Vojtěch Jarník

К теории однородных линейных диофантовых приближений

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 4, 330–353

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100121`

К ТЕОРИИ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

ВОЙТЕХ ЯРНИК (Vojtěch Jarník), Прага.

(Поступило в редакцию 3/V 1954 г.)

В статье исследуются приближенные решения системы однородных линейных уравнений в целых числах; целью статьи является изучение связи между минимальным и максимальным порядком приближения.

§ 1. Постановка вопроса.

Все числа в этой статье — вещественные. Числа $\eta_1, \ldots, \eta_n$ назовем линейно независимыми, если из равенства $a_1\eta_1 + \ldots + a_n\eta_n + a_0 = 0$ с целыми $a_0, a_1, \ldots, a_n$ следует $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ (для $n = 1$ это значит, что η_1 иррационально). Пусть задана матрица rs чисел

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{1,1}, \ldots, \Theta_{1,r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_{s,1}, \ldots, \Theta_{s,r} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Для $t \geqq 1$ мы положим

$$\psi(t) = \psi(\Theta, t) = \min \left(\max_{1 \leqq j \leqq s} |\Theta_{j,1}x_1 + \ldots + \Theta_{j,r}x_r + x_{r+j}|\right), \tag{2}$$

где символ min обозначает минимум для всех систем целых чисел $x_1, \ldots x_{r+s}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \max(|x_1|, \ldots, |x_r|) \leqq t\,. \tag{3}$$

Матрицу Θ назовем **невырожденной**, если $\psi(t) > 0$ для всех $t \geqq 1$.

Известно, что $t^{\frac{r}{s}}\psi(t) \leqq 1$ для $t \geqq 1$. Через $\alpha(\Theta) = \alpha$ соотв. через $\beta(\Theta) = \beta$ мы обозначаем верхнюю границу тех γ, для которых

$$\limsup_{t \to +\infty} t^\gamma \psi(t) < +\infty$$

соотв.

$$\liminf_{t \to +\infty} t^\gamma \psi(t) < +\infty\,.$$

Очевидно,

$$\frac{r}{s} \leqq \alpha(\Theta) \leqq \beta(\Theta) \leqq +\infty ;$$

в случае $r = 1$ известно еще, что (в случае невырожденной матрицы) всегда $\alpha(\Theta) \leqq 1$ (итак, при $r = s = 1$ всегда $\alpha(\Theta) = 1$). Известно, что существуют линейно независимые системы чисел $\Theta_{j,i}$, для которых имеют место экстремальные реляции $\alpha(\Theta) = +\infty$ (соотв. $\alpha(\Theta) = 1$ в случае $r = 1$) или $\beta(\Theta) = \frac{r}{s}$ (что касается $\alpha(\Theta)$, то эти результаты получены по существу впервые Хинчиным [3] (ср. также Apfelbeck [1]).

Здесь мы займемся соотношениями между α и β, за исключением тривиального случая $r = s = 1$.

Теорема 1. *Обозначим* $\alpha(\Theta) = \alpha$, $\beta(\Theta) = \beta$.

I. *Пусть* $r = 1$, $s \geqq 2$. *Предполагаем, что матрица* Θ (*состоящая из одного столбца*) *содержит по крайней мере два линейно независимых числа* (*так что* $\frac{1}{s} \leqq \alpha \leqq 1$). *Тогда*

$$\beta \geqq \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}, \text{ если } \alpha < 1; \beta = +\infty, \text{ если } \alpha = 1. \tag{4}$$

II. *Пусть* $r = 2$, $s \geqq 1$ *и пусть* Θ *невырождена. Тогда*

$$\beta \geqq \alpha(\alpha - 1) . \tag{5}$$

III. *Пусть* $r > 2$, $s \geqq 1$; *пусть* Θ *невырождена; пусть* $(5r^2)^{r-1} < \alpha < +\infty$.

Тогда

$$\beta \geqq \alpha^{\frac{r}{r-1}} - 3\alpha . \tag{6}$$

Добавим два замечания по случаю $r = 1$.

A. Для справедливости соотношения (4) недостаточно, чтобы Θ была невырожденной. В самом деле, выбрав число η таким образом, что $\beta(\eta) = 1$ (напр., $\eta = \sqrt{2}$), видим, что для матрицы $\Theta = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix}$ будет $\alpha = \beta = 1$.

B. Для доказательства утверждения I достаточно ограничиться случаем, когда все числа матрицы линейно независимы. В самом деле, если Θ_{s+1} линейно зависит от $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$, то, очевидно,

$$\alpha\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_s \\ \Theta_{s+1} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_s \end{pmatrix}, \quad \beta\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_s \\ \Theta_{s+1} \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_s \end{pmatrix}.$$

Возникает вопрос, в какой мере точны нижние границы для β (при заданном α), найденные в (4), (5), (6). В этом направлении мы покажем:

Теорема 2. I. *Пусть* $r \geqq 2$, $s \geqq 1$. *Тогда к всякому* $m > 2$ $(m < +\infty)$ *существует такая невырожденная матрица* Θ, *что*

$$\beta(\Theta) = m^r, \quad \alpha(\Theta) = m^{r-1} \tag{7}$$

и даже, точнее,

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{m^{r-1}} \psi(t) = 1, \qquad \liminf_{t \to +\infty} t^{m^r} \psi(t) = 1. \tag{8}$$

II. *Пусть* $r = 1$, $s \geqq 2$, $m > 2 (m < +\infty)$,

$$m^{s-1} > m^{s-2} + \sum_{k=0}^{s-2} m^k \tag{9}$$

(*для* $s = 2$ *это неравенство выполнено при всех* $m > 2$); *полагаем*

$$\alpha_0 = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} - \ldots - \frac{1}{m^{s-1}}, \tag{10}$$

$$\beta_0 = m \frac{m^{s-1} - m^{s-2} - \ldots - 1}{m^{s-1} + m^{s-2} + \ldots + 1}. \tag{11}$$

Тогда существует матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_s \end{pmatrix},$$

состоящая из s *линейно независимых чисел такая, что*

$$\alpha(\Theta) = \alpha_0, \quad \textit{точнее}, \quad \limsup_{t \to +\infty} t^{\alpha_0} \psi(t) = 1. \tag{12}$$

Если m *так велико, что*

$$m^s > 1 + 2 \sum_{k=1}^{s-1} m^k, \tag{13}$$

то будет также

$$\beta(\Theta) = \beta_0, \quad \textit{точнее}, \quad \liminf_{t \to +\infty} t^{\beta_0} \psi(t) = 1. \tag{14}$$

Заметим, что в случае $r > 1$ можно ограничиться в доказательстве теоремы 2 случаем $s = 1$. В самом деле, мы можем пополнить строку $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r$ со свойствами (7), (8) еще $s - 1$ строками, состоящими из нулей.

Теорема 2 показывает, что нижние границы для β, полученные в теореме 1, не отличаются слишком от точных нижних границ. В случае $r > 1$ получаем для всякого $\alpha > 2^{r-1}$ такую систему, для которой

$$\alpha(\Theta) = \alpha, \quad \beta(\Theta) = (\alpha(\Theta))^{\frac{r}{r-1}}. \tag{15}$$

В случае $r = 1$ теорема 2 дает: Для всякого $\alpha < 1$, достаточно близкого единице, существует система Θ, состоящая из s линейно независимых чисел, для которой

$$\alpha(\Theta) = \alpha\,, \quad \beta(\Theta) < \frac{\alpha^2(\Theta)}{1 - \alpha(\Theta)} + \alpha(\Theta) = \frac{\alpha(\Theta)}{1 - \alpha(\Theta)}\,. \tag{16}$$

В самом деле, положим

$$\varepsilon = \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m^{s-1}}\,, \quad \varepsilon' = \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m^{s-2}}$$

($\varepsilon' = 0$ для $s = 2$); тогда $\alpha_0 = 1 - \varepsilon$, $m\varepsilon = 1 + \varepsilon'$, $\beta_0 = \frac{1 + \varepsilon'}{\varepsilon} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} < \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}$.

Отметим еще два следствия теоремы 2:

I. Для всякого α $(2 < \alpha < +\infty)$ существует пара чисел Θ_1, Θ_2 так, что

$$\alpha(\Theta_1, \Theta_2) = \alpha\,, \quad \text{даже} \quad \limsup_{t \to +\infty} t^\alpha \psi(t) = 1\,. \tag{17}$$

II. Для всякого α $(\frac{1}{2} < \alpha < 1)$ существует пара чисел Θ_1, Θ_2 так, что

$$\alpha\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix} = \alpha, \quad \text{даже} \quad \limsup_{t \to +\infty} t^\alpha \psi(t) = 1\,. \tag{18}$$

В остальных случаях ($rs > 2$) теорема 2 дает соответствующий результат только для части допустимых значений α $\left(\frac{r}{s} \leqq \alpha \leqq +\infty \text{ для } r > 1,\ \frac{1}{s} \leqq \alpha \leqq 1 \text{ для } r = 1\right)$. В случае $r > 2$, $s = 1$ мы могли бы доказать соответствующий результат для всех $\alpha > r$, но мы на этом останавливаться не будем. Заметим еще, что вместо (17), (18) мы могли бы и для более общих функций $f(t)$ доказать существование таких Θ, что $\limsup f(t)\,\psi(t) = 1$.

