n}, \frac{\partial R}{\partial t}$ *существуют и непрерывны для*

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0, \; t \geq 0 \tag{15}$$

$$R(x_1, \ldots, x_n, t_1) \geq R(x_1, \ldots, x_n, t_2) , \quad t_2 \geq t_1 \geq 0 , \tag{6}$$

$$2P(x_1, \ldots, x_n, t) \geq R(x_1, \ldots, x_n, t) \geq \tfrac{1}{2}P(x_1, \ldots, x_n, t) . \tag{7}$$

Доказательство леммы. Пусть функция $P(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет предположениям, указанным в условии леммы. Доказательство леммы мы проведем в двух этапах.

I. Построим функции $\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)$, $s = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, обладающие следующими свойствами:

функция $\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ определена для

$$2^{s-2} < x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 2^{s+3} , \quad t \geq 0 , \tag{8}$$

функция $\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным (9)

для $t_2 \geq t_1 \geq 0$ и $2^{s-2} < x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 2^{s+3}$, имеет место

$$\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t_2) \leq \psi_s(x_1, \ldots, x_n, t_1) , \tag{10}$$

наконец, справедливы неравенства

$$2P(x_1, \ldots, x_n, t) \geq \psi_s(x_1, \ldots, x_n, t) \geq \tfrac{1}{2}P(x_1, \ldots, x_n, t)$$
$$\text{для} \quad t \geq 0 , \quad 2^{s-2} < x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 2^{s+3} . \tag{11}$$

Возьмем фиксированный индекс s и построим функцию $\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)$. Положим

$$\eta_r = \min P(x_1, \ldots, x_n, t) , \tag{12}$$
$$2^{s-3} \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 2^{s+4} ,$$
$$0 \leq t \leq r .$$

Очевидно, $\eta_r \geq n_{r+1} > 0$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть u_1 — натуральное число; положим

$$t_0 = 0 , \quad t_1 = \frac{1}{u_1} , \quad t_2 = \frac{2}{u_1} , \ldots, t_{u_1} = 1 .$$

Число u_1 мы выберем настолько большим, чтобы было

$$P(x_1, \ldots, x_n, t_i) - P(x_1, \ldots, x_n, t_{i+1}) < \tfrac{1}{4}\eta_1 \tag{13,1}$$

для $i = 0, 1, 2, \ldots, u_1 - 1$, $2^{s-3} \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 2^{s+4}$. Далее, пусть u_2 — натуральное число; положим

$$t_{u_1+1} = 1 + \frac{1}{u_2}, \; t_{u_1+2} = 1 + \frac{2}{u_2}, \ldots, \; t_{u_1+u_2} = 2 .$$

Притом число u_2 мы выберем настолько большим, чтобы было

$$P(x_1, \ldots, x_n, t_i) - P(x_1, \ldots, x_n, t_{i+1}) < \tfrac{1}{4}\eta_2 \tag{13,2}$$

для

$$i = u_1, u_1 + 1, u_1 + 2, \ldots, u_1 + u_2 - 1,$$

. . . .

. . . .

Таким образом мы определили последовательность $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$. Наконец, отыщем последовательность $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ так, чтобы

$$\zeta_i \geq \zeta_{i+1}, \zeta_i > 0 , \quad i = 0, 1, 2, \ldots ,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i < \tfrac{1}{8}\eta_1 , \tag{14,1}$$

$$\sum_{i=u_1}^{\infty} \zeta_i < \tfrac{1}{8}\eta_2 , \tag{14,2}$$

$$\sum_{i=u_1+u_2} \zeta_i < \tfrac{1}{8}\eta_3 , \tag{14,3}$$

. . . .

. . . .

Так как функции $P(x_1, \ldots, x_n, t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ являются непрерывными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$, то существуют функции $\omega_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, определенные для $2^{s-2} < x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 2^{s+3}$, имеющие прерывные частные производные первого порядка и выполняющие неравенства

$$\left|P(x_1, \ldots, x_n, t_i) + \sum_{j=i}^{\infty} \zeta_j - \omega_i(x_1, \ldots, x_n)\right| < \tfrac{1}{2}\zeta_i . \tag{15}$$

Нетрудно убедится, что имеют место неравднства

$$\omega_0(x_1, \ldots, x_n) > \omega_1(x_1, \ldots, x_n) > \omega_2(x_1, \ldots, x_n) > \ldots \tag{16}$$

