Miroslav Laitoch

Расширение метода Флоке для определения вида фундаментальной системы реешений дифференциального уравнения второго порядка $y'' = Q(x)y$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 2, 164–174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100139

РАСШИРЕНИЕ МЕТОДА ФЛОКЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИДА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА $y'' = Q(x)\,y$.

МИРОСЛАВ ЛАЙТОХ, (MIROSLAV LAITOCH), Брно.

(Поступило в редакцию 23/VIII 1954 г.)

Методом Флоке для определения вида фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-того порядка

$$y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\,y = 0 \tag{a}$$

пользуются в том случае, когда коэффициенты $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — периодические функции одного и того же периода [1], [2].

Этот метод, по существу, в основной своей части основывается на том, что если $u(x)$ является интегралом диф. уравнения (a) с периодическими коэффициентами периода d, также то и сложная функция $u(x + d)$ является интегралом диф. уравнения (a).

Проф. О. Борувка нашел при своих исследованиях о дисперсиях диф. линейных уравнений 2-ого порядка $y'' = Q(x)\,y$ (1) функции $\zeta(x)$, характеризуемые тем, что если $u(x)$ есть интеграл диф. уравнения (1), то также и сложная функция $u[\zeta(x)] : \sqrt{|\zeta'(x)|}$ есть интеграл диф. уравнения (1) [3]. На этом основании естественно возникает вопрос, можно ли метод Флоке перенести на диф. уравнения (1) и в том случае, когда $Q(x)$ не будет периодической. По предложению проф. Борувки я занимался этой проблемой и в настоящей работе привожу ее решение.

1. Пусть нам задано линейное однородное диф. уравнение 2. порядка

$$y'' = Q(x)\,y\,. \tag{1}$$

О функции $Q(x)$ будем предполагать, что это непрерывная функция действительного переменного x в интервале I. При таких условиях, как известно, существуют решения диф. уравнения (1), определенные на всем интервале I.

Пусть $u_1(x), u_2(x)$ — два линейно независимых решения диф. уравнения (1), так что ни для каких чисел c_1, c_2, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, не выполняется

$c_1u_1(x) + c_2u_2(x) = 0$. Известно, что в таком случае каждый из интегралов $u(x)$ диф. уравнения (1) можно писать в виде

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) ,$$

где c_1, c_2 — действительные числа.

Далее, можно легко показать, что множество всех интегралов диф. уравнения (1) образует линейное пространство $\mathfrak{L}$ размерности 2 над полем $\mathfrak{R}$ действительных чисел [4].

Для дальнейших рассуждений делом основной важности является так называемое *дифференциальное уравнение дисперсий 1-ого рода* в свойства его интегралов [3]. Это следующее диф. уравнение 3-ьего порядка

$$\sqrt{\varphi'}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)'' + \varphi'^2\, Q(\varphi) = Q(x) . \tag{2}$$

Непосредственным вычислением можно без затруднений убедиться в том, что если $\varphi(x)$ является решением диф. уравнения (2), то также и $\varphi_n(x)$ ($\varphi_n(x)$ означает сложную функцию $\overbrace{\varphi \ldots \varphi}^{n}(x)$) является решением этого диф. уравнения, равно как и $\varphi_{-n}(x)$, если через $\varphi_{-n}(x)$ обозначить функцию обратную к $\varphi_n(x)$.*)

Пусть $\varphi(x)$ — произвольное решение диф. уравнения (2); тогда функция

$$u[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)} ,$$

где $u(x) \in \mathfrak{L}$, является опять-таки элементом $\mathfrak{L}$ т. е. является интегралом диф. уравнения (1), в чем можно непосредственно убедиться простым вычислением.

Символом $\boldsymbol{A}$ обозначим отображение линейного пространства $\mathfrak{L}$ на себя, а именно такое отображение, в котором элементу $u(x)$ будет соответствовать элемент $U(x) = u[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)}$. Легко видно, что отображение $\boldsymbol{A}$ линейно [4] и что существует отображение к нему обратное $\boldsymbol{A}^{-1}$. В этом обратном отображении элементу $v(x) \in \mathfrak{L}$ будет соответствовать элемент $V(x) \in \mathfrak{L}$, где $V(x) = v[\varphi_{-1}(x)] : \sqrt{\varphi'_{-1}(x)}$; значит, элемент $U(x)$ отобразится на элемент $u(x)$, потому что $U(x)\, \boldsymbol{A}^{-1} = u(x) : [\sqrt{\varphi'[\varphi_{-1}(x)]}\, \sqrt{\varphi'_{-1}(x)}] = u(x)$, так как

$$\sqrt{\varphi'[\varphi_{-1}(x)]\, \varphi'_{-1}(x)} = \sqrt{\{\varphi[\varphi_{-1}(x)]\}'} = \sqrt{\{x\}'} = 1.$$

