

Mihail Benado

Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. I

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 2, 105–129

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100103>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1954

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

LES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS ET LE THÉORÈME
DE RAFFINEMENT DE SCHREIER, I

MIHAIL BENADO, Bucarest.

(Reçu le 6 février 1953.)

Dans ce mémoire il s'agit de l'extension du théorème de Schreier aux ensembles partiellement ordonnés qui satisfont à une certaine condition.

On y donne aussi quelques applications du théorème de Schreier.

INTRODUCTION

1. On doit à OTTO SCHREIER [1] le théorème suivant qui joue, comme on sait, un rôle fondamental dans la théorie des chaînes normales du groupe abstrait \mathfrak{G} :

Deux chaînes normales (finies) aux extrémités communes $\mathfrak{G} \supseteq F$

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{G} \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_{i-1} \supseteq G_i \supseteq \dots \supseteq G_{r-1} \supseteq G_r = F \\ \mathfrak{G} \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_{j-1} \supseteq H_j \supseteq \dots \supseteq H_{s-1} \supseteq H_s = F \end{array} \right\} \quad (I)$$

où F est diviseur normal dans \mathfrak{G} , possèdent des raffinements isomorphes.

C'est H. ZASSENHAUS [2] qui, le premier, trouva les formules explicites des raffinements requis*). A. KUROSC [3], trouva les mêmes formules dans le cas des chaînes normales infinies („systèmes normaux“ dans la terminologie de Kurosch, l. c.) munies d'un bon ordre ascendant.

2. Mais, ce fut seulement la théorie des structures qui permît aux algébristes l'axiomatisation du théorème de Schreier. Parmi les nombreuses contributions à ce sujet, je citerai celles de A. Kurosch [4], O. ORE [5, 6], A. HALANAY [7], A. I. OUZKOV [8], E. GEORGE [9], V. KOŘÍNEK [10], A. H. LIPSCHITZ [13] et D. BARBILIAN [14]. Parmi ces contributions, celle de Ouzkov est d'une importance particulière, précisément parce que c'est là que pour la première fois ont été démontrées des conditions nécessaires et suffisantes afin que le

*) Il importe de remarquer que la démonstration de Zassenhaus (l. c.) du théorème de Schreier, contient en puissance une certaine généralisation de ce théorème; en effet, si l'on y remplace la supposition „ F diviseur normal de \mathfrak{G} “ par la supposition moins exigeante „ F diviseur normal de G_{r-1} et de H_{s-1} “ (voir les (I)), le théorème reste vrai. Voir aussi, à ce sujet, les mémoires [4, 7].

théorème de raffinement de Schreier soit vrai dans une structure sous une certaine forme très générale.

3. Reprenant les recherches de Ore [6], d'Ouzkov (l. c.) et tenant compte de la distinction très importante, due à Kořínek (l. c.), entre les deux parties du théorème de raffinement de Schreier, je suis parvenu tout récemment [16, 17] à élargir encore les résultats de ces auteurs par des méthodes se rattachant à la théorie des connexions monotones.

4. Or, il m'est apparu que maints raisonnements aboutissant aux diverses formes du théorème de raffinement de Schreier, ne devaient leur validité qu'aux seules propriétés formelles de certains systèmes de connexions monotones attachées à la structure; ces propriétés ne requièrent, d'ailleurs, que les seuls termes de l'ordre partiel, c'est-à-dire que pour assurer la validité du théorème de Schreier dans un ensemble partiellement ordonné P , il n'est point nécessaire (et, en général, il n'est pas même suffisant) que P soit une structure mais, il suffit que certaines conditions de „connexité“ y soient vérifiées, à savoir:

Supposition H. *Nous dirons qu'un ensemble partiellement ordonné P satisfait à la supposition H, lorsqu'il y existe un élément ω_0 tel que pour tout quadrilatère $(\Omega, \omega_0; a, b)$ on puisse toujours trouver un sousquadrilatère $(M, d; a, b)$ de façon qu'on ait les isomorphismes (au sens de l'ordre partiel [19]) $\eta, \tilde{\eta}$ suivants*

$$M/a \leftrightarrow b/d (\eta), \quad M/b \leftrightarrow a/d (\tilde{\eta}) .$$

5. Le principal but de la première partie de notre mémoire est précisément de faire voir que cette supposition **H** est en effet suffisante pour assurer la validité du théorème de raffinement de Schreier dans un ensemble partiellement ordonné (arbitraire).

On y trouve aussi quelques simples applications à la théorie des W -structures (M. WARD [18]) et à la théorie de la divisibilité; mais, ce n'est que dans la seconde partie de ce mémoire qu'on pourra surtout se rendre compte de la portée de cette généralisation du théorème de Schreier.

§ 1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS GÉNÉRALES

Nous allons d'abord rappeler les définitions suivantes:

1.1. Ensemble quotient. Soit P un ensemble partiellement ordonné [19], et soient $a, b \in P$ tels que $a \geq b$, J'appelle ensemble quotient ou simplement quotient a/b , l'ensemble de tous les éléments $x \in P$ tels que $a \geq x \geq b$. Si l'on a $a > b$, le quotient est véritable; et tout quotient de la forme a/a sera dit unitaire. Enfin, je dis qu'un quotient a/b est premier, lorsqu'il est véritable ($a > b$) et lorsqu'il n'existe aucun élément $x \in P$ tel que $a > x > b$.

1.2. Chaînes. Je dis qu'un sous-ensemble C d'un ensemble partiellement ordonné P , est une chaîne (ou ensemble ordonné), lorsque pour tout couple

$a, b \in C$ on a $a \geq b$ ou $a \leq b$. Lorsqu'une chaîne est finie, on peut l'écrire simplement

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{i-1} \geq a_i \geq \dots \geq a_{r-1} \geq a_r, \quad r \geq 1. \quad (C)$$

Les quotients a_{i-1}/a_i , $i = 1, 2, \dots, r$, sont les quotients ou facteurs de la chaîne; le nombre r , en est la longueur (apparente)¹⁾ et les éléments a_0, a_r en sont les extrémités.

Nous ne considérerons dans ce travail que des chaînes finies de sorte que je dirai toujours „chaîne“ tout court, au lieu de „chaîne finie“.

Je dis qu'un ensemble partiellement ordonné est *archimédien*₁ resp. *archimédien*₂ s'il satisfait à la condition des chaînes descendantes^{1bis} resp. ascendantes^{1bis}; et je dis qu'un ensemble partiellement ordonné est *archimédien* s'il est à la fois archimédien₁ et archimédien₂.

J'appelle *raffinement de la chaîne C*, toute chaîne C' , $a'_0 \geq a'_1 \geq \dots \geq a'_s$ telle que $a_0 = a'_0$, $a_r = a'_s$ et telle que tout $a_i \in C$ soit un $a'_j \in C'$.

Une chaîne dont tous les quotients sont premiers, sera dite *série*.

Les définitions que je vais maintenant poser, sont plus spécifiquement liées aux recherches du présent mémoire.

1.3. Quadrilatère de Dedekind. Soit P un ensemble partiellement ordonné; j'appelle *quadrilatère de Dedekind* ou simplement *quadrilatère* toute paire de chaînes de longueur apparente égale à 2, aux extrémités communes

$$\Omega \geq a \geq \omega, \quad \Omega \geq b \geq \omega \quad (\Omega, \omega, a, b \in P). \quad (Q)$$

Les quotients des chaînes (Q) sont les côtes du quadrilatère; ces côtés, sont deux à deux opposés, savoir Ω/a à b/ω et Ω/b à a/ω .

Pour des raisons d'abréviation, je vais utiliser le symbole $(\Omega, \omega; a, b)$ comme équivalent des relations (Q); c'est à dire que $(\Omega, \omega; a, b)$ est le symbole d'un quadrilatère de Dedekind.

Je dis qu'un quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$ est à côtés opposés *semblables*, lorsque l'une des quatre combinaisons suivantes

1. $\Omega > a, b > \omega; \Omega > b, a > \omega,$
2. $\Omega > a, b > \omega; \Omega = b, a = \omega,$
3. $\Omega = a, b = \omega; \Omega > b, a > \omega,$
4. $\Omega = a, b = \omega; \Omega = b, a = \omega,$

est vérifiée.

Ainsi, par exemple, le quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$ où l'on a $a \text{ non } \geq b$ et $a \text{ non } \leq b$, est un quadrilatère à côtés opposés semblables car, on a évidemment $\Omega > a, b > \omega, \Omega > b, a > \omega$.

J'appelle *sousquadrilatère* d'un quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$, un quadrilatère $(M, d; a, b)$ tel que $M \leq \Omega, d \geq \omega$; et je dis que $(\Omega, \omega; a, b)$ est *irréductible*

¹⁾ Lorsque tous les quotients de la chaîne C sont véritables, on dit que le nombre r est la longueur *véritable* ou, simplement, la longueur de la chaîne.

^{1bis)} En anglais „descending chain condition“ resp. „ascending chain condition“; voir [19].

si les conditions $\Omega \geq \Omega' \geq a$, $\Omega \geq \Omega' \geq b$ et $\omega \leq \omega' \leq a$, $\omega \leq \omega' \leq b$ entraînent (simultanément) $\Omega' = \Omega$ et $\omega' = \omega$; ainsi, par exemple, S étant une structure, le quadrilatère $(a \vee b, a \wedge b; a, b)$ y est toujours irréductible. Cette notion de quadrilatère irréductible va jouer dans la seconde partie de ce mémoire un rôle primordial.

1.4. Connexions monotones. Soient P, P' deux ensembles (distincts ou non) partiellement ordonnés arbitraires. Je dis que ces ensembles sont reliés par une connexion monotone s'il y existe une opération χ qui associe à tout $p \in P$ une partie non vide $\chi(p)$ de P' et une opération φ qui associe à tout $p' \in P'$ une partie non vide $\varphi(p')$ de P , de telle façon que ces opérations χ, φ satisfassent aux axiomes suivants:

A. Pour chaque paire $(p_1 \geq p_2) \in P$ et chaque $q'_2 \in \chi(p_2)$ il existe au moins un $q'_1 \in \chi(p_1)$ tel qu'on ait $q'_1 \geq q'_2$. Pour chaque paire $(p'_1 \geq p'_2) \in P'$ et chaque $q_1 \in \varphi(p'_1)$ il existe au moins $q_2 \in \varphi(p'_2)$ tel qu'on ait $q_1 \geq q_2$.

B. Pour chaque $p \in P$ et chaque $q' \in \chi(p)$ il y a au moins un $\bar{p} \in \varphi(q')$ tel que $\bar{p} \leq p$; pour chaque $p' \in P'$ et chaque $q \in \varphi(p')$ il y a au moins un $\bar{p}' \in \chi(q)$ tel que $\bar{p}' \geq p'$.

Supposons que les opérations χ, φ soient univoques, c'est-à-dire que, quels que soient $p \in P$ et $p' \in P'$, chacun des ensembles $\chi(p)$ et $\varphi(p')$ n'ait toujours qu'un seul élément; alors, les définitions **A + B** ci-dessus se laissent simplifier comme suit:

A₀. Pour chaque paire $(p_1 \geq p_2) \in P$ on a $\chi(p_1) \geq \chi(p_2)$; de même, pour chaque paire $(p'_1 \geq p'_2) \in P'$ on a $\varphi(p'_1) \geq \varphi(p'_2)$.

B₀. Pour chaque $p \in P$ on a $\varphi\chi(p) \leq p$; pour chaque $p' \in P'$ on a $\chi\varphi(p') \geq p'$.