Если $a, b, \tau_1, \tau_2, \tau_1 < \tau_2$ — действительные числа, то пусть $p(t, \tau_1, \tau_2, a, b)$ есть полином третьего порядка относительно переменного t, определенный условиями

$$p(\tau_1, \tau_1, \tau_2, a, b) = a .$$

$$p(\tau_2, \tau_1, \tau_2, a, b) = b ,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t, \tau_1, \tau_2, a, b) \Big|_{t=\tau_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p(t, \tau_1, \tau_2, a, b) \Big|_{t=\tau_2} = 0 .$$

Функция $p(t, \tau_1, \tau_2, a, b)$[6]) имеет непрерывные частные производные по переменным t, a, b и монотонна на интервале $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$.

Определим функцию $\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)$. Для $t_i \leq t < t_{i+1}$, $2^{s-2} < x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 2^{s+3}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, положим

$$\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t) = p(t, t_i; t_{i+1}, \omega_i(x_1, \ldots, x_n), \omega_{i+1}(x_1, \ldots, x_n)) .$$

Функция $\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет, очевидно, условиям (8) и (9). Условие (10) следует из (16). Остается еще убедиться, что выполняется и условие (11).

Возьмем фиксированную точку $(x_1, \ldots, x_n, t)$ $2^{s-2} < x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 2^{s+3}$, $t \geq 0$. Существуют целые неотрицательные числа i, m так, что

$$t_i \leq t < t_{i+1}\,, \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_m \leq i < u_0 + u_1 + \ldots + u_{m+1} \tag{17}$$

(где мы положим $u_0 = 0$). Докажем, что имеет место неравенство

$$|\psi_s(x_1, \ldots, x_n; t) - P(x_1, \ldots, x_n, t)| < \tfrac{1}{2}\eta_{m+1} . \tag{18}$$

Очевидно ,

$$\begin{aligned}
\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t) - P(x_1, \ldots, x_n, t) &\leq \psi_s(x_1, \ldots, x_n, t_i) - P(x_1, \ldots, x_n, t_{i+1}) \leq \\
\leq |\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t_i) - P(x_1, \ldots, x_n, t_i)| &+ P(x_1, \ldots, x_n, t_i) - P(x_1, \ldots, x_n, t_{i+1}) \leq \\
\leq \sum_{j=i}^{\infty} \zeta_j + \tfrac{1}{2}\zeta_i + \tfrac{1}{4}\eta_{m+1} &< \tfrac{1}{8}\eta_{m+1} + \tfrac{1}{8}\eta_{m+1} + \tfrac{1}{4}\eta_{m+1} = \tfrac{1}{2}\eta_{m+1}
\end{aligned}$$

в силу (15), (17), (13, $m + 1$) и (14, $m + 1$), так как

$$t_i \leq t_{i+1} \leq t_{u_1 + \ldots + u_{m+1}} = m + 1 .$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}
P(x_1, \ldots, x_n, t) - \psi_s(x_1, \ldots, x_n, t) &\leq P(x_1, \ldots, x_n, t_i) - \psi_s(x_1, \ldots, x_n, t_{i+1}) \leq \\
&\leq P(x_1, \ldots, x_n, t_i) - P(x_1, \ldots, x_n, t_{i+1}) + \\
&+ |P(x_1, \ldots, x_n, t_{i+1}) - \psi_s(x_1, \ldots, x_n, t_{i+1})| \leq \\
\leq \tfrac{1}{4}\eta_{m+1} + \sum_{j=i+1}^{\infty} \zeta_j + \tfrac{1}{2}\zeta_{i+1} &< \tfrac{1}{4}\eta_{m+1} + \tfrac{1}{8}\eta_{m+1} + \tfrac{1}{8}\eta_{m+1} = \tfrac{1}{2}\eta_{m+1}
\end{aligned}$$

так что имеет место (18). Из неравенства (18) легко видеть, учитывая (12) и (17), что условие (11) выполняется. Итак, построенные нами функции $\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяют всем условиям (8), (9), (10) и (11).