Ибо функции

$$u_1(x)\, \boldsymbol{A} = u_1[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)} , \quad u_2(x)\, \boldsymbol{A} = u_2[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)} \tag{3}$$

*) Если $I = (-\infty, +\infty)$, если $Q(x)$ все время отрицательна и если интегралы диф. уравнения (1) колеблются, то для интегралов диф. уравнения (2) будет справедливой теорема существования с начальными условиями Коши и теорема об однозначности решений. (См. *Борувка*, стр. 242.)

являются интегралами диф. уравнения (1), т. е. элементами $\mathfrak{L}$, то их можно представить в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами интегралов $u_1(x)$, $u_2(x)$:

$$\begin{aligned} u_1(x)\,\mathbf{A} &= a_{11}u_1(x) + a_{12}u_2(x)\,, \\ u_2(x)\,\mathbf{A} &= a_{21}u_1(x) + a_{22}u_2(x)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

где a_{ij}, $i, j = 1, 2$ — подходящие постоянные.

Функции $u_1(x)\,\mathbf{A}$, $u_2(x)\,\mathbf{A}$ образуют фундаментальную систему решений диф. уравнения (1). Если бы, то есть, было

$$U(x) = c_1u_1(x)\,\mathbf{A} + c_2u_2(x)\,\mathbf{A} = 0\,, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0\,,$$

то в обратном отображении A^{-1} мы получили бы

$$U(x)\,\mathbf{A}^{-1} = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) = 0\,, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0\,,$$

что противоречит тому, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ являются линейно независимыми решениями. Отсюда следует, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{5}$$

отличен от нуля.

Для данной фундаментальной системы решений $u_1(x)$, $u_2(x)$ уравнения (4) определяют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\,,$$

называемую матрицей линейного отображения $\mathbf{A}$ относительно фундаментальной системы решений $u_1(x)$, $u_2(x)$.

2. Метод Флоке теперь состоит в двух следующих приемах:

I. Дело, во первых, в том, чтобы найти вместо фундаментальной системы решений $u_1(x)$, $u_2(x)$ другую фундаментальную систему решений $U_1(x)$, $U_2(x)$, относительно которой матрица линейного отображения будет иметь каноническую форму.

С этой целью найдем постоянные α_1, α_2 так, чтобы функция

$$U(x) = \alpha_1u_1(x) + \alpha_2u_2(x) \tag{6}$$

в отображении $\mathbf{A}$ соответствовала функции

$$U(x)\,\mathbf{A} = sU(x)\,. \tag{7}$$

где s — постоянная.

Итак, потребуем, чтобы

$$\alpha_1u_1(x)\,\mathbf{A} + \alpha_2u_2(x)\,\mathbf{A} = s\,.\,[\alpha_1u_1(x) + \alpha_2u_2(x)]$$

то есть

$$\begin{aligned} \alpha_1[a_{11}u_1(x) + a_{12}u_2(x)] + \alpha_2[a_{21}u_1(x) + \alpha_{22}u_2(x)] &= \\ = s\,.\,[\alpha_1u_1(x) + \alpha_2u_2(x)]\,. \end{aligned}$$

Если приравнять коэффициенты при $u_1(x)$ и $u_2(x)$ нулю, получим уравнения:

$$\begin{aligned}(a_{11} - s)\,\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 &= 0\,, \\ a_{12}\alpha_1 + (a_{22} - s)\,\alpha_2 &= 0\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Для того, чтобы существовали величины α_1, α_2 отличные от нуля и удовлетворяющие последним уравнениям, необходимо и достаточно, чтобы s удовлетворяло уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. уравнению

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})\,s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0\,. \tag{9}$$

Это уравнение называем *характеристическим уравнением* отображения $\boldsymbol{A}$. Его корни отличны от нуля, потому что определитель (5) отличен от нуля.

