Ivo Babuška

Об одном свойстве гармонических функций

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 2, 220–233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100143

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага.
(Поступило в редакцию 5/X 1954 г.)

В [1] мы доказали между прочим теорему о том, что если действительная часть голоморфной функции интегрируема с квадратом внутри достаточно гладкой кривой, то и мнимая ее часть также интегрируема с квадратом. (Теорема 4 цитированной статьи.) В настоящей статье исследуются подобные вопросы для кривых с угловыми точками. Главным результатом статьи является теорема 3.

Перед доказательством нашей главной теоремы мы введем некоторые понятия и докажем несколько вспомогательных теорем.

Определение 1. *Назовем трапецией $L(\alpha, \beta, s)$ внутренность равнобедренной трапеции (см. рис. 1) заданной величинами $\alpha, \beta = \frac{s}{a}, s$, причем значение величин α, β, s показано на рис. 1 $(0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi, \operatorname{tg} \alpha < \beta, s > 0)$.*

Определение 2. *Назовем регулярной трапецией $L^*(\alpha, \beta, s, \varrho)$ внутренность равнобедренной трапеции с углами, закругленными с помощью окружностей радиуса ϱ (см. рис. 2).*

При этом будем предполагать, что $\varrho \leq \frac{a}{8}$, $\varrho \leq \frac{s}{8}\left(1 - \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{s}\right)$. Скажем, что $L^*(\alpha, \beta, s, \varrho)$ является регулярной трапецией по отношению к трапеции $L(\alpha, \beta, s)$.

Определение 3. *Пусть C — простая ориентированная кривая. Пусть $\vartheta(s)$ — угол между положительным направлением касательной и осью x, где s есть длина дуги. Пусть $\vartheta(s)$ является вполне непрерывной функцией и пусть*

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s} \in L_p\,, \quad p > 1\,,$$

т. е. пусть

$$\int_C \left|\frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s}\right|^p \mathrm{d}s < \infty\,.$$

Тогда мы скажем, что кривая является достаточно гладкой.

Простую ориентированную кривую C назовем достаточно гладкой по частям, если она составлена из конечного числа дуг O_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, с концами A_i (направление обхода дуг совпадает с направлением обхода кривой), таких, что

$$1.\quad \int\limits_{O_i} \left| \frac{\mathrm{d}\vartheta(s)}{\mathrm{d}s} \right|^p \mathrm{d}s < \infty\,, \quad p > 1^{1)}$$

$$2.\quad |\vartheta(A_i)_+ - \vartheta(A_i)_-| \neq 0 \pmod{\pi}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N\,:$$

где $\vartheta(A_i)_+$ и соответственно $\vartheta(A_i)_-$ обозначают предельные значения угла

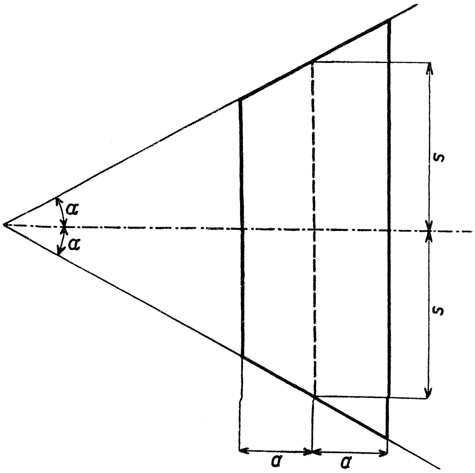


Рис. 1.

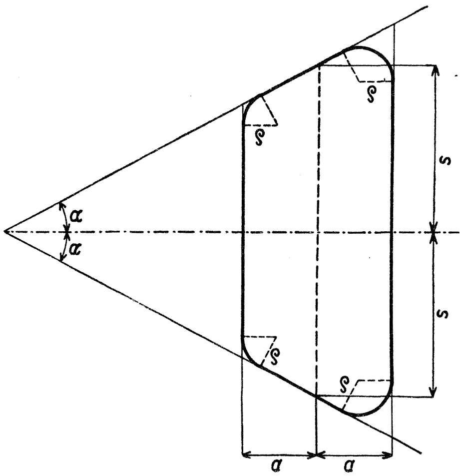


Рис. 2.

между положительным направлением касательной к кривой C и осью x в точке A_i, $A_i \prec z \in C$, соответственно $A_i \succ z \in C$.[2]) *Точки A_i будем называть особыми точками кривой C. Направление обхода предполагается такое, при котором внутренность кривой остается все время слева.*

Лемма 1. *Регулярная трапеция $L^*(\alpha, \beta, s, \varrho)$ есть множество, ограниченное достаточно гладкой кривой.*

Лемма очевидна.

Теорема 1. *Пусть C — достаточно гладкая кривая, Ω — ее внутренность. Пусть φ — голоморфная, определенная на Ω функция такая, что*

---

[1]) В начале и в конце дуги мы берем одностороннюю производную.