II. Для $s = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ определим функции $\lambda_s(v)$ так, чтобы выполнялись условия:

Функция $\lambda_s(v)$ определена для $v \geq 0$ и обладает непрерывной производной первого порядка (19)

$$\lambda_s(v) = 0 \quad \text{для} \quad v \leq 2^{s-1} \quad \text{и для} \quad v \geq 2^{s+2} \tag{20}$$

$$\lambda_s(v) > 0 \quad \text{для} \quad 2^{s-1} < v < 2^{s+2} . \tag{21}$$

[6]) $p(t, \tau_1, \tau_2, a, b) = a + 3(b - a)\left(\dfrac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}\right) - 2(b - a)\left(\dfrac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}\right)^3.$

Положим

$$\lambda(v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \lambda_s(v) .$$

Функция $\lambda(v)$ положительна для $v > 0$ и обладает непрерывной первой производной. Положим, наконец,

$$R(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{\lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)\, \lambda_s(x_1^2 + \ldots + x_n^2) ,$$

для $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$ $t \geq 0$,

$$R(0, \ldots, 0, t) = 0 \text{ для } t \geq 0 .$$

Функция $R(x_1, \ldots, x_n, t)$ определена для всех $x_1, \ldots, x_n$ и $t \geq 0$ и обладает, очевидно, непрерывными первыми производными по всем переменным для $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$. Докажем, что справедливы неравенства

$$R(x_1, \ldots, x_n, t_2) \leqq R(x_1, \ldots, x_n, t_1) , \quad t_2 \geq t_1 \geq 0 , \tag{6}$$

$$2P(x_1, \ldots, x_n, t) \geq R(x_1, \ldots, x_n, t) \geq \tfrac{1}{2}P(x_1, \ldots, x_n, t) . \tag{7}$$

Неравенство (6) следует непосредственно из того, что функция

$$\psi_s(x_1, \ldots, x_n, t)$$

удовлетворяет условию (10). Докажем справедливость неравенства (7). Возьмем точку $(x_1, \ldots, x_n, t)$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$, $t \geq 0$. Подберем целое число s так, чтобы было

$$2^s \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 2^{s+1} .$$

Тогда будет

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{1}{\lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2)} \sum_{i=s-1}^{s+1} \psi_i(x_1, \ldots, x_n, t)\, \lambda_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2) ,$$

а так как

$$\lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \sum_{i=s-1}^{s+1} \lambda_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2) ,$$

то из условия (11) легко следует справедливость неравенства (7), которое, очевидно, справедливо и для $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, $t \geq 0$.

Из неравенства (7) и из предположений относительно функции

$$P(x_1, \ldots, x_n, t)$$

в частности следует, что функция $R(x_1, \ldots, x_n, t)$ непрерывна в точках $(0, \ldots, 0, t)$, $t \geq 0$; таким образом функция $R(x_1, \ldots, x_n, t)$ непрерывна для всех $x_1, \ldots, x_n, t \geq 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $S(x_1, \ldots, x_n, t)$ *определена для* $-\infty < x_1 < \infty$, $\ldots$, $-\infty < x_n < \infty$, $t \geqq 0$, *пусть существуют и непрерывны част-*

ные производные $\dfrac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial S}{\partial x_n}, \dfrac{\partial S}{\partial t}$ *для* $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$, $t \geq 0$ *и пусть*

$$S(0, \ldots, 0, t) = 0 \quad \textit{для} \quad t \geq 0 .$$

Тогда существует функция $\sigma(u)$, *определенная для всех* u *и обладающая непрерывной производной* $\sigma'(u)$, *причем*

$$\sigma(-u) = -\sigma(u) , \tag{22}$$

$$\sigma'(u) > 0 \quad \textit{для} \quad u \neq 0 \tag{23}$$

$\sigma'(u)$ *является возрастающей функцией для* $u \geq 0$, (24)

функция $\sigma(S(x_1, \ldots, x_n, t))$ *обладает непрерывными частными производными по переменным* $x_1, \ldots, x_n, t$ *для всех* $x_1, \ldots, x_n, t \geq 0$. (25)

Доказательство. Определим функции $\varrho_1(v), \varrho_2(v), \ldots$ для $1 \geq v > 0$,

$$\varrho_i(v) = \max(|S_{x_1}(x_1, \ldots, x_n, t)|, |S_{x_2}(x_1, \ldots, x_n, t)|, \ldots, |S_{x_n}(x_1, \ldots, x_n, t)|,$$
$$|S_t(x_1, \ldots, x_n, t)|) ,$$
$$0 \leq t \leq i , \quad 1 \geq x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq v .$$

Далее положим для $v \geq 0$,

$$\chi_i(v) = \max|S(x_1, \ldots, x_n, t)| ,$$
$$0 \leq t \leq i , \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq v .$$