1. Сначала будем предполагать, что уравнение (9) имеет два друг от друга отличных корня s_1, s_2. Пусть уравнению (8) удовлетворяют значения $\alpha_1 = \alpha_{i1}$, $\alpha_2 = \alpha_{i2}$, $i = 1, 2$, если в это уравнение подставить s_i, $i = 1, 2$, вместо s. Тогда функциям

$$U_i(x) = \alpha_{i1}u_1(x) + \alpha_{i2}u_2(x)\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{10}$$

в отображении $\boldsymbol{A}$ будут соответствовать функции

$$U_i(x)\,\boldsymbol{A} = s_iU_i(x)\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{11}$$

т. е.

$$U_i[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)} = s_iU_i(x)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$ образуют опять-таки фундаментальную систему решений диф. уравнения (1), потому что в противном случае существовали бы постоянные k_1, k_2, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, определяющие нулевой элемент в $\mathfrak{L}$:

$$U(x) = k_1U_1(x) + k_2U_2(x) = 0\,,$$

которому в отображении $\boldsymbol{A}$ соответствовал бы тоже нулевой элемент, а именно

$$U(x)\,\boldsymbol{A} = k_1s_1U_1(x) + k_2s_2U_2(x) = 0\,,$$

что может наступить только при $s_1 = s_2$, но это равенство в данном случае исключается.

2. Во вторых, будем предполагать, что уравнение (9) имеет двойной корень s_0, так что

$$s_0 = \tfrac{1}{2}(a_{11} + a_{22})\,. \tag{12}$$

а) Если $a_{12} = a_{21} = 0$, то из (9) и (12) следует, что $s_0 = a_{11} = a_{22}$ значит, ввиду (4)

$$u_1(x)\,\boldsymbol{A} = s_0u_1(x)\,, \quad u_2(x)\,\boldsymbol{A} = s_0u_2(x)\,, \tag{13}$$

т. е., если положить $U_i(x) = u_i(x)$, $i = 1, 2$, будет

$$U_i[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)} = s_0 U_i(x) \ , \quad i = 1, 2 \ .$$

б) Если не наступит случай а), то будет или a_{12} или a_{21} отлично от нуля. Допустим, что $a_{21} \neq 0$. Уравнениям (8) при $s = s_0$ удовлетворяют постоянные

$$\alpha_1 = a_{21} \ , \quad \alpha_2 = s_0 - a_{11} \ .$$

Интегралу

$$U_1(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) = a_{21} u_1(x) + (s_0 - a_{11}) \, u_2(x)$$

в отображении $\boldsymbol{A}$ будет соответствовать

$$U_1(x) \, \boldsymbol{A} = s_0 U_1(x) \ .$$

В качестве второго линейно независимого интеграла возьмем $u_2(x)$, т. е. положим

$$U_2(x) = u_2(x) \ .$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_2(x) \, \boldsymbol{A} = u_2(x) \, \boldsymbol{A} &= a_{21} u_1(x) + a_{22} u_2(x) = \\ &= U_1(x) + (a_{11} + a_{22} - s_0) \, u_2(x) = \\ &= U_1(x) + s_0 u_2(x) = U_1(x) + s_0 U_2(x) \ , \end{aligned}$$

потому что, ввиду (12), $s_0 = a_{11} + a_{22} - s_0$.

Таким образом получаем фундаментальную систему решений $U_1(x)$ и $U_2(x)$, для которой

$$U_1(x) \, \boldsymbol{A} = s_0 U_1(x) \ , \quad U_2(x) \, \boldsymbol{A} = U_1(x) + s_0 U_2(x) \ , \tag{14}$$

т. е.

$$U_1[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)} = s_0 U_1(x) \ , \quad U_2[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)} = U_1(x) + s_0 U_2(x) \ .$$

II. Дело, во-вторых, заключается в том, чтобы определить так называемую ***функцию Флоке.***

Пусть $\varphi(x)$ опять означает произвольное решение диф. уравнения (2). Предположим, что существует непрерывная функция $F(x)$, имеющая непрерывную и положительную производную и удовлетворяющая в интервале I функциональному уравнению

$$F[\varphi(x)] - F(x) = 1 \ . \tag{15}$$

Если s есть корень характеристического уравнения (9), обозначим

$$r = \log s \ , \tag{16}$$

причем для определенности возьмем главное значение логарифма.

Функцию $\Phi(x)$, определенную уравнением

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{F'(x)}} \, e^{rF(x)} \ ,$$

называем функцией Флоке, сопряженной с диф. уравнением (1).