Ce sont ces dernières correspondances que j'ai appelées ailleurs [15], connexions monotones *miates*; quant aux connexions monotones *de première et de seconde espèce* [15], elles n'ont, vraisemblablement, qu'un intérêt purement formel et, c'est pourquoi j'ai omis de les mentionner ici.

Je vais indiquer par la notation

$$P \rightleftarrows P' \text{ mod } \chi, \varphi \tag{1}$$

le fait que les ensembles partiellement ordonnés P, P' sont reliés par une connexion monotone moyennant les opérations (en général, multivoques) χ, φ . La relation (1) n'est pas, en général, symétrique par rapport à P et P' (même dans le cas où χ, φ sont univoques).

Je dis que la connexion monotone (1) est *parfaite dans P* et j'écris

$$P \rightleftarrows P' \text{ mod } \chi, \varphi, \tag{1'}$$

lorsque pour chaque $p \in P$ et chaque $q' \in \chi(p)$, on peut trouver, parmi tous les $\bar{p} \in \varphi(q')$ tels que $\bar{p} \leq p$, au moins un, soit \bar{p}_0 , tel que $\bar{p}_0 = p$.

Pareillement, je dis que la connexion monotone (1) est *parfaite dans P'*, et j'écris

$$P \rightleftarrows P' \text{ mod } \chi, \varphi, \tag{1''}$$

lorsque pour chaque $p' \in P'$ et chaque $q \in \varphi(p')$, on peut trouver, parmi tous les $\bar{p}' \in \chi(q)$ tels que $\bar{p}' \geq p'$, au moins un, soit \bar{p}'_0 , tel que $\bar{p}'_0 = p'$.

Enfin, je dis que la connexion monotone (1) est *parfaite*, si elle est à la fois parfaite dans P et dans P' et j'écris dans ce cas

$$P \leftrightarrow P' \text{ mod } \chi, \varphi . \quad (2)$$

Remarquons que dans le cas où les opérations χ, φ sont univoques, cette relation (2) signifie qu'il y a isomorphisme entre les deux ensembles partiellement ordonnés P et P' .

1.5. Composition des connexions monotones. Soient P, P', P'' trois ensembles partiellement ordonnés (distincts ou non) et supposons qu'on ait les relations

$$P \rightleftarrows P' \text{ mod } \chi, \varphi; \quad P' \rightleftarrows P'' \text{ mod } \chi', \varphi' . \quad (3)$$

Composer les connexions (3) c'est, par définition, instituer entre P et P'' la correspondance définie par les équations suivantes

$$\chi' \chi(p) = \sigma(p), \quad p \in P; \quad \varphi \varphi'(p'') = \tau(p''), \quad p'' \in P'' .$$

Lemme. On a $P \rightleftarrows P'' \text{ mod } \sigma, \tau$.

La vérification en est immédiate.

Remarque. Pour les propriétés générales des connexions monotones (univoques), voir mon mémoire [15].

§ 2. LES CONNEXIONS MONOTONES D'UN ENSEMBLE PARTIELLEMENT ORDONNÉ, ESPACES \mathcal{A}

Dans les deux paragraphes suivants, nous exposerons les principes d'une méthode générale pour l'étude des ensembles partiellement ordonnés (arbitraires); cette méthode, je l'ai d'ailleurs déjà utilisée dans la théorie des structures à propos du problème des décompositions du type JORDAN-HÖLDER [16, 17].

Elle consiste essentiellement en ce qu'un ensemble partiellement ordonné y est conçu comme un „espace“ dont certaines parties sont reliées par des systèmes de connexions monotones; c'est ici que la notion de quadrilatère de Dedekind viendra jouer un rôle principal.

Les propriétés d'un ensemble partiellement ordonné seront donc, dans cette théorie, les propriétés des systèmes de connexions dont il est muni, ainsi que de leurs relations mutuelles; telle propriété est, par exemple, le théorème de raffinement de Schreier (§ 3).

2.1. Espaces \mathcal{A} . Soient P un ensemble partiellement ordonné et $(\Omega, \omega; a, b)$ un de ses quadrilatères à côtés opposés semblables; nous ferons correspondre aux quotients $\Omega/a, b/\omega$ un ensemble I de paires d'opérations (χ, φ) et aux quotients $\Omega/b, a/\omega$ un ensemble \tilde{I} de paires d'opérations $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi})$ de façon que

pour toute paire $(\chi, \varphi) \in \Gamma$ et pour toute paire $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\Gamma}$ on ait respectivement (au sens des axiomes $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0, \mathbf{1}, \mathbf{4}$)

$$\Omega/a \rightleftarrows b/\omega \text{ mod } \chi, \varphi; \quad \Omega/b \rightleftarrows a/\omega \text{ mod } \tilde{\chi}, \tilde{\varphi}.^2 \quad (4)$$

Nous supposons en outre que les systèmes $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ satisfont aux conditions suivantes:

A*. Pour toute paire $(\chi, \varphi) \in \Gamma$ il existe un $p'_a \in \chi(a)$ et un $p_b \in \varphi(b)$ tels que $p'_a = \omega$ et $p_b = \Omega$.

B*. Pour toute paire $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\Gamma}$ il existe un $q'_b \in \tilde{\chi}(b)$ et un $q_a \in \tilde{\varphi}(a)$ tels que $q'_b = \omega$ et $q_a = \Omega$.

F*. Les systèmes $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ sont maximaux par rapport aux propriétés **A***, **B*** respectivement.

Dans le cas où les opérations $(\chi, \varphi), (\tilde{\chi}, \tilde{\varphi})$ sont univoques, les conditions **A*** + **B*** s'énoncent simplement:

A₀*. Pour toute paire $(\chi, \varphi) \in \Gamma_0$ on a $\chi(a) = \omega, \varphi(b) = \Omega$.

B₀*. Pour toute paire $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\Gamma}_0$ on a $\tilde{\chi}(b) = \omega, \tilde{\varphi}(a) = \Omega$.

Ici, on a désigné par Γ_0 la partie de Γ , formée par les paires d'opérations univoques; de même pour $\tilde{\Gamma}_0$ par rapport à $\tilde{\Gamma}$.

Un ensemble partiellement ordonné P dont tous les quadrilatères $(\Omega, \omega; a, b)$ à côtés opposés semblables ont été munis de systèmes de connexions monotones $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ satisfaisant à (4) et aux suppositions **A*** + **B*** + **F***, sera dit un espace Δ .

2.11. A ce point, je fais remarquer qu'en vertu de la supposition **F***, les systèmes $\Gamma_0, \tilde{\Gamma}_0$ (a fortiori $\Gamma, \tilde{\Gamma}$) ne sont jamais vides. On peut, en effet, quel que soit le quadrilatère à côtés opposés semblables $(\Omega, \omega; a, b) \in P$, définir

$$\left. \begin{aligned} \chi_0(\Omega) = b \text{ et } \chi_0(p) = \omega \text{ pour chaque } p \text{ tel que } \Omega > p \geq a \text{ (s'il en existe),} \\ \varphi_0(\omega) = a \text{ et } \varphi_0(p') = \Omega \text{ pour chaque } p' \text{ tel que } b \geq p' > \omega \text{ (s'il en existe),} \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\chi}_0(\Omega) = a \text{ et } \tilde{\chi}_0(q) = \omega \text{ pour chaque } q \text{ tel que } \Omega > q \geq b \text{ (s'il en existe),} \\ \tilde{\varphi}_0(\omega) = b \text{ et } \tilde{\varphi}_0(q') = \Omega \text{ pour chaque } q' \text{ tel que } a \geq q' > \omega \text{ (s'il en existe).} \end{aligned} \right\} (\tilde{5})$$

On vérifie tout de suite qu'on a

$$\Omega/a \rightleftarrows b/\omega \text{ mod } \chi_0, \varphi_0; \quad \Omega/b \rightleftarrows a/\omega \text{ mod } \tilde{\chi}_0, \tilde{\varphi}_0^2$$

et que les couples $(\chi_0, \varphi_0), (\tilde{\chi}_0, \tilde{\varphi}_0)$ satisfont, en outre, aux suppositions **A₀*** et **B₀***. Les connexions monotones (univoques) déterminées par les (5), ($\tilde{5}$), je les ai appelées *connexions de Ore* associées au quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$; la raison de cette dénomination sera expliquée un peu plus loin.

Parce que les systèmes $\Gamma_0, \tilde{\Gamma}_0$ sont suffisants pour les besoins de la majeure partie de ce mémoire, ce sont ces systèmes que nous allons notamment considérer dans ce qui suit; quant aux systèmes $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ et, plus particulièrement à la

² C'est-à-dire que les paires de quotients $\Omega/a, b/\omega$ et $\Omega/b, a/\omega$ y jouent, tour à tour, le rôle de la paire P, P' dans les axiomes mentionnés.

connexion de Dedekind multivoque, bien que nous les utilisons dans ce mémoire (seconde partie) nous n'en ferons pas ici une étude détaillée.³⁾

2.2. Remarques sur les connexions de Ore. Soient P un espace Δ , $(\Omega, \omega; a, b)$ un de ses quadrilatères à côtés opposés semblables et $\Gamma_0, \tilde{\Gamma}_0$ les systèmes de connexions univoques qui lui sont associés: Γ_0 au couple $\Omega/a, b/\omega$ et $\tilde{\Gamma}_0$ au couple $\Omega/b, a/\omega$. Alors on a pour $(\chi, \varphi) \in \Gamma_0$, et $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\Gamma}_0$,

$$\chi_0 \leq \chi, \quad \varphi_0 \geq \varphi; \quad \tilde{\chi}_0 \leq \tilde{\chi}, \quad \tilde{\varphi}_0 \geq \tilde{\varphi} \quad (6)$$

où $(\chi_0, \varphi_0) \in \Gamma_0$ et $(\tilde{\chi}_0, \tilde{\varphi}_0) \in \tilde{\Gamma}_0$ sont les connexions de Ore du quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$ et où $\chi_0 \leq \chi$, etc., signifie, comme à l'ordinaire, que $\chi_0(p) \leq \chi(p)$ pour tout $p \in \Omega/a$, etc.

Pour démontrer les (6) il suffit de remarquer que *la connexion univoque*⁴⁾ $\Omega/a \rightleftharpoons b/\omega \text{ mod } \chi, \varphi$, entraîne

$$\chi(\Omega) = b = \chi\varphi(b); \quad \varphi(\omega) = a = \varphi\chi(a). \quad (7)$$

En effet, on a successivement: $\Omega \geq \varphi(b) \geq a, b \geq \chi(\Omega) \geq \chi\varphi(b) \geq b$; donc $\chi(\Omega) = b = \chi\varphi(b)$ etc.

2.21. Déterminons les ensembles des éléments parfaits⁵⁾ des connexions de Ore de $(\Omega, \omega; a, b)$.

Nous écartons évidemment le cas trivial où tous les côtés de ce quadrilatère sont nuls simultanément; supposons donc $\Omega > a$ et aussi, par suite, $b > \omega$. D'après les définitions (5), on aura alors:

$$\varphi_0\chi_0(\Omega) = \Omega, \quad \varphi_0\chi_0(a) = a; \quad \chi_0\varphi_0(b) = b, \quad \chi_0\varphi_0(\omega) = \omega.$$

Mais s'il existe un $p \in \Omega/a$ tel que $\Omega > p > a$, alors $\varphi_0\chi_0(p) \leq p$ signifie toujours $\varphi_0\chi_0(p) < p$, car on a $\chi_0(p) = \omega$ et $\varphi_0(\omega) = a$; de même, s'il existe $p' \in b/\omega$ tel que $b > p' > \omega$, alors on a $\chi_0\varphi_0(p') > p'$.