Отыщем теперь такую функцию $\tau(v)$, которая определена для $v \geq 0$, имеет непрерывную производную и удовлетворяет условиям:

$$\tau(0) = 0 , \tag{26}$$

$$\tau'(v) > 0 \quad \text{для} \quad v > 0 , \tag{27}$$

$$\text{функция } \tau'(v) \text{ возрастает} \tag{28}$$

$$\lim_{v \to 0} \tau'(\chi_i(v)) \,.\, \varrho_i(v) = 0 , \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{29}$$

Нетрудно обнаружить, что существует функция $\tau(v)$, удовлетворяющая всем указанным условиям. Положим

$$\sigma(v) = \begin{cases} \tau(v) & \text{для} \quad v \geq 0 , \\ -\tau(-v) & \text{для} \quad v < 0 . \end{cases}$$

Функции $\varrho_i(v)$ не возрастают и можно предположить, что хоть одна из них положительна для малых значений v — в противном случае функция $S(x_1, \ldots, x_n, t)$ была бы постоянной в окрестности оси t и лемма была бы тривиальной — таким образом, согласно (17) и (15), будет

$$\lim_{v \to 0+} \tau'(v) = 0$$

и

$$\lim_{v \to 0} \sigma'(v) = 0 .$$

Итак, функция $\sigma(u)$ обладает непрерывной производной и, очевидно, удовлетворяет условиям (8) и (9). Докажем, что имеет место

$$\lim \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(S(x_1, \ldots, x_n, t)) = 0$$

для

$$(x_1, \ldots, x_n, t) \to (0, \ldots, 0, t_0), \quad t_0 \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{30}$$
$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Возьмем натуральное число $i > t_0$.

Тогда для $0 \leq t \leq i$ и $0 < x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$ будет

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(S(x_1, \ldots, x_n, t)) \right| = \sigma'(S(x_1, \ldots, x_n, t)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x_j} S(x_1, \ldots, x_n, t) \right| \leq$$
$$\leq \tau'(\chi_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2)) \cdot \varrho_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

и правая часть последнего неравенства стремится к нулю для $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \to 0$ согласно (29). Итак, мы доказали, что имеет место (30), откуда легко следует, что производные $\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(S(x_1, \ldots, x_n, t))$ существуют и непрерывны для всех $x_1, \ldots, x_n, t \geq 0$. Аналогичным способом убедимся, что справедливо

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma(S(x_1, \ldots, x_n, t)) \to 0 \quad \text{для} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \to (0, \ldots, 0, t_0), t_0 \geq 0. \tag{31}$$

Так как

$$S(0, \ldots, 0, t) = 0 \quad \text{для} \quad t \geq 0,$$

и $\sigma(0) = 0$, следует отсюда с учетом (31), что производная

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma(S(x_1, \ldots, x_n, t))$$

существует и непрерывна для всех $x_1, \ldots, x_n$, $t \geq 0$. Итак, мы доказали, что условие (25) выполнено, и лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть дано h, $0 < h < H$. Пусть Q — множество точек $(x_1, \ldots, x_n, t)$, для которых $-\infty < x_1 < \infty, \ldots, -\infty < x_n < \infty$, $t \geq 0$. Нетрудно обнаружить, что существуют функции

$$Y_1(x_1, \ldots x_n, t), \ldots \quad Y_n(x_1, \ldots, x_n, t)$$

определенные на множестве Q, непрерывные вместе со своими производными по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и удовлетворяющие условиям

$$Y_s(x_1, \ldots, x_n, t) = X_s(x_1, \ldots, x_n, t) \quad \text{для} \quad t \geq 0,$$
$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq h^2, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$
$$Y_s(x_1, \ldots, x_n, t) = 0 \quad \text{для} \quad t \geq 0, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq H^2,$$
$$s = 1, 2, \ldots, n.$$

Исследуем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = Y_s(x_1, \ldots, x_n, t), \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{32}$$

Через каждую точку множества Q проходит, очевидно, один и только один интеграл системы (32), причем нулевой интеграл системы (32) равномерно устойчив. Пусть при фиксированных $t_0, y_1, \ldots, y_n$, $(t_0 \geq 0)$,

$$x_s(t) = \varphi_s(t, t_0, y_1, \ldots, y_n), \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

является интегралом системы (32), удовлетворяющим условиям

$$x_s(t_0) = \varphi_s(t_0, t_0, y_1, \ldots, y_n) = y_s.$$

Каждый интеграл системы (32) определен для всех $t \geq 0$ и по известным теоремам о системах обыкновенных дифференциальных уравнений функции $\varphi_s(t, t_0, y_1, \ldots, y_n)$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным.

