Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Novák

Онекоторых проблемах Лузина, касающихся частей натурального ряда.

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 4, 385–395

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100094

Чехословацкий математический журнал, т. 3 (78) 1953

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ЛУЗИНА, КАСАЮЩИХСЯ ЧАСТЕЙ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА.

ЙОЗЕФ НОВАК (Josef Novák), Прага.

(Поступило в редакцию 29. VI. 1953 г.)

Посвящается академику Э. Чеху ко дню его 60-летия.

Н. Н. Лузин занимался соотношениями между частями натуральных чисел. В 1947 г. он поставил четыре проблемы (I—IV), касающиеся етого раздела. Проблему IV решил *В. Серпинский*, предполагая, что верна гипотеза континуума $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. В этой статье решаются все четыре проблемы Лузина посредством *Чеховой* бикомпактной оболочки натуральных чисел, а именно: проблемы I, II при условии, что справедлива гипотеза континуума, а III и IV при более общем предположении, что $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

Н. Н. Лузин занимался некоторыми вопросами теории множеств в области натуральных чисел R. Если множество $E \subset R$ конечно, то он пользуется символическим обозначением $E \equiv 0$. Для любых двух множеств $E \subset R$, $F \subset R$, для которых имеет место $E - F \equiv 0$, им вводится соотношение $E \prec F$. Множества E и F называются *взаимно ортогональными*, если $E \cap F \equiv 0$. Множество $H \subset R$ является *покрышкой* системы $\mathfrak{M}$ подмножеств натуральных чисел, если $M \prec H$ для всякого $M \in \mathfrak{M}$. Две системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются *отделимыми друг от друга*, если у них имеются две покрышки без общего элемента; системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются *ортогональными* одна к другой, если для всякого $M \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{N}$ имеет место $M \cap N \equiv 0$. Система $\mathfrak{M}$ называется *внутренне ортогональной*, если для любых двух *различных* элементов $E \in \mathfrak{M}$, $F \in \mathfrak{M}$ имеет место $E \cap F \equiv 0$. Последовательность множеств натуральных чисел $E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_\lambda \prec \ldots$ называется *существенно возрастающей*, если для $\alpha < \beta$ имеет место $E_\beta - E_\alpha \not\equiv 0$.

Н. Н. Лузин предложил следующие четыре проблемы, касающиеся подмножеств натуральных чисел:[1])

[1]) *Н. Н. Лузин:* О частях натурального ряда, Известия Академии Наук СССР, *11*, 1947, стр. 403—410. См. также *Н. Н. Лузин:* О частях натурального ряда, Доклады Академии Наук СССР, *40*, 1943, стр. 195—199.

I. *Существует ли счетная система $\mathfrak{M}$ и система $\mathfrak{N}$ мощности $\aleph_1$, которые являются взаимно ортогональными и неотделимыми друг от друга?*

II. *Существуют ли две неотделимые друг от друга, взаимно ортогональные и существенно возрастающие последовательности множеств $E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_n \prec \ldots$ и $F_0 \prec F_1 \prec \ldots \prec F_\lambda \prec \ldots$ $(n < \omega, \lambda < \omega_1)$?*

III. *Существуют ли две существенно возрастающие последовательности множеств $E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_\lambda \prec \ldots$ и $F_0 \prec F_1 \prec \ldots \prec F_\lambda \prec \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$ такие, что имеется в точности одна общая для них покрышка, не считая покрышек, отличающихся друг от друга лишь конечным числом натуральных чисел?*

IV. *Существует ли существенно убывающая последовательность множеств $E_0 \succ E_1 \succ \ldots \succ E_\lambda \succ \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$ такая, что из предположения $E_\lambda \succ E$ для всех $\lambda < \omega_1$ следует конечность множества E?*

В. Серпинский[2]) решил проблему IV при допущении гипотезы континуума $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. При доказательстве он воспользовался методом трансфинитного построения последовательности множеств $E_0 \prec E_1 \prec \ldots$. В настоящем исследовании решены все четыре проблемы Лузина. Проблемы I и II решены при допущении гипотезы континуума, а проблемы III и IV при допущении, что $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, т. е. при более общем, чем допущение $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. При этом я для решения проблем пользуюсь другим методом, чем Н. Н. Лузин и В. Серпинский, а именно бикомпактной оболочкой натуральных чисел, введенной Чехом.