Теперь установим одно важное свойство функции Флоке. Прежде всего, дифференцируя (15), получаем $F'[\varphi(x)]\,\varphi'(x) = F'(x)$. Использовавши это соотношение, получим для функции Флоке

$$\Phi[\varphi(x)] = \frac{1}{\sqrt{F'[\varphi(x)]}}\,\mathrm{e}^{rF[\varphi(x)]} = \frac{\sqrt{\varphi'(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\,\mathrm{e}^{r[F(x)+1]} = s\sqrt{\varphi'(x)}\,\Phi(x)\,,$$

откуда

$$\Phi[\varphi(x)] : \sqrt{\varphi'(x)} = s\Phi(x)\,.$$

Это свойство функции Флоке позволяет представить в простом виде фундаментальные системы решений относительно отображения $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющие уравнениям (11), (13), (14).

Если s_1, s_2 — два различных корня, соответственно, s_0 — двойной корень характеристического уравнения (9), то, соблюдая ранее введенные обозначения, кладем

$$r_i = \log s_i\,, \quad \Phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{F'(x)}}\,\mathrm{e}^{r_iF(x)}\,, \quad i = 0, 1, 2\,.$$

1. Фундаментальную систему решений $U_1(x)$ и $U_2(x)$, удовлетворяющую уравнениям (11), можно представить следующим образом: частные от деления

$$\pi_i(x) = \frac{U_i(x)}{\Phi_i(x)} = \frac{\sqrt{F'(x)}\,U_i(x)}{\mathrm{e}^{r_iF(x)}}\,, \quad i = 1, 2\,,$$

являются непрерывными функциями и при подстановке $\varphi(x)$ вместо x не изменятся, потому что

$$\pi_i[\varphi(x)] = \frac{U_i[\varphi(x)]}{\Phi_i[\varphi(x)]} = \frac{s_i\sqrt{\varphi'(x)}\,U_i(x)}{s_i\sqrt{\varphi'(x)}\,\Phi_i(x)} = \pi_i(x)\,.$$

Отсюда следует

$$U_i(x) = \Phi_i(x)\,\pi_i(x) = \frac{\mathrm{e}^{r_iF(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\,\pi_i(x)\,, \tag{18}$$

где $\pi_i(x)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению

$$\pi_i[\varphi(x)] = \pi_i(x),\ i = 1, 2\,.$$

2.а) Фундаментальную систему решений, удовлетворяющих уравнениям (13), можно записать следующим образом:

$$U_i(x) = \Phi_0(x)\,\pi_i(x) = \frac{\mathrm{e}^{r_0F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\,\pi_i(x)\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{19}$$

где $\pi_i(x)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению

$$\pi_i[\varphi(x)] = \pi_i(x),\ i = 1, 2\,.$$

б) Для уравнений (14) получаем

$$U_1(x) = \Phi_0(x)\,\pi_1(x) = \frac{e^{r_0 F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\,\pi_1(x)\,,$$

$$U_2(x) = \Phi_0(x)\left[\pi_2(x) + \frac{F(x)}{s_0}\,\pi_1(x)\right] = \frac{e^{r_0 F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\left[\pi_2(x) + \frac{F(x)}{s_0}\,\pi_1(x)\right], \quad (20)$$

где $\pi_i(x)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению $\pi_i[\varphi(x)] = \pi_i(x)$, $i = 1, 2$.

Это утверждение можно для $\pi_1(x)$ доказать таким же образом, как и в предыдущем случае, а для $\pi_2(x)$ вот так:

Функция

$$\pi_2(x) = \frac{U_2(x)\sqrt{F'(x)}}{e^{r_0 F(x)}} - \frac{F(x)}{s_0}\,\pi_1(x)$$

при подстановке $\varphi(x)$ вместо x не изменится, потому что

$$\pi_2[\varphi(x)] = \frac{[U_1(x) + s_0 U_2(x)]\sqrt{F'(x)}}{s_0 e^{r_0 F(x)}} - \frac{F(x)+1}{s_0}\,\pi_1(x)$$

и разность

$$\pi_2[\varphi(x)] - \pi_2(x) = \frac{1}{s_0}\left(\frac{U_1(x)\sqrt{F'(x)}}{e^{r_0 F(x)}} - \pi_1(x)\right) = 0\,.$$

В итоге, объединив все наши результаты в теорему, получим следующее:

Теорема. *Пусть нам дано линейное однородное диф. уравнение 2-ого порядка*

$$y'' = Q(x)\,y\,, \quad (1)$$

причем коэффициент $Q(x)$ является непрерывной функцией действительного переменного x в интервале I. Пусть $\varphi(x)$ — произвольное решение диф. уравнения 3-ьего порядка

$$\sqrt{\varphi'}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)'' + \varphi'^2 Q(\varphi) = Q(x)\,. \quad (2)$$

Пусть $F(x)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную положительную производную и удовлетворяющая в I при данном решении $\varphi(x)$ функциональному уравнению

$$F[\varphi(x)] - F(x) = 1\,.$$

Тогда диф. уравнение (1) имеет в интервале I фундаментальную систему решений вида

$$U_i(x) = \frac{e^{r_j F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\,\pi_i(x)\,, \quad i = 1, 2\,, \quad j = i\,, \text{ соотв. } j = 0$$

или

$$U_1(x) = \frac{e^{r_0 F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\,\pi_1(x)\,, \quad U_2(x) = \frac{e^{r_0 F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\left(\pi_2(x) + \frac{F(x)}{s_0}\,\pi_1(x)\right).$$

Функции $\pi_i(x)$, $i = 1, 2$ *непрерывны в интервале* I *и удовлетворяют тому соотношению* $\pi_i[\varphi(x)] = \pi_i(x)$. *Если* s_1, s_2 *— два различных корня; соответственно,* s_0 *— двойной корень характеристического уравнения* (9), *то обозначаем* $r_j = \log s_j$, $j = 0, 1, 2$, где $\log$ *означает главное значение логарифма.*

3. Замечания и примеры. Если в диф. уравнении (1) функция $Q(x)$ непрерывна и отрицательна в интервале $(-\infty, \infty)$ и если интегралы этого диф. уравнения колеблются, то существуют решения диф. уравнения (2), определенные во всем интервале $(-\infty, \infty)$. Примером такого решения служит *основная центральная дисперсия* 1-*ого рода* [3].

В классической теории Флоке в качестве решения $\varphi(x)$ диф. уравнения (2) берется решение, соответствующее основной центральной дисперсии первого рода, о которой шла речь выше.

Теперь приведем при особых случаях диф. уравнения (1), в которых можно при помощи метода Флоке представить фундаментальную систему решений в особенно простом виде.

1. Пусть нам дано диф. уравнение $y'' = Q(x)\, y$ и пусть $Q(x + d) = Q(x)$, $d > 0$, в интервале $(-\infty, \infty)$, что и служит примером классического случая Флоке. Основной центральной дисперсией диф. уравнения (2) является функция $\varphi(x) = x + d$. Функциональное уравнение (15) имеет вид $F(x + d) - F(x) = 1$ и удовлетворяет ей, например, функция $F(x) = \dfrac{x}{d}$, для которой $F'(x) = \dfrac{1}{d} > 0$. Функция Флоке, определенная уравнением (17) будет иметь вид

$$\Phi(x) = \sqrt{d}\,.\,e^{\frac{rx}{d}}\,.\,\pi(x)\,, \quad \text{где } \pi(x + d) = \pi(x)\,;$$

этот случай приводит нас к известной теореме:

Теорема 1. *Линейное однородное диф. уравнение* $y'' = Q(x)\, y$, *коэффициент* $Q(x)$ *которого является в интервале* $(-\infty, \infty)$ *непрерывной периодической функцией с периодом* $d > 0$, *имеет следующую фундаментальную систему решений:*

$$U_i(x) = \sqrt{d}\,.\,e^{\frac{r_j}{d}x}\,.\,\pi_i(x)\,, \quad i = 1, 2\,; \quad j = i\,, \ \text{соотв.}\ j = 0$$

или

$$U_1(x) = \sqrt{d}\,.\,e^{\frac{r_0}{d}x}\,.\,\pi_1(x)\,, \quad U_2(x) = \sqrt{d}\,.\,e^{\frac{r_0}{d}x}\left(\pi_2(x) + \frac{x}{s_0 d}\,\pi_1(x)\right).$$

Функции $\pi_i(x)$, $i = 1, 2$ *— это непрерывные периодические функции с периодом* $d > 0$ *в интервале* $(-\infty, \infty)$. *Если* s_1, s_2 *— два различных корня, соответственно,* s_0 *— двойной корень уравнения* (9), *то обозначаем* $r_j = \log s_j$, $j = 0, 1, 2$, где $\log$ *означает главное значение логарифма.*