Опеределим функцию $P(y_1, \ldots, y_n, t)$,

$$P(y_1, \ldots, y_n. t) = \min_{0 \leq \tau \leq t}(\varphi_1^2(\tau, 0, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \varphi_n^2(\tau, 0, y_1, \ldots, y_n)).$$

Легко убедиться, что функция $P(y_1, \ldots, y_n, t)$ непрерывна на Q и удовлетворяет условиям:

$$P(0, \ldots, 0, t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{33}$$

$$P(y_1, \ldots, y_n, t) > 0 \quad \text{для} \quad y_1^2 + \ldots + y_n^2 > 0, \quad t \geq 0, \tag{34}$$

$$P(y_1, \ldots, y_n, t_1) \geq P(y_1, \ldots, y_n, t_2), \quad t_2 \geq t_1 \geq 0. \tag{35}$$

Докажем прежде всего, что функция

$$P(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t)$$

определенно-положительна и допускающая бесконечно малый высший предел. Возьмем фиксированную точку $(x_1, \ldots, x_n, t) \in Q$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$. Положим $\varepsilon^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. В силу равномерной устойчивости нулевого интеграла систэмы (32) существует такое $\delta > 0$, что для всякого интеграла $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ системы (32) имеет место: если для какого нибудь t_0 справедливо неравенство $\zeta_1^2(t_0) + \ldots + \zeta_n^2(t_0) < \delta^2$, то справедливо также $\zeta_1^2(t) + \ldots + \zeta_n^2(t) < \varepsilon^2$ для любого $t \geq t_0$.

Ввиду того, что

$$\varphi_1^2(t, t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varphi_n^2(t, t, x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon^2,$$

будет и

$$\varphi_1^2(\tau, t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varphi_n^2(\tau, t, x_1, \ldots, x_n) \geq \delta^2 \quad \text{для} \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

а также

$$P(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t) =$$
$$= \min_{0 \leq \tau \leq t}(\varphi_1^2(\text{ч}, t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varphi_n^2(\tau, t, x_1, \ldots, x_n)) \geq \delta^2,$$

но это значит, что функция $P(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t)$ определенно-положительна. Наконец, имеем

$$P(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n, t), t) =$$
$$= \min_{0 \leq \tau \leq t} (\varphi_1^2(t, t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varphi_n^2(t, t, x_1, \ldots, x_n)) \leq$$
$$\leq \varphi_1^2(t, t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varphi_n^2(t, t, x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 ,$$

так что функция $P(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t)$ допускает бесконечно малый высший предел.

Функция $P(y_1, \ldots, y_n, t)$ удовлетворяет условиям (33), (34) и (35). Воспользовавшись леммой 1 можно отыскать такую функцию $R(y_1, \ldots, y_n, t)$, которая непрерывна в Q, имеет непрерывные частные производные по всем переменным для $y_1^2 + \ldots + y_n^2 > 0$ и удовлетворяет неравенствам

$$R(y_1, \ldots, y_n, t_1) \geq R(y_1, \ldots, y_n, t_2) , \quad t_2 \geq t_1 \geq 0 , \tag{6}$$

$$2P(y_1, \ldots, y_n, t) \geq R(y_1, \ldots, y_n, t) \geq \tfrac{1}{2}P(y_1, \ldots, y_n, t) . \tag{7}$$

Так как функция $P(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t)$ допускающая бесконечно малый высший предел и определенно-положительна, то в силу соотношения (7) и функция

$$R(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t)$$

будет допускающей бесконечно малый высший предел и определенно-положительной. Функции $\varphi_i(t, t_0, x_1, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным в Q, а так как $\varphi_i(0, t, x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ только в том случае, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то функция $R(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t)$ имеет непрерывные частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$ для $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$. Согласно (7) будет, очевидно, $R(\varphi_1(0, t, 0, \ldots, 0), \ldots, \varphi_n(0, t, 0, \ldots, 0), t) = 0$ для $t \geq 0$.