Пусть $\beta(R)$ означает бикомпактную оболочку Чеха[3]) множества всех натуральных чисел R. Множество A некоторого топологического пространства мы назовем открыто-замкнутым, если оно одновременно открыто и замкнуто в этом пространстве.

Лемма 1. *Множество $A \subset \beta(R)$ будет открыто-замкнутым тогда и только тогда, когда $A = \overline{E}$, где $E \subset R$.*

Доказательство. Всякое множество вида $\overline{E}$, где $E \subset R$, является открыто-замкнутым в $\beta(R)$, так как[4]) $\overline{E} \cap \overline{R - E} = 0$ и $\overline{E} \cup \overline{R - E} = \beta(R)$. Наоборот, если $A \subset \beta(R)$ — открыто-замкнутое множество, то $A \cap R$ будет плотным множеством в открытом A, так что $A \subset \overline{A \cap R}$. Однако, так как множество A в то же время замкнуто, $\overline{A \cap R} \subset \overline{A} = A$. Итак, достаточно положить $E = A \cap R$.

---

[2]) *W. Sierpiński:* Sur les ensembles presque continus les uns dans les autres. Fundam. Math. *35* (1948), 141—150.

См. также *W. Sierpiński:* „Sur une problème de M. J. Novák" Чехосл. мат. журн. *76* (1951), 117—122.

[3]) *E. Čech:* On bicompact spaces, Annals of Math. *38,* 1937, стр. 823—844.

[4]) *E. Čech:* цит. соч., стр. 833.

Лемма 2. *Множество $A \subset \beta(R)$ открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \overline{G}$, где G открыто в $\beta(R)$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Пусть теперь $A = \overline{G}$, где G открыто в $\beta(R)$. Тогда множество $G \cap R$ плотно в G, так что $\overline{G} = \overline{G \cap R}$, что по лемме 1 представляет открыто-замкнутое множество.

Замечание. Если $V(x) \subset \beta(R)$ — окрестность точки $x \in \beta(R)$, то существует открытая окрестность той же точки $W(x)$ со свойством $\overline{W(x)} \subset V(x)$, ибо $\beta(R)$ — регулярное пространство. По лемме 2 множество $\overline{W(x)}$ будет открыто-замкнутым в $\beta(R)$. Открыто-замкнутые множества в $\beta(R)$ образуют, следовательно, открытую базу в пространстве $\beta(R)$.

Пусть $\alpha(R)$ означает пространство $\beta(R) - R$, погруженное в пространство $\beta(R)$. Замыкание множества A в пространстве $\beta(R)$ мы будем обозначать через $\overline{A}$, а замыкание множества A в пространстве $\alpha(R)$ обозначим через αA. Рассмотрим множества открыто-замкнутые в пространстве $\alpha(R)$. Вообще справедлива теорема, что пересечение открыто-замкнутого множества с пространством, погруженным в данное топологическое пространство, является открыто-замкнутым в погруженном пространстве. Обратная теорема, однако, не всегда справедлива.[5] Но в пространстве $\alpha(R)$, погруженном в $\beta(R)$, имеет место следующая

Лемма 3. *Множество $A \subset \alpha(R)$ будет открыто-замкнутым в $\alpha(R)$ тогда и только тогда, когда $A = B \cap \alpha(R)$, где B открыто-замкнутое в $\beta(R)$ множество.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Условие, кроме того, необходимо, так как $\alpha(R)$ — замкнутое множество в $\beta(R)$, а открыто-замкнутое множество A в $\alpha(R)$ также является замкнутым в $\beta(R)$. Следовательно, множество A бикомпактно, и, в силу приведенного выше замечания, его можно покрыть конечной системой окрестностей, открыто-замкнутых в $\beta(R)$ и не имеющих общих элементов с множеством $\alpha(R) - A$. Соединение этой системы B будет, очевидно, открыто-замкнутым в $\beta(R)$ множеством и имеет место $A = B \cap \alpha(R)$.