§ 2. Доказательство теоремы 1.

Начнем с доказательства следующей простой леммы:

Лемма. Пусть p, q, m — целые положительные числа, $p < m \leqq p + q$. Предположим, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1p}, b_{11}, \ldots, b_{1q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, \ldots, a_{mp}, b_{m1}, \ldots, b_{mq} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

столбцы которой обозначим символически через $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q$, имеет следующие свойства:

I. Столбцы $A_1, \ldots, A_p$ линейно независимы.

II. При всяком выборе индексов $j_1, \ldots, j_{m-p}$ столбцы

$$A_1, \ldots, A_p, B_{j_1}, \ldots, B_{j_{m-p}} \tag{19a}$$

линейно зависимы.

Утверждение: Ранг матрицы меньше m.

Доказательство. Если столбцы $A_1, \ldots, A_p, B_j$ линейно зависимы, то имеет место нетривиальное равенство $c_1A_1 + \ldots + c_pA_p + dB_j = 0$, где $d \neq 0$; итак, B_j является линейной комбинацией столбцов $A_1, \ldots, A_p$. Отсюда следует: Если ранг матрицы (19) больше p, то существует j_1 так, что B_{j_1} не является линейной комбинацией столбцов $A_1, \ldots, A_p$, значит столбцы $A_1, \ldots, A_p, B_{j_1}$ линейно независимы. Повторяя эти рассуждения, мы получим следующее: если ранг больше $p+1$, то существует j_2 так, что столбцы $A_1, \ldots, A_p, B_{j_1}, B_{j_2}$ линейно независимы, и т. д. Наконец видим: если ранг равен m, то существует линейно независимая система столбцов вида (19a), но это по предположению невозможно.

Рассмотрим невырожденную матрицу

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11}, \ldots, \Theta_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Theta_{s1}, \ldots, \Theta_{sr} \end{pmatrix}$$

и соответствующую функцию

$$\psi(t) = \psi(\Theta, t) \quad (t \geqq 1)$$

[см. (2)]. Так как для всякого целого $n \geqq 1$ функция $\psi(t)$ постоянна в промежутке $n \leqq t < n+1$ и, кроме того, $\psi(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = 0$, то, очевидно, существует такая последовательность целых чисел

$$1 = t_1 < t_2 < t_3 < \ldots, \tag{20}$$

что $\psi(t) = \psi(t_k)$ при $t_k \leqq t < t_{k+1}$, но $\psi(t_{k+1}) < \psi(t_k)$. Тогда для всякого k существуют целые числа

$$x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{r+s,k} \tag{21}$$

так, что

$$\max_{1\leqq i\leqq r} |x_{i,k}| = t_k, \quad \max_{1\leqq j\leqq s} |\Theta_{1,j}x_{1,k} + \ldots + \Theta_{r,j}x_{r,k} + x_{r+j,k}| = \psi(t_k). \tag{22}$$

Очевидно, $(x_{1,k}, \ldots, x_{r+s,k}) = 1$ (общий наибольший делитель). Введем еще обозначение

$$\Theta_{1,j}x_{1,k} + \ldots + \Theta_{r,j}x_{r,k} + x_{r+j,k} = \psi_j(t_k); \tag{23}$$

следовательно,

$$\max_{1\leqq j\leqq s} |\psi_j(t_k)| = \psi(t_k). \tag{24}$$

Заметим еще следующее: Пусть $\varphi(t)$ положительна и непрерывна при $t \geqq 1$. Допустим, что для всех $t > \tau$ имеет место неравенство

$$\psi(t) \leqq \varphi(t) . \tag{25}$$

Тогда для $\tau < t_k \leqq t < t_{k+1}$ будет $\psi(t_k) = \psi(t) \leqq \varphi(t)$ и предельный переход $t \to t_{k+1}$ дает

$$\psi(t_k) \leqq \varphi(t_{k+1}) . \tag{26}$$

I. Случай $r = 1$. Докажем следующую теорему, более точную, чем теорема 1,I.

Теорема 3. *Пусть $r = 1$, $s > 1$. Пусть*

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_s \end{pmatrix} , \tag{27}$$

где каждая пара Θ_i, Θ_j $(1 \leqq i < j \leqq s)$ является линейно независимой. Пусть $\varphi(t)$ непрерывна для $t \geqq 1$, пусть далее $\varphi(t)$ — убывающая, $t\varphi(t)$ — возрастающая функция,

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0 , \quad \lim_{t \to +\infty} t\varphi(t) = +\infty ; \tag{28}$$

предположим, что для всех достаточно больших t

$$\psi(\Theta, t) = \psi(t) < \varphi(t) . \tag{29}$$

Тогда существуют как угодно большие значения t, для которых

$$\psi(t) < \varphi\left(\varrho\left(\frac{1}{6\varphi(t)}\right)\right) , \tag{30}$$

где ϱ обозначает фукнцию, обратную к функции $u\varphi(u)$.

Полагая, в частности, $\varphi(t) = t^{-\alpha'}$ $(\frac{1}{2} < \alpha' < 1)$, получим $\varrho(u) = u^{\frac{1}{1-\alpha'}}$; из этого легко видно, что теорема 1,I вытекает из теоремы 3.

Доказательство. Пользуясь последовательностью (20), получаем [см. (21)—(24)] для $n = 1, 2, \ldots$ целые числа $p_{1,n}, \ldots, p_{s,n}$ так, что

$$t_n\Theta_i - p_{i,n} = \psi_i(t_n) , \quad \max_{1 \leqq i \leqq s} |\psi_i(t_n)| = \psi(t_n) , \tag{31}$$

$$(t_n, p_{1,n}, \ldots, p_{s,n}) = 1 . \tag{32}$$

Докажем, что для бесконечного числа значений n имеет место

$$t_{n+1} > \varrho\left(\frac{1}{6\varphi(t_n)}\right) . \tag{33}$$

Этим будет доказана наша теорема, так как из (25) вытекает (26), а из (26), (33) следует

$$\psi(t_n) \leqq \varphi(t_{n+1}) < \varphi\left(\varrho\left(\frac{1}{6\varphi(t_n)}\right)\right).$$

Итак, допустим, что для всех достаточно больших n

$$t_{n+1} \leqq \varrho\left(\frac{1}{6\varphi(t_n)}\right) \tag{34}$$

и приведем это предположение к противоречию. Обозначим

$$\varrho\left(\frac{1}{6\varphi(t)}\right) = \chi(t)\,, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{6\varphi(t)} = \chi(t)\,\varphi(\chi(t))\,; \tag{35}$$

$$D_{n,i,j} = \begin{vmatrix} t_n, & \psi_i(t_n), & \psi_j(t_n) \\ t_{n+1}, & \psi_i(t_{n+1}), & \psi_j(t_{n+1}) \\ t_{n+2}, & \psi_i(t_{n+2}), & \psi_j(t_{n+2}) \end{vmatrix}. \tag{36}$$

$D_{n,i,j}$ является целым числом, так как, очевидно,

$$\begin{vmatrix} t_n, & p_{i,n}, & p_{j,n} \\ t_{n+1}, & p_{i,n+1}, & p_{j,n+1} \\ t_{n+2}, & p_{i,n+2}, & p_{j,n+2} \end{vmatrix} = D_{n,i,j}\,.$$

С другой стороны, из (36), (26), (35), (34) следует, что

$$|D_{n,i,j}| < 6t_{n+2}\psi(t_{n+1})\,\psi(t_n) \leqq 6t_{n+2}\varphi(t_{n+2})\,\varphi(t_{n+1}) \leqq$$
$$\leqq 6\chi(t_{n+1})\,\varphi(\chi(t_{n+1}))\,\varphi(t_{n+1}) = 1$$

и, следовательно,

$$D_{n,i,j} = 0 \quad \text{для} \quad n \geqq N\,. \tag{37}$$

Докажем теперь, что для всякой пары n, m ($n \neq m$) существует по крайней мере одна пара i, j ($1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq j \leqq s$) так, что

$$\begin{vmatrix} \psi_i(t_n), & \psi_j(t_n) \\ \psi_i(t_m), & \psi_j(t_m) \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{38}$$

Действительно, этот определитель равен

$$-\,\Theta_i(t_n p_{j,m} - t_m p_{j,n}) + \Theta_j(t_n p_{i,m} - t_m p_{i,n}) + (p_{i,n}p_{j,m} - p_{i,m}p_{j,n})\,.$$

Следовательно, если бы все эти определители были равны нулю, то, ввиду линейной независимости чисел Θ_i, Θ_j ($i \neq j$), было бы

$$t_n : p_{1,n} : \ldots : p_{s,n} = t_m : p_{1,m} : \ldots : p_{s,m}\,,$$

что невозможно ввиду (32), так как $t_n \neq t_m$.