2. Зададимся уравнением $y'' = Q(x)\,y$; пусть $k^2 Q(kx) = Q(x)$, $k > 1$ в интервале $(0, \infty)$. Основной центральной дисперсией диф. уравнения (2) является функция $\varphi(x) = kx$. Значит, функциональное уравнение (15) имеет вид $F(kx) - F(x) = 1$, и удовлетворяет ему, например функция $F(x) = \dfrac{1}{\log k} \log x$, для которой $F'(x) = \dfrac{1}{x \log k} > 0$ в интервале $(0, \infty)$. Функция Флоке дается выражением

$$\Phi(x) = \sqrt{x \log k}\,.\, x^{\frac{r}{\log k}}\,.\,\pi(x)\,,$$

где $\pi(kx) = \pi(x)$.

Для этого случая может быть сформулирована следующая теорема:

Теорема 2. *Линейное однородное диф. уравнение* $y'' = Q(x)\,y$, *коэффициент* $Q(x)$ *которого есть непрерывная функция действительного переменного* x, *и которая в интервале* $(0, \infty)$ *удовлетворяет соотношению* $k^2 Q(kx) = Q(x)$, $k > 1$, *имеет следующую фундаментальную систему решений*:

$$U_i(x) = \sqrt{\log k\,.\,x}\,.\,x^{\frac{r_j}{\log k}}\,.\,\pi_i(x)\,,\quad i = 1, 2;\ j = i \quad \text{соотв.}\ j = 0$$

или

$$U_1(x) = \sqrt{\log k\,.\,x}\,.\,x^{\frac{r_0}{\log k}}\,.\,\pi_1(x)\,,\ U_2(x) = \sqrt{\log kx}\,.\,x^{\frac{r_0}{\log k}}\left(\pi_2(x) + \frac{\log x}{s_0 \log k}\pi_1(x)\right).$$

Функции $\pi_i(x)$, $i = 1, 2$, *непрерывны в интервале* $(0, \infty)$ *и удовлетворяют там соотношению* $\pi_i(kx) = \pi_i(x)$. *Постоянные* r_j, $j = 0, 1, 2$, *имеют то же значение, как и в примере* 1.

3. Пусть задано диф. уравнение $y'' = Q(x)\,y$ и пусть $\dfrac{1}{(1 - mx)^4}\,.\,Q\left(\dfrac{x}{1 - mx}\right) = Q(x)$, $m > 0$, в интервале $(-\infty, 0)$. Основной центральной дисперсией уравнения (2) является функция $\varphi(x) = \dfrac{x}{1 - mx}$. Функциональное уравнение (15) имеет вид $F\left(\dfrac{x}{1 - mx}\right) - F(x) = 1$ и удовлетворяется, например, функцией $F(x) = -\dfrac{1}{mx}$, для которой $F'(x) = \dfrac{1}{mx^2} > 0$. Функция Флоке дается уравнением

$$\Phi(x) = \sqrt{mx}\,e^{-\frac{r}{mx}}\,.\,\pi(x)\,,\quad \text{где}\quad \pi\left(\frac{x}{1 - mx}\right) = \pi(x)\,.$$

В этом случае справедлива

Теорема 3. *Линейное однородное диф. уравнение* $y'' = Q(x)\,y$, *коэффициент* $Q(x)$ *которого есть непрерывная функция действительного пере-*

менного x *и которая в интервале* $(-\infty, 0)$ *выполняет соотношение* $\frac{1}{(1-mx)^4} Q\left(\frac{x}{1-mx}\right) = Q(x)$, $m > 0$, имеет следующую фундаметальную систему решений:

$$U_i(x) = \sqrt{m} \,.\, x \,.\, e^{-\frac{r_j}{mx}} \,.\, \pi_i(x)\,, \quad i = 1, 2; \quad j = i \quad \textbf{соотв.}\ j = 0\,,$$

или

$$U_1(x) = \sqrt{m} \,.\, x \,.\, e^{-\frac{r_0}{mx}} \,.\, \pi_1(x)\,, \quad U_2(x) = \sqrt{m} \,.\, x \,.\, e^{-\frac{r_0}{mx}} \left(\pi_2(x) - \frac{1}{s_0 mx} \pi_1(x)\right).$$

Функции $\pi_i(x)$, $i = 1, 2$, *непрерывны в интервале* $(-\infty, 0)$ *и удовлетворяют там соотношению* $\pi_i\left(\frac{x}{1-mx}\right) = \pi_i(x)$. *Постоянные* r_j, $j = 0, 1, 2$, *имеют то же значение, как и в примере 1.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Goursat:* Cours d'analyse mathématique, t. 1, Paris 1925, 492 и. д.

