Jaroslav Kurzweil; Otto Vejvoda

О периодических и почти периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 362–370

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil) и ОТТО ВЕЙВОДА (Otto Vejvoda), Прага.

(Поступило в редакцию 25/XI 1954 г.)

Пусть дана система уравнений

$$\dot{y}_s = f_s(y_1, \ldots, y_r, t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{1}$$

и пусть правые части этих уравнений являются периодическими функциями переменного t с периодом ω. В настоящей заметке решается вопрос о том, можетли система (1) иметь периодическое решение $y_s(t)$ с периодом Ω, причем число $\frac{\Omega}{\omega}$ иррационально. Аналогичная проблема решается в том случае, когда правые части являются почти периодическими функциями переменного t и когда требуется отыскать почти периодическое решение системы (1).

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_s = f_s(y_1, \ldots, y_r, t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r) . \tag{1}$$

Предположим, что функции f_s определены для всех действительных $y_1, \ldots$ $\ldots, y_r, t$ и непрерывны. Допустим далее, что при произвольном выборе фиксированных значений переменных $y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}$ функции $f_s(y_1^{(0)}, \ldots,$ $\ldots, y_r^{(0)}, t)$ будут периодическими функциями переменного t с периодом ω ($\omega > 0$). В литературе можно встретить следующее утверждение: если $y_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ представляет собой периодическое решение системы (1) и если период всех функций $y_s(t), s = 1, 2, \ldots, r$ равен Ω, то число $\frac{\Omega}{\omega}$ рационально.[1]) На ошибочность такого утверждения обратил внимание

[1]) См. напр. *И. Г. Малкин*: Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Ленинград-Москва 1949, Гл. 1, § 1, стр. 11.

проф. Вл. Книхал в семинаре по нелинейным колебаниям и привел пример

$$\frac{d^2}{dt^2} y + y = \left(y^2 + \left(\frac{d}{dt} y\right)^2 - 1\right) \sin 2\pi t. \tag{2}$$

Частное решение уравнения (2) имеет вид $y(t) = \sin(t + \alpha)$ и его период несоизмерим с периодом правой части уравнения (2). Целью настоящей заметки является установление достаточного условия для того, чтобы система (1) не имела периодического решения $y_s(t)$ периода Ω такого, чтобы число $\frac{\Omega}{\omega}$ было иррациональным.[2])

С этой целью введем следующие определения: Возьмем фиксированную точку $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$. Мы скажем, что система функций $f_s(y_1, \ldots, y_r, t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ зависит решающим образом от переменного t в точке $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$, если хоть одна из функций $h_s(t) = f_s(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, t)$ не является постоянной. Система функций $f_s(y_1, \ldots, y_r, t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ зависит от переменного t решающим образом, если она зависит от переменного t решающим образом во всякой точке $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$.

Пусть N обозначает множество тех точек $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$, в которых система функций $f_s(y_1, \ldots, y_r, t)$ не зависит от переменного t решающим образом (т. е. функции $f_s(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, t)$ являются постоянными для $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}) \in N$).

Теперь мы можем сформулировать

Теорему 1. *Пусть $y_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ есть периодический интеграл системы* (1) *периода Ω и пусть число $\frac{\Omega}{\omega}$ иррационально.*

Тогда

$$(y_1(t_0), \ldots, y_r(t_0)) \in N$$

для любого t_0.

Из теоремы 1 легко следует

Теорема 2. *Если система функций $f_s(y_1, \ldots, y_r, t)$ зависит решающим образом от переменного t и если $y_s(t)$ — периодическое решение системы* (1) *периода Ω, то число $\frac{\Omega}{\omega}$ рационально.*

Доказательство теоремы 1. Возьмем фиксированное число t_0. Пусть α и β — произвольные целые числа. Тогда

$$\begin{aligned} f_s(y_1(t_0), \ldots, y_r(t_0), t_0 + \alpha\omega + \beta\Omega) &= f_s(y_1 t(_0), \ldots, y_r(t_0), t_0 + \beta\Omega) = \\ &= f_s(y_1(t_0 + \beta\Omega), \ldots, y_r(t_0 + \beta\Omega), t_0 + \beta\Omega) = \\ &= \left(\frac{d}{dt} y_s(t)\right)_{t = t_0 + \beta\Omega} = \left(\frac{d}{dt} y_s(t)\right)_{t = t_0} = \\ &= f_s(y_1(t_0), \ldots, y_r(t_0), t_0), \quad s = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

[2]) До сведения авторов дошло, что той же проблемой занимался *Массера* (Massera) в работе *Remarks on the periodic solutions of differential equations,* Bol. Fac, Ingen. Montevideo *2* (1950), 43—53. Однако, его работа авторам недоступна.