[2]) Мы обозначаем через $z \succ A_i$, соотв. $z \prec A_i$, то обстоятельство, что в скрестности A_i точка z лежит за точкой A_i, соотв. перед ней, если обходить кривую в выбраннсм направлении.

$\iint\limits_{\Omega}(\mathrm{Re}\,\varphi)^2\,.\,\mathrm{d}\Omega < \infty$. *Тогда* $\iint\limits_{\Omega}|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Omega < \infty$. *Пусть, далее,* $z_0 \in \Omega$. *Если* $\mathrm{Im}\,\varphi(z_0) = 0$, *то будет*

$$\iint\limits_{\Omega}|\varphi|^2\,\mathrm{d}\Omega \leq A\iint\limits_{\Omega}(\mathrm{Re}\,\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega\,,$$

где постоянная A *зависит только от* C *и от* z_0 *и не зависит от* φ.

Для доказательства см. теорему 4 в [1].

Теорема 2. (Теорема Смирнова.) *Пусть* C — *достаточно гладкая кривая и* Ω-*ее внутренность. Пусть* $\omega(\zeta)$ — *голоморфная функция, конформно отображающая единичный круг* $\Gamma = \mathop{E}\limits_{\zeta}(|\zeta| < 1)$ *на* Ω. *Тогда функция* $\omega'(\zeta)$ *непрерывна в замкнутом единичном круге* $\Gamma = \mathop{E}\limits_{\zeta}[|\zeta| \leq 1]$ *и вполне непрерывна на границе* $\gamma = \mathop{E}\limits_{\zeta}[|\zeta| = 1]$. *Притом* $|\omega'(\zeta)|$ *претерпевает положительный минимум.*[3])

Доказательство см. [3] стр. 32, *Satz* 1.

Лемма 2. *Пусть* φ — *голоморфная функция, определенная на круге* K_ϱ, $[K_\varrho = \mathop{E}\limits_{z}[|z| < \varrho]]$. *Пусть* $\iint\limits_{K_\varrho}(\mathrm{Re}\,\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega < \infty$. *Тогда*

$$|\mathrm{Re}\,\varphi'(0)| \leq \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\iint\limits_{K_\varrho}(\mathrm{Re}\,\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega}\,,$$

$$|\mathrm{Im}\,\varphi'(0)| \leq \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\iint\limits_{K_\varrho}(\mathrm{Re}\,\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega}\,.$$

Доказательство. Функцию $\mathrm{Re}\,\varphi$, выраженную в полярных координатах, можно разложить в ряд Тэйлора в следующем виде:

$$\mathrm{Re}\,\varphi(re^{i\Theta}) = \sum_{0}^{\infty}a_k r^k \cos k\Theta + \sum_{1}^{\infty}b_k\, r^k \sin k\Theta \tag{1}$$

$$r < \varrho,\quad 0 \leq \Theta < 2\pi\,.$$

При этом $a_1 = \mathrm{Re}\,\varphi'(0)$, $b_1 = -\mathrm{Im}\,\varphi'(0)$. Ряд (1) сходится на K_ϱ почти равномерно.

Обозначим

$$\mathrm{Re}\,\varphi_n(re^{i\Theta}) = \sum_{0}^{n}a_k r^k \cos k\Theta + \sum_{1}^{n}b_k r^k \sin k\Theta\,. \tag{2}$$

Последовательность функций $\mathrm{Re}\,(\varphi_n)$ сходится на K_ϱ почти равномерно к $\mathrm{Re}\,\varphi$.

Положим

$$I_1^n = \iint\limits_{K_{\varrho_0},\,\varrho_0<\varrho} \mathrm{Re}\,\varphi_n(re^{i\Theta})\cos\Theta\,\mathrm{d}\Omega\,.$$

[3]) Говоря о функции $\omega'(\zeta)$ на границе минимума, мы подразумеваем под этим ее непрерывное продолжение за пределы Γ.

Тогда получим

$$I_1^n = \tfrac{1}{3}\pi\varrho_0^3 a_1 .$$

Аналогично

$$I_2^n = \iint\limits_{K_{\varrho_0},\, \varrho_0<\varrho} \operatorname{Re} \varphi_n(re^{i\Theta}) \sin\Theta \, d\Omega = \tfrac{1}{3}\pi\varrho_0^3 b_1 .$$

Поэтому

$$|a_1| = \frac{3}{\pi\varrho_0^3} \Big|\iint\limits_{K_{\varrho_0}} \operatorname{Re} \varphi_n(re^{i\Theta}) \cos\Theta \, d\Omega\Big| \leqq$$

$$\leqq \frac{3}{\pi}\frac{1}{\varrho_0^3} \sqrt{\iint\limits_{K_{\varrho_0}} (\operatorname{Re}\varphi_n)^2 \, d\Omega} \cdot \sqrt{\iint\limits_{K_{\varrho_0}} \cos^2\Theta \, d\Omega} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\varrho_0^2} \sqrt{\iint\limits_{K_{\varrho_0}} (\operatorname{Re}\varphi_n)^2 \, d\Omega} .$$

Ввиду равномерной сходимости последовательности (2) на K_{ϱ_0}, можно перейти к пределу для $n \to \infty$. Далее можно перейти к пределу для $\varrho_0 \to \varrho$, и мы получим утверждение нашей леммы для $\operatorname{Re} \varphi'(0)$. Аналогично доказывается и утверждение относительно $\operatorname{Im} \varphi'(0)$.