Каждому множеству B, открыто-замкнутому в $\beta(R)$, однозначно соответствует множество $A = B \cap \alpha(R)$, открыто-замкнутое в $\alpha(R)$. Обратное утверждение не имеет, однако, места. Каждому множеству $A \subset \alpha(R)$, открыто-замкнутому в $\alpha(R)$, соответствует бесконечное число множеств $B \subset \beta(R)$, открыто-замкнутых в $\beta(R)$ таких, что $A = B \cap \alpha(R)$; но эти множества отличаются друг от друга только конечным числом натуральных чисел.

[5]) Напр., множество $A = (0, 1)$ открыто-замкнуто в пространстве $C = (-1, 0) \cup \cup (0, 1)$, погруженном в пространство $(-1, 1)$, но не является пересечением какого либо открыто-замкнутого в $(-1, 1)$ множества с пространством C.

Это рассуждение приводит нас к распределению всех подмножеств натуральных чисел по группам так, что два подмножества попадают в одну и ту же группу тогда и только тогда, когда они отличаются друг от друга конечным числом элементов. Тогда из леммы 1 и 3 следует, что существует взаимно однозначное отображение множества этих групп на систему всех множеств, открыто-замкнутых в $\alpha(R)$. Мощность системы этих групп равна $2^{\aleph_0}$; действительно, если отобразить взаимно однозначным образом множество натуральных чисел на множество всех рациональных чисел, то мы видим, что существует система $\mathfrak{P}$ $2^{\aleph_0}$ бесконечных простых (т. е. таких, что в каждой из них все члены различны) последовательностей, из которых любые две имеют не больше чем конечное число общих элементов. Отсюда следует, что мощность системы всех открыто-замкнутых в $\alpha(R)$ множеств равна $2^{\aleph_0}$. Из замечания и из леммы 3 следует, что открыто-замкнутые в $\alpha(R)$ множества образуют открытую базу пространства $\alpha(R)$. Поэтому имеет место

Теорема 1. *Пространство $\alpha(R)$ является $2^{\aleph_0}$-сепарабельным.*

Доказательство. Действительно, система всех открыто-замкнутых множеств $\overline{\overline{E}} - R \subset \alpha(R)$ таких, что $E \in \mathfrak{P}$, состоит из непересекающихся множеств и имеет мощность $2^{\aleph_0}$.

Лемма 4. *Любые два непересекающиеся замкнутые множества в пространстве $\alpha(R)$ можно отделить открыто-замкнутыми множествами.*

Доказательство вытекает без труда из бикомпактности множеств, замкнутых в $\alpha(R)$, и из того, что открыто-замкнутые множества образуют базу пространства $\alpha(R)$.

Как мы уже упомянули, каждым двум множествам $E \subset R$, $F \subset R$, принадлежащим к той же группе, т. е. таким, что $E - F \cup F - E \equiv 0$, соответствует единственное множество $f(E) = \overline{\overline{E}} - R = f(F)$, открыто-замкнутое в пространстве $\alpha(R)$. Ясно, что $f(E) = 0$ для любого конечного множества $E \equiv 0$. Если $E \cap F \equiv 0$, то пересечение $\overline{\overline{E}} \cap \overline{\overline{F}}$ состоит из конечного количества натуральных чисел; отсюда следует, что два множества E и F будут взаимно ортогональными тогда и только тогда, когда $f(E) \cap f(F) = 0$. Далее, соотношение $E \prec F$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(E) \subset f(F)$. Множество $M \subset R$ будет покрышкой системы $\mathfrak{M}$ множеств натуральных чисел тогда и только тогда, когда $\bigcup_{E \in \mathfrak{M}} f(E) \subset f(M)$, а две системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будут отделимыми друг от друга тогда и только тогда, когда открытые множества $\bigcup_{E \in \mathfrak{M}} f(E)$ и $\bigcup_{F \in \mathfrak{N}} f(F)$ можно в пространстве $\alpha(R)$ отделить открыто-замкнутыми множествами. Последовательность множеств $\{E_\lambda\}$ натуральных чисел будет существенно возрастающей тогда и только тогда, когда $f(E_{\lambda'}) \subset f(E_\lambda) \neq f(E_{\lambda'})$ для каждой пары индексов $\lambda' < \lambda$.