Рассмотрим теперь матрицу

$$\begin{pmatrix} t_n, & \psi_1(t_n), & \psi_2(t_n), & \ldots, \psi_s(t_n) \\ t_{n+1}, & \psi_1(t_{n+1}), & \psi_2(t_{n+1}), & \ldots, \psi_s(t_{n+1}) \\ t_{n+2}, & \psi_1(t_{n+2}), & \psi_2(t_{n+2}), & \ldots, \psi_s(t_{n+2}) \end{pmatrix} \qquad (n \geqq N)\,.$$

Применим лемму (полагая $m = 3$, $p = 1$, $q = s$). Так как $t_n \neq 0$, $D_{n,i,j} = 0$, то сразу видно, что ранг матрицы меньше 3.

Из (38) следует, что две первые строки линейно независимы; значит, третья строка необходимо зависит от первых двух. Значит, в бесконечной матрице

$$\begin{array}{l} t_N, \quad \psi_1(t_N), \quad \ldots, \psi_s(t_N) \\ t_{N+1}, \ \psi_1(t_{N+1}), \ldots, \psi_s(t_{N+1}) \\ t_{N+2}, \ \psi_1(t_{N+2}), \ldots, \psi_s(t_{N+2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

всякая строка является линейно зависимой от двух непосредственно предыдущих. Отсюда сразу следует, что строка t_n, $\psi_1(t_n), \ldots$ $(n > N + 1)$ линейно зависит от первых двух строк $t_N, \psi_1(t_N), \ldots; t_{N+1}, \psi_1(t_{N+1}), \ldots$ Выберем i, j так, чтобы

$$A = \psi_i(t_N)\,\psi_j(t_{N+1}) - \psi_j(t_N)\,\psi_i(t_{N+1}) \neq 0$$

[см. (38)]. Тогда для $n > N + 1$ будет

$$\begin{vmatrix} t_N, & \psi_i(t_N), & \psi_j(t_N) \\ t_{N+1}, & \psi_i(t_{N+1}), & \psi_j(t_{N+1}) \\ t_n, & \psi_i(t_n), & \psi_j(t_n) \end{vmatrix} = 0\,,$$

т. е.

$$At_n + B\psi_i(t_n) + C\psi_j(t_n) = 0\,, \tag{39}$$

где $A \neq 0$, B, C не зависят от n. Но при $n \to \infty$ мы имеем $t_n \to +\infty$, $\psi_i(t_n) \to 0$, $\psi_j(t_n) \to 0$ и (39) дает (ввиду $A \neq 0$) желаемое противоречие.

II. Случай $r = 2$, $s \geqq 1$. Мы и здесь приводим более точную теорему, доказательство которой почти не отличается от доказательства, данного мною раньше (Jarník [2]) для частного случая $r = 2$, $s = 1$.

Теорема 4. *Пусть* $s \geqq 1$,

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11}\, \Theta_{12} \\ \ldots\ldots \\ \Theta_{s1}\, \Theta_{s2} \end{pmatrix} \tag{40}$$

— невырожденная матрица. Пусть $\varphi(t)$ *— непрерывная и убывающая для* $t \geqq 1$ *функция, пусть* $\lim\limits_{t\to+\infty} t\varphi(t) = 0$; *предположим, что для всех достаточно больших* t

$$\psi(\Theta, t) = \psi(t) < \varphi(t)\,. \tag{41}$$

Тогда существуют как угодно большие значения t, *для которых*

$$\psi(t) < \varphi\left(\frac{1}{6t\varphi(t)}\right). \tag{42}$$

Положив, в частности, $\varphi(t) = t^{-\alpha'}$ $(\alpha' > 1)$, получим теорему 1,II.

Доказательство. Воспользовавшись последовательностью (20), получим для $n = 1, 2, \ldots$ целые числа

$$x_{1,n},\ x_{2,n},\ x_{3,n},\ \ldots,\ x_{s+2,n} \tag{43}$$

такие, что

$$\left.\begin{array}{l} \max\left(|x_{1,n}|, |x_{2,n}|\right) = t_n, \\ \Theta_{i,1}x_{1,n} + \Theta_{i,2}x_{2,n} + x_{2+i,n} = \psi_i(t_n) \quad (1 \leqq i \leqq s)\,, \\ \max\limits_{1\leqq i\leqq s} |\psi_i(t_n)| = \psi(t_n)\,, \quad (x_{1,n}, \ldots, x_{s+2,n}) = 1\,. \end{array}\right\} \tag{44}$$

Докажем, что для бесконечно многих значений n имеет место

$$t_{n+1} > \frac{1}{6t_n\varphi(t_n)}\,. \tag{45}$$

Этим будет доказана наша теорема, так как из (26), (45) вытекает

$$\psi(t_n) \leqq \varphi(t_{n+1}) < \varphi\left(\frac{1}{6t_n\varphi(t_n)}\right).$$

Итак, допустим, что для всех достаточно больших n

$$t_{n+1} \leqq \frac{1}{6t_n\varphi(t_n)} \tag{46}$$

и приведем это предположение к противоречию.

Положим $(1 \leqq i \leqq s)$

$$D_{n,i} = \begin{vmatrix} x_{1,n}, & x_{2,n}, & x_{2+i,n} \\ x_{1,n+1}, & x_{2,n+1}, & x_{2+i,n+1} \\ x_{1,n+2}, & x_{2,n+2}, & x_{2+i,n+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{1,n}, & x_{2,n}, & \psi_i(t_n) \\ x_{1,n+1}, & x_{2,n+1}, & \psi_i(t_{n+1}) \\ x_{1,n+2}, & x_{2,n+2}, & \psi_i(t_{n+2}) \end{vmatrix}. \tag{47}$$

Имеем

$$|D_{n,i}| < 6t_{n+1}t_{n+2}\psi(t_n) \leqq 6t_{n+2}t_{n+1}\varphi(t_{n+1}) \leqq 1$$

и, следовательно,

$$D_{n,i} = 0 \tag{48}$$

для достаточно больших n.

С другой стороны, для достаточного больших n

$$E_n = x_{1,n}x_{2,n+1} - x_{2,n}x_{1,n+1} \neq 0.$$

Действительно, из $E_n = 0$ следовало бы (для больших n)

$$\begin{aligned} &|x_{1,n}x_{2+i,n+1} - x_{2+i,n}x_{1,n+1}| = \\ &= |x_{1,n}\psi_i(t_{n+1}) - x_{1,n+1}\psi_i(t_n)| < 2t_{n+1}\psi(t_n) \leqq \\ &\leqq 2t_{n+1}\varphi(t_{n+1}) < 1\,, \end{aligned}$$

следовательно, также

$$x_{1,n}x_{2+i,n+1} - x_{1,n+1}x_{2+i,n} = 0$$

и, подобным образом,

$$x_{2,n}x_{2+i,n+1} - x_{2,n+1}x_{2+i,n} = 0\,;$$

следовательно,

$$x_{1,n} : x_{2,n} : \ldots : x_{2+s,n} = x_{1,n+1} : x_{2,n+1} : \ldots : x_{2+s,n+1} ,$$

что невозможно. Итак, для $n \geqq N$ имеем

$$D_{n,i} = 0 \quad (1 \leqq i \leqq s) , \quad E_n \neq 0 . \tag{49}$$

Рассмотрим матрицу

$$\begin{matrix} x_{1,n}, & x_{2,n}, & \psi_1(t_n), & \ldots, \psi_s(t_n) \\ x_{1,n+1}, & x_{2,n+1}, & \psi_1(t_{n+1}), & \ldots, \psi_s(t_{n+1}) \\ x_{1,n+2}, & x_{2,n+2}, & \psi_1(t_{n+2}), & \ldots, \psi_s(t_{n+2}) \end{matrix}$$

($n \geqq N$). Применяя лемму (при $m = 3$, $p = 2$, $q = s$), убеждаемся, что, вследствие (49), ранг матрицы меньше 3. Но $E_n \neq 0$, значит, третья строка необходимо линейно зависит от двух первых. Отсюда сразу следует, что в бесконечной матрице

$$\begin{matrix} x_{1,N}, & x_{2,N}, & \psi_1(t_N), & \ldots, \psi_s(t_N) \\ x_{1,N+1}, & x_{2,N+1}, & \psi_1(t_{N+1}), & \ldots, \psi_s(t_{N+1}) \\ x_{1,N+2}, & x_{2,N+2}, & \psi_1(t_{N+2}), & \ldots, \psi_s(t_{N+2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

