Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Sur la déformation projective des surfaces réglées

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 355–361

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100151`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1955

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

SUR LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES SURFACES RÉGLÉES

ALOIS ŠVEC, Praha.

(Reçu le 26 octobre 1954.)

Dans ses recherches sur les correspondances entre deux espaces projectifs, M. E. Čech a introduit la notion d'une *transformation K-linéarisante*. Or, ces transformations peuvent être généralisées et appliquées à l'étude des correspondances entre deux variétés, car ces transformations, qui vérifient certaines conditions définissent des correspondances entre deux variétés, qui sont des généralisations des déformations projectives.

Dans cette note sont introduites *certaines correspondances entre deux surfaces réglées plongées dans un espace de dimension impaire*. On y trouve aussi le degré de généralité des couples de surfaces se trouvant en cette correspondance cequi donne dans un certain sens *la résolution du problème de la déformation projective des surfaces réglées*.

Ce travail a été écrit sur l'initiative de M. E. Čech. Je lui exprime ici mes affectueux remercîments.

1. Nous envisagerons une surface réglée Π*)

$$x(u, v) = y(v) + u\, z(v)\,, \tag{1}$$

plongée dans un espace projectif P_{2n+1} $(n \geq 1)$ à $2n + 1$ dimensions. Le système de référence sur la surface Π est formé par les courbes quasiasymptotiques $y = y(v)$, $z = z(v)$. La normalisation

$$(x, y, x', y', \ldots, x^{(n)}, y^{(n)}) = \pm 1$$

faite, on obtient les équations différentielles fondamentales de la surface

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^{(i)}\,, \\ z^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} d_i z^{(i)}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

---

*) Nous nous bornerons ici à l'étude des surfaces qui ont l'index de développabilité maximum et qui satisfont à la relation $(x, y, \ldots, x^{(n)}, y^{(n)}) \neq 0$.

les formes

$$f_i(t) = -b_i t_1^2 + (a_i - d_i)\, t_1 t_2 + c_i t_2^2 \tag{3}$$

et les invariants

$$2j_i = a_i + d_i\,, \tag{4}$$

$i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Nous envisagerons encore la surface $\bar{\Pi}$

$$\bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{y}(\bar{v}) + \bar{u}\,\bar{z}(\bar{v}) \tag{5}$$

qui est plongée dans l'espace $\bar{P}_{2n+1}$. Les équations

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \bar{y}^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{b}_i \bar{z}^{(i)}\,, \\ \bar{z}^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \bar{c}_i \bar{y}^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{d}_i \bar{z}^{(i)} \end{aligned} \tag{6}$$

sont ses équations différentielles fondamentales, $\bar{f}_i(t)$ sont ses formes et $\bar{j}_i$ ses invariants ($i = 0, 1, \ldots, n-1$).

Nous supposerons, qu'il y a une correspondance quasiasymptotique $\boldsymbol{T}$ entre les surfaces Π et $\bar{\Pi}$ qui fait correspondre projectivement génératrices de l'une des surfaces les génératrices de l'autre. Nous supposerons, qu'il y a même

$$u = \bar{u}\,, \quad v = v\,. \tag{7}$$

La correspondance $\boldsymbol{T}$ définit une déformation projective du n-tième ordre (avec un contact analytique) des deux surfaces Π et $\bar{\Pi}$. Même des collineations $\boldsymbol{K}$ existent, qui font pour chaque $v = v_0$ correspondre la surface $K\bar{\Pi}$ à la surface Π de telle manière que les surfaces Π et $\boldsymbol{K}\bar{\Pi}$ ont pour chaque (u, v_0) un contact analytique du n-tième ordre. Les plus générales de ces collineations sont données par les équations

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}\bar{y}^{(i)} &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j y^{(i-j)} \\ \boldsymbol{K}\bar{z}^{(i)} &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j z^{(i-j)} \end{aligned} \tag{8}$$

ou $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ sont des constants arbitraires.

2. Avant d'introduire la notion de *la droite* $\boldsymbol{K}$*-linéarisante* qui est une généralisation directe de la notion de la droite $\boldsymbol{K}$-linéarisante d'une correspondance entre deux espaces qui a été introduite par M. E. Čech, nous envisagerons le point

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{K}\bar{x}^{(n+1)} - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} x^{(i)} \tag{9}$$

où **K** est la collineation (8), pour laquelle nous avons

$$\mathbf{K}\bar{x}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j y^{(i-j)} + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{b}_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j z^{(i-j)} +$$
$$+ n \sum_{i=0}^{n} \bar{c}_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j y^{(i-j)} + n \sum_{i=0}^{n-1} \bar{d}_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j z^{(i-j)} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} u^{(n+1-i)} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j z^{(i-j)} .$$