Определение 4. *Множество* $S(\alpha, \varrho) = \underset{z}{\mathrm{E}}\,[|z| < \varrho,\ |\operatorname{Arg} z| < \alpha],\ 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi$, *будем называть сектором.*

Лемма 3. *Пусть на секторе* $S(\alpha, \varrho)$ *определена голоморфная функция* φ *такая, что*

$$\iint\limits_{S(\alpha,\varrho)} (\operatorname{Re}\varphi)^2 \, d\Omega < \infty .$$

Тогда в некоторой окрестности начала будет

$$|\varphi'(r)| \leqq C \frac{1}{r^2} \sqrt{\iint\limits_{S(\alpha,\varrho)} (\operatorname{Re}\varphi)^2 \, d\Omega}$$

для всех голоморфных функций. Притом окрестность и постоянная C *зависят только от сектора* $S(\alpha, \varrho)$, *но не зависят от вида функции* φ.

Доказательство. Пусть $K(a, \varrho) = \underset{z}{E}\,[|z - a| < \varrho]$. Для достаточно малых r, очевидно, будет

$$K(r, r\sin\alpha) \subset S(\alpha, \varrho) .$$

Согласно лемме 2,

$$|\operatorname{Re}\varphi'(r)| \leqq \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{r^2(\sin\alpha)^2} \sqrt{\iint\limits_{K(r,\, r\sin\alpha)} (\operatorname{Re}\varphi)^2 \, d\Omega} \leqq C \frac{1}{r^2} \sqrt{\iint\limits_{S(\alpha,\varrho)} (\operatorname{Re}\varphi)^2 \, d\Omega} .$$

При этом постоянная C зависит только от сектора $S(\alpha, \varrho)$, но не зависит от вида функции φ. Аналогично докажем подобное утверждение относительно $|\operatorname{Im}\varphi'(r)|$. Соединив эти утверждения, мы без труда получим нашу лемму.

Лемма 4. *Пусть* t_1 *и* t_0 — *два неотрицательных числа и пусть* $\mu \geqq 0$. *Тогда*

$$(t_1 + t_2)^\mu \leqq 2^{\mu-1}(t_1^\mu + t_2^\mu) .$$

Доказательство. Для доказательства нашей леммы мы можем без ограничения общности предположить, что $t_1 \geqq t_2$. Положим теперь $t = \frac{t_2}{t_1}$. Тогда доказываемое неравенство примет вид

$$\frac{(1+t)^\mu}{1+t^\mu} \leqq 2^{\mu-1}, \quad 0 \leqq t \leqq 1 .$$

Последнее неравенство докажем элементарными средствами, определив максимум функции $\frac{(1+t)^\mu}{1+t^\mu}$.

Лемма 5. *Пусть на секторе $S(\alpha, \varrho) = S_0$ определена голоморфная функция φ такая, что*

$$\iint (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega < \infty .$$

Для каждой функции φ такой, что $\operatorname{Im} \varphi(r_0) = 0$, $r_0 \leqq \frac{1}{2}\varrho$, имеет место неравенство

$$\iint\limits_{S\left(\alpha, \frac{\varrho \cos \alpha}{2}\right)} |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leqq K(\iint\limits_{S_0} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} .$$

Притом $1 > \varepsilon > 0$ и постоянная K не зависит от φ, хотя и зависит, конечно, от ε.

Доказательство. Возьмем на действительной оси точки $z_i = (r_i, 0)$, $i = 1, 2, \ldots$, так, что $r_i = \frac{\varrho \cos \alpha}{2^i}$.