всякая строка линейно зависит от двух первых строк; итак, (для $n \geqq N + 2$)

$$\begin{vmatrix} x_{1,N}, & x_{2,N}, & \psi_i(t_N) \\ x_{1,N+1}, & x_{2,N+1}, & \psi_i(t_{N+1}) \\ x_{1,n}, & x_{2,n}, & \psi_i(t_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

или

$$A\psi_i(t_n) + B_n\psi_i(t_{N+1}) + C_n\psi_i(t_N) = 0 , \tag{50}$$

где A, B_n, C_n — целые числа, независящие от i; $A = E_N \neq 0$ не зависит от n, $B_n = O(t_n)$, $C_n = O(t_n)$. Если бы $B_n = 0$, то было бы $|A\psi_i(t_n)| = |C_n\psi_i(t_N)|$; отсюда (при таком выборе i, что $|\psi_i(t_n)| = \psi(t_n) > 0$) следовало бы $C_n \neq 0$,

$$|A|\, \psi(t_n) = |C_n|\, \psi(t_N) \geqq \psi(t_N) ,$$

что невозможно для больших n. Итак, для достаточно больших n будет $B_n \neq 0$. Равенство (50) вместе со следующим равенством

$$A\psi_i(t_{n+1}) + B_{n+1}\psi_i(t_{N+1}) + C_{n+1}\psi_i(t_N) = 0$$

дает (для $n \to \infty$, $i = 1, \ldots, s$)

$$\begin{aligned} |\psi_i(t_N)| \,.\, |B_{n+1}C_n - B_nC_{n+1}| &= |A| \,.\, |B_{n+1}\psi_i(t_n) - B_n\psi_i(t_{n+1})| = \\ &= O(t_{n+1}\psi(t_n)) = O(t_{n+1}\varphi(t_{n+1})) = o(1) . \end{aligned}$$

Отсюда получается $\psi(t_N)(B_{n+1}C_n - B_nC_{n+1}) = o(1)$, значит (для больших n) $B_{n+1}C_n - B_nC_{n+1} = 0$, откуда $B_{n+1}\psi_i(t_n) - B_n\psi_i(t_{n+1}) = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} &B_{n+1}(x_{1,n}\Theta_{i,1} + x_{2,n}\Theta_{i,2} + x_{i+2,n}) - \\ &- B_n(x_{1,n+1}\Theta_{i,1} + x_{2,n+1}\Theta_{i,2} + x_{i+2,n+1}) = 0 \end{aligned}$$

для $i = 1, \ldots, s$. Но матрица Θ является невырожденной, значит,

$$B_{n+1}x_{1,n} - B_n x_{1,n+1} = B_{n+1}x_{2,n} - B_n x_{2,n+1} = 0 \ ,$$

откуда (ввиду $B_n \neq 0$) следует $E_n = 0$, что и дает [см. (49)] желаемое противоречие.

III. Случай $r > 2$. Пусть задана невырожденная матрица (1), $r > 2$, $s \geqq 1$, $\beta = \beta(\Theta)$, $\alpha = \alpha(\Theta)$, $(5r^2)^{r-1} < \alpha < +\infty$. Чтобы доказать теорему 1,III, допустим, что

$$\beta < \alpha^{\frac{r}{r-1}} - 3\alpha \tag{51}$$

и приведем это предположение к противоречию. (51) позволяет выбрать числа λ, μ так, чтобы

$$(5r^2)^{r-1} < \mu < \alpha \ , \quad \lambda = \mu^{\frac{r}{r-1}} - 3\mu > \beta \ . \tag{52}$$

Из $\beta \geqq \alpha$ следует $\lambda > \mu$, и для всех $t > \tau$ будет

$$t^{-\lambda} < \psi(t) < t^{-\mu} \ . \tag{53}$$

Определим числа $M > 0$, $\varrho > 0$ равенствами

$$\varrho^r \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^r = \lambda - \mu \ , \quad M^{r-1} = \mu . \ (\text{итак, } M > 5r^2) \ , \tag{54}$$

т. е.[1])

$$\varrho^r = \left(1 - \frac{4}{M}\right)\left(1 - \frac{3}{M}\right)^{-r} . \tag{55}$$

Сначала докажем некоторые неравенства, пользуясь формулой Тейлора $f(\xi + h) = f(\xi) + hf'(\xi) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi + zh)$, $0 < z < 1$:

$$\left(1 - \frac{3}{M}\right)^r < 1 - \frac{3r}{M} + \frac{9r^2}{2M^2} < 1 - \frac{4}{M}$$

(так как $M > \frac{9}{2}r^2$, $3r > 5$); т. е.

$$\varrho > 1 \ . \tag{56}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
(\varrho - 1)\frac{\lambda}{\mu} - \frac{r\lambda}{\mu^2} - 1 &= M\left(1 - \frac{3}{M}\right)\left(\varrho - 1 - \frac{r}{\mu}\right) - 1 > \\
&> M\left(-1 + \frac{3}{M} + \left(1 - \frac{4}{M}\right)^{\frac{1}{r}} - \frac{r}{M^{r-1}}\right) - 1 \geqq \\
&\geqq 2 - \frac{r}{M} - \frac{4}{r} - \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{16}{M}\left(1 - \frac{4}{M}\right)^{\frac{1}{r} - 2} > \\
&> 2 - \frac{r}{M} - \frac{4}{r} - \frac{8}{rM}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} > 2 - \frac{1}{5r} - \frac{4}{r} - \frac{32}{5r^3} > 0 \ .
\end{aligned} \tag{57}$$

[1]) Имеем $\lambda = M^r - 3M^{r-1}$, $\dfrac{\lambda}{\mu} = M\left(1 - \dfrac{3}{M}\right)$, $\lambda - \mu = M^r\left(1 - \dfrac{4}{M}\right)$.

Из (54) следует

$$\frac{r}{\mu}+\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r-1}-(\varrho-1)=\frac{r}{\mu}+\frac{\mu}{\varrho\lambda}-(\varrho-1)<\frac{r}{\mu}+\frac{\mu}{\lambda}-(\varrho-1)=$$
$$=\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{r\lambda}{\mu^2}+1-\frac{\lambda}{\mu}(\varrho-1)\right),$$

так что, ввиду (57),

$$\frac{r}{\mu}+\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r-1}-(\varrho-1)<0\,. \tag{58}$$

Выберем целое число $X_1>\tau$, $X_1>1$ так, чтобы $\psi(X_1)<\psi(X_1-1)$. Отсюда следует, что имеются такие целые числа

$$x_{1,1},\ldots,x_{r+s,1}\,,$$

что

$$\max_{1\leqq i\leqq r}|x_{i,1}|=X_1\,,\quad \max_{1\leqq j\leqq s}|x_{1,1}\Theta_{j,1}+\ldots+x_{r,1}\Theta_{j,r}+x_{r+j,1}|=\psi(X_1)\,.$$

Вследствие (53), имеем $\psi(X_1)=X_1^{-\mu_1}$, где $\mu<\mu_1<\lambda$. Полагая $q_1=\frac{\mu_1}{\mu}$, находим из (53), (56)

$$\psi(X_1^{\varrho q_1})<X_1^{-\varrho q_1\mu}=X_1^{-\varrho\mu_1}<\psi(X_1)\,. \tag{59}$$

Итак, имеются целые числа

$$X_2,x_{1,2},\ldots,x_{r+s,2}$$

такие, что

$$\max_{1\leqq i\leqq r}|x_{i,2}|=X_2\leqq X_1^{\varrho q_1}\,,$$
$$\max_{1\leqq j\leqq s}|x_{1,2}\Theta_{j,1}+\ldots+x_{r,2}\Theta_{j,r}+x_{r+j,2}|=\psi(X_1^{\varrho q_1})=\psi(X_2)\,.$$

Из (59) следует, что $X_2>X_1$; из (53) вытекает равенство $\psi(X_2)=X_2^{-\mu_2}$, где $\mu<\mu_2<\lambda$. Повторяя эти рассуждения, получим последовательность систем

$$X_n;\,x_{1,n},x_{2,n},\ldots,x_{r+s,n},\mu_n,q_n\quad(n=1,2,\ldots) \tag{60}$$

со следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned}
&x_{1,n},\ldots,x_{r+s,n}\text{ — целые числа, }X_n=\max_{1\leqq i\leqq r}|x_{i,n}|>0\,,\\
&\max_{1\leqq j\leqq s}|x_{1,n}\Theta_{j,1}+\ldots+x_{r,n}\Theta_{j,r}+x_{r+j,n}|=\psi(X_n)\,,\\
&\psi(X_n)=X_n^{-\mu_n}\,,\quad \mu<\mu_n<\lambda\,,\quad q_n=\frac{\mu_n}{\mu}\,,\\
&1<X_n<X_{n+1}\leqq X_n^{\varrho q_n}<X_n^{\varrho\frac{\lambda}{\mu}},\quad \psi(X_{n+1})<X_n^{-\varrho\mu_n}
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Очевидно,

$$(x_{1,n}, \ldots, x_{r+s,n}) = 1 \,. \tag{62}$$

Положим

$$x_{1,n}\Theta_{j,1} + \ldots + x_{r,n}\Theta_{j,r} + x_{r+j,n} = \psi_j(X_n), \tag{63}$$

откуда

$$\psi(X_n) = \max_{1 \leqq j \leqq s} |\psi_j(X_n)| \,. \tag{64}$$

Прежде всего докажем следующее утверждение:

I. Для всех достаточно больших значений n ранг матрицы

$$\begin{matrix} x_{1,n+1}, \ldots, x_{r,n+1} \\ x_{1,n+2}, \ldots, x_{r,n+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1,n+r}, \ldots, x_{r,n+r} \end{matrix} \tag{65}$$

равен r.