En vertu de la relation

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{i} c_{ij} A_{i-j} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} a_{i+j} c_{i+j,j} A_i$$

nous pouvons écrire

$$\mathbf{K}\bar{x}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \overline{a_{i+j}} \lambda_j y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \overline{b_{i+j}} \lambda_j z^{(i)} +$$
$$+ n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \overline{c_{i+j}} \lambda_j y^{(i)} + n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \overline{d_{i+j}} \lambda_j z^{(i)} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{i+j} \binom{i+j}{j} u^{(n+1-i-j)} \lambda_j z^{(i)} ,$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} x^{(i)} = \lambda_0 \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + \lambda_0 \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^{(i)} +$$
$$+ n\lambda_0 \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^{(i)} + n\lambda_0 \sum_{i=0}^{n-1} d_i z^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} y^{(i)} +$$
$$+ \lambda_0 \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} u^{(n+1-i)} z^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} u^{(j)} z^{(i-j)} ,$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} u^{(j)} z^{(i-j)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{i+j} \binom{i+j}{j} \lambda_{n+1-i-j} u^{(j)} z^{(i)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{n+1-i} \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{i} \lambda_k u^{(n+1-i-k)} z^{(i)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{i} \lambda_j u^{(n+1-i-j)} z^{(i)} -$$
$$- \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \lambda_0 u^{(n+i-1)} z^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} u z^{(i)} .$$

L'égalité

$$\binom{n+1}{i+j} \binom{i+j}{j} = \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{i}$$

nous conduit enfin à l'équation

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} N_i z^{(i)} + M y^{(n)} + N z^{(n)} \tag{10}$$

où

$$
\begin{aligned}
M_i &= \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \overline{a_{i+j}} - \lambda_0 a_i - \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} + \\
&\quad + u \left\{ \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \overline{c_{i+j}} - \lambda_0 c_i \right\}, \\
N_i &= \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \overline{b_{i+j}} - \lambda_0 b_i + \\
&\quad + u \left\{ \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \overline{d_{i+j}} - \lambda_0 d_i - \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} \right\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= -(n+1)\lambda_1 , \\
N &= -(n+1)\lambda_1 u .
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Maintenant nous pouvons énoncer la définition de la droite **K**-linéarisante pour le point $x(u, v) \neq \mathcal{L}(u, v)$: c'est la droite $l = [x, \mathcal{L}]$. Dans le cas où $\mathcal{L} = \alpha x$ (α est un nombre), nous dirons, que la droite K-linéarisante au point x est indéterminée.

L'interprétation géométrique de la droite **K**-linéarisante peut être établie grâce à l'équation (9): soit γ une courbe de la surface Π passant par le point $x(u, v)$ et soit $\bar{\gamma}$ la courbe correlative par la correspondance (7). Pour que les courbes γ et $\mathbf{K}\bar{\gamma}$ aient un contact analytique de l'ordre $n + 1$ il faut et il suffit, que la droite **K**-linéarisante au point x soit indéterminée. Si la droite **K**-linéarisante est bien déterminée et tangente en même temps aux courbes γ et $\mathbf{K}\bar{\gamma}$, ces courbes ont un contact géométrique de l'ordre $n + 1$. Si elle n'est pas la tangente commune, elle est le lieu géométrique des points $w \neq x$, qui ont la propriété suivante: les projections des courbes γ et $\mathbf{K}\bar{\gamma}$ du point w comme centre dans l'hyperplan de l'espace P_{2n+1} quelconque ont un contact analytique de l'ordre $n + 1$.

Parce que dans les équations (11) et (12) ne figure pas la dérivée de u, nous avons ici l'analogie des droites totalement **K**-linéarisantes.

3. Nous dirons que la correspondance (7) est une correspondance $\mathbf{T}_{pq}$ ($-1 \leq p$, $0 \leq q$, $p \leq q$), si pour chaque $v = v_0$ existe une collineation (8) telle que pour chaque u la droite **K**-linéarisante au point (u, v_0) appartient à la jonction de l'espace p-tangent de la surface Π le long de la droite v_0 avec le q-tième espace osculateur de la courbe quasiasymptotique au point (u, v_0), c'est-à-dire qu'elle appartient à l'espace déterminé par les points

$$
y, z, y', z', \ldots, y^{(p)}, z^{(p)}, y^{(p+1)} + uz^{(p+1)}, \ldots, y^{(q)} + uz^{(q)} . \tag{13}
$$

Il résulte des équations (11) et (12) que la correspondance (7) entre deux surfaces Π et $\overline{\Pi}$ quelconques est au moins du type $\mathbf{T}_{n-1,n-1}$; on s'en couvainc aisément en posant $\lambda_1 = 0$. La correspondance $\mathbf{T}_{-1,0}$ est remarquable par le fait que pour chaque $v = v_0$ existe une collineation **K** telle que les surface s Π et $\mathbf{K}\overline{\Pi}$

ont au point (u, v_0) un contact analytique de l'ordre $n + 1$; les surfaces Π et $\overline{\Pi}$ sont donc projectivement déformables à l'ordre $n + 1$ de telle manière que pour chaque $v = v_0$ existe une collineation $\mathbf{K}$ qui réalise un contact analytique de l'ordre $n + 1$ des deux surfaces simultanément dans tous les points des géneratrices correspondantes.