Воспользуемся теперь леммой 2 и отыщем такую непрерывную возрастающую функцию $\sigma(u)$, определенную для всех действительных u, что $\sigma(0) = 0$ и что функция

$$\tilde{V}(x_1, \ldots, x_n, t) = \sigma(R(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t))$$

имеет непрерывные частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$ в Q. Так как функция $\sigma(u)$ — возрастающая, $\sigma(0) = 0$ и так как функция $R(\varphi_1(0, t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(0, t, x_1, \ldots, x_n), t)$ определенно-положительна и допускющая бесконечно малый высший предел, то функция $\tilde{V}(x_1, \ldots, x_n, t)$ также определенно-положительна и допускающая бесконечно малый высший предел.

Пусть $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ — какой-либо интеграл системы (32). Докажем, что функция $\tilde{V}(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t), t)$ не возрастает. Это следует из равенства

$$\tilde{V}(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t), t) = \sigma(R(\varphi_1(0, t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)), \ldots, \varphi_n(0, t, \zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)), t)) = \\ = \sigma(R(\zeta_1(0), \ldots, \zeta_n(0), t)) ,$$

так как имеет место (6) и функция $\sigma(u)$ возрастает.

Пусть, наконец, $\tilde{W}(x_1, \ldots, x_n, t)$ есть производная функции $\tilde{V}(x_1, \ldots, x_n, t)$ по полю системы (32), то есть

$$\tilde{W}(x_1, \ldots, x_n, t) = \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} . Y_1(x_1, \ldots, x_n, t) + \ldots \\ \ldots + \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_n}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} . Y_n(x_1, \ldots, x_n, t) + \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} .$$

Возьмем произвольно $(x_1, \ldots, x_n, \tau) \in Q$. Пусть $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ есть интеграл системы (32), удовлетворяющий условиям $\zeta_1(\tau) = x_1, \ldots, \zeta_n(\tau) = x_n$. Тогда будет

$$\tilde{W}(x_1, \ldots, x_n, \tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tilde{V}(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t), t)|_{t=\tau} \leq 0 ,$$

так как функция $\tilde{V}(\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t), t)$ не возрастает.

Положим, наконец,

$$V(x_1, \ldots, x_n, t) = \tilde{V}(x_1, \ldots, x_n, t) \quad \text{для} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(h) .$$

Нетрудно убедиться, что функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет всем указанным в теореме 4 условиям. Теорема 4 доказана.

Теперь проведем еще доказательство теоремы 2. Предположим, что система (1) обладает устойчивым нулевым интегралом. Подберем такое число $\delta > 0$, что каждый интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1), удовлетворяющий условию $x_1^2(0) + \ldots + x_n^2(0) < \delta^2$, удовлетворяет и условию

$$x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \tfrac{1}{4}H^2$$

для $t \geq 0$. Пусть Q_1 — множество таких точек $(y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q(H)$, что существует интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1), определенный на полупрямой $t \geq 0$ так, что имеет место

$$x_1^2(0) + \ldots + x_n^2(0) \leq \tfrac{1}{4}\delta^2 ,$$

$x_1(\tau) = y_1, \ldots, x_n(\tau) = y_n$. Пусть Q_2 — множество таких точек

$$(y_1, \ldots, y_n, \tau), \in Q(H),$$

что существует интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1), определенный для $t \geq 0$ и что имеет место $x_1^2(0) + \ldots + x_n^2(0) < \delta^2$,

$$x_1(\tau) = y_1, \ldots, x_n(\tau) = y_n .$$

Множество Q_1 замкнуто, множество Q_2 открыто в $Q(H)$. Пусть функция $\psi(\lambda)$ определена для всех действительных λ, не убывает, имеет непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\psi(\lambda) = 0$ для $\lambda \leq 0$, $\psi(\lambda) > 0$ для $\lambda > 0$, $\psi(\lambda) = \delta^2$ для $\lambda = \frac{1}{4}\delta^2$. Пусть при фиксированной точке

$$(y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q_2, x_1(t) = \varphi_1(t, \tau, y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(t) = \varphi_n(t, \tau, y_1, \ldots, y_n)$$

является интегралом системы (1), удовлетворяющим условиям $x_1(\tau) = y_1, \ldots, x_n(\tau) = y_n$. Определим теперь функции

$$V_1(y_1, \ldots, y_n, \tau) = \delta^2 \quad \text{для} \quad (y_1, \ldots, y_n,) \in Q(H) - Q_1$$

$$V_2(y_1, \ldots, y_n, \tau) = \psi(\varphi_1^2(0, \tau, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \varphi_n^2(0, \tau, y_1, \ldots, y_n))$$
$$\text{для} \quad (y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q_2 .$$