Ainsi, les ensembles d'éléments parfaits de la connexion $\Omega/a \rightleftharpoons b/\omega \text{ mod } \chi_0, \varphi_0$, sont respectivement: $\{\Omega, a\}$ pour Ω/a et $\{b, \omega\}$ pour b/ω . Conclusion analogue concernant la connexion $\Omega/b \rightleftharpoons a/\omega \text{ mod } \tilde{\chi}_0, \tilde{\varphi}_0$.

2.22. Réciproquement, cette propriété des connexions de Ore, suffit pour les caractériser.

Supposons en effet qu'une connexion $(\chi, \varphi) \in \Gamma_0$ soit telle que les équations

$$\varphi\chi(p) = p, \quad p \in \Omega/a; \quad \chi\varphi(p') = p', \quad p' \in b/\omega$$

n'aient d'autres solutions que $p = \Omega, a$ et $p' = b, \omega$ respectivement; alors,

³⁾ Laquelle me paraît, du reste, devoir être précédée par une théorie générale des correspondances multivoques.

⁴⁾ Cela ne signifie pas qu'on ait $(\chi, \varphi) \in \Gamma_0$, car la supposition \mathbf{A}_0^* peut ne pas y être satisfaite.

⁵⁾ Soit $P \rightleftharpoons P' \text{ mod } \chi, \varphi$; je dis que $p \in P$ est *parfait* lorsque $\varphi\chi(p) = p$ et, pareillement, $p' \in P'$ est parfait lorsque $\chi\varphi(p') = p'$.

je dis que $\chi = \chi_o$ et $\varphi = \varphi_o$. En effet, on a d'abord, par les (7), $\chi(\Omega) = b$, puis, par la A_o^* (2.1), $\chi(a) = \omega$.

Supposons donc, s'il y a lieu, que $p \in \Omega/a$ soit tel que $\Omega > p > a$; on en déduit $\chi(\Omega) \geq \chi(p) \geq \chi(a)$, c'est-à-dire $b \geq \chi(p) \geq \omega$. Or, pour chaque $p \in \Omega/a$, on a $\chi\varphi, \chi(p) = \chi(p)$ [15]; on aura donc, en vertu de l'hypothèse, $\chi(p) = b, \omega$. Mais, $\chi(p) = b$ est impossible car $p \geq \varphi\chi(p) = \varphi(b) = \Omega$; par conséquent $\chi(p) = \omega$. Ainsi, on a bien $\chi(p) = \chi_o(p)$, pour tout $p \in \Omega/a$ et on verrait de même que $\varphi = \varphi_o$.

2.3. Connexions radiales. Soit $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère à côtés opposés semblables et soit $\Omega/a \rightleftharpoons b/\omega \pmod{\chi, \varphi^4}$; je dis que cette connexion est *radiale* lorsque l'une, au moins, des deux conditions suivantes y est remplie: R_1 . Pour tout $p \in \Omega/a$ on a $\chi(p) \leq p, R_2$. Pour tout $p' \in b/\omega$ on a $\varphi(p') \geq p'$.

Lemme. Pour que la condition R_1 soit remplie il faut et il suffit que pour tout $p \in \Omega/a$ tel que $\varphi\chi(p) = p$ on ait $\chi(p) \leq p$. Dans ce cas, la condition R_2 y est aussi remplie.

Démonstration. La condition énoncée est évidemment nécessaire; mais cette condition est aussi suffisante, car on a successivement: $(p' \in b/\omega), \varphi\chi \cdot \varphi(p') = \varphi(p')$ [14], $p' \leq \chi\varphi(p') \leq \varphi(p')$, donc $\varphi(p') \geq p' (p' \in b/\omega!)$ (c'est la seconde partie de l'énoncé); par conséquent $\varphi\chi(p) \geq \chi(p)$ pour chaque $p \in \Omega/a$ et comme $\varphi\chi(p) \leq p$ il en résulte finalement $\chi(p) \leq p$ avec $p \in \Omega/a, Q. E. D.$

Remarquons que les connexions de Ore sont des connexions radiales; mais, dans un espace Δ , il peut y avoir des quadrilatères $(\Omega, \omega; a, b)$ dont les seules connexions radiales $(\chi, \varphi) \in \Gamma_o(\Omega/a, b/\omega)$ et $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\Gamma}_o(\Omega/b, a/\omega)$ soient les connexions de Ore. Tels sont, par exemple, les quadrilatères $(\Omega, \omega; a, b)$ qu'on peut former en prenant pour Ω, ω les extrémités d'un cycle simple (C_1, C_2) , [11], et pour a, b des éléments tels que $a \in C_1, b \in C_2$ et tels que $a, b \neq \Omega, \omega$. C'est à cause de cette remarque que j'ai donné aux correspondances (5), (5̃) la dénomination de „connexions de Ore“.

2.4. Les structures comme espaces Δ . Soit S une structure arbitraire et $(\Omega, \omega; a, b)$ un de ses quadrilatères (à côtés opposés semblables). Posons:

$$\chi_D^*(p) = b \wedge p, \quad p \in \Omega/a; \quad \varphi_D^*(p') = a \vee p', \quad p' \in b/\omega, \quad (8)$$

$$\tilde{\chi}_D^*(q) = a \wedge q, \quad q \in \Omega/b; \quad \tilde{\varphi}_D^*(q') = b \vee q', \quad q' \in a/\omega. \quad (8̃)$$

On vérifie immédiatement les relations

$$\Omega/a \rightleftharpoons b/\omega \pmod{\chi_D^*, \varphi_D^*}; \quad \Omega/b \rightleftharpoons a/\omega \pmod{\tilde{\chi}_D^*, \tilde{\varphi}_D^*}.$$

On a en général $(\chi_D^*, \varphi_D^*) \text{ non } \in \Gamma_o(\Omega/a, b/\omega), (\tilde{\chi}_D^*, \tilde{\varphi}_D^*) \text{ non } \in \tilde{\Gamma}_o(\Omega/b, a/\omega)$, à moins qu'on n'ait $\Omega = a \vee b, \omega = a \wedge b$. Les connexions (8), (8̃) sont évidemment radiales.

Les opérations univoques $(\chi_D, \varphi_D), (\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ qu'on déduit de (8), (8̃) par la restriction des domaines de celles-ci aux côtés correspondants du sousquadrila-

tère $(a \vee b, a \wedge b; a, b)$, sont ce que j'ai appelé *les connexions de Dedekind* (associées à ce sousquadrilatère).

Désignons par $(\chi_o, \varphi_o) \in \Gamma_o(a \vee b/a, b/a \wedge b)$, $(\tilde{\chi}_o, \tilde{\varphi}_o) \in \tilde{\Gamma}_o(a \vee b/b, a/a \wedge b)$ les connexions de Ore attachées à $(a \vee b, a \wedge b; a, b)$; on peut écrire, évidemment:

$$\chi_o \leq \chi_D, \quad \varphi_o \geq \varphi_D, \quad (9)$$

$$\tilde{\chi}_o \leq \tilde{\chi}_D, \quad \tilde{\varphi}_o \geq \tilde{\varphi}_D \quad (\tilde{9})$$

et si $(\chi, \varphi) \in \Gamma_o(a \vee b/a, b/a \wedge b)$, $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\Gamma}_o((a \vee b/b, a/a \wedge b))$ ont des connexions radiales arbitraires, on aura encore

$$\chi_o \leq \chi \leq \chi_D, \quad \varphi_o \geq \varphi \geq \varphi_D, \quad (10)$$

$$\tilde{\chi}_o \leq \tilde{\chi} \leq \tilde{\chi}_D, \quad \tilde{\varphi}_o \geq \tilde{\varphi} \geq \tilde{\varphi}_D, \quad (\tilde{10})$$

c'est-à-dire que $\chi(p) \leq \chi_D(p)$, $p \in a \vee b/a$ puis $\varphi(p') \geq \varphi_D(p')$, $p' \in b/a \wedge b$, etc.

Des exemples bien simples, tels que le suivant, montrent l'existence dans (10) ou ($\tilde{10}$) de connexions monotones (radiales) (χ, φ) ou $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi})$ distinctes et des connexions de Ore et des connexions de Dedekind.

2.41. Exemple. Considérons le schéma de structure ci-contre (Fig. 1).

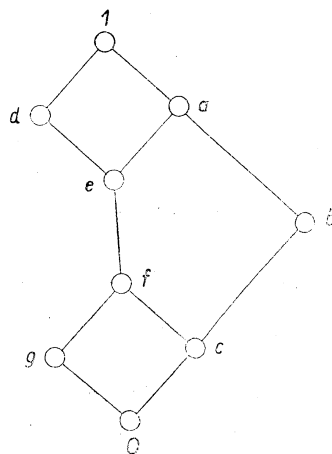


Fig. 1.

Le quadrilatère $(1, c; b, d)$ y est à côtés opposés semblables et l'on a $b \vee d = 1$, $b \wedge d = c$. Désignons, comme à l'ordinaire, par (χ_o, φ_o) et (χ_D, φ_D) les connexions de Ore et de Dedekind, reliant $1/b$ à d/c et par $(\tilde{\chi}_o, \tilde{\varphi}_o)$, $(\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ les connexions de mêmes noms entre $1/d$ et b/c . On a évidemment

$$\tilde{\chi}_o = \tilde{\chi}_D, \quad \tilde{\varphi}_o = \tilde{\varphi}_D. \quad (\tilde{11})$$

Or, si l'on pose:

$$\left. \begin{aligned} \chi(1) = d, \quad \chi(a) = f, \quad \chi(b) = c, \\ \varphi(d) = 1, \quad \varphi(e) = 1, \quad \varphi(f) = a, \quad \varphi(c) = b \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

la correspondance ainsi obtenue, entre les quotients $1/b$ et d/c , est, on s'en convainc facilement, une connexion monotone radiale: $1/b \rightleftarrows d/c \pmod{\chi, \varphi^6}$; de plus $(\chi, \varphi) \in \Gamma_o(1/b, d/c)$. On a donc

$$\chi_o \leq \chi \leq \chi_D, \quad \varphi_o \geq \varphi \geq \varphi_D. \quad (11)$$

Mais $\chi_o(a) = c$, $\chi(a) = f$ et $\chi_D(a) = e$; par conséquent, $\chi_o < \chi < \chi_D$. Puis on a $\varphi_o(f) = 1$, $\varphi(f) = a$ donc $\varphi_o > \varphi$; et $\varphi(e) = 1$, $\varphi_D(e) = a$ donc $\varphi > \varphi_D$. On aura donc finalement $\varphi_o > \varphi > \varphi_D$.

⁶⁾ On peut même écrire $1/b \rightleftarrows d/c \pmod{\chi, \varphi}$.