Il est à remarquer que la notion de la correspondance $\mathbf{T}_{pq}$ peut être modifiée de telle manière, qu'elle peut être appliquée aux variétés quelconques.

4. Dans ce paragraphe nous établirons quand la correspondance (7) entre les surfaces (1) et (5) est une correspondance $\mathbf{T}_{pq}$. On peut se borner aux cas $p, q \leq n - 1$ et poser $\lambda_1 = 0$, $\lambda_0 = 1$. De l'équation (11) suivent immédiatement les conditions

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j(\overline{a_{i+j}} - \overline{d_{i+j}}) = a_i - d_i\,, \\ \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \overline{b_{i+j}} = b_i\,, \\ \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \overline{c_{i+j}} = c_i\end{gathered} \tag{14}$$

pour $i = n - 1, n - 2, \ldots, p + 1$ et

$$\sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j(\overline{a_{i+j}} + \overline{d_{i+j}}) = a_i + d_i + 2\binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} \tag{15}$$

pour $i = n - 1, n - 2, \ldots, q + 1$.

Les équations (4), (4a) et les équations analogues pour la surface (5) ont pour conséquence

$$f_i(t) = \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \overline{f_{i+j}}\,(t) \tag{16}$$

pour $i = n - 1, n - 2, \ldots, p + 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{i+k}{k} \lambda_k \overline{j_{i+k}} = j_i + \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} \tag{17}$$

pour $i = n - 1, n - 2, \ldots, q + 1$.

Soit maintenant donnée la surface $\overline{\Pi}$ par les formes $\overline{f}_i(t)$ et les invariants $\overline{j}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$ et cherchons toutes les surfaces Π qui sont en correspondance $\mathbf{T}_{pq}$ avec Π. Les fonctions $j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}$ choisies, on trouve les coefficients $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-q}$ (les coefficients $\lambda_1 = 0$, $\lambda_0 = 1$ ont été fixés auparavant) à l'aide du système (17) et les formes $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_{n-1}$ à l'aide du systéme (16); dans ce dernier systéme figurent seulement les coefficients $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-p-2}$, c'est-à-dire que les coefficients $\lambda_{n-q+1}, \lambda_{n-q+2}, \ldots, \lambda_{n-p-2}$ sont arbitraires. Enfin les formes $f_0(t), f_1(t), \ldots, f_p(t)$ sont arbitraires elles aussi.

5. Nous allons étudier de plus près le cas $q = p + 2 \geq 1$. Par le systéme (17) sont bien déterminé les coefficients $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-p-2}$, c'est-à-dire précisément les coefficients qui figurent dans le systéme (16). La géneralité de nos considérations ne sera donc pas restreinte en faisant le choix de λ_{n-p-1}, λ_{n-p}, car on on aura affaire seulement avec la restriction des collineations $\mathbf{K}$. Nous choisirons ces coefficients λ_{n-p-1}, λ_{n-p} de telle manière que les équations

$$\binom{n+1}{p+1+r}\lambda_{n-p-r} = \sum_{k=0}^{n-p-r-2}\binom{p+r+k+1}{k}\lambda_k \bar{j}_{p+r+k+1} - j_{p+1+r} \tag{18}$$

($r = 0, 1$) soient satisfaites. Alors le système (17) sera satisfait pour $i = n - 1$, $\ldots, q - 1 = p + 1$ et les surfaces Π et $\overline{\Pi}$ sont même en correspondance $\mathbf{T}_{pp}$. On peut donc énoncer la théorème suivant:

Si la correspondance (7) *entre les surfaces Π et $\overline{\Pi}$ est du type $\mathbf{T}_{p,p+2}$, elle est même du type $\mathbf{T}_{pp}$.*

6. *Étant donnée une surface $\overline{\Pi}$, il existe toujours des surfaces qui sont en correspondance $\mathbf{T}_{pq}$ avec $\overline{\Pi}$ et elles dépendent de $(n + \nu)$ fonctions d'une variable et dans e cas où $q > p + 2$ elles dépendent en outre de $q - p - 2$ constantes arbitraires. Ici ν est le nombre d'invariants qui définissent les formes $f_0(t), \ldots, f_p(t)$, les formes $f_{p+1}(t), \ldots, f_{n-1}(t)$ étant connues.* Or une analyse plus détaillée serait nécessaire pour déterminer le nombre ν dans tous les cas divers.