Действительно, в противном случае существовало бы такое k $(1 \leqq k < r)$, что $(k+1)$-ая строка матрицы была бы линейно зависима от первых k строк, которые, в свою очередь, были бы линейно независимы.

Обозначив строки матрицы через $\{x_{n+1}\}, \{x_{n+2}\}, \ldots, \{x_{n+r}\}$, мы имели бы нетривиальное равенство

$$A_1\{x_{n+1}\} + \ldots + A_{k+1}\{x_{n+k+1}\} = \{0\} \,, \tag{66}$$

где $\{0\}$ обозначает строку, состоящую из нулей. Здесь A_p — один из определителей матрицы, порядка k, состоящий из элементов $k+1$ первых строк, за исключением p-той строки. Итак, A_p — целые числа, которые не все равны нулю.

Из (66) и (63) следует, что

$$A_1\psi_j(X_{n+1}) + \ldots + A_{k+1}\psi_j(X_{n+k+1}) = B_j \,, \tag{67}$$

где B_j — целое число $(j = 1, \ldots, s)$.

Пусть A_q — первое из чисел $A_1, \ldots, A_{k+1}$, которое не равно нулю; выберем j так, чтобы $|\psi_j(X_{n+q})| = \psi(X_{n+q})$. Очевидно,

$$|A_p| \leqq k! \, \frac{X_{n+1}X_{n+2}\ldots X_{n+k+1}}{X_{n+p}} \,, \tag{68}$$

так что абсолютная величина левой части в (67) не больше

$$(k+1)!\, X_{n+2}X_{n+3}\ldots X_{n+k+1}\psi(X_{n+1}) \leqq (k+1)!\, X_{n+1}^{\sigma} \,,$$

где, ввиду (61), (53),

$$\sigma = \varrho\frac{\lambda}{\mu} + \left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^k - \mu =$$

$$= \frac{1}{\varrho\dfrac{\lambda}{\mu} - 1} \cdot \left(\left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} - \varrho\frac{\lambda}{\mu}\right) - \mu < \mu\left(\frac{1}{\lambda - \mu}\left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^r - 1\right) = 0$$

[см. (54)]. Для достаточно больших n будет $(k+1)!\, X_{n+1}^{\sigma} < 1$, следовательно, $|B_j| < 1$, $B_j = 0$. Тогда (67) принимает вид

$$\pm A_q \psi(X_{n+q}) + A_{q+1}\psi_j(X_{n+q+1}) + \ldots + A_{k+1}\psi_j(X_{n+k+1}) = 0\,.^{2)} \tag{69}$$

Здесь $|A_q \psi(X_{n+q})| \geqq \psi(X_{n+q})$, в то время как абсолютная величина всякого из остальных слагаемых, ввиду (68), не превышает числа

$$k!\, \frac{X_{n+1} X_{n+2} \ldots X_{n+k+1}}{X_{n+q+1}}\, \psi(X_{n+q+1})\,.$$

Итак, из (69) вытекает

$$\psi(X_{n+q}) \leqq (k+1)!\, \frac{X_{n+1} \ldots X_{n+k+1}}{X_{n+q+1}}\, \psi(X_{n+q+1})\,. \tag{70}$$

(61) дает

$$1 \leqq (k+1)!\, X_{n+q}^{\mu_{n+q}} \cdot X_{n+q}^{q} \cdot X_{n+q+1}^{\varrho\frac{\lambda}{\mu} + \ldots + \left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-q}} \cdot \psi(X_{n+q+1})\,. \tag{71}$$

Но из (61) следует

$$X_{n+q+1} \leqq X_{n+q}^{\varrho\mu_{n+q}\cdot\mu^{-1}}, \quad \psi(X_{n+q+1}) < X_{n+q}^{-\varrho\mu_{n+q}}\,,$$

и (71) дает

$$1 \leqq (k+1)!\, X_{n+q}^{\delta}\,, \tag{72}$$

$$\delta = \mu_{n+q} + q + \varrho\,\frac{\mu_{n+q}}{\mu}\left(\varrho\frac{\lambda}{\mu} + \left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-q}\right) -$$

$$- \varrho\mu_{n+q} < \mu_{n+q}\left(1 + \frac{q}{\mu} + \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r-1} - \varrho\right) = \mu_{n+q}\,\Delta\,,$$

где

$$\Delta < \frac{r}{\mu} + \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\varrho\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r-1} - (\varrho - 1) < 0$$

[см. (58)], откуда $\delta < \mu\Delta < 0$, и (72) дает искомое противоречие. Итак, ранг матрицы (65) действительно равен r.

Теперь построим определители

$$D_{n,j} = \begin{vmatrix} x_{1,n}, & \ldots, & x_{r,n}, & \psi_j(X_n) \\ x_{1,n+1}, & \ldots, & x_{r,n+1}, & \psi_j(X_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1,n+r}, & \ldots, & x_{r,n+r}, & \psi_j(X_{n+r}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{1,n}, & \ldots, & x_{r,n}, & x_{r+j,n} \\ x_{1,n+1}, & \ldots, & x_{r,n+1}, & x_{r+j,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1,n+r}, & \ldots, & x_{r,n+r}, & x_{r+j,n+r} \end{vmatrix}, \quad (j = 1, \ldots, s)$$

Имеем

$$|D_{n,j}| \leqq (r+1)!\, \psi(X_n) \cdot X_{n+1} X_{n+2} \ldots X_{n+r} \leqq (r+1)!\, X_n^{\omega}\,, \tag{73}$$

---

[2]) Очевидно, $q < k + 1$.

где

$$\omega = -\mu_n + \frac{\varrho\mu_n}{\mu}\left(1 + \left(\frac{\varrho\lambda}{\mu}\right) + \ldots + \left(\frac{\varrho\lambda}{\mu}\right)^{r-1}\right) = \mu_n\Omega ,$$

где $\mu_n > \mu$,

$$\Omega < -1 + \frac{1}{\lambda - \mu}\left(\frac{\varrho\lambda}{\mu}\right)^r = 0$$

[см. (54)]; итак, $\omega < \mu\Omega < 0$, откуда [см. (73)] $|D_{n,j}| < 1$ для больших n. Но $D_{n,j}$ — целое число, значит, $D_{n,j} = 0$ для всех достаточно больших n.

Принимая во внимание еще утверждение I, мы видим: Существует такое натуральное число N, что

$$D_{n+1,j} = 0 , \quad \begin{vmatrix} x_{1,n+1}, \ldots, x_{r,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1,n+r}, \ldots, x_{r,n+r} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{74}$$

для $n \geqq N$, $j = 1, \ldots, s$. Построим теперь бесконечную матрицу

$$\begin{matrix} x_{1,N+1}, \ldots, x_{r,N+1}, \psi_1(X_{N+1}), \ldots, \psi_s(X_{N+1}) \\ x_{1,N+2}, \ldots, x_{r,N+2}, \psi_1(X_{N+2}), \ldots, \psi_s(X_{N+2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

Применяя лемму (для $m = r + 1$, $p = r$, $q = s$) и (74), видим следующее:

Если взять r каких-нибудь непосредственно следующих друг за другом строк этой матрицы, то эти строки линейно независимы, но строка непосредственно следующая после этих r строк зависит от них. Отсюда сразу следует, что какая-то строка этой бесконечной матрицы линейно зависит от r первых строк; значит, для всякого $n \geqq N + r$ имеет место

$$\begin{vmatrix} x_{1,N+1}, \ldots, x_{r,N+1}, \psi_k(X_{N+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1,N+r}, \ldots, x_{r,N+r}, \psi_k(X_{N+r}) \\ x_{1,n+1}, \ldots, x_{r,n+1}, \psi_k(X_{n+1}) \end{vmatrix} = 0$$