2.5. Supposition H et espaces Δ modulaires. Soit P un espace Δ ; je dis que P satisfait à la supposition **H**, s'il existe au moins un $\omega_0 \in P$ tel que dans tout quadrilatère $(\Omega, \omega_0; a, b)$ on puisse trouver un sousquadrilatère $(M, d; a, b)$ à côtés opposés semblables, de façon que les systèmes $\Gamma_0(M/a, b/d)$, $\tilde{\Gamma}_0(M/b, a/d)$ jouissent de la propriété suivante:

H. Il existe une connexion $(\chi, \varphi) \in \Gamma_0(M/a, b/d)$ et une connexion $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\Gamma}_0(M/b, a/d)$ telles qu'on ait

$$M/a \rightleftharpoons b/d \text{ mod } \chi, \varphi; \quad M/b \rightleftharpoons a/d \text{ mod } \tilde{\chi}, \tilde{\varphi}^7). \quad (13)$$

On ne suppose dans cet énoncé ni que le quadrilatère $(M, d; a, b)$ soit irréductible ni que les connexions (13) soient radiales.

Nous dirons que P est un espace Δ modulaire s'il vérifie la supposition **H**, quel que soit $\omega_0 \in P$.

§ 3. THÉORÈME DE SCHREIER ET THÉORIE DES RAFFINEMENTS.

Le problème que nous allons examiner dans ce paragraphe, se laisse énoncer comme suit:

Etant données, dans un ensemble partiellement ordonné P , deux chaînes aux extrémités communes, trouver un raffinement de la première chaîne et un raffinement de la seconde de telle façon, que les nouvelles chaînes aient même longueur et que leurs quotients soient (de chaîne à chaîne) isomorphes dans un certain ordre.⁸⁾

Nous allons voir que si P satisfait à la supposition **H**, la réponse est toujours affirmative (au moins pour certaines paires de chaînes); nous en déduisons un procédé qui nous permettra de trouver de proche en proche les raffinements (mutuels) canoniques de deux chaînes aux extrémités communes.

3.1. Théorème de Schreier. Soit P un espace Δ satisfaisant à la supposition **H**; alors, deux chaînes aux extrémités communes $\Omega \geq \omega_0$ possèdent des raffinements isomorphes. (Ici, ω_0 est un de ces éléments ω_0 figurant dans l'énoncé de la supposition **H** de 2.5).

Première démonstration. (Le principe de cette démonstration est dû à Schreier lui-même (l. c.)).

Nous remarquons d'abord que, les chaînes C_1, C_2 ayant même longueur et des quotients isomorphes en quelque ordre (symbole: $C_1 \cong C_2$), on peut faire correspondre à tout raffinement C'_1 de C_1 un raffinement C'_2 de C_2 de telle façon qu'on ait $C'_1 \cong C'_2$.

⁷⁾ Remarquons, à propos de cette définition, que, quels que soient l'espace P et le quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$ avec $b \geq a$, on peut y toujours trouver un sousquadrilatère $(M, d; a, b)$ à côtés opposés semblables de façon que les (13) soient (trivialement) vérifiées; il suffit de poser $M = b, d = a$.

⁸⁾ De pareils raffinements, je les appellerai, pour abrégé, *raffinements isomorphes*.

Cela étant, pour démontrer que les chaînes

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{i-1} \geq a_i \geq \dots \geq a_{r-1} \geq a_r = \omega_0, \\ \Omega &= b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{j-1} \geq b_j \geq \dots \geq b_{s-1} \geq b_s = \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

possèdent des raffinements isomorphes, nous allons utiliser une double induction. Le théorème est évidemment vrai pour $r = s = 2$, attendu qu'on a posé $\Omega/M \Leftrightarrow \Omega/M$ et $d/\omega_0 \Leftrightarrow d/\omega_0$ (voir 2.5).

Supposons donc que le théorème soit vrai pour chaque paire de chaînes

$$\begin{aligned} \Omega' &= a'_0 \geq a'_1 \geq \dots \geq a'_{r-1} = \omega_0, \\ \Omega' &= b'_0 \geq b'_1 \geq b'_2 = \omega_0 \end{aligned}$$

et démontrons-le pour les paires (14) avec $s = 2$. Or, puisqu'on a $\Omega \geq a_1 \geq \omega_0$ et $\Omega \geq b_1 \geq \omega_0$, il résulte de la supposition **H** l'existence d'une paire $M, d \in P$ telle que $\Omega \geq M \geq a_1 \geq d \geq \omega_0$ et $\Omega \geq M \geq b_1 \geq d \geq \omega_0$ et telle que

$$M/a_1 \Leftrightarrow b_1/d \pmod{\chi, \varphi}; \quad M/b_1 \Leftrightarrow a_1/d \pmod{\tilde{\chi}, \tilde{\varphi}}.$$

On peut donc écrire

$$(M \geq a_1 \geq d \geq \omega_0) \simeq (M \geq b_1 \geq d \geq \omega_0). \quad (15)$$

Mais les chaînes $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{r-1} \geq a_r = \omega_0$ et $a_1 \geq d \geq \omega_0$ possèdent, d'après l'hypothèse inductive des raffinements isomorphes

$$(a_1 \geq \dots \geq a_2 \geq \dots \geq \dots \geq \omega_0) \simeq (a_1 \geq \dots \geq d \geq \dots \geq \omega_0). \quad (15')$$

Or, le second membre de (15') engendre un raffinement du premier membre de (15); et à ce raffinement on peut, vu la remarque ci-dessus, faire correspondre dans le second membre de (15) un autre, qui lui soit isomorphe. On aura donc

$$(M \geq a_1 \geq \dots \geq d \geq \dots \geq \omega_0) \simeq (M \geq \dots \geq b_1 \geq d \geq \dots \geq \omega_0). \quad (15'')$$

Les (15') et (15'') donnent alors (grâce à la transitivité de \simeq)

$$(\Omega \geq M \geq a_1 \geq \dots \geq a_2 \geq \dots \geq \dots \geq \omega_0) \simeq (\Omega \geq M \geq \dots \geq b_1 \geq d \geq \dots \geq \omega_0)$$

ce qui achève la démonstration de la première induction.

Supposons maintenant que le théorème soit vrai pour chaque paire de chaînes

$$\Omega' = a'_0 \geq a'_1 \geq \dots \geq a'_r = \omega_0, \quad \Omega' = b'_1 \geq b'_2 \geq \dots \geq b'_{s-1} \geq \omega_0$$

et démontrons-le pour les paires (14). Or, les chaînes $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_r$ et $b_0 \geq b_1 \geq b_s$ possèdent, d'après la première partie de la démonstration, des raffinements isomorphes

$$(\Omega \geq \dots \geq a_1 \geq \dots \geq a_2 \geq \dots \geq \dots \geq \omega_0) \simeq (\Omega \geq \dots \geq b_1 \geq \dots \geq \omega_0). \quad (16)$$

Mais, la chaîne $b_1 \geq \dots \geq \omega_0$ (extraite du second membre de (16)) et la chaîne $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_s = \omega_0$ possèdent, elles aussi, en vertu de la nouvelle hypothèse inductive des raffinements isomorphes:

$$(b_1 \geq \dots \geq \dots \geq \omega_0) \cong (b_1 \geq \dots \geq b_2 \geq \dots \geq \dots \geq \omega_0) . \quad (16')$$

De (16) et (16') il résulte, toujours à l'aide de la remarque déjà utilisée, qu'on a finalement

$$\begin{aligned} (\Omega \geq \dots \geq \dots \geq a_1 \geq \dots \geq a_2 \geq \dots \geq \dots \geq \dots \geq \omega_0) &\cong \\ &\cong (\Omega \geq \dots \geq b_1 \geq \dots \geq b_2 \geq \dots \geq \dots \geq \dots \geq \omega_0) . \end{aligned}$$

Le théorème est démontré.

3.11. Deuxième démonstration. Je considère *en premier lieu les chaînes*

$$\Omega \geq a_1 \geq \omega_0, \quad \Omega \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{j-1} \geq b_j \geq \dots \geq \omega_0, \quad (17)$$

dont la première est une partie de la première chaîne (14). Or, d'après la supposition **H**, le quadrilatère $(\Omega, \omega_0; a_1, b_1)$ possède toujours un sousquadrilatère $(a_{11}, d_{11}^1; a_1, b_1)$ tel qu'on ait:

$$a_{11}/a_1 \leftrightarrow b_1/d_{11}^1 \pmod{\chi_{11}, \varphi_{11}}; \quad a_{11}/b_1 \leftrightarrow a_1/d_{11}^1 \pmod{\tilde{\chi}_{11}, \tilde{\varphi}_{11}} . \quad (18)$$

Le quadrilatère $(b_1, \omega_0; d_{11}^1, b_2)$ possède, à son tour, toujours en vertu de la supposition **H**, un sousquadrilatère $(a_{12}^1, d_{12}^1; d_{11}^1, b_2)$ tel qu'on ait

$$a_{12}^1/d_{11}^1 \leftrightarrow b_2/d_{12}^1 \pmod{\chi_{12}, \varphi_{12}}; \quad a_{12}^1/b_2 \leftrightarrow d_{11}^1/d_{12}^1 \pmod{\tilde{\chi}_{12}, \tilde{\varphi}_{12}} . \quad (18')$$

Le quadrilatère $(b_2, \omega_0; d_{12}^1, b_3)$ possède, de même, un sousquadrilatère $(a_{13}^2, d_{13}^2; d_{12}^1, b_3)$ tel qu'on ait

$$a_{13}^2/d_{12}^1 \leftrightarrow b_3/d_{13}^2 \pmod{\chi_{13}, \varphi_{13}}; \quad a_{13}^2/b_3 \leftrightarrow d_{12}^1/d_{13}^2 \pmod{\tilde{\chi}_{13}, \tilde{\varphi}_{13}} . \quad (18'')$$

et ainsi de suite. Il se forme, de la sorte, une chaîne

$$a_1 = d_0^1 \geq d_1^1 \geq d_2^1 \geq \dots \geq d_{j-1}^1 \geq d_j^1 \geq \dots \geq d_{s-1}^1 \geq d_s^1 = \omega_0, \quad (19)$$

telle que, le terme d_{j-1}^1 y étant déjà déterminé, on obtienne le suivant, d_j^1 , par la considération du quadrilatère $(b_{j-1}, \omega_0; d_{j-1}^1, b_j)$ ainsi que de l'un de ses sousquadrilatères $(a_{1j}^{j-1}, d_{1j}^{j-1}; d_{j-1}^1, b_j)$ satisfaisant à la supposition **H**:

$$a_{1j}^{j-1}/d_{j-1}^1 \leftrightarrow b_j/d_{1j}^{j-1} \pmod{\chi_{1j}, \varphi_{1j}}; \quad a_{1j}^{j-1}/b_j \leftrightarrow d_{j-1}^1/d_{1j}^{j-1} \pmod{\tilde{\chi}_{1j}, \tilde{\varphi}_{1j}} . \quad (18''')$$

Pour le dernier quadrilatère $(b_{s-1}, \omega_0; d_{s-1}^1, b_s)$ on peut naturellement poser $a_{1s}^{s-1} = d_{s-1}^1$ et $d_s^1 = \omega_0$.