Так как $\frac{\Omega}{\omega}$ — иррациональное число, то множество всех чисел $\alpha\omega + \beta\Omega$ плотно на оси t, а так как функции $f_s(y_1, \ldots, y_r, t)$ непрерывны, получим

$$f_s(y_1(t_0), \ldots, y_r(t_0), t) = f_s(y_1(t_0), \ldots, y_r(t_0), t_0), \quad s = 1, 2, \ldots, r$$

для любого t, то есть

$$(y_1(t_0), \ldots, y_r(t_0)) \in N .$$

Так как t_0 было произвольным, теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 легко следует

Теорема 3. *Если $y_0(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ — периодическое решение системы уравнений* (1) *периода Ω такое, что $\frac{\Omega}{\omega}$ — иррациональное число, то система функций*

$$y_s(t + t_0) , \quad s = 1, 2, \ldots, r$$

является также решением системы (1) *для любого t_0. Итак, если не все функции $y_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ являются постоянными, то система* (1) *имеет однопараметрическую систему решений периода Ω.*

Доказательство. Согласно теореме 1, имеем $(y_1(t + t_0), \ldots y_r(t + t_0)) \in \in N$ для любых t и t_0; таким образом будет

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_s(t + t_0) = f_s(y_1(t + t_0), \ldots, y_r(t + t_0), t + t_0) =$$
$$= f_s(y_1(t + t_0), \ldots, y_r(t + t_0), t) , \quad s = 1, 2, \ldots, r .$$

Теорему 1 можно без труда обобщить на равномерные почти периодические функции.[3] С этой целью введем следующее определение.

Пусть дана система равномерных почти периодических функций $u_1(t), \ldots \ldots, u_r(t)$. Пусть Λ — множество всех показателей Фурье системы $u_1(t), \ldots \ldots, u_r(t)$, т. е. множество таких действительных чисел λ, что хоть один из пределов

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u_i(t) \cos \lambda t \,\mathrm{d}t ,$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u_i(t) \sin \lambda t \,\mathrm{d}t , \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

отличен от нуля. Как известно, множество Λ не более, чем счетное. Назовем модулем системы функций $u_1(t), \ldots, u_r(t)$

$$M\{u_1, \ldots, u_r\}$$

---

[3]) Определение равномерной почти периодической функции см. напр. *Левитан*, гл. I, § 1, опр. 1,1,1, стр. 20.

множество всех чисел вида

$$c_1\lambda_1 + \ldots + c_k\lambda_k ,$$

где $\lambda_j \in \Lambda$ и $c_1, \ldots, c_k$ суть целые числа.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_s = g_s(y_1, \ldots, y_r, t) , \quad s = 1, 2, \ldots, r . \tag{3}$$

Предположим, что функции $g_s(y_1, \ldots, y_r, t)$ определены для всех действительных $y_1, \ldots, y_r, t$, равномерно непрерывны для $|y_1| \leqq R, \ldots, |y_r| \leqq R$, $-\infty < t < \infty$ при каждом положительном R и что функции $g_s(y_1^{(0)}, \ldots \ldots, y_r^{(0)}, t)$ — равномерные почти периодические функции переменного t при произвольно выбранных $y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}$.

Обозначим через $\overline{M}(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$ модуль системы функций $g_s(y_1^{(0)}, \ldots \ldots, y_r^{(0)}, t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$. Пусть $x_s(t)$ — интеграл системы (3) и пусть все функции $x_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$, являются равномерными почти периодическими функциями. Пусть M — модуль системы функций $x_1(t), \ldots, x_r(t)$. Пусть N обозначает множество таких точек $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$, что все функции $g_s(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ являются постоянными. Теогда справедлива

Теорема 4. *Если пересечение модулей*

$$M \cap \overline{M}(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0))$$

содержит только число 0, *то*

$$(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0)) \in N .$$

В частности, если множество N пусто, то пересечение модулей M и $\overline{M}(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0))$ есть ненулевой модуль для любого t_0.