Dans le cas $p = -1$, $q = 0$ le système (17) définit les coefficients $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ et le système (16) définit toutes les formes $f_0(t), \ldots, f_{n-1}(t)$. Les surfaces qui sont en déformation projective de l'ordre $n + 1$ (dans le sens énoncé plus haut) avec une surface $\overline{\Pi}$ donnée existent et dépendent de n fonctions d'une variable $j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}$.

7. Pour P_3 ($n = 1$) chaque correspondance est une correspondance $\mathbf{T}_{00}$, tandis que les correspondances $\mathbf{T}_{-1,0}$ sont les déformations projectives du 2[ond] ordre (dans le sens énoncé). Le système (16) devient

$$f_0(t) = \bar{f}_0(t)\,, \tag{19}$$

le système (17) est vide.

Pour P_5 ($n = 2$) chaque correspondance est une correspondance $\mathbf{T}_{11}$. A priori existent les types $\mathbf{T}_{-1,0}$, $\mathbf{T}_{-1,1}$, $\mathbf{T}_{00}$, $\mathbf{T}_{01}$ des correspondances mais en vertu du théorème énoncé il suffit d'examiner les correspondances des types $\mathbf{T}_{-1,0}$ et $\mathbf{T}_{00}$.

La correspondance $\mathbf{T}_{-1,0}$ est une déformation projective du 3[ème] ordre (dans le sens énoncé), le système (16) devient

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \bar{f}_1(t)\,, \\ f_0(t) &= \bar{f}_0(t) \end{aligned} \tag{20}$$

et le système (17) se réduit à l'équation

$$3\lambda_2 = \bar{j}_1 - j_1\,. \tag{21}$$

La transformation $\mathbf{T}_{00}$ est telle que les droites $\mathbf{K}$-linéarisantes coïncident avec les génératrices de la surface. Le système (16) devient alors

$$f_1(t) = \bar{f}_1(t) \tag{22}$$

et le système (17) se reduit à l'équation (21).

LITERATURE

G. Fubini-E. Čech: Geometria proiettiva differentiale (Bologna, 1926—1927).

E. Čech: Géometrie projective des surfaces réglées dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions I (en tchèque, Rozpravy české akademie věd, II. třída, 33, N° 13, 1924).

Резюме

ПРОЕКТИВНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

АЛОИС ШВЕЦ, (Alois Švec), Прага.

(Поступило в редакцию 26/X 1954 г.)

В работе рассматривается линейчатая поверхность Π в проективном пространстве P_{2n+1} и поверхность $\overline{\Pi}$ в проективном пространстве $\overline{P}_{2n+1}$, имеющие одна и другая максимальный индекс развертываемости (*indice di sviluppabilità*). Между ними задано квазиасимптотическое соответствие $\boldsymbol{T}$, в котором образующие прямые поверхностей проективно соответствуют друг другу. Учитывая коллинеации $\boldsymbol{K}$ пространства $\overline{P}_{2n+1}$ на P_{2n+1}, которые осуществляют аналитическое касание n-того порядка между обеими поверхностями одновременно вдоль соответствующих друг другу образующих прямых, можем ввести $\boldsymbol{K}$-линеаризирующие преобразования, которые являются совершенным аналогом преобразований, введенных акад. Э. Чехом при изучении соответствий между двумя P_n. Соответствие $\boldsymbol{T}$ будет типа $\boldsymbol{T}_{pq}$ $(-1 \leqq p \leqq q,\ 0 \leqq q)$, если для каждой пары соответствующих друг другу прямых p и $\overline{p}$ поверхностей Π и $\overline{\Pi}$ найдется коллинеация $\boldsymbol{K}$ такая, что для каждой точки x прямой $p = \boldsymbol{K}\overline{p}$ тотально $\boldsymbol{K}$-линеаризирующая прямая (которая существует для каждой $\boldsymbol{K}$) лежит в соединении p-касательного пространства поверхности Π вдоль p с q-тым соприкасающимся пространством квазиасимптотической кривой в точке x. Соответствие типа $\boldsymbol{T}_{-1,0}$ является в некотором смысле проективной деформацией $(n + 1)$-ого порядка (аналитическое касание). К каждой поверхности Π существуют поверхности, которые находятся с ней в соответствии типа $\boldsymbol{T}_{pq}$; в работе указан метод установления их степени вольности.