Or, on a pour chaque $j = 1, 2, \dots, s$, $\varphi_{1j}(b_j) = a_{1j}^{j-1}$, $a_{11}^0 = a_{11}$; mais évidemment, $a_{1j}^{j-1} \in b_{j-1}/d_{j-1}^1$ et, par conséquent, $\varphi_{1,j-1}(a_{1j}^{j-1})$ a un sens. Posons donc $\varphi_{1,j-1}\varphi_{1j}(b_j) = a_{1j}^{j-2}$ et, en général

$$\varphi_{1,j-k}\varphi_{1,j-k+1} \dots \varphi_{1,j-1}\varphi_{1j}(b_j) = a_{1j}^{j-k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, j-1; \quad j > 1 .$$

Pour $k = j-1$, cette formule nous donne

$$\varphi_{11}\varphi_{12} \dots \varphi_{1,j-1}\varphi_{1j}(b_j) = a_{1j}^0 = a_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots, s; \quad a_{1s} = a_1 \quad (20)$$

et on vérifie sans peine qu'on a $a_{1j} \in \Omega/a_1$. D'ailleurs, $a_{1,j-1} \geq a_{1j}$, $j \geq 1$, attendu qu'on a posé, pour $j = 1$, $a_{10} = \Omega$; on a, en effet, $b_{j-1} \geq a_{1j}^{j-1}$, donc $\varphi_{1,j-1}(b_{j-1}) \geq \varphi_{1,j-1}(a_{1j}^{j-1})$, $\varphi_{1,j-2}\varphi_{1,j-1}(b_{j-1}) \geq \varphi_{1,j-2}\varphi_{1,j-1}(a_{1j}^{j-1})$, etc.

Nous obtenons ainsi la chaîne

$$\Omega = a_{10} \geq a_{11} \geq a_{12} \geq \dots \geq a_{1,j-1} \geq a_{1j} \geq \dots \geq a_{1,s-1} \geq a_{1s} = a_1 \quad (21)$$

avec la propriété très importante qu'on vérifie facilement:

$$\left. \begin{array}{l} a_{1,j-1}/a_{1j} \leftrightarrow b_{j-1}/a_{1j}^{j-1} \text{ mod } \chi_{1,j-1} \dots \chi_{12}\chi_{11}, \varphi_{11}\varphi_{12} \dots \varphi_{1,j-1}, \\ j = 1, 2, \dots, s; a_{10} = \Omega, a_{1s} = a_1, a_{1s}^{s-1} = d_{s-1}^1. \end{array} \right\} \quad (21')$$

La chaîne (21) est, par définition, un *raffinement canonique* de l'intervalle $\Omega \geq a_1$ moyennant la seconde chaîne (14) et les connexions $(\chi_{1j}, \varphi_{1j})$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Je considère en second lieu, la chaîne

$$a_1 \geq a_2 \geq \omega_0 \quad (22)$$

et la chaîne (19) et je leur fais jouer le rôle de la première et de la seconde chaîne (17), respectivement. J'obtiens de la sorte, par le même enchaînement d'opérations que précédemment, une chaîne

$$a_2 = d_0^2 \geq d_1^2 \geq d_2^2 \geq \dots \geq d_{j-1}^2 \geq d_j^2 \geq \dots \geq d_{s-1}^2 \geq d_s^2 = \omega_0$$

avec la propriété évidente

$$d_j^2 \leq d_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, s$$

et un *raffinement canonique*

$$a_1 = a_{20} \geq a_{21} \geq a_{22} \geq \dots \geq a_{2,j-1} \geq a_{2j} \geq \dots \geq a_{2,s-1} \geq a_{2s} = a_2$$

avec la propriété

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{21}\varphi_{22} \dots \varphi_{2,j-1} \varphi_{2j}(d_j^1) = a_{2j}^0 = a_{2j}, \\ a_{2,j-1}/a_{2j} \leftrightarrow d_{j-1}^1/a_{2j}^{j-1} \text{ mod } \chi_{2,j-1} \dots \chi_{22}\chi_{21}, \varphi_{21}\varphi_{22} \dots \varphi_{2,j-1}, \\ j = 1, 2, \dots, s, \quad a_{2s}^{s-1} = d_{s-1}^2, \end{array} \right\}$$

où tous les symboles ont à l'égard des chaînes (22) et (19), même signification que les symboles correspondants à l'égard des chaînes (17).

Après avoir itéré ce procédé $i - 1$ fois ($i = 1, 2, \dots$) et que l'on ait ainsi construit la chaîne

$$a_{i-1} = d_0^{i-1} \geq d_1^{i-1} \geq d_2^{i-1} \geq \dots \geq d_{j-1}^{i-1} \geq d_j^{i-1} \geq \dots \geq d_{s-1}^{i-1} \geq d_s^{i-1} = \omega_0 \quad (23)$$

et le raffinement canonique de $a_{i-2} \geq a_{i-1}$, je considère la chaîne $a_{i-1} \geq a_i \geq \omega_0$ et je lui applique à l'égard de (23) le même traitement que dans tous les cas précédents. Je parviens ainsi à la chaîne

$$\left. \begin{array}{l} a_i = d_0^i \leq d_1^i \geq d_2^i \geq \dots \geq d_{j-1}^i \geq d_j^i \geq \dots \geq d_{s-1}^i \geq d_s^i = \omega_0, \\ i = 0, 1, \dots, r; \quad d_j^0 = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, s \end{array} \right\} \quad (24)$$

ayant la propriété

$$\left. \begin{aligned} d_j^i &\leq d_j^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, r, j = 0, 1, 2, \dots, s; \\ d_j^r &= \omega_0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (24')$$

et au raffinement canonique

$$\left. \begin{aligned} a_{i-1} = a_{i0} &\geq a_{i1} \geq a_{i2} \geq \dots \geq a_{i,j-1} \geq a_{ij} \geq \dots \geq a_{i,s-1} \geq a_{is} = a_j; \\ i &= 1, 2, \dots, r, \quad a_{rj} = d_j^{r-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (24'')$$

avec les formules générales

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{j-1}/d_{i-1}^i &\leftrightarrow d_j^{i-1}/d_{ij}^i \bmod \chi_{ij}, \varphi_{ij}; \quad a_{ij}^{i-1}/d_j^{i-1} \leftrightarrow d_{j-1}^i/d_j^i \bmod \tilde{\chi}_{ij}, \tilde{\varphi}_{ij}; \\ a_{rj}^{r-1} &= d_j^{r-1}, \quad a_{ij}^{j-1} \leq d_{j-1}^i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\varphi_{i1}\varphi_{i2} \dots \varphi_{i,j-1}\varphi_{ij} (d_j^{i-1}) = a_{ij}^0 = a_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (25')$$

$$\left. \begin{aligned} a_{i,j-1}/a_{ij} &\leftrightarrow d_{j-1}^{i-1}/a_{ij}^{j-1} \bmod \chi_{i,j-1} \dots \chi_{i2}\chi_{i1}, \quad \varphi_{i1}\varphi_{i2} \dots \varphi_{i,j-1}, \\ a_{is}^{s-1} &= d_{s-1}^i, \quad a_{0s}^{s-1} = d_{s-1}^0, \\ i &= 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \right\} \quad (25'')$$

Il importe de remarquer que les égalités $d_j^0 = b_j$, $d_j^r = \omega_0$, $a_{rj} = d_j^{r-1}$, $a_{rj}^{j-1} = d_j^{r-1}$, $a_{is}^{s-1} = d_{s-1}^i$, $a_{0s}^{s-1} = d_{s-1}^0$ dans (24), (24'), (24''), (25), (25'') sont des définitions.

On a d'ailleurs, en vertu des secondes relations (25) pour $i = r - 1$ et avec les notations que nous avons adoptées

$$\left. \begin{aligned} a_{r,j-1}/a_{rj} &\leftrightarrow a_{r-1,j}^{j-1}/d_j^{r-2} \bmod \tilde{\varphi}_{r-1,j}, \tilde{\chi}_{r-1,j}, \\ j &= 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \right\} \quad (26')$$

Nous avons par ce qui précède obtenu ce que j'appellerai le *raffinement canonique de la première chaîne* (14) moyennant la seconde chaîne (14) et les connexions $(\chi_{ij}, \varphi_{ij})$.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un raffinement canonique de la seconde chaîne (14) moyennant la première chaîne (14) et un certain système de connexions $(\chi_{ji}^*, \varphi_{ji}^*)$ qui est isomorphe au précédent.

Pour ce but nous énoncerons les définitions suivantes:

$$\left. \begin{aligned} e_i^j &= d_j^i \\ i &= 0, 1, 2, \dots, r, \quad j = 0, 1, 2, \dots, s; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{ji}^{i-1} &= a_{ij}^{j-1} \\ i &= 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Pour $i = r$, les a_{ij}^{j-1} ($j = 1, 2, \dots, s$) ont déjà été définis (voir les (25'')); il en est de même des d_j^r (voir les (24')).

Cela fait, je dis qu'on a pour chaque $j = 1, 2, \dots, s$

$$\left. \begin{aligned} b_j = e_0^j &\geq e_1^j \geq \dots \geq e_{i-1}^j \geq e_i^j \geq \dots \geq e_{r-1}^j \geq e_r^j = \omega_0, \\ e_i^j &\leq e_i^{j-1}, \\ i &= 0, 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

On a, en effet, $e_i^j = d_j^i \leq b_j = e_0^j$ puis $e_{i-1}^j = d_j^{i-1}$, $e_i^{j-1} = d_{j-1}^i$, $e_i^j = d_j^i$, $d_{j-1}^i \geq d_j^i$ et, enfin, (24'); d'où les (29).

Je considère maintenant l'intervalle $b_{j-1} \geq b_j$ et les chaînes

$$\begin{aligned} b_{j-1} &= e_0^{j-1} \geq e_1^{j-1} \geq \dots \geq e_{i-1}^{j-1} \geq e_i^{j-1} \geq \dots \geq e_{r-1}^{j-1} \geq e_r^{j-1} = \omega_0, \\ b_j &= e_0^j \geq e_1^j \geq \dots \geq e_{i-1}^j \geq e_i^j \geq \dots \geq e_{r-1}^j \geq e_r^j = \omega_0. \end{aligned}$$

Le quadrilatère $(b_{ji}^{i-1}, e_i^j, e_{i-1}^j, e_i^{j-1})$ est évidemment un sousquadrilatère de $(e_{i-1}^{j-1}, \omega_0, e_{i-1}^j, e_i^{j-1})$; car, en vertu des (27), (28) et de la troisième des (25), on a

$$e_{i-1}^{j-1} \geq b_{ji}^{i-1} \geq e_{i-1}^j \geq e_i^j \geq \omega_0, \quad e_{i-1}^{j-1} \geq b_{ji}^{i-1} \geq e_i^{j-1} \geq e_i^j \geq \omega_0.$$

Mais, puisque $(b_{ji}^{i-1}, e_i^j, e_{i-1}^j, e_i^{j-1})$ est identique à $(a_{ij}^{i-1}, d_j^i, d_{j-1}^i, d_{j-1}^i)$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, r$ et $j = 1, 2, \dots, s$ on aura par les (25)

$$\left. \begin{aligned} b_{ji}^{i-1}/e_{i-1}^j &\leftrightarrow e_i^{j-1}/e_i^j \pmod{\tilde{\chi}_{ij}, \tilde{\varphi}_{ij}}, \\ b_{ji}^{i-1}/e_i^{j-1} &\leftrightarrow e_{i-1}^j/e_i^j \pmod{\chi_{ij}, \varphi_{ij}}, \\ i &= 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Si donc nous définissons (pour chaque $i = 1, 2, \dots, r$ et $j = 1, 2, \dots, s$)

$$b_{ji}^0 = b_{ji} = \tilde{\varphi}_{1j}\tilde{\varphi}_{2j} \dots \tilde{\varphi}_{i-1,j}\tilde{\varphi}_{ij} (e_i^{j-1}); \quad b_{j0} = b_{j-1},$$

nous aurons $b_{ji} \in b_{j-1}/b_j$ et $b_{j,i-1} \geq b_{ji}$. Par conséquent:

$$\left. \begin{aligned} b_{j,i-1}/b_{ji} &\leftrightarrow e_i^{j-1}/b_{ji}^{i-1} \pmod{\tilde{\chi}_{i-1,j} \dots \tilde{\chi}_{2j}\tilde{\chi}_{1j}, \tilde{\varphi}_{1j}\tilde{\varphi}_{2j} \dots \tilde{\varphi}_{i-1,j}}, \\ i &= 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Ici, on a, d'après les relations (28), les troisièmes (25'') et les (27) $b_{si}^{i-1} = a_{is}^{s-1} = d_{s-1}^i = e_i^{s-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) et les relations (31) conservent leur sens même pour $j = s$. On a, du reste, par les (28), les secondes (25'') et les (27) $b_{jr}^{r-1} = a_{rj}^{j-1} = d_{j-1}^r = e_{r-1}^j$ ($j = 1, 2, \dots, s$) et je pose (pour des raisons de symétrie par rapport à la quatrième des (25''), $b_{0r}^{r-1} = e_{r-1}^0$.