Доказательство. Из сделанных нами предположений легко вытекает, что функции $g_s(x_1(t), \ldots, x_r(t), t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ равномерно непрерывны. Как известно, если производная $\dot{x}(t)$ равномерной почти периодической функции $x(t)$ равномерно непрерывна, то $\dot{x}(t)$ есть также равномерная почти-периодическая функция.[4]

Ввиду того, что

$$\dot{x}_s(t) = g_s(x_1(t), \ldots, x_r(t), t) \quad (s = 1, 2, \ldots, r) ,$$

то функции $\dot{x}_s(t)$ являются равномерными почти периодическими функциями и M является одновременно модулем системы $\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_r(t)$.

Предположим, что

$$M \cap \overline{M}(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0)) = (0) .$$

Возьмем последовательность

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots, \varepsilon_n \to 0 \quad \text{для } n \to \infty .$$

[4]) См. *Левитан*, гл. I, § 1, стр. 28.

По теореме Бора о связи показателей Фурье и почтипериодов почти периодической функции[5]) для каждого числа ε_n существуют показатели Фурье $\Lambda_1^{(n)}, \Lambda_2^{(n)}, \ldots, \Lambda_{k_n}^{(n)}$ системы функций

$$g_s(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0), t)\ , \quad s = 1, 2, \ldots, r\ ,$$

показатели Фурье $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{l_n}^{(n)}$ системы функций

$$x_1(t), \ldots, x_r(t)$$

и число $\delta_n > 0$ такое, что каждое число σ, выполняющее условия

$$|\Lambda_i^{(n)}\sigma| \leq \delta_n \pmod{2\pi}, \quad i = 1, 2, \ldots, k_n,$$

является ε_n-периодом функций $g_s(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0), t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ и что каждое число τ, выполняющее условия

$$|\lambda_i^{(n)}\tau| < \delta_n \pmod{2\pi}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, l_n$$

является ε_n-периодом функций $x_s(t), \dot{x}_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$.

Возьмем теперь произвольное число z и решим систему неравенств

$$\begin{aligned} &|\lambda_i^{(n)}\tau| < \delta_n \pmod{2\pi}, \quad i = 1, 2, \ldots, l_n\ , \\ &|\Lambda_i^{(n)}\tau - \Lambda_i^{(n)}z| < \delta_n \pmod{2\pi}, \quad i = 1, 2, \ldots, k_n\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Так как единственным общим элементом модулей M и $\overline{M}(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0))$ есть число 0, то из соотношения $c_1\lambda_1^{(n)} + \ldots + c_{l_n}\lambda_{l_n}^{(n)} + d_1\Lambda_1^{(n)} + \ldots + d_{k_n}\Lambda_{k_n}^{(n)} = 0$ ($c_1, \ldots, c_{l_n}, d_1, \ldots, d_{k_n}$ — целые числа) следуют соотношения

$$c_1\lambda_1^{(n)} + \ldots + c_{l_n}\lambda_{l_n}^{(n)} = 0$$

(так как $c_1\lambda_1^{(n)} + \ldots + c_{l_n}\lambda_{l_n}^{(n)} \in M \cap \overline{M}(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0))$ а также

$$d_1\Lambda_1^{(n)} + \ldots + d_{k_n}\Lambda_{k_n}^{(n)} = 0\ .$$

Можно воспользоваться теоремой Кронекера,[6]) из которой следует, что система (4) имеет решение. Итак, пусть τ_n — решение системы (4), и положим $\sigma_n = z - \tau_n$. Тогда τ_n будет ε_n-периодом функций $x_s(t)$ и $\dot{x}_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$, а σ_n будет ε_n-периодом функций $g_s(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), t)$ $\quad s = 1, 2, \ldots, r$.

Теперь имеет место

$$\begin{aligned} g_s(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0), t_0) &= \dot{x}_s(t_0) = \dot{x}_s(t_0 + \tau_n) + O(\varepsilon_n) = \\ &= g_s(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0), t + \tau_n) + O(\eta(\varepsilon_n))^{7)} = \\ &= g_s(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0), t_0 + \tau_n + \sigma_n) + O(\eta(\varepsilon_n)) = \\ &= g_s(x_1(t_0), \ldots, x_r(t_0), t_0 + z) + O(\eta(\varepsilon_n))\ . \end{aligned}$$

---

[5]) См. *Левитан*, гл. II, § 1, теорема 2,1,2, стр. 105.