Пусть далее

$$L_i = \mathop{E}_{z}\left[z \in S(\alpha, \varrho), \, 2^{-(i+1)} \leqq \frac{\operatorname{Re} z}{\varrho \cos \alpha} \leqq 2^{-i}\right], \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$L'_i = E\left[z \in S(\alpha, \varrho), \, \frac{3}{2^{i+3}} \leqq \frac{\operatorname{Re} z}{\varrho \cos \alpha} \leqq \frac{3}{2^{i+2}}\right], \quad i = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что

$$L_i = L\left(\alpha, 3 \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{3}{2^{i+2}} \varrho \sin \alpha\right),$$

$$L'_i = L\left(\alpha, 3 \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{9}{2^{i+4}} \varrho \sin \alpha\right).$$

Трапеции L_i, $i = 1, 2, \ldots$ подобны, следовательно, друг другу, так же как и все трапеции L'_i, $i = 1, 2, \ldots$

Пусть, далее, L^*_i соотв. L'^*_i — регулярные трапеции по отношению к трапециям L_i соотв. L'_i, Обозначим

$$S^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^*_i , \quad S'^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} L'^*_i , \quad S = S^* \cup S'^* .$$

На L_i^* определим теперь функции

$$\varphi_i^{(1)} = i \operatorname{Im} \varphi \left(\frac{3}{2^{i+2}} \varrho \cos \alpha, 0 \right),$$

$$\varphi_i = \varphi - \varphi_i^{(1)}.$$

Очевидно, будет $\operatorname{Re} \varphi_i = \operatorname{Re} \varphi$.

Определим, далее, на S^* функции φ^*, $\varphi^{(1)}$ следующим предписанием:

$$\varphi^* = \varphi_i \quad \text{на} \quad L_i^*,$$
$$\varphi^{(1)} = \varphi_i^{(1)} \quad \text{на} \quad L_i^*.$$

Оценим теперь значение интеграла

$$I^* = \iint_{S^*} |\varphi^*|^2 \, \mathrm{d}\Omega.$$

Имеем

$$I^* = \sum_{i=1}^{\infty} \iint_{L_i^*} |\varphi^*|^2 \, \mathrm{d}\Omega.$$

По теореме 1 будет, однако,

$$\left|\iint_{L_i^*} |\varphi^*|^2 \, \mathrm{d}\Omega\right| \leqq A \iint_{L_i^*} (\operatorname{Re} \varphi^*)^2 \, \mathrm{d}\Omega = A \iint_{L_i^*} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega.$$

Ввиду того, что L_i^* подобны друг другу, постоянная A не зависит от i, и поэтому

$$I^* \leqq A \iint_{S^*} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega.$$

Из неравенства Гельдера[4]) теперь, очевидно, получим

$$\iint_{S^*} |\varphi^*|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leqq \Big(\iint_{S^*} |\varphi^*|^2 \, \mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} (s^*)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \leqq$$

$$\leqq B\Big(\iint_{S^*} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} \leqq B\Big(\iint_{S_0} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon}. \tag{3}$$

При этом мы ввели обозначение $s^* = \iint_{S^*} \mathrm{d}\Omega$. Постоянная B в неравенстве (3) зависит только от S^*, но не от φ.

Найдем теперь значение интеграла

$$I^{(1)} = \iint_{S^*} |\varphi^{(1)}|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega.$$

Обозначим

$$K(a, \varrho) = \underset{z}{E}[|z - a| < \varrho].$$

---

[4]) Теорема о неравенстве Гельдера гласит: Если $\int |f|^p \, \mathrm{d}x < \infty$, $\int |g|^q \, \mathrm{d}x < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$\left|\int f \cdot g \cdot \mathrm{d}x\right| \leqq \sqrt[p]{\int |f|^p \, \mathrm{d}x} \cdot \sqrt[q]{\int |g|^q \, \mathrm{d}x}.$$

Притом, хотя теорема сформулирована здесь для одномерного случая, она справедлива и в случае многомерном.

Нетрудно убедиться, что для $r < \frac{\varrho}{2}$ будет

$$K(r, r\sin\alpha) \subset S(\alpha, \varrho) .$$

Положим далее $\varphi = u + \mathrm{i}v$. Тогда

$$v = \int -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y .$$

Для точек на действительной оси получим теперь, предполагая, что $v(r_0, 0) = 0$,

$$v(r, 0) = \int\limits_{r_0}^{r} -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x .$$

Согласно лемме 3, получим

$$|v(r, 0)| \leqq C\sqrt{\iint\limits_{S_0}(\operatorname{Re}\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega}\;.\left|\int\limits_{r_0}^{r}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqq C_1\sqrt{\iint\limits_{S_0}(\operatorname{Re}\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega}\;.\frac{1}{r} .$$

Отсюда вытекает

$$I^{(1)} \leqq \left[\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i(2-\varepsilon)}2^{-2i}\right]\left[\frac{2^2}{3\varrho\cos\alpha}\,C_1\sqrt{\iint\limits_{S_0}(\operatorname{Re}\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega}\right]^{2-\varepsilon}.\,2^2.\,s_1^* =$$
$$= K\Big[\iint\limits_{S_0}(\operatorname{Re}\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega\Big]^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} .$$

При помощи леммы 4 теперь нетрудно убедиться, что

$$\Big|\iint\limits_{S^*}|\varphi^* + \varphi^{(1)}|^{2-\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega\Big| \leqq 2\Big(\iint\limits_{S^*}|\varphi^*|^{2-\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{S^*}|\varphi^{(1)}|^{2-\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega\Big) .$$