On en déduit, pour $j = 1$

$$b_{1,i-1}/b_{1i} \leftrightarrow a_{i-1}/b_{1i}^{i-1} \pmod{\tilde{\chi}_{i-1,1} \dots \tilde{\chi}_{21}\tilde{\chi}_{11}, \tilde{\varphi}_{11}\tilde{\varphi}_{21} \dots \tilde{\varphi}_{i-1,1}} \quad (31')$$

Enfin, si l'on prend la chaîne

$$b_{si} = e_i^{s-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r \quad (32)$$

pour un raffinement canonique de $b_{s-1} \geq b_s$, on aura (par la seconde relation (30), pour $j = s - 1$),

$$\left. \begin{aligned} b_{s,i-1}/b_{si} &\leftrightarrow b_{s-1,i}^{i-1}/e_i^{s-2} \pmod{\varphi_{i,s-1}, \chi_{i,s-1}} \\ i &= 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \right\} \quad (30')$$

Le théorème de Schreier est maintenant la conséquence des relations (21'), (31'), (25''), (31), (26'), (25), (30'), (30) et des définitions (27), (28).

Je dirai que les raffinements a_{ij} , b_{ji} que nous avons ainsi obtenus forment un système de *raffinements mutuels canoniques* des chaînes (14).

Les quotients $a_{i,j-1}/a_{ij}$ et $b_{j,i-1}/b_{ji}$ sont les *quotients* conjugués de ce système de raffinements; ces quotients sont, d'après le théorème, toujours isomorphes

au quotient intermédiaire $d_{j-1}^{i-1}/a_{ij}^{i-1}$; en particulier, chacun des quotients, Ω/a_{11} et $a_{r,s-1}/\omega_0 = b_{s,r-1}/\omega_0$ est isomorphe à soi-même. Ce système de raffinements, on le voit, dépend en général du choix des quadrilatères $(a_{ij}^{i-1}, d_j^i; d_j^{i-1}, d_{j-1}^i)$ et des connexions parfaites $(\chi_{ij}, \varphi_{ij})$ et $(\tilde{\chi}_{ij}, \tilde{\varphi}_{ij})$.

Corollaire. Supposons que P soit un espace Δ modulaire; dans ce cas le théorème de Schreier est vrai pour chaque paire de chaînes aux extrémités communes.

3.2. Les raffinements canoniques, généralités. Il n'est pas difficile de se rendre compte de ce que la seconde des deux démonstrations que nous avons données du théorème de Schreier, n'est, au fond, que la description d'une méthode permettant de faire correspondre, dans tout espace Δ (2.1) (qu'il satisfasse ou non à la supposition **H**) à chaque paire de chaînes aux extrémités communes, au moins un système de raffinements mutuels canoniques; mais, si l'espace Δ en question n'est pas modulaire (ou s'il ne satisfait pas à la supposition **H**) il ne peut, évidemment, y être question, en général, de raffinements (mutuels canoniques) isomorphes.

Dans le cas des structures, les (sous) — quadrilatères de la forme $(a \vee b, a \wedge b; a, b)$ et les connexions de Dedekind qui leur correspondent, conduisent, comme il est facile de s'en convaincre, au système de raffinements de Zassenhaus; on a, en effet, dans chaque structure $d_j^i = a_i \wedge b_j$ ($i = 0, 1, 2, \dots, r; j = 0, 1, 2, \dots, s$), $a_{ij}^{i-1} = d_j^{i-1} \vee d_{j-1}^i$ ($i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s$). D'après cela (et puisque les (25') ont un sens même si les χ_{ij}, φ_{ij} ne sont pas des isomorphismes), on aura $(\dots ((a_{ij}^{i-1} \vee d_{j-2}^i) \vee d_{j-3}^i) \vee d_{j-4}^i) \vee \dots) \vee d_0^i = a_i \vee (a_{i-1} \wedge b_j)$, etc. (voir les (25')!). On sait du reste que, pour que les raffinements de Zassenhaus soient semblables d'en bas pour chaque paire de chaînes (14) il faut et il suffit que la structure soit modulaire; en ce cas ces raffinements sont même isomorphes.

Je n'insisterai pas davantage ici sur les détails de la construction des raffinements mutuels canoniques; ces détails, ils me paraissent suffisamment éclaircis par ce qui précède.

En ce qui concerne l'emploi des connexions multivoques dans la théorie des raffinements, il en sera question dans la seconde partie de ce mémoire.

Nous allons maintenant appliquer les principes précédents aux cas des structures et des semigroupes (théorie de la divisibilité).

§ 4. LES STRUCTURES

4.1. Définition. J'appelle *W-structure*, toute structure qui est un espace Δ modulaire. Ceci équivaut à dire, on s'en convainc facilement, que quels que soient les éléments $a, b \in S$ la relation d'isomorphisme (de structure!)

$$a \vee b/a \iff b/a \wedge b \text{ mod } \chi, \varphi \quad (33)$$

est vérifiée.

Toute structure modulaire (c'est-à-dire satisfaisant à l'axiome de Dedekind) est, naturellement, une W -structure mais, la réciproque n'est pas vraie, ainsi que l'a montré M. WARD [18] qui a, d'ailleurs, été le premier à considérer les W -structures.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du § 3.

4.2. Théorème. *Deux chaînes aux extrémités communes possèdent, dans toute W -structure, un système de raffinements mutuels canoniques; ces raffinements sont des chaînes de même longueur dont les quotients conjugués sont aux structures isomorphes.*

Les raffinements dont il s'agit dans cet énoncé, sont, en général, différents de ceux de Zassenhaus et cela précisément parce que les connexions (33) ne sont, en général, pas même radiales; mais l'intérêt du théorème lui-même vient, à mon avis, de ce que la structure peut ne pas y être modulaire.

4.3. Sur la caractérisation des structures modulaires. C'est M. Ward qui a posé (l. c.) le problème de la caractérisation des structures modulaires en tant que W -structures; il a démontré, comme on sait, la proposition suivante:

Pour qu'une W -structure soit une structure modulaire il suffit qu'elle soit archimédienne₁ (ou bien archimédienne₂).

Je vais dans ce qui suit donner, tout en la généralisant un peu, une nouvelle démonstration fort simple de cette proposition; l'intérêt de cette démonstration vient de ce qu'elle s'applique aussi dans la théorie des multistrukture (voir la seconde partie de ce mémoire), tandis que le raisonnement de M. Ward lui-même est plutôt „verbandtheoretisch“.

4.31. Définition. Je dis qu'un ensemble partiellement ordonné P est *méromorphe* lorsqu'il satisfait à la condition suivante:

Q'. Soient $a, b, c \in P$ tels que $a \geq b \geq c$ et tels qu'on ait l'isomorphisme $a/c \Leftrightarrow b/c$; alors on a $a = b$.

De même, je dis que P est *holomorphe* lorsqu'il satisfait la condition suivante:

Q''. Soient $a, b, c \in P$ tels que $a \geq b \geq c$ et tels qu'on ait l'isomorphisme $a/b \Leftrightarrow a/c$; alors, on a $b = c$.

4.32. Lemme. *Un ensemble partiellement ordonné archimédien₁ (archimédien₂) est toujours méromorphe (holomorphe).*

La démonstration est analogue à celle qu'on donne habituellement dans la théorie des groupes pour prouver qu'un groupe à structure groupale archimédienne₁ (archimédienne₂) n'a pas de méromorphismes (holomorphismes) véritables.

4.33. Théorème (M. Ward). *Soit S une W -structure méromorphe (holomorphe); alors, S est modulaire.*

Démonstration. Soient $a, b \in S$ et $p' \in b/a \wedge b$, c'est-à-dire $b \geq p' \geq a \wedge a$. On a évidemment

$$\left. \begin{aligned} a \vee b \geq a \vee p' \geq a, \\ b \geq b \wedge (a \vee p') \geq p' \geq a \wedge b, \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} a \vee [b \wedge (a \vee p')] = a \vee p', \\ a \wedge [b \wedge (a \vee p')] = a \wedge p' = a \wedge b, \end{aligned} \right\}$$

(On a, par exemple, pour la dernière des relations ci-dessus: $b \geq p' \geq a \wedge b$ donc $a \wedge b \geq a \wedge p' \geq a \wedge b$ c'est-à-dire $a \wedge p' = a \wedge b$; or, $b \geq b \wedge (a \vee p') \geq a \wedge b$, etc).

Par conséquent, S étant une W -structure, on aura les isomorphismes:

$$a \vee p'/a \rightleftharpoons p'/a \wedge b, \quad a \vee p'/a \rightleftharpoons b \wedge (a \vee p')/a \wedge b$$

dont la combinaison nous donne l'isomorphisme:

$$p'/a \wedge b \rightleftharpoons b \wedge (a \vee p')/a \wedge b$$

qui entraîne, puisque S est méromorphe, que $b \wedge (a \vee p') = p'$. Or, ceci prouve, d'après un théorème de Ore [5], que S est modulaire. Pour le cas d'une structure S holomorphe on peut appliquer la dualité. Q. E. D.

Le théorème original de M. Ward est maintenant la conséquence immédiate du lemme 4.32 et du théorème 4.33.

Remarque. On s'aperçoit aisément que dans la démonstration du théorème 4.33 ce n'est qu'une partie seulement de la condition Q' qui est intervenue; c'est que l'élément $b \wedge (a \vee p')$ n'est jamais arbitraire mais il est, au contraire, la „fermeture“ de p' dans $b/a \wedge b$. On est ainsi conduit à envisager les structures S satisfaisantes à la condition suivante:

Q^* . Soient $a, b \in S$ et soit $p' \in b/a \wedge b$ tel qu'on ait l'isomorphisme

$$b \wedge (a \vee p')/a \wedge b \rightleftharpoons p'/a \wedge b,$$

alors, on a $b \wedge (a \vee p') = p'$. Une condition Q^{**} s'en déduit par la dualité.

Or, on voit tout de suite que si dans l'énoncé du théorème 4.33 on remplace la condition Q' par la condition moins exigeante Q^* , le théorème reste vrai.

§ 5. LES SEMIGROUPES

Il s'agit dans ce paragraphe de questions se rattachant aux fondements de la théorie de la divisibilité. Cette dernière est d'habitude subordonnée à la théorie des (semi)groupes réticulés [19]. Parmi les propositions les plus élémentaires (mais nullement triviales) de ces théories, il y en a, cependant, dont la validité et la signification sont indépendantes de ce que le groupe partiellement ordonné fondamental soit réticulé; ce sont ces propositions-là que nous allons considérer dans les alinéas suivants, afin d'en tirer quelques conséquences à la lumière du § 3.