Функция $V_2(y_1, \ldots, y_n, \tau)$ определена на открытом в $Q(H)$ множестве и имеет непрерывные частные производные по всем переменным, так как функции $\varphi_i(t, \tau, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным. Функция V_1 также определена на открытом в $Q(H)$ множестве и имеет непрерывные производные первого порядка по всем переменным. Кроме того справедливо утверждение: если

$$(y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q_2 \cap (Q(H) - Q_1,$$

то $V_1(y_1, \ldots, y_n, \tau) = V_2(y_1, \ldots, y_n, \tau)$. Определим функцию

$$V(y_1, \ldots, y_n, \tau) = \begin{cases} V_2(y_1, \ldots, y_n, \tau) & \text{для} \quad (y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q_2 , \\ V_1(y_1, \ldots, y_n, \tau) & \text{для} \quad Q(H) - Q_1 . \end{cases}$$

Очевидно, $V(0, \ldots, 0, \tau) = 0$, $V(y_1, \ldots, y_n, \tau) \geq 0$ для $(y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q(H)$ и функция $V(y_1, \ldots, y_n, \tau)$ имеет непрерывные производные первого порядка по всем переменным. Нетрудно также доказать, что $W(y_1, \ldots, y_n, \tau) = 0$ для $(y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q(H)$, ибо для $(y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q_2$ имеет место

$$W(y_1, \ldots, y_n, \tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)|_{t=\tau} ,$$

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ есть интеграл системы (1), удовлетворяющий условиям $x_1(\tau) = y_1, \ldots, x_n(\tau) = y_n$, и по определению функции $V(y_1, \ldots, y_n, \tau)$функция $V(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)$ является постоянной, так как $V(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) = \delta^2$ для $(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) \in Q(H) - Q_2$ и

$$V(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) = \psi(\varphi_1^2(0, t, x_1(t), \ldots, x_n^2(t)) + \ldots + \varphi_n^2(0, t, x_1(t), \ldots,$$
$$\ldots, x_1^2(t))) = \psi(x_n(0) + \ldots + x_n(0)) \quad \text{для} \quad (x_1(t), \ldots, x_n(t), t) \in Q_2 .$$

Наконец, убедимся, что функция $V(y_1, \ldots, y_n, t)$ определенно-положительна. Возьмем число ε, $0 < \varepsilon < H$. Так как нулевой интеграл системы (1) устойчив, существует такое ϑ, $0 < \vartheta < \delta$, что всякий интеграл $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (1), удовлетворяющий условию $x_1^2(0) + \ldots + x_n^2(0) < \vartheta^2$, удовлетворяет и условию $x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon^2$ для $t \geq 0$. Но отсюда следует, что если $H^2 > y_1^2 + \ldots + y_n^2 \geq \varepsilon^2$, $\tau \geq 0$, $(y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q_2$, то будет также

$$\varphi_1^2(0, \tau, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \varphi_n^2(0, \tau, y_1, \ldots, y_n) \geq \vartheta^2 .$$

Однако, так как

$$V(y_1, \ldots, y_n, \tau) = \begin{cases} \delta^2 \quad \text{для} \quad (y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q(H) - Q_2 , \\ \psi(\varphi_1^2(0, \tau, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \varphi_n^2(0, \tau, y_1, \ldots, y_n)) \\ \qquad \text{для} \quad (y_1, \ldots, y_n, \tau) \in Q_2 , \end{cases}$$

то мы получим

$$V(y_1, \ldots, y_n, \tau) \geq \min(\delta^2, \psi(\vartheta^2)) = \psi(\vartheta^2) ,$$

ибо функция $\psi(\lambda)$ не возрастает. Функция $V(y_1, \ldots, y_n, \tau)$ определенно-положительна и доказательство теоремы 2 завершено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ляпунов:* Общая задача устойчивости движения, Москва-Ленинград, 1950.

[2] *Персидский К. П.:* Об одной теореме Ляпунова, ДАН *XIV*, 9 (1937).

Summary

ON THE REVERSIBILITY OF THE FIRST THEOREM OF LYAPUNOV CONCERNING THE STABILITY OF MOTION

JAROSLAV KURZWEIL, Praha.

(Received December 2, 1954).