Поэтому имеет место

$$\iint\limits_{S^*}|\varphi|^{2-\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega \leqq K^*\Big(\iint\limits_{S_0}(\operatorname{Re}\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} .$$

Точно так же можно доказать, что

$$\Big|\iint\limits_{S'^*}|\varphi|^{2-\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega\Big| \leqq K'^*\Big(\iint\limits_{S_0}(\operatorname{Re}\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$\Big|\iint\limits_{S}|\varphi|^{2-\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega\Big| \leqq K\Big(\iint\limits_{S_0}(\operatorname{Re}\varphi)^2\,\mathrm{d}\Omega\Big)^{1+\frac{1}{2}\varepsilon} .$$

Принимая еще во внимание, что

$$S\left(\alpha, \frac{\varrho\cos\alpha}{2}\right) \subset S ,$$

мы видим, что наше утверждение доказано.

Определение 5. *Пусть C — простая ориентированная кривая, достаточно гладкая по частям. Пусть, далее, A — ее особая точка. Особую точку A будем называть вогнутой или выпуклой, смотря по тому, если (сравни рис. 3, 4)*

$$-\pi < \vartheta(A)_+ - \vartheta(A)_- < 0 \pmod{2\pi}$$

или

$$\pi > \vartheta(A)_+ - \vartheta(A)_- > 0\,.^{5)}$$

Лемма 6. *Пусть C — простая, достаточно гладкая по частям, ориентированная кривая и Ω — ее внутренность. Пусть A — ее особая вогнутая точка и пусть на Ω определена голоморфная функция φ. Пусть, далее, $z_0 \in \Omega$ и пусть $\operatorname{Im} \varphi(z_0) = 0$. Тогда существует окрестность S особой точки A такая, что*

$$\iint_S |\varphi|^2 \,\mathrm{d}\Omega \leq K \iint_\Omega (\operatorname{Re} \varphi)^2 \,\mathrm{d}\Omega\,.$$

При этом ни постоянная K, ни окрестность S не зависят от функции φ.

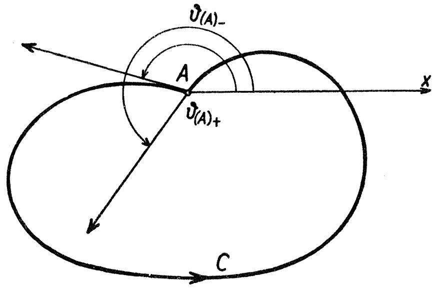


Рис. 3.

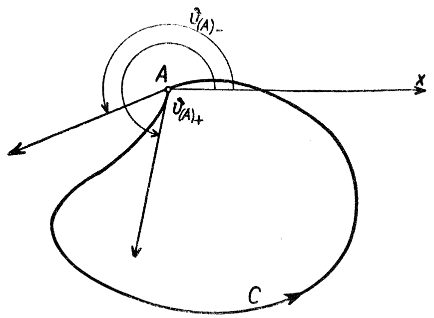


Рис. 4.

Доказательство. Интуитивно можно убедиться,[6] что существуют простые кривые C_1 и C_2 (см. рис. 5), достаточно гладкие и такие, что в некоторой окрестности точки A кривая C_1 отождествляется с C (для $z \prec A$) и C_2 отождествляется с C (для $z \succ A$). При этом пусть внутренности C_1 и C_2, обозначим их через Ω_1 и Ω_2, лежат внутри C.

Обозначим теперь

$$\Omega^* = \Omega_1 \cup \Omega_2\,.$$

Существует сферическая окрестность $S_\varrho = \underset{z}{E}[|z - A| < \varrho]$ для достаточно малого ϱ такая, что

$$\Omega_0 = \Omega \cap S_\varrho \subset \Omega^*\,.$$

---

[5]) Смысл символов $\vartheta(A)_+$ и $\vartheta(A)_-$ дан в определении 3.

[6]) Здесь мы апеллируем к созерцанию. Точное доказательство можно провести без особых затруднений; однако, оно весьма трудоемко и, кроме того, требует введения некоторых понятий из комбинаторной топологии. Ввиду того, что в статье изучаются главным образом свойства гармонических функций, мы оставляем это интуитивно ясное утверждение без доказательства.