[6]) См. *Левитан*, гл. II, § 2, стр. 106.

[7]) $\eta(\varepsilon)$ есть модуль непрерывности функций $g_s(y_1, \ldots, y_r, t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ на множестве

$$|y_1| \leq R, \ldots, |y_r| \leq R\ , \ -\infty < t < \infty\ ,$$

где

$$R = \sup_{\substack{i=1,2,\ldots,r \\ -\infty < t < \infty}} x_i|(t)|$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\eta(\varepsilon) > \varepsilon$.

Так как z — произвольно, теорема 4 доказана. Из теоремы 4 легко вытекает

Теорема 5. *Если пересечение модулей $M \cap \overline{M}(x_1(\tau), \ldots, x_r(\tau))$ содержит для любого τ только число* 0, *то система функций*

$$x_1(t + t_0), \ldots, x_r(t + t_0)$$

будет также решением системы (3) *для любого* t_0.

Замечание 1. Из сделанных нами предположений о системе функций $g_s(y_1, \ldots, y_r, t)$ вытекает следствие: Множество

$$P = \sum_{(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})} \overline{M}(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$$

является не более чем счетным.

Пусть Λ^* — множество чисел λ таких, что существует индекс s и точка $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$ такая, что хоть один из пределов

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g_s(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, t) \,.\, \cos \lambda t \, \mathrm{d}t\,, \tag{5}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g_s(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, t) \,.\, \sin \lambda t \, \mathrm{d}t \tag{6}$$

отличен от нуля.

Возьмем фиксированный индекс s $(1 \leq s \leq r)$ и число $R > 0$. Пусть $\Lambda(s, R)$ — множество таких чисел λ, для которых существует точка $(y_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, y_r^{(0)})$, $|y_1^{(0)}| \leqq R, \ldots, |y_r^{(0)}| \leqq R$ такая, что хоть один из пределов (5), (6) отличен от нуля.

Докажем, что множество $\Lambda(s, R)$ не более, чем счетное. Отсюда легко следует, что и множество Λ^* не более, чем счетно, и что не более чем счетной будет и минимальная аддитивная группа G действительных чисел, содержащая множество Λ^*. Так как множество G содержит множество P, то множество P не более, чем счетно. Положим теперь

$$u_\lambda(y_1, \ldots, y_r) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g_s(y_1, \ldots, y_r, t) \cos \lambda t \, \mathrm{d}t\,,$$

$$v_\lambda(y_1, \ldots, y_r) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g_s(y_1, \ldots, y_r, t) \sin \lambda t \, \mathrm{d}t\,.$$

Так как функция $g_s(y_1, \ldots, y_r, t)$ равномерно непрерывна на множестве $|y_1| \leqq R, \ldots, |y_r| \leqq R, -\infty < t < \infty$, то функции $u_\lambda(y_1, \ldots, y_r), v_\lambda(y_1, \ldots, x_r)$ одинаково непрерывны на множестве $|y_1| \leqq R, \ldots, |y_r| \leqq R$ (т. е. имеют общий модуль непрерывности). Возьмем теперь $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ такое, что

$$|u_\lambda(y_1, \ldots, y_r) - u_\lambda(y_1', \ldots, y_r')| < \varepsilon ,$$
$$|v_\lambda(y_1, \ldots, y_r) - v_\lambda(y_1', \ldots, y_r')| < \varepsilon$$

для

$$|y_1 - y_1'| < \delta, \ldots, |y_r - y_r'| < \delta ,$$
$$|y_1| \leqq R, \ldots, |y_r| \leqq R, |y_1'| \leqq R, \ldots, |y_r'| \leqq R .$$

Возьмем натуральное число q такое, чтобы было $\frac{1}{q} < \delta$; пусть $L(q, \varepsilon)$ — множество таких чисел λ, что существуют целые числа $p_1, \ldots, p_r$ такие, что или

$$\left| u_\lambda \left(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_r}{q}\right) \right| > \varepsilon ,$$