для $k = 1, \ldots, s$, или

$$A_{1,n+1}\psi_k(X_{N+1}) + \ldots + A_{r,n+1}\psi_k(X_{N+r}) = A\psi_k(X_{n+1}) ,$$

где целые числа $A, A_{1,n+1}, \ldots, A_{r,n+1}$ не зависят от k, $A_{j,n+1} = O(X_{n+1})$, $A \neq 0$, A не зависит от n. Напишем r следующих соотношений:

$$A_{1,n+j}\psi_k(X_{N+1}) + \ldots + A_{r,n+j}\psi_k(X_{N+r}) = A\psi_k(X_{n+j}) , \quad j = 1, \ldots, r . \tag{75}$$

Обозначим

$$E = \begin{vmatrix} A_{1,n+1}, \ldots, A_{r,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1,n+r}, \ldots, A_{r,n+r} \end{vmatrix} ;$$

тогда

$$\psi_k(X_{N+r})\,E = A\begin{vmatrix} A_{1,n+1}, \ldots, A_{r-1,n+1}, \psi_k(X_{n+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1,n+r}, \ldots, A_{r-1,n+r}, \psi_k(X_{n+r}) \end{vmatrix}.$$

Выбрав k так, чтобы $\psi_k(X_{N+r}) \neq 0$, мы видим, что (для $n \to \infty$)

$$E = O(\psi(X_{n+1})\,.\,X_{n+2}\ldots X_{n+r}) = O(X_{n+1}^{\varphi})\,, \tag{76}$$

где [см. (61)]

$$\varphi = \mu_{n+1}\left(-1 + \frac{\varrho}{\mu}\left(1 + \frac{\lambda\varrho}{\mu} + \ldots + \left(\frac{\lambda\varrho}{\mu}\right)^{r-2}\right)\right) = \mu_{n+1}\Phi\,; \quad \text{но } \mu_{n+1} > \mu\,,$$

$$\Phi < \Phi_0 = -1 + \frac{1}{\lambda - \mu}\left(\frac{\varrho\lambda}{\mu}\right)^{r-1} < 0$$

[см. (54)]; итак, $\varphi < \mu\Phi_0 < 0$. Так как E — целое число, то из (76) следует $E = 0$ для больших n ($n \geq \nu$). Значит: Если $n \geq \nu$, то существуют целые числа $B_1, \ldots, B_r$ такие, что

$$\left.\begin{aligned} B_1A_{i,n+1} + \ldots + B_rA_{i,n+r} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,, \\ |B_1| + \ldots + |B_r| > 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Тогда из (75) вытекает

$$B_1\psi_k(X_{n+1}) + \ldots + B_r\psi_k(X_{n+r}) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{r}\Theta_{k,j}(B_1x_{j,n+1} + \ldots + B_rx_{j,n+r}) + (B_1x_{r+k,n+1} + \ldots + B_rx_{r+k,n+r}) = 0 \tag{78}$$

для $k = 1, 2, \ldots, s$. Но матрица Θ невырожденна, значит, из (78) следует

$$B_1x_{j,n+1} + \ldots + B_rx_{j,n+r} = 0 \quad (j = 1, \ldots, r)\,,$$

что противоречит неравенствам в (74) и (77).

§ 3. Доказательство теоремы 2.

Пусть $r > 1$, $m > 2$, r — целое число. Построим две последовательности целых положительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad q_{-r+1}, q_{-r+2}, \ldots, q_{-1}, q_0, q_1, q_2, \ldots$$

следующим образом:

$$q_{-r+1} = q_{-r+2} = \ldots = q_{-1} = q_0 = q_1 = \ldots = q_r = a_1 = a_2 = \ldots$$
$$\ldots = a_r = 1\,;$$

$$q_j = a_jq_{j-r} + q_{j-2r} \quad \text{для} \quad j > r\,; \tag{A}$$

$$q_{j-1}^m + q_{j-2r} \leq q_j < q_{j-1}^m + q_{j-2r} + q_{j-1}q_{j-2}q_{j-3}\ldots q_{j-r} \quad \text{для} \quad j > r\,; \tag{B}$$

числа $q_j, q_{j-1}, q_{j-2}, \ldots, q_{j-r}$ попарно просты для $j > 0$; (C)

$$q_{j-1}^m \leqq q_j \quad \text{для} \quad j > -r + 1 \, . \tag{D}$$

Существование таких последовательностей мы легко докажем полной индукцией. Действительно, (C), (D) выполнены для $j \leqq r$. Итак, предположим, что $k > r$ и что (A), (B), (C), (D) выполнены для $j < k$.

Определим q_k так, чтобы $q_k \equiv q_{k-2r} \pmod{q_{k-r}}$, $q_k \equiv 1 \pmod{q_{k-1}q_{k-2} \cdots \cdots q_{k-r+1}}$,

$$q_{k-1}^m + q_{k-2r} \leqq q_k < q_{k-1}^m + q_{k-2r} + q_{k-1}q_{k-2} \cdots q_{k-r} ;$$

это возможно, так как $(q_{k-r}, q_{k-1}q_{k-2} \cdots q_{k-r+1}) = 1$. Ясно, что (B), (D) будут выполнены для $j = k$. Далее $(q_k, q_{k-r}) = (q_{k-2r}, q_{k-r}) = 1$ итак выполнено и (C) для $j = k$. Наконец, имеем $q_k = a_k q_{k-r} + q_{k-2r}$, где a_k — целое и, ввиду $q_{k-2r} < q_k$, положительное число. Значит, также и условие (A) выполнено для $j = k$.

Из $m > 2$ следует

$$m^r - 1 = (m-1)\sum_{i=0}^{r-1} m^i > 1 + m + \ldots + m^{r-1} \, . \tag{79}$$

(B) дает

$$1 + \frac{q_{j-2r}}{q_{j-1}^m} \leqq \frac{q_j}{q_{j-1}^m} < 1 + \frac{q_{j-2r}}{q_{j-1}^m} + \frac{q_{j-1}q_{j-2} \cdots q_{j-r}}{q_{j-1}^m} ; \tag{80}$$

но из (D) вытекает неравенство

$$q_{j-1}q_{j-2} \cdots q_{j-r} \leqq q_{j-1}^{1 + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m^{r-1}}}$$

и из (79) следует

$$1 + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m^{r-1}} < m \, .$$

Так как из (A) следует $q_j \to +\infty$ для $j \to \infty$, то из (80) получаем

$$\lim \frac{q_j}{q_{j-1}^m} = 1 \, . \tag{81}$$

Построим теперь r чисел

$$\Theta_k = \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+r} + \cfrac{1}{a_{k+2r} + \cdots}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \, .$$

Ясно, что $q_k, q_{k+r}, q_{k+2r}, q_{k+3r}, \ldots$ являются знаменателями подходящих дробей числа Θ_k; читатели этих дробей обозначим через $p_k, p_{k+r}, p_{k+2r}, \ldots$ Известно, что

$$\frac{1}{q_{k+(j+1)r} + q_{k+jr}} < |q_{k+jr}\Theta_k - p_{k+jr}| < \frac{1}{q_{k+(j+1)r}} \, ,$$

откуда для $j \to +\infty$

$$|q_{k+jr}\Theta_k - p_{k+jr}| \sim \frac{1}{q_{k+(j+1)r}}\,.^{3)} \tag{82}$$

Ради упрощения обозначений положим $\Theta_k = \Theta_{k+r} = \Theta_{k+2r} = \ldots$, так что (82) может быть записана [см. также (81)] в следующем виде:

$$|q_j\Theta_j - p_j| \sim q_{j+r}^{-1} \sim q_j^{-m^r} \tag{83}$$

Заметим, что система $\Theta_j, \Theta_{j+1}, \ldots, \Theta_{j+r-1}$, несмотря на порядок, совпадает с системой $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r$.