Пусть, далее, $z^* \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, и предположим, что $\operatorname{Im} \varphi(z^*) = 0$. По теореме 1 имеем

$$\iint\limits_{\Omega_i} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Omega \leq C \iint\limits_{\Omega_1} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega \leq C \iint\limits_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega \,, \quad i = 1, 2 \,.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{\Omega_0} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Omega \leq \iint\limits_{\Omega_1} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Omega_2} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Omega \leq 2C \iint\limits_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega \,.$$

Если бы было $z_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, то наше утверждение было бы доказано. В противном случае, т. е. если $z_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, то существует простая дуга O, достаточно гладкая по частям и лежащая внутри C, которая соединяет точки z^* и z_0. Расстояние дуги O от кривой C положительно; пусть оно больше некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда по лемме 2
во всех точках дуги O

$$\left| \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial x} \right| \leq \frac{\text{const}}{\varepsilon^2} \sqrt{\iint\limits_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega} \,, \tag{4}$$

$$\left| \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial y} \right| \leq \frac{\text{const}}{\varepsilon^2} \sqrt{\iint\limits_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega} \tag{4'}$$

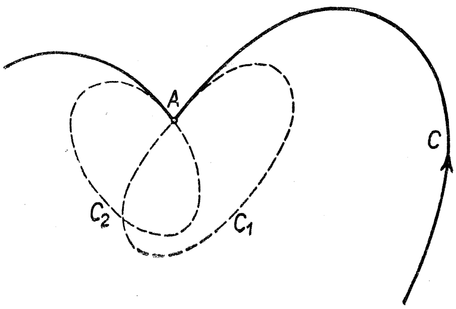


Рис. 5.

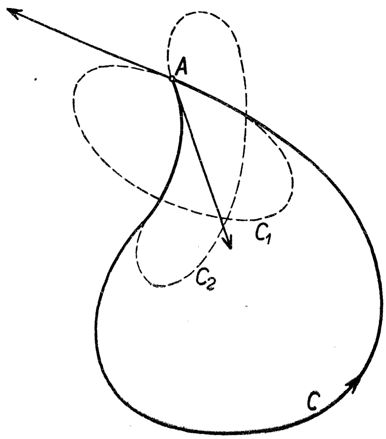


Рис. 6.

Поэтому можно написать

$$\iint\limits_{\Omega_0} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Omega = \iint\limits_{\Omega_0} |\varphi + \operatorname{Im} \varphi(z^*) + \operatorname{Im} \varphi(z^*)|^2 \, \mathrm{d}\Omega \leq$$
$$\leq 2 \Big(\iint\limits_{\Omega_0} |\varphi + \operatorname{Im} \varphi(z^*)|^2 \, \mathrm{d}\Omega + (\operatorname{Im} \varphi(z^*))^2 \,.\, \iint\limits_{\Omega_0} \mathrm{d}\Omega \Big) \leq$$
$$\leq K \iint\limits_{\Omega_0} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega + (\operatorname{Im} \varphi(z^*))^2 \, \alpha_0 \,.$$

При этом мы обозначили

$$\alpha_0 = \iint_{\Omega_0} \mathrm{d}\Omega \,.$$

Однако,

$$\operatorname{Im} \varphi(z^*) = \int_{z_0}^{z^*} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial x} \, \mathrm{d}y - \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial y} \, \mathrm{d}x \,.$$

Из неравенства Буняковского-Шварца[7]) мы видим, используя неравенства (4) и (4′), что

$$|\operatorname{Im} \varphi(z^*)| \leq \text{const} \sqrt{\iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega} \,.$$

Отсюда следует непосредственно наша лемма.

Лемма 7. *Пусть C — простая, достаточно гладкая по частям и ориентированная кривая. Пусть, далее, A — ее вогнутая особая точка. Обозначим, через Ω внутренность кривой C, и пусть на Ω определена голоморфная функция φ. Пусть, далее, $z_0 \in \Omega$ и пусть $\operatorname{Im} \varphi(z_0) = 0$. Тогда существует окрестность S особой точки A такая, что*

$$\iint_S |\varphi^{2-\varepsilon}| \, \mathrm{d}\Omega \leq K\Big(\iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} \,.$$

При этом ни K, ни окрестность S не зависят от функции φ.

Доказательство. Утверждение является следствием леммы 6 и неравенства Гельдера.

Лемма 8. *Пусть C — простая, кусочно-гладкая и ориентированная кривая. Пусть далее A — ее выпуклая особая точка. Пусть Ω — внутренность C и пусть на Ω определена голоморфная функция φ.*

Пусть далее $z_0 \in \Omega$ и пусть $\operatorname{Im} \varphi(z_0) = 0$. Тогда существует окрестность S точки A такая, что

$$\iint_S |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leq K\Big(\iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon}$$

для всех $1 > \varepsilon > 0$. Ни постоянная K, ни окрестность S при этом не зависят от функции φ.

Доказательство. Как и в случае леммы 5, будем утверждать без доказательства,[8]) интуитивно, что существуют достаточно гладкие простые кривые C_1 и C_2 с внутренностями Ω_1 и Ω_2 такие, что C_1 и C_2 отождествляются в некоторой окрестности с кривой C, а именно для части $z \prec A$ кривая C_1 а для части $z \succ A$ кривая C_2 (ср. рис. 6).