Let us consider the system of differential equations

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad s = 1, 2, \ldots, n .$$

If h is positive, let us denote by $Q(h)$ the set of points $(x_1, \ldots, x_n, t)$ fulfilling the conditions $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h$, $t \geq 0$. We suppose that the functions X_s are defined on the set $Q(H)$, $H > 0$, that they are continuous, that there are continuous partial derivatives $\frac{\partial X_s}{\partial x_j}$ $(s = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n)$ and that $X_s(0, \ldots, 0, t) = 0, t \geq 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Obviously the solutions of the system (1) are uniquely defined by their initial values and the system of functions $x_1(t) = \ldots = x_n(t) = 0$, $t \geq 0$ is the trivial solution of the system (1).

The trivial solution of the system (1) is called stable, if for every ε, $0 < \varepsilon < H$ there is such a $\delta > 0$ that every solution $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ of the system (1) which fulfils the condition $x_1^2(0) + \ldots + x_n^2(0) < \varepsilon^2$ is defined for all $t \geq 0$ and fulfils the condition $x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon^2$, $t \geq 0$.

The trivial solution of the system (1) is called uniformly stable if for every ε, $0 < \varepsilon < H$ there is such a $\delta > 0$ that the following condition holds:

if $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ is a solution of the system (1) if $t_0 \geq 0$ and if $x_1^2(t_0) + \ldots$ $\ldots + x_n^2(t_0) < \delta^2$, then the solution $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ is defined for all $t \geq t_0$ and the inequality $x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) < \varepsilon^2$, $t \geq t_0$ is fulfilled.

We say that the continuous function $U(x_1, \ldots, x_n)$ which is defined for $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2$, is positively definite, if $U(0, \ldots, 0) = 0$ and if $U(x_1, \ldots, x_n) > 0$ for $0 < x_1^2 + \ldots + x_n^2 < h^2$.

We say that the continuous function $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ which is defined on the set $Q(h)$ is positively definite, if $V(0, \ldots, 0, t) = 0$, $t \geq 0$ and if there is such a positively definite function $U(x_1, \ldots, x_n)$ that $V(x_1, \ldots, x_n, t) \geq U(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1^2 + \ldots x_n^2 \leq h^2$, $t \geq 0$.

Finally we say that the function $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ which is defined on the set $Q(h)$ is uniformly small if there is such a positively definite function $\tilde{U}(x_1, \ldots, x_n)$ that $U(x_1, \ldots, x_n) \geq |V(x_1, \ldots, x_n, t)|$.

If the function $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ is defined on the set $Q(h)$, $0 < h \leq H$ and if the partial derivatives $\frac{\partial V}{\partial x_j}, \frac{\partial V}{\partial t}$ are continuous, we define the function

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} . X_1(x_1, \ldots, x_n, t) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} . X_n(x_1, \ldots, x_n, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{x_1, \ldots, x_n, t} .$$

The following condition which ensures that the trivial solution of the system (1) is stable is due to Lyapunov

Theorem 1. *If there is a function $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ which is defined on the set $Q(h)$, $(0 < h \leq H)$ and positively definite, if the partial derivatives $\frac{\partial V}{\partial x_j}, \frac{\partial V}{\partial t}$ are continuous and if $W(x_1, \ldots, x_n, t) \leq 0$ for $(x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(h)$ then the trivial solution of the system* (1) *is stable.*

The inverse theorem to the theorem 1 was proved by Persidskij. We quote his result in a modified form:

Theorem 2. *If the trivial solution of the system* (1) *is stable, then there is such a function $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ defined on the set $Q(h)$ that the partial derivatives $\frac{\partial V}{\partial x_j}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$ are continuous, that $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ is positively definite and that*

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) \leq 0 \quad \text{for} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(H).$$

An easy modification of the theorem 1 is the following

Theorem 3. *If there is a function $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ which is defined on the set $Q(h)$, $0 < h \leq H$, positively definite and uniformly small, if the partial derivatives $\frac{\partial V}{\partial x_j}, \frac{\partial V}{\partial t}$ are continuous and if*

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) \leq 0 \quad \text{for} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(h)$$

then the trivial solution of the system (1) *is uniformly stable.*

In this paper we prove that the inverse theorem to the theorem 3 holds too.

Theorem 4. *If the trivial solution of the system* (1) *is uniformly stable, then for every h, $0 < h < H$ there is such a function $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ defined in $Q(h)$, positively definite and uniformly small, that the partial derivatives $\frac{\partial V}{\partial x_j}, \frac{\partial V}{\partial t}$ are continuous and that*

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) \leq 0 \quad \textit{for} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in Q(h) .$$