Теорема 2. (Дю Буа Реймонда). *Если $\{f(E_n)\}$ и $\{f(F_n)\}$ — две счетные бесконечные системы открыто-замкнутых в $\alpha(R)$ множеств и таких, что $\bigcup_1^\infty f(E_n) \cap \bigcup_1^\infty f(F_n) = 0$, то существуют два открыто-замкнутых в $\alpha(R)$ множества A и B, обладающие следующим свойством:*

$$\bigcup_1^\infty f(E_n) \subset A\,, \quad \bigcup_1^\infty f(F_n) \subset B\,, \quad A \cap B = 0\,.$$

Доказательство. Обозначим $E_n^* = E_n - \bigcup_{k=1}^n F_k$, $F_n^* = F_n - \bigcup_{k=1}^n E_k$. Тогда будет $\bigcup_1^\infty E_n^* \cap \bigcup_1^\infty F_n^* = 0$. Поэтому достаточно положить $A = f(\bigcup_1^\infty E_n^*)$, $B = f(\bigcup_1^\infty F_n^*)$.

Теорема 3. *Пусть $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Тогда существуют две неотделимые друг от друга, взаимно ортогональные и существенно возрастающие последовательности множеств натуральных чисел $E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_n \prec \ldots$ и $F_0 \prec F_1 \prec \ldots \prec F_\lambda \prec \ldots$ $(n < \omega, \lambda < \omega_1)$.*

Доказательство. Теорема 3, очевидно, равносильна следующей теореме:

Пусть $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Тогда существуют две существенно возрастающие последовательности $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\lambda \subset \ldots$ $(n < \omega,\ \lambda < \omega_1)$ открыто-замкнутых в пространстве $\alpha(R)$ множеств такие, что множества $\bigcup_0^\infty A_n$ и $\bigcup_{\lambda<\omega_1} B_\lambda$ не пересекаются и что их нельзя отделить в пространстве $\alpha(R)$ открыто-замкнутыми множествами.

Пусть F означает множество натуральных чисел вида 2^{n+1}, $n = 0, 1, \ldots$, и пусть E_n означает множество всех тех натуральных чисел, которые не делятся на число 2^{n+1}. Обозначим далее $A = \bigcup_0^\infty f(E_n)$. Множество $f(F)$ открыто-замкнуто в $\alpha(R)$, и имеет место $f(F) \cap f(E_n) = 0$ для $n = 0, 1, \ldots$. Поэтому $\alpha A \subset \alpha(R) - f(F)$. Очевидно, αA не будет открытым множеством.