[2] *J. Horn:* Gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin 1937, 94 и. д.

[3] *О. Борувка:* О колеблющихся интегралах диф. линейных уравнений 2-ого порядка, Чехословацкий математический журнал, т. *3* (78), 1953, 199 и д.

[4] *А. И. Мальцев:* Основы линейной алгебры, Москва 1948, 49 и д., 95 и д.

Zusammenfassung

EINE ERWEITERUNG DER METHODE FLOQUETS ZUR DARSTELLUNG DES FUNDAMENTALSYSTEMS VON LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG $y'' = Q(x)\, y$.

MIROSLAV LAITOCH, Brno.

(Eingelangt am 23. August 1954.)

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass man die Methode Floquets zur Darstellung des Fundamentalsystems von Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = Q(x)\, y \tag{1}$$

immer benutzen kann, ohne notwendig die Periodizität des Koeffizienten $Q(x)$ zu verlangen, wie es in der klassischen Theorie geschieht.

Eine Erweiterung dieser Methode auf beliebige Differentialgleichungen (1) ermöglichen die Betrachtungen über *die Dispersionen* der Differentialgleichung (1), die H. Prof. O. Borůvka in seiner Arbeit „*О колеблющихса интегралах диф. линейных уравнений 2-ого порядка*" veröffentlicht hat.

In vorliegender Arbeit werden Betrachtungen unternommen, die in folgendem Satze zusammengefasst werden können:

Satz: *Es sei*

$$y'' = Q(x)\, y \tag{1}$$

eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Koeffizient $Q(x)$ eine stetige Funktion der reellen Veränderlichen x im Intervall I ist. Es sei $\varphi(x)$ ein Integral der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\sqrt{\varphi'}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)'' + \varphi'^2 Q(\varphi) = Q(x)\,. \tag{2}$$

Es sei $F(x)$ eine stetige Funktion, die stetige positive Ableitung hat und die für die erwägte Lösung $\varphi(x)$ der Differentialgleichung (2) *im Intervall I die Funktionalgleichung*

$$F[\varphi(x)] - F(x) = 1 \tag{15}$$

erfüllt. Dann besitzt die Differentialgleichung (1) *im Intervall I ein Fundamentalsystem*

$$U_i(x) = \frac{\mathrm{e}^{r_j F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\,\pi_i(x)\,, \quad i = 1, 2\,;\; j = i\,,\ \text{bzw. } j = 0\,,$$

oder ein Fundamentalsystem

$$U_1(x) = \frac{\mathrm{e}^{r_0 F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\,\pi_1(x)\,, \quad U_2(x) = \frac{\mathrm{e}^{r_0 F(x)}}{\sqrt{F'(x)}}\left(\pi_2(x) + \frac{F(x)}{s_0}\,\pi_1(x)\right).$$

Die $\pi_i(x)$, $i = 1, 2$, sind stetige Funktionen im Intervall I und erfüllen hier die Relation $\pi_i[\varphi(x)] = \pi_i(x)$. Sind s_1, s_2 einfache Wurzeln, bzw. ist s_0 eine Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung (9), *so besteht die Gleichung $r_j = \log s_j$, $j = 0, 1, 2$, wo* log *den Hauptwert des Logarithmus bedeutet.*

Am Ende dieser Arbeit wird eine Anwendung dieses Satzes an drei spezielle Type der Differentialgleichung (1) gebracht und zwar an solcheDifferentialgleichungen (1), wo der Koeffizient $Q(x)$ eine von den drei folgenden Relationen erfüllt: 1. $Q(x + d) = Q(x)$, $d > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ (die von Floquet behandelte Gleichung), 2. $k^2\, Q(kx) = Q(x)$, $k > 1$, $x \in (0, \infty)$, 3. $\frac{1}{(1 - mx)^4} \cdot Q\left(\frac{x}{1 - mx}\right) = Q(x)$, $m > 0$, $x \in (-\infty, 0)$.