I. Положим (для $t \geqq 1$)

$$\psi(t) = \min_{\substack{0<\max|x_i|\leqq t\\ 1\leqq i\leqq r}} |\Theta_1 x_1 + \ldots + \Theta_r x_r + x_0|\,.$$

К заданному t найдем j так, чтобы

$$q_j \leqq t < q_{j+1} \sim q_j^m\,. \tag{84}$$

Из (83) следует[4])

$$\psi(t) \leqq (1 + o(1))\, q_j^{-m^r} < (1 + o(1))\, t^{-m^{r-1}}\,.$$

Отсюда

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{m^{r-1}}\psi(t) \leqq 1 \tag{85}$$

и, с другой стороны (полагая $t = q_j$),

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{m^r}\psi(t) \leqq 1\,. \tag{86}$$

Пусть теперь $0 < \varepsilon < 1$; предположим, что (для нашего t)

$$\psi(t) < (1 - \varepsilon)\, q_j^{-m^r} \tag{87}$$

и приведем это предположение к противоречию, если j будет достаточно большим. По предположению существуют целые $x_0, x_1, \ldots, x_r$ так, что $0 < \max(|x_0|, \ldots, |x_{r-1}|) < q_{j+1}$,

$$|x_0\Theta_j + x_1\Theta_{j+1} + \ldots + x_{r-1}\Theta_{j+r-1} - x_r| < (1 - \varepsilon)\, q_j^{-m^r}\,. \tag{88}$$

Пусть x_i — последнее из чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$, которое не равно нулю, так что (88) принимает вид

$$|x_0\Theta_j + \ldots + x_i\Theta_{j+i} - x_r| < (1 - \varepsilon)\, q_j^{-m^r}\,.$$

Из (83) следует, что

$$\left|x_0\frac{p_j}{q_j} + \ldots + x_i\frac{p_{j+i}}{q_{j+i}} - x_r\right| < (1 - \varepsilon)\, q_j^{-m^r} + (1 + o(1))\frac{rq_{j+1}}{q_jq_{j+r}}\,. \tag{89}$$

---

[3]) Пишем $a_j \sim b_j$ вместо $\lim a_j : b_j = 1$.

[4]) Знак $o(1)$ относится к предельному переходу $t \to +\infty$.

Но

$$\frac{q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-1}}{q_j^{m^r}} \sim q_j^{1+m+m^2+\ldots+m^{r-1}-m^r} = o(1) ,$$

так как показатель, ввиду (79), отрицателен; аналогично,

$$q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-1} \cdot \frac{q_{j+1}}{q_j q_{j+r}} \sim q_{j+1}^{1+\sum\limits_{k=0}^{r-2} m^k - m^{r-1}} = o(1) .$$

Итак, для больших j, первый член в (89) меньше $\dfrac{1}{q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-1}}$ и поэтому равен нулю. Ввиду (C) это значит, что x_i делится на q_{j+i}; но это невозможно, если $i > 0$ (так как $0 < |x_i| < q_{j+1}$). Итак, обязательно $i = 0$ и

$$\left.\begin{aligned} x_0 p_j - x_r q_j &= 0 , \\ x_0 = u q_j , \quad x_r = u p_j \quad (u &\neq 0 \text{ целое}) , \\ |x_0 \Theta_j - x_r| = |u|\, |q_j \Theta_j - p_j| &> (1-\varepsilon)\, q_j^{-m^r} \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

[см. (83)] для больших j, что противоречит (88). Итак, для $q_j \leqq t < q_{j+1}$ и для больших j мы имеем

$$\psi(t) \geqq (1-\varepsilon)\, q_j^{-m^r} \geqq (1-\varepsilon)\, t^{-m^r} .$$

Следовательно,

$$\liminf_{t \to +\infty} t^{m^r} \psi(t) \geqq 1 , \tag{91}$$

и, полагая $t = q_{j+1} - 1$, получаем $\psi(t) > (1-2\varepsilon)\, q_{j+1}^{-m^{r-1}}$; итак,

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{m^{r-1}} \psi(t) \geqq 1 . \tag{92}$$

Из (85), (86), (91), (92) следует (8).

Заметим еще, что вследствие (92) система $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ линейно независима.

II. Пусть теперь

$$\psi(t) = \min_{0 < x_0 \leqq t} \max_{1 \leqq i \leqq r} |x_0 \Theta_i - x_i| .$$

Полагаем

$$\alpha_0 = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} - \ldots - \frac{1}{m^{r-1}} > 0 ,$$

$$\beta_0 = \frac{m^r - m^{r-1} - \ldots - m}{m^{r-1} + m^{r-2} + \ldots + 1} .$$

Заметим сначала, что [см. (83)]

$$\max_{0 \leqq k \leqq r-1} \left| q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-1} \left(\Theta_{j+k} - \frac{p_{j+k}}{q_{j+k}} \right) \right| \sim \max_{0 \leqq k \leqq r-1} \frac{q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-1}}{q_{j+k} q_{j+k+r}} = \tag{93}$$

$$= \frac{q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-1}}{q_j q_{j+r}} \sim (q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-1})^{-\beta_0} ,$$

откуда следует

$$\liminf_{t \to +\infty} t^{\beta_0} \psi(t) \leqq 1 . \tag{94}$$

Пусть теперь

$$q_{j+r-1} \leqq t < q_{j+r} . \tag{95}$$

Здесь возможны два случая:

$$q_{j+r-1} \leqq t < q_{j+r-1} q_{j+r-2} \cdots q_j , \tag{96}$$

$$q_{j+r-1} q_{j+r-2} \cdots q_j \leqq t < q_{j+r} . \tag{97}$$

Заметим, что для больших j

$$q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-2} = (1 + o(1))\, q_j^{1+m+\ldots+m^{r-2}} < \tfrac{1}{2} q_j^{m^{r-1}} < q_{j+r-1} .$$

В случае (96) существует такое целое число v и целое число z, что

$$0 < v \leqq \frac{t}{q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-2}} , \tag{98}$$

$$|v q_{j+r-2} q_{j+r-3} \cdots q_j \Theta_{j+r-1} - z| < \frac{q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-2}}{t} ; \tag{99}$$

для $k = 0, 1, \ldots, r-2$ будет

$$\left| v q_{j+r-2} q_{j+r-3} \cdots q_j \left(\Theta_{j+k} - \frac{p_{j+k}}{q_{j+k}} \right) \right| <$$

$$< (1 + o(1))\, v q_{j+r-2} q_{j+r-3} \cdots q_j \cdot \frac{1}{q_j q_{j+r}} < (1 + o(1)) \frac{t}{q_j q_{j+r}} .$$

Здесь легко находим, что

$$\frac{q_j \cdots q_{j+r-2}}{t} < (1 + o(1))\, t^{-\alpha_0} , \tag{101}$$

$$\frac{t}{q_j q_{j+r}} < (1 + o(1))\, t q_j^{-m^{r-1}} < (1 + o(1)) t^{-\alpha_1} , \tag{102}$$

где

$$\alpha_1 = -1 + \frac{m^r + 1}{1 + m + \ldots + m^{r-1}} =$$

$$= \frac{m^r - m^{r-1} - \ldots - m}{1 + m + \ldots + m^{r-1}} > \frac{m^{r-1} - m^{r-2} - \ldots - 1}{m^{r-1}} = \alpha_0$$

[это следует из (79)]. Из (98) —(102) следует

$$\psi(t) < (1 + o(1))\, t^{-\alpha_0} \tag{103}$$

[если (96) имеем место].

В случае (97) получим из (93)

$$\psi(t) < (1 + o(1))(q_j q_{j+1} \cdots q_{j+r-1})^{-\beta_0} < (1 + o(1))\, t^{-\beta_0 \frac{1+m+\ldots+m^{r-1}}{m^r}} =$$

$$= (1 + o(1))\, t^{-\alpha_0} . \tag{104}$$

(103) и (104) дают

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\alpha_0}\psi(t) \leqq 1 . \tag{105}$$

Чтобы получить нижнюю оценку для (105), возьмем $0 < \varepsilon < 1$ и допустим, что

$$\psi(q_{j+r}(1-\varepsilon)) < q_{j+r}^{-\alpha_0}(1-\varepsilon) . \tag{106}$$

Значит, существуют целые числа $x_0, x_1, \ldots, x_r$ так, что

$$0 < x_0 \leqq q_{j+r}(1-\varepsilon) , \quad |x_0\Theta_{j+k} - x_{k+1}| < q_{j+r}^{-\alpha_0}(1-\varepsilon) \tag{107}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, r-1) .$$

Отсюда

$$\left| x_0 \frac{p_{j+k}}{q_{j+k}} - x_{k+1} \right| < q_{j+r}^{-\alpha_0} + \frac{(1-\frac{1}{2}\varepsilon)\, q_{j+r}}{q_{j+k}q_{j+k+r}} . \tag{108}$$

Но

$$q_{j+r}^{\alpha_0} > \frac{2}{\varepsilon} q_{j+r-1} \geqq \frac{2}{\varepsilon} q_{j+k} \tag{109}$$

для больших j, если предположить, что $\alpha_0 m > 1$, т. е.

$$m^{r-1} > 2m^{r-2} + \sum_{k=0}^{r-3} m^k \tag{110}$$

(если $r = 2$, то это неравенство справедливо для всех $m > 2$).