или

$$\left| v_\lambda \left(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_r}{q}\right) \right| > \varepsilon .$$

Так как показатели Фурье равномерной почти периодической функции образуют не более, чем счетное множество, то множество $L(q, \varepsilon)$ будет также не более, чем счетным. Пусть $W(\varepsilon)$ есть множество таких чисел λ, что существует точка $(y_1, \ldots, y_r)$, $|y_1| \leqq R, \ldots, |y_r| \leqq R$ такая, что или

$$|u_\lambda(y_1, \ldots, y_r)| > 2\varepsilon ,$$

или

$$|v_\lambda(y_1, \ldots, y_r)| > 2\varepsilon .$$

Легко убедиться в том, что $W(\varepsilon) \subset L(q, \varepsilon)$ и

$$\Lambda(s, R) = \sum_{n=1}^{\infty} W\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Итак, мы доказали, что множество $\Lambda(s, R)$ не более, чем счетно.

Замечание 2. Теорему 4 можно модифицировать следующим образом: Предположим, что функции $x_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ — периодические функции одного и того же периода Ω и заменим предположение, что функции $g_s(y_1, \ldots, y_r, t)$ равномерно непрерывны для ограниченных y_s, более слабым предположением, что функции $g_s(y_1, \ldots, y_r, t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ непрерывны.

ЛИТЕРАТУРА

Б. М. Левитан: Почти периодические функции, Москва 1953.

Summary

ON THE PERIODIC AND ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

JAROSLAV KURZWEIL and OTTO VEJVODA, Praha.
(Received November 25, 1954.)

In the literature the following assertion may be found: Let us suppose that $y_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ is a periodic solution with the period Ω of the system of differential equations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_s = f_s(y_1, y_2, \ldots, y_r, t)\ , \quad s = 1, 2, \ldots, r\ . \tag{1}$$

Let the functions $f_s(y_1, y_2, \ldots, y_r, t)$ be periodic in the variable t with the period ω, if the variables $y_1, y_2, \ldots, y_r$ are fixed. Then the ratio $\frac{\Omega}{\omega}$ is rational.

This assertion is false, as shows the equation

$$y'' + y = (y^2 + y'^2 - 1) \sin 2\pi t\ ,$$

which has the particular solution

$$y(t) = \sin (t + \alpha)\ .$$

In this paper we consider the case of almost periodic functions. Let us have the system of differential equations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_s = g_s\,(y_1, y_2, \ldots, y_r, t), \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\ .$$

We suppose that the functions $g_s(y_1, y_2, \ldots, y_r, t)$ are defined for all real y_1, $y_2, \ldots, y_r, t$, uniformly continuous, if $|y_1| \leqq R, \ldots, |y_r| \leqq R$, $-\infty < t < \infty$ for every positive R, and that the functions $g_s(y_1, y_2, \ldots, y_r, t)$ are uniform almost periodic functions of the variable t, if the variables $y_1, y_2, \ldots, y_r$ are kept fixed.

Let $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$ be a given system of uniform almost periodic functions. Let Λ be the set of all Fourier exponents of these functions. The set of all numbers of the form

$$c_1\lambda_1 + \ldots + c_k\lambda_k$$

($\lambda_j \in \Lambda$, c_j integers, $j = 1, 2, \ldots, k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$) we call the module of the system $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$.

Let us denote by $\overline{M}\{y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}\}$ the module of the system of functions $g_s(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$. Let $x_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, r$ by a solutions of the system (2) and let the functions $x_s(t)$ be uniform almost periodic functions. We denote by M the module of the functions $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$. Let us denote by N the set of such points $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$ that the functions

$$h_s(t) = g_s(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, t)\ , \quad s = 1, 2, \ldots, r\ ,$$

are constants.

We prove the following

Theorem. *If the intersection of the modules*

$$M \cap \overline{M}(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_r(t_0))$$

constains only the number 0, *then*

$$(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_6)) \in N .$$

From this theorem we get the following

Corrolary: *Let the functions* $g_s(y_1, y_2, \ldots, y_r, t)$ *be periodic in the variable* t *with the period* ω *and let* $x_s(t)$ *be a periodic solution of the system* (2) *with the period* Ω. *If the set* N *is empty, then the ratio* $\frac{\Omega}{\omega}$ *is rational.*