5.1. Définitions. Soit S un semigroupe arbitraire (c'est-à-dire un ensemble non vide muni d'une loi de composition (\cdot) , qu'on appelle multiplication, et qui est unique et associative).

Je dis que S est à *élément unité à gauche* (à droite), s'il existe un $1' \in S$ ($1'' \in S$) tel que pour tout $a \in S$ on ait $1' \cdot a = a$ ($a \cdot 1'' = a$); et je dis que S est à *élément unité* lorsqu'il l'est simultanément à droite et à gauche. De même, je dis que S est à *élément zéro*, s'il existe un $0 \in S$ tel qu'on ait $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ pour chaque $a \in S$.

Soient $a, b, c \in S$ tels que $a = bc$; alors, je dis que b est un *diviseur à gauche* de a , tandis que c en est un *diviseur à droite*. Symboles: $a \rho' b$, $a \rho'' c$. Les relations binaires ρ' , ρ'' seront dites *les divisibilités à gauche* et à droite (dans S).

Je dis que S est *simplifiable à gauche* (à droite) lorsque l'égalité $ax = ay$ ($xa = ya$) entraîne toujours l'égalité $x = y$; et je dis que S est *simplifiable* lorsqu'il l'est à la fois à gauche et à droite.

Enfin, j'appelle *semigroupe à division* ou *semigroupe divisionnaire* tout semigroupe S tel que 1. S soit à élément unité et à élément zéro, 2. S — (0) soit simplifiable, 3. on ait $aS = Sa$ pour chaque $a \in S$, 4. le sousgroupe U des unités de S se réduise à l'identité.

On a d'abord la proposition bien connue suivante:

5.2. Lemme. *La relation ρ' est une relation de quasi-ordre, c'est-à-dire réflexive et transitive, dans S , pourvu que S soit à élément unité à droite.⁹⁾*

5.3. Les ensembles S' , S'' . Soit S un semigroupe à élément unité à droite; alors, la divisibilité ρ' , y est, d'après 5.2, une relation de quasi-ordre [19]. Or, on sait qu'en ce cas, la relation $aP'b$ ($a, b \in S$) définie par:

$$P'. \text{ On a } aP'b \text{ toutes les fois qu'on a } a\rho'b \text{ et } b\rho'a,$$

est une relation d'équivalence dans S . C'est l'ensemble quotient S/P' qu'elle définit que nous désignerons dans la suite par $S' = S/P'$; on sait [19] que l'ensemble S' est partiellement ordonné par une relation \leq telle, qu'on ait $K_x \leq K_y$ si et seulement si que la relation $x*\rho'y*$ ($x* \in K_x$ et $y* \in K_y$; $K_x, K_y \in S'$) est vérifiée ou, ce que revient au même, que y soit un diviseur à gauche, de x ; au lieu de $K_x \leq K_y$ j'écrirai aussi $K_y \geq K_x$ [19].

On aura pareillement, S étant à élément unité à gauche, une relation d'équivalence $aP''b$ ($a, b \in S$) définie par $\langle\langle a\rho''b \text{ et } b\rho''a \rangle\rangle$ et un ensemble quotient $S'' = S/P''$.

Lorsque, dans la suite, nous parlerons de l'ordre partiel de l'ensemble S' il s'agira toujours de celui défini par la relation \leq ci-dessus.

5.4. Lemme. *Soit S un semigroupe à élément unité 1 et soit U le groupe des unités de S ; alors toute classe d'équivalence de S suivant P' c'est-à-dire tout élément $K_x \in S'$ est une somme de classes résiduelles à gauche de S par rapport à U . (La démonstration fait usage de l'axiome de choix).*

⁹⁾ Il en est de même de ρ'' , pourvu que S soit à élément unité à gauche.

5.5. Lemme. *Pour que $\varrho'' \rightarrow \varrho'$ c'est-à-dire, pour que la relation $a\varrho''b$ entraîne $a\varrho'b$ il faut et il suffit que pour chaque élément $a \in S$ on ait $Sa \subseteq aS$.¹⁰⁾*

Il en résulte que $a\varrho'b$ entraîne toujours $a\varrho'bc$ pour chaque $c \in S$.

La vérification des lemmes 5.4 et 5.5 n'offre aucune difficulté.

5.6. Lemme. *Soit S un semigroupe à élément unité à droite et tel que $\varrho'' \rightarrow \varrho'$; alors, l'ensemble S' est un semigroupe par rapport à la multiplication ordinaire des classes $K_x \in S'$. Ce semigroupe S' possède les propriétés suivantes: 1° il est à élément unité à droite, 2° la divisibilité à gauche y coïncide (en tant que relation de quasi-ordre) avec l'ordre partiel de S' (5.3, dernière remarque), 3° la divisibilité à droite y entraîne la divisibilité à gauche (c'est-à-dire, on a $\varrho'' \rightarrow \varrho'$ dans S' !), 4° l'ordre partiel de S' est homogène par rapport à la multiplication des classes, c'est-à-dire que $K_a \leq K_b$ entraîne $K_c K_a \leq K_c K_b$ et $K_a K_c \leq K_b K_c$ pour chaque $K_c \in S'$.*

Démonstration. On a par définition $S' = S/P'$, P' étant la relation d'équivalence définie à 5.3. Or, il est clair que $aP'a^*$ ($a, a^* \in S$) entraîne $caP'ca^*$ pour chaque $c \in S$; et je dis qu'on a également $acP'a^*c$ pour chaque $c \in S$. On a, en effet $a = a^*d$, $a^* = ad'$ et par suite aussi $ac = a^*dc$, $a^*c = ad'c$ ce qui, en vertu de la supposition $\varrho'' \rightarrow \varrho'$, entraîne (5.5), $ac = a^*cd_1$, $a^*c = acd'_1$ c'est-à-dire précisément $acP'a^*c$. Ainsi l'ensemble S' est un système multiplicatif par rapport à la multiplication ordinaire des classes: $K_a K_b = K_{ab}$; $K_a, K_b \in S'$; on a donc l'homomorphisme $S \sim S'$ qui entraîne en particulier que S' est un semigroupe.

Les propriétés 1°—4° du semigroupe S' sont essentiellement des conséquences de l'homomorphisme $S \sim S'$; montrons-le pour les propriétés 2°, 3°.

Soient d'abord $K_a, K_b, K_c \in S'$ telles que $K_a = K_b K_c$. Je dis qu'on a $K_a \leq K_b$; on a en effet $K_a = K_{bc}$ donc $aP'bc$ c'est-à-dire, en particulier, $a = b \cdot cd$ ce qui prouve que $a\varrho'b$ et, partant, $K_a \leq K_b$ (5.3).

Réciproquement on tire de $K_a \leq K_b$ que $a\varrho'b$, donc $a = bc$ et par suite, vu que $S \sim S'$, $K_a = K_b K_c$, ce qui achève la vérification de 2°.

Supposons maintenant qu'on ait $K_a = K_b K_c$; il faut montrer qu'il en résulte $K_a = K_b K_c$. Or, on a $K_a = K_{ab}$, donc $aP'db$, c'est-à-dire que $a = dbf$; on a, d'autre part, $\varrho'' \rightarrow \varrho'$ et par conséquent $db = bd'$, donc $a = b \cdot d'f = bc$ avec $c = d'f$. Il en résulte enfin $K_a = K_b K_c$: c'est la propriété 3° de l'énoncé.

5.7. Lemme. *Soit S un semigroupe à élément unité 1, simplifiable à gauche et tel que $\varrho'' \rightarrow \varrho'$; alors le semigroupe S' jouit des mêmes propriétés et coïncide avec l'ensemble des classes résiduelles à gauche de S suivant le sousgroupe U des unités de S .*

Démonstration. Soit $K_a \in S'$ et $a^* \in K_a$, donc $a = a^*d$, $a^* = af$; on en tire $a = afd$, $a^* = a^*df$ et comme S est simplifiable à gauche, il en résulte $1 = df$,

¹⁰⁾ „ \subseteq “ est le signe habituel de l'inclusion au sens de la théorie des ensembles.

$1 = fd$, ce qui prouve que $d, f \in U$; donc $K \subseteq aU$. Or, on a aussi (5.4) $aU \subseteq K$, donc $K = aU$. Le reste de la démonstration s'achève comme à 5.6.

Corollaire. 1. On a $Ua \subseteq aU$ pour chaque $a \in S$. **2.** La relation $K_c K_a \subseteq \subseteq K_c K_b$ entraîne $K_a \subseteq K_b$.

Dorénavant nous supposons que S est un semigroupe divisionnaire (5.1); alors, $a\rho'b \leftrightarrow a\rho''b$ signifie (5.3) $a \leq b$ et l'on a $0 \leq a \leq 1$ pour chaque $a \in S$.

5.8. Lemme. Soit S un semigroupe divisionnaire; alors, tout quadrilatère $(M, d; a, b)$, $d > 0$, tel que $b = vM$, $d = va$, est un quadrilatère tel que $a = M\tilde{v}$, $d = b\tilde{v}$ et tel qu'on ait les isomorphismes (au sens de l'ordre partiel)

$$M/a \rightleftarrows b/d, \quad M/b \rightleftarrows a/d.$$

Démonstration. D'abord, puisque $U = 1$, il suit que S est partiellement ordonné par la divisibilité. Cela étant, je considère $p \in M/a$, c'est-à-dire $M \geq p \geq a$ et je définis

$$\chi(p) = vp, \quad p \in M/a. \quad (34)$$

Il est clair que $\chi(p) \in b/d$, c'est-à-dire que $b \geq \chi(p) \geq d$. Soit maintenant $p' \in b/d$. Puisque $b = vM$, c'est-à-dire $v \geq b$, on aura a fortiori $v \geq p'$, ce qui équivaut à $p' = vz$ pour un certain $z \in S$. De $b \geq p' \geq d$ il résulte, d'ailleurs, $vM \geq vz \geq va$ et, par suite, $M \geq z \geq a$. Je définis alors

$$\varphi(p') = z \quad (p' = v\varphi(p')), \quad p' \in b/d \quad (34\tilde{~})$$

et je dis qu'on a $M/a \rightleftarrows b/d \bmod \chi, \varphi$.

Ces fonctions χ, φ sont en effet monotones; puis, on a $v\varphi\chi(p) = \chi(p) = vp$, donc $\varphi\chi(p) = p$ et $\chi\varphi(p') = v\varphi(p') = p'$.

Maintenant, puisque $M \geq a$ et $b \geq d$, on aura $a = Mv_1$, $d = bv_2$ donc $d = v \cdot Mv_1 = vM \cdot v_1 = bv_1$. Donc $v_1 = v_2 = \tilde{v}$. Si je pose

$$\tilde{\chi}(q) = q\tilde{v}, \quad q \in M/b; \quad \tilde{\varphi}(q')\tilde{v} = q', \quad q' \in a/d,$$

j'obtiens d'une façon analogue $M/b \rightleftarrows a/d \bmod \tilde{\chi}, \tilde{\varphi}$ et le lemme est démontré.

5.81. Lemme. Soit S un semigroupe divisionnaire, alors, pour qu'un quadrilatère $(1, \omega; a, b)$, $\omega > 0$, possède un sousquadrilatère $(M, d; a, b)$ tel que $b = vM$, $d = va$ il faut et il suffit qu'il y ait un $d \in S$ tel que $d \leq a$, $d \leq b$, $d \geq \omega$, $d \geq ba$.