---

[7]) Под неравенством Буняковского-Шварца мы понимаем неравенство Гельдера для случая $p = q = 2$.

[8]) Ср. сноску 6 на стр. 227.

Обозначим теперь

$$\Omega^* = \Omega_1 \cap \Omega_2 \, .$$

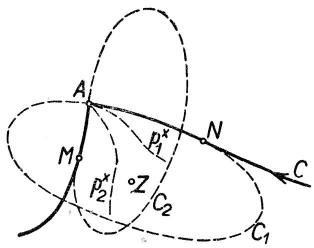
Существуют сферические окрестности

$$S_\varrho = \underset{z}{E}[|z - A| < \varrho]$$

для достаточно малых ϱ такие, что

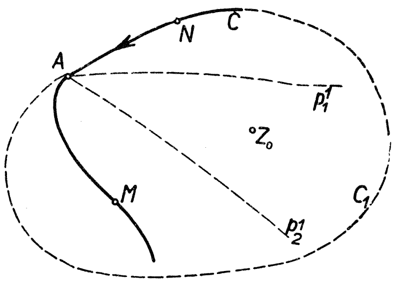
$$\Omega_0 = \Omega \cap S_\varrho \subset \Omega^* \, .$$

Плоскость z



7 а).

Плоскость w_1



7 б). Отображение $W_1 = \omega_1(z)$

По теореме 2 существуют конформные отображения $w_1 = \omega_1(z)$ и $w_2 = \omega_2(z)$ областей Ω_1 и Ω_2 соответственно на области Ω_1° и Ω_2° соответственно, такие, что

1. границы Ω_1° и Ω_2° являются достаточно гладкими простыми кривыми,

2. общая часть кривых C_1 и C, соотв. C_2 и C в окрестности точки отобразится на отрезок (см. рис. 7а, б, в).

При этом первые производные функций $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ допускают непрерывное продолжение на границе, кроме того $|\omega_1|$ и $|\omega_2|$ претерпевают положительный минимум.

Ввиду конформности отображения угол в точке A не изменится и после отображения в плоскостях w_1 и w_2.

В преобразованной плоскости w_1, соотв. w_2, разделим угол в точке A при помощи лучей на три равные части. В некоторой достаточно малой окрестности эти лучи не пересекут преобразованную кривую C. Обозначим лучи через $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}$ и $p_1^{(2)}, p_2^{(2)}$ (см. рис. 7), и притом так, что луч, лежащий вблизи точки N будет обозначен через $p_1^{(i)}$, $i = 1, 2$.

При обратном преобразовании лучи $p_2^{(1)}$ и $p_2^{(2)}$ перейдут на плоскости z в дуги p_1^* и p_2^* соответственно. Эти дуги делят угол при вершине A плоскости z также на три равные части.

В нашем утверждении мы предполагали, что для рассматриваемой голоморфной функции φ в точке $z_0 \in \Omega$ имеет место

$$\operatorname{Im}(z_0) = 0 .$$

Как и при доказательстве леммы 6, можем без ограничения общности предположить, что точка z_0 лежит достаточно близко к точке A, и между кривыми p_2^* и p_1^*, а именно так, что после преобразования w_1 или w_2 точка z_0 будет лежать между лучами $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$ или лучами $p_1^{(2)}$ и $p_2^{(2)}$ соответственно, причем она остается в достаточно малой окрестности точки A.

Плоскость w_2

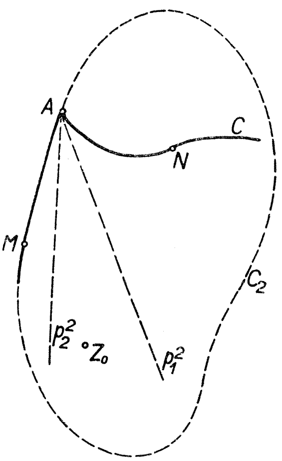


Рис. 7 в). Отображение $W_2 = \omega_2(z)$

Обозначим теперь через φ_1 и φ_2 отображение функции φ в плоскости w_1 и w_2 соответственно. Далее, существуют числа ϱ_1 и ϱ_2 так, что сектор $S_1(\alpha_1, \varrho_1)$ между отрезками $\overline{AN}$ и $p_2^{(1)}$ плоскости w_1 и сектор $S_2(\alpha_1, \varrho_2)$ между $\overline{AM}$ и $p_1^{(2)}$ плоскости w_2 лежат внутри преобразованных кривых C_1 и C_2 соответственно. Ввиду свойств конформных отображений ω_1 и ω_2, будет

$$\iint_{S_i} (\operatorname{Re} \varphi_i)^2 \, \mathrm{d}\Omega < \infty , \quad i = 1, 2,$$

откуда согласно лемме 5[9]) получим

$$\iint_{S_i\left(\alpha, \frac{\varrho \cos \alpha}{2}\right)} |\varphi_i|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leq K\Big(\iint_{S_i} (\operatorname{Re} \varphi_i)^2 \, \mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} ,$$

чем и доказывается наше утверждение.