Из (108), (109) следует (так как $q_{j+r} \leqq q_{j+k+r}$)

$$\left| x_0 \frac{p_{j+k}}{q_{j+k}} - x_{k+1} \right| < \frac{1}{q_{j+k}} ;$$

итак, $x_0p_{j+k} - x_{k+1}q_{j+k} = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, r-1$. Отсюда

$$x_0 = uq_jq_{j+1} \cdots q_{j+r-1} , \tag{111}$$

$$x_{k+1} = uq_jq_{j+1} \cdots q_{j+r-1} \cdot \frac{p_{j+k}}{q_{j+k}} \tag{112}$$

($u > 0$, u — целое),

$$|x_0\Theta_j - x_1| = uq_jq_{j+1} \cdots q_{j+r-1} \left| \Theta_j - \frac{p_j}{q_j} \right| >$$
$$> (1-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\, q_{j+1} \cdots q_{j+r-1} q_{j+r}^{-1} > (1-\varepsilon)\, q_{j+r}^{-\alpha_0} ,$$

что противоречит (107). Итак, (106) невозможно для больших j, откуда

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{\alpha_0}\psi(t) \geqq 1 , \tag{113}$$

если m удовлетворяет неравенству (110).

Предположим теперь, что $\beta_0 > 1$, т. е. что

$$m^r > 1 + 2\sum_{k=1}^{r-1} m^k \tag{114}$$

(это неравенство влечет за собой (110)) и покажем, что неравенство

$$\psi(t) < (1 - \varepsilon)\, t^{-\beta_0} \tag{115}$$

($0 < \varepsilon < 1$) невозможно, если t достаточно велико. Допустим, что (115) имеет место, и найдем j так, чтобы

$$(1 - \varepsilon)\, q_{j+r-1} \leqq t < (1 - \varepsilon)\, q_{j+r}\,.$$

Тогда для $k = 0, 1, \ldots, r - 1$ имеем

$$\begin{gathered} |x_0\Theta_{j+k} - x_{k+1}| < (1 - \varepsilon)\, t^{-\beta_0}\,, \quad 0 < x_0 \leqq t\,, \\ \left| x_0 \frac{p_{j+k}}{q_{j+k}} - x_{k+1} \right| < t^{-\beta_0} + \frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{t}{q_{j+k}q_{j+k+r}}\,; \end{gathered} \tag{116}$$

но

$$\frac{(1 - \frac{1}{2}\varepsilon)\, t}{(1 - \varepsilon)\, q_{j+k}q_{j+k+r}} < \frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon}{q_{j+k}}\,, \qquad t^{-\beta_0} \leqq (1 - \varepsilon)^{-\beta_0}\, q_{j+r-1}^{-\beta_0} < \tfrac{1}{2}\varepsilon q_{j+k}^{-1}$$

для достаточно больших значений j. Итак, из (116) вытекает

$$\left| x_0 \frac{p_{j+k}}{q_{j+k}} - x_{k+1} \right| < \frac{1}{q_{j+k}}\,,$$

т. е. $x_0 p_{j+k} - x_{k+1} q_{j+k} = 0$, и мы опять получаем соотношения (111), (112), из которых вытекает

$$|x_0\Theta_j - x_1| > (1 + o(1))\, q_{j+1} \ldots q_{j+r-1} q_{j+r}^{-1} = (1 + o(1))\, q_{j+r}^{-\alpha_0}\,. \tag{117}$$

Но $t \geqq x_0 \geqq q_j q_{j+1} \ldots q_{j+r-1} > (1 + o(1))\, q_{j+r}^{\gamma_0}$, где

$$\gamma_0 = \frac{1 + m + \ldots + m^{r-1}}{m^r}\,.$$

Отсюда и из (117) следует

$$\psi(t) > (1 + o(1))\, t^{-\frac{\alpha_0}{\gamma_0}} = (1 + o(1))\, t^{-\beta_0}\,,$$

что — для больших t — противоречит неравенству (115). Следовательно,

$$\liminf_{t \to +\infty} t^{\beta_0}\psi(t) \geqq 1\,, \tag{118}$$

если (114) имеет место. (94), (105), (113), (118) дают утверждения теоремы 2,II, если только писать s вместо r.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. Apfelbeck:* К принципу переноса Хинчина, Чехословацкий матем. журнал *1 (76)*, 141—171 (1952).

[2] *V. Jarník:* Une remarque sur les approximations diophantiennes linéaires, Acta scientiarum mathem. Szeged, *12* (pars *B*), 82—86 (1949).

[3] *А. Я. Хинчин:* Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Rendiconti Circ. mat. Palermo *50*, 170—195 (1926).

Résumé

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES

VOJTĚCH JARNÍK, Praha

(Reçu le 3 mai 1954.)

Soit Θ une matrice de rs nombres réels Θ_{ji} $(j = 1, \ldots, s; i = 1, \ldots, r)$ (voir (1)). Pour $t \geqq 1$, définissons $\psi(t)$ par (2), où l'on prend la valeur minimum pour tous les systèmes $x_1, \ldots, x_{r+s}$ de nombres entiers pour lesquels on a $0 < \max(|x_1|, \ldots, |x_r|) \leqq t$. Soit $\alpha = \alpha(\Theta)$ (resp. $\beta = \beta(\Theta)$) la borne supérieure de tous les nombres γ, pour lesquels on a $\limsup\limits_{t \to +\infty} t^\gamma \psi(t) < +\infty$ resp. $\liminf\limits_{t \to +\infty} t^\gamma \psi(t) < +\infty$. On a $\frac{r}{s} \leqq \alpha \leqq \beta \leqq +\infty$. Laissons de côté le cas où $\psi(t) = 0$ à partir d'une certaine valeur de t. Alors on sait encore que pour $r = 1$ on a $\alpha \leqq 1$.

Le but de cet article est de donner une borne inférieure de β en fonction de α. On trouve:

Si $r = 2$, $s \geqq 1$, $\alpha < +\infty$, alors $\beta \geqq \alpha(\alpha - 1)$.[1]

Si $r > 2$, $s \geqq 1$, $(5r^2)^{r-1} < \alpha < +\infty$, alors $\beta \geqq \alpha^{\frac{r}{r-1}} - 3\alpha$.

Le terme principal du second membre est $\alpha^{\frac{r}{r-1}}$ (pour $\alpha \to +\infty$) et ce terme est définitif, puisque, à chaque $a > 2^{r-1}$, il existe une matrice Θ telle que $\alpha = a$, $\beta = a^{\frac{r}{r-1}}$; d'une manière plus précise,

$$\limsup_{t \to +\infty} t^a \psi(t) = 1, \quad \liminf_{t \to +\infty} t^{a^{\frac{r}{r-1}}} \psi(t) = 1 . \tag{*}$$

Ce résultat contient un théorème d'existence pour le cas $r = 2$, $s = 1$: dans ce cas on a $2 \leqq \alpha \leqq +\infty$ et l'on voit, d'après (*), que α peut prendre, en effet, toutes les valeurs de cet intervalle (l'existence de matrices $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ telles que $\alpha = 2$ ou $\alpha = +\infty$ est déjà connue).

On a des résultats analogues pour $r = 1$, $s \geqq 2$:

Soit $r = 1$, $s \geqq 2$. Supposons que Θ contienne au moins deux nombres linéairement indépendants. Alors

$$\beta \geqq \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \text{ pour } \alpha < 1, \ \beta = +\infty \text{ pour } \alpha = 1.\text{[1]} \tag{**}$$

---

[1]) Le texte russe contient un théorème encore un peu plus précis. Pour le cas $r = 2$, $s = 1$ voir aussi *Jarník* [2].

D'autre part: soit $r = 1$, $s \geqq 2$, $m > 2$, $m^{s-1} > m^{s-2} + \sum_{k=0}^{s-2} m^k$ (si $s = 2$, cette inégalité est valable pour chaque $m > 2$). Posons $\alpha_0 = 1 - \frac{1}{m} - \ldots - \frac{1}{m^{s-1}}$, $\beta_0 = m \frac{m^{s-1} - m^{s-2} - \ldots - 1}{m^{s-1} + m^{s-2} + \ldots + 1}$.

Alors il existe une matrice Θ, composée de s nombres linéairement indépendants, pour laquelle $\alpha = \alpha_0$, plus précisément

$$\limsup_{t \to +\infty} t^{\alpha_0} \psi(t) = 1 .$$

Si m est aussi grand que $m^s > 1 + 2 \sum_{k=1}^{s-1} m^k$, on aura aussi $\beta = \beta_0$, plus précisément

$$\liminf_{t \to +\infty} t^{\beta_0} \psi(t) = 1 .$$

Pour comparer ce résultat avec (**), remarquons que $\beta_0 = \frac{\alpha_0^2}{1 - \alpha_0} + O(1)$ pour $m \to +\infty$, c'est-à-dire pour $\alpha_0 \to 1$.

Conséquence: Si $r = 1$, $s = 2$, $\frac{1}{2} \leqq \alpha_0 \leqq 1$, alors il existe une matrice Θ, composée de deux nombres linéairement indépendants, pour laquelle $\alpha = \alpha_0$ (les cas $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_0 = 1$ sont déjà connus).