5.82. Corollaire. S étant un semigroupe divisionnaire, pour qu'un quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$, $\omega > 0$, possède un sousquadrilatère $(M, d; a, b)$ tel que $b = vM$, $d = va$, il faut et il suffit qu'il y ait un $d \in S$ tel que $d \leq a$, $d \leq b$, $d \geq \omega$, $d \geq ba'$ avec $a = \Omega a'$.

5.83. Corollaire. Tout semigroupe divisionnaire satisfait à la supposition **H** (avec $\omega_0 = 0!$).

5.9. Théorème. *Dans tout semigroupe divisionnaire S , deux chaînes aux extrémités communes $\Omega > 0$ ($\Omega \leq 1$) possèdent toujours au moins un système de raffinements isomorphes.*

Chacune des propositions 5.81—5.9 est une conséquence simple de la proposition précédente (ainsi que, quant à 5.9, du § 3).

5.91. Remarque. La question reste ouverte de savoir sous quelles conditions le théorème 5.9 conserve-t-il sa validité lorsqu'on y remplace 0 par un $\omega_0 \in S$ tel que $\omega_0 \neq 0$, donc tel que $\omega_0 > 0$ (et tel que $\omega_0 < \Omega$)? Il s'agit, bien entendu, de conditions autres (s'il en existe) que celles équivalant à ce que le semigroupe divisionnaire S soit une structure par rapport à l'ordre partiel de S (5.3).

Cette question n'est pas aisée; il y faut, à mon avis, remplacer (dans la supposition **H**) les isomorphismes (34) et (34) de 5.8 par des correspondances (isomorphes) distinctes des correspondances (χ, φ) , $(\tilde{\chi}, \tilde{\varphi})$ de 5.8. Or, dans le cas où le semigroupe divisionnaire S est une structure (archimédienne₂), ces dernières correspondances coïncident avec les connexions de Dedekind de n'importe quel quadrilatère $(a \vee b, a \wedge b; a, b)$ [19], Ch. XIV, §§ 4 et 13, il n'en est plus de même dans le cas plus général où le semigroupe S est seulement archimédien₂ (par rapport à l'ordre partiel de S). Mais, l'intérêt de la question vient surtout de ses étroits liens avec le problème de la divisibilité des entiers algébriques (voir plus loin).

5.92. Et voici, pour terminer, une application de ce qui précède aux anneaux d'intégrité ayant un élément unité (par anneau d'intégrité j'entends un anneau qui n'a pas de diviseurs de zéro; si, de plus, il est commutatif, c'est un domaine d'intégrité).

Considérons l'ensemble Π (partiellement ordonné par l'inclusion ordinaire \subseteq) de tous les idéaux bilatéralement principaux d'un anneau d'intégrité R qui est à élément unité; cet ensemble Π jouit des propriétés principales suivantes (qu'on démontre comme dans le cas où tous les idéaux de R seraient principaux¹¹):

1° Pour chaque $\alpha \in \Pi$ on a $\alpha = (a)$ où $a \in R$ est tel que $aR = Ra$, 2° l'ensemble Π est un semigroupe par rapport à la multiplication ordinaire des idéaux, 3° soient $\alpha, \beta \in \Pi$ tels que $\alpha \subseteq \beta$; alors il existe des idéaux $\gamma, \gamma' \in \Pi$ tels que $\alpha = \beta\gamma = \gamma'\beta$, 4° soient $\alpha, \xi, \eta \in \Pi$, $\alpha \supset (0)$ tels que $\alpha\xi = \alpha\eta$ ($\xi\alpha = \eta\alpha$); alors $\xi = \eta$, 5° soient $\alpha, \beta \in \Pi$, $\alpha \supset (0)$, $\beta \supset (0)$; on a alors entre les paires d'anneaux résiduels R/α , $\beta/\alpha\beta$ et R/β , $\alpha/\alpha\beta$, les isomorphismes de module suivants (permis par R à gauche resp. à droite) $R/\alpha \cong \beta/\alpha\beta$, $R/\beta \cong \alpha/\alpha\beta$; il en résulte pour $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ tels que $(0) \subset \alpha \subseteq \beta$, les isomorphismes de module $\beta\gamma/\alpha\gamma \cong \beta/\alpha \cong \gamma\beta/\gamma\alpha$ et les isomorphismes au sens de l'ordre partiel $\beta\gamma/\alpha\gamma \leftrightarrow \beta/\alpha \leftrightarrow$

¹¹ Voir, par exemple, N. Jacobson, *Theory of Rings*, Chapter III.

$\Leftrightarrow \gamma\beta/\gamma\alpha$ (dans ces derniers, $\xi/\eta =$ l'ensemble de tous les $\Theta \in \Pi$ tels que $\xi \supseteq \supseteq \Theta \supseteq \eta$).

L'ensemble Π est, d'après ces propriétés, un semigroupe divisionnaire et le théorème 5.9 y est, par conséquent, satisfait pour chaque paire de chaînes aux extrémités communes $(a) \supset (0)$ où $a \in R$ est tel que $aR = Ra$.

Reste à montrer que l'ensemble Π n'est pas, en général, une structure (par rapport à l'ordre partiel \subseteq de Π). On a d'abord à ce sujet la proposition suivante:

5.93. Théorème. *Soit R un domaine d'intégrité ayant un élément unité; alors, pour que l'ensemble Π de tous les idéaux principaux de R soit une structure archimédienne₂ (1.2), il faut et il suffit que R satisfasse au „Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung¹²⁾”; en ce cas, la structure Π est distributive.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Quant à la nécessité, voir [19], pages 217—8, et 235—6 (mais auparavant, la dualité doit y être appliquée aux résultats des pages 235—6).

5.94. Maintenant, on sait que l'ordre principal d'un corps de nombres algébriques ne satisfait pas ordinairement au „Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung“; ainsi l'ensemble (archimédien₂) Π de tous les idéaux principaux d'un tel ordre ne saurait, en général, être une structure.

LITERATURE

- [1] *O. Schreier*, Über den Jordan-Hölderschen Satz, Abhandl. Hamburg, vol. 6 (1930), 300—302.
- [2] *H. Zassenhaus*, Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier, Abhandl. Hamburg, vol. 10 (1934), 106—108.
- [3] *A. Kurosch*, Eine Verallgemeinerung des Jordan-Hölderschen Satzes, Math. Annalen, vol. 111 (1935), 13—18.
- [4] *A. Kurosch*, Le théorème Jordan-Hölder dans les structures arbitraires, Recueil de travaux dédiés à la mémoire de l'Acad. D. A. Gravé, Moscou, 1940, 110—116 (en russe).
- [5] *O. Ore*, On the foundations of abstract algebra, I. Annals of Math., vol. 36 (1935), 406—437.
- [6] *O. Ore*, On the theorem of Jordan-Hölder, Transact. of Amer. Math. Soc., vol. 41 (1937), 266—275.
- [7] *A. Halanay*, Le théorème Jordan-Hölder dans la théorie des structures, Disquisit. Math. et Phys. t. VII, fasc. 1—4 (1948), 3—23.
- [8] *A. I. Ouzkov*, On the Jordan-Hölder theorem, Recueil Math. Moscou t. 4 (nouvelle série) 1938, 31—43 (en russe, avec un résumé en anglais).
- [9] *E. George*, Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier, Journal für reine u. angewandte Math. vol. 180 (1939), 110—120.
- [10] *V. Kořinek*, Der Schreiersche Satz und das Zassenhaus'sche Verfahren in Verbänden, Věstník Král. České Spol. Nauk, vol. XIV (1941), 1—29.
- [11] *O. Ore*, Chains in partially ordered sets, Bull. of Amer. Math. Soc. vol. 49 (1943), 558—566.

¹²⁾ C'est-à-dire que chaque élément $a \in R$ (à part le zéro et les unités) soit représentable d'une façon unique comme produit d'éléments irréductibles (abstraction faite de l'ordre des facteurs et des unités s'y présentant).

- [12] *P. Lorenzen*, Eine Bemerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz, *Math. Zeitschrift*, vol. 49 (1945), 647—653.
- [13] *A. H. Lipschütz*, Du théorème Jordan-Hölder dans les structures, *Recueil Math. Moscou t. 24* (nouvelle série), 1949, 227—235 (en russe).
- [14] *D. Barbilian*, Normalités involutives, locales respectivement globales (en roumain, avec des résumés en français et en russe). *Etudes et recherches mathématiques*, vol. IV, 1953.
- [15] *M. Benado*, La notion de normalité et les théorèmes de décomposition de l'Algèbre, *Etudes et Recherches Math.* vol. I, fasc. 2, 1950, pp. 282—305 (en roumain, avec des résumés en français et en russe).
- [16] *M. Benado*, Sur les théorèmes de décomposition de l'Algèbre, *Etudes et Recherches Math.* vol. III, fasc. 1—2, 1952, pp. 263—288 (en roumain, avec des résumés en français et en russe).
- [17] *M. Benado*, Théorie abstraite des relation de normalité (en roumain avec des résumés en français et en russe). *Etudes et recherches mathématiques*, vol. IV, 1953, pp. 69—112.
- [18] *M. Ward*, A characterization of Dedekind structures, *Bull. of. Amer. Math. Soc.* vol. 45 (1939) pp. 448—451.
- [19] *G. Birkhoff*, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications, revised edition, New-York, 1948.

Резюме.

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И ТЕОРЕМА ШРЕЙЕРА ОБ УПЛОТНЕНИИ, I

МИХАИЛ БЭНАДО (Michail Benado), Бухарест.

(Поступило в редакцию 6/II 1953 г.)

Предметом указанной работы является расширение теоремы Шрейера [1] для случая частично упорядоченных множеств, которые не являются структурами, а именно при помощи следующего предположения:

Н. Мы говорим, что частично упорядоченное множество P удовлетворяет предположению **Н**, если существует элемент ω_0 так, что для всякого четырехугольника $(\Omega, \omega_0; a, b)$ можно найти подчетыреугольник $(M, d; a, b)$ так, что согласно закону частичного упорядочения имеют место изоморфизмы $\eta, \tilde{\eta}$ [19]

$$M/a \rightleftharpoons b/d (\eta), \quad M/b \rightleftharpoons a/d (\tilde{\eta}).$$

Под четырехугольником мы здесь понимаем какие-либо четыре элемента для которых выполняется

$$\Omega \geq a \geq \omega, \quad \Omega \geq b \geq \omega. \quad (1)$$

Подчетыреугольник четырехугольника (1) является всякий четырехугольник вида $(M, d; a, b)$, для которого

$$\Omega \geq M, \quad d \geq \omega.$$

Очевидно, что предположение **Н** является некоторой аналогией „второй основной теоремы об изоморфизме“.

Теперь теорему Шрейера об уплотнении можно сформулировать следующим способом:

Две цепи с общими концами $\Omega \geq \omega_0$ из P можно уплотнить по крайней мере одним способом так, что уплотненные цепи изоморфны.

Для доказательства достаточно повторить слово в слово оригинальное доказательство Шрейера посредством двойной индукции. Работа содержит еще одно доказательство этой теоремы, которое более конструктивно.

Далее в работе приведены некоторые применения этой теоремы Шрейера к теории структур и к теории делимости. Но прежде всего эта теорема будет использована во второй части работы для изучения одного довольно большого класса частично упорядоченных множеств, который содержит структуры как частный случай.