Докажем теперь главную теорему настоящего исследования.

Теорема 3. *Пусть C — простая, достаточно гладкая по частям и ориентированная кривая, Ω — ее внутренность. Пусть $z_0 \in \Omega$. Тогда для каждой голоморфной функции φ, определенной на Ω и такой, что $\operatorname{Im} \varphi(z_0) = 0$, имеет место неравенство*

$$\iint_{\Omega} |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leq K\Big(\iint_{\Omega} (\operatorname{Re} \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} .$$

При этом $1 > \varepsilon > 0$ и постоянная K не зависит от функции φ.

Доказательство. Обозначим через A_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, особые точки кривой. Согласно леммам 7 и 8, существуют достаточно малые окрестности S_i точки A такие, что

$$\iint_{S_i} |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leq K\Big(\iint_{\Omega} |\operatorname{Re} \varphi|^2\Big)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} .$$

[9]) В лемме 5 мы предполагали, что точка z_0 лежит на биссектрисе угла сектора, теперь же мы такого требования к точке z_0 не предъявляем.

Далее, ввиду предположения, что кривая C достаточно гладка по частям, существует[10]) достаточно гладкая кривая C', обладающая кроме того еще следующими свойствами. Обозначив через Ω' внутренность C' мы получаем

1. $$z_0 \in \Omega',$$

2. $$\Omega' \cup \bigcup_{i=1}^{N} S_i = \Omega .$$

Согласно теореме 1, будет

$$\iint_{\Omega'} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}\Omega \leq A \iint_{\Omega'} (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega \leq A \iint_{\Omega} (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega .$$

Из неравенства Гельдера следует кроме того

$$\iint_{\Omega'} |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leq K_0 (\iint_{\Omega} (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} .$$

Поэтому

$$\iint_{\Omega} |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leq \iint_{\Omega'} |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega + \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} |\varphi|^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leq$$
$$\leq K_0 (\iint_{\Omega} (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} + \sum_{i=1}^{N} A_i (\iint_{S_i} (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} \leq$$
$$\leq K (\iint_{\Omega} (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 \, \mathrm{d}\Omega)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} .$$

Заключение. Теорема 3 являеятся главным результатом настоящего исследования. Эта теорема представляет собой до некоторой степени обобщение теоремы 4 из [1] (ср. теорему 1 настоящей статьи). Сравнение этих двух теорем выясняет влияние метрических свойств кривой на свойства функции, сопряженной с гармонической функцией. Нетрудно привести пример, когда в случае кривой с точкой возьрата сопряженная функция не должна быть даже интегрируемой.

Для случая кривой, имеющей только угловые точки (кривая достаточно гладкая по частям в смысле определения 3), автору пока не удалось построить пример голоморфной функции, действительная часть которой была бы интегрируемой с квадратом, а мнимая часть которой вы этим свойством не обладала. (Сравни также проблему 4 рубрики ,,Задачи и проблемы“ [*Úlohy a problémy*] в журнале *Časopis pro pěstování matematiky* *79* (1954), 164.)

В настоящей статье мы пока ограничились исследованием кривых с угловыми точками, исключив из рассмотрения точки возврата, так как кривые с точками возврата в приложениях не встречаются.

---

[10]) И здесь мы воздерживаемся от доказательства существования такой кривой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ivo Babuška*: Poznámka k jednomu řešení biharmonického problému. Časopis pro pěstování matematiky, *79* (1954), 41—63.

[2] *V. Smirnoff*: Über Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Mat. Ann. Bd. *107*, 1933.

Zusammenfassung.

ÜBER EINE GEWISSE EIGENSCHAFT DER HARMONISCHEN FUNKTIONEN

IVO BABUŠKA, Praha.

(Eingegangen am 5. Oktober 1954.)

In dem Artikel werden einige Eigenschaften solcher holomorphen Funktionen studiert, welche in einem Gebiet mit teilweise glatter Grenze definiert sind. Das Hauptresultat kann man in folgendem Satz formulieren.

Sei Ω ein Gebiet, das durch eine einfache Kurve C begrenzt ist. Weiter setzen wir voraus, dass C teilweise genug glatt ist und keinen Kehrpunkt besitzt. Sei $z_0 \in \Omega$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion φ in Ω, die die Bedingung $\operatorname{Im} \varphi(z_0) = 0$ erfüllt, folgende Relation

$$\iint_\Omega \varphi^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega \leq K(\varepsilon) \left(\iint_\Omega (\operatorname{Re} \varphi)^2 \mathrm{d}\Omega\right)^{1-\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Dabei gilt diese Relation für jedes $K(\varepsilon) < 1$ und die Konstante $K(\varepsilon)$ hängt nicht von φ ab.