Построим теперь, пользуясь методом трансфинитной конструкции, существенно возрастающую последовательность в пространстве $\alpha(R)$ открыто-замкнутых множеств $C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_\lambda \subset \ldots$ таким образом: Для $\lambda = 0$ положим $C_0 = f(F)$. Если мы уже определили существенно возрастающую последовательность множеств C_λ, открыто-замкнутых в $\alpha(R)$ и таких, что $C_\lambda \cap \alpha A = 0$ для всех $\lambda < \varrho$, то можно построить открыто-замкнутое множество $C_\varrho \subset \alpha(R)$ следующим образом, различая при этом три случая: 1. ϱ — изолированное порядковое число, 2. ϱ конфинально с ω, 3. ϱ конфинально с ω_1. В первом случае существует непустое открыто-замкнутое множество $C \subset \alpha(R) - \alpha A - C_{\rho-1}$; положим $C_\rho = C \cup C_{\rho-1}$. Очевидно, $C_\rho \cap \alpha A = 0$. В случае 2. существует обыкновенная бесконечная последовательность индексов $\lambda_n \to \varrho$. Тогда $\bigcup_{\lambda<\varrho} C_\lambda = \bigcup_1^\infty C_{\lambda_n}$, и, по теореме 2, существует открыто-замкнутое множество $C_\rho \supset \bigcup_{\lambda<\varrho} C_\lambda$ такое, что $C_\varrho \cap \alpha A = 0$. Случай 3. распадается на две возможности: 3а. $\alpha(\bigcup_{\lambda<\varrho} C_\lambda) \cap \alpha A = 0$, 3б. $\alpha(\bigcup_{\lambda<\varrho} C_\lambda) \cap \alpha A \neq 0$. В случае 3а, по лемме 4, существует открыто-замкнутое множество $C_\rho \supset \bigcup_{\lambda<\varrho} C_\lambda$ такое, что $C_\varrho \cap \alpha A = 0$. Если же настанет случай 3б, мы прекращаем построение. Если бы случай 3б не наступил, можно было бы построить существенно возрастающую последовательность открыто-замкнутых множеств C_λ, $\lambda < \omega_2$; система открыто-замкнутых множеств вида $C_{\lambda+1} - C_\lambda$ $(\lambda < \omega_2)$ была бы дизъюнктной и имела бы мощность $\aleph_2$, что противоречит предположению $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ и теореме 1. Поэтому существует индекс ϱ_0, конфинальный с ω_1, и существенно возрастающая последовательность открыто-замкнутых множеств C_λ типа ω_{ϱ_0}. Пусть $\mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_\lambda < \ldots \to \varrho_0$, где $\lambda < \omega_1$. Обозначим $C_{\mu\lambda} = B_\lambda$ и обратим внимание на существенно возрастающие последовательности открыто-замкнутых множеств $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, где $A_n = f(E_n)$ и $B_0 \subset B_1 \subset \subset \ldots \subset B_\lambda \subset \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$. Имеем $A_n \cap B_\lambda = 0$ для любого $n < \omega$ и $\lambda < \omega_1$. Эти две последовательности, однако, нельзя отделить открыто-замкнутыми множествами, так как $\alpha A \cap \alpha(\bigcup_{\lambda<\omega_1} B_\lambda) = \alpha A \cap \alpha(\bigcup_{\lambda<\varrho_0} C_\lambda) \neq 0$.

Теорема 3 представляет собой решение II проблемы Лузина (при допущении гипотезы континуума). Этим решена и проблема I. Рассмотрим открыто-замкнутые множества $A_{n+1} - A_n$ и $B_{\lambda+1} - B_\lambda$. Мы видим, что существует внутренне ортогональная счетная система $\mathfrak{M}$ и внутренне ортогональная система $\mathfrak{N}$ мощности $\aleph_1$ частей натурального ряда, которые взаимно ортогональны и неотделимы друг от друга.

Теорема 4. *Пусть $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Тогда существует последовательность частей натурального ряда $E_0 \succ E_1 \succ \ldots \succ E_\lambda \succ \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$ существенно убывающая и такая, что ни для одной бесконечной части натурального ряда $E \subset R$ не имеет места $E_\lambda \succ E$ при любых $\lambda < \omega_1$.*

Доказательство. Теорема 4 равносильна следующей теореме:

Пусть $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Тогда имеется существенно убывающая последовательность $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\lambda \supset \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$ открыто-замкнутых в $\alpha(R)$ множеств такая, что $\operatorname{int} \bigcap_{\lambda<\omega_1} A_\lambda = 0$.

Докажем эту последнюю теорему. Обозначим символом $i_0, i_1 \ldots i_\lambda \ldots$ $(\lambda < \varrho)$ двоичную трансфинитную последовательность нулей и единиц $i_\lambda = 0$ или $= 1$ порядкового типа ϱ. Для $\varrho = 0$ положим $R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\varrho)} =$

$= R$. Если мы уже определили бесконечные части натурального ряда $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)}$ так, что каждое множество $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \sigma')} - R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \sigma)}$ будет для $\sigma' < \sigma \leqq \varrho$ бесконечным множеством, а именно для всех порядковых чисел $\varrho < \tau$, где $\tau < \omega_1$, то определим теперь бесконечные части натурального ряда $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \tau)}$, различая следующие два случая:

1. τ — изолированное порядковое число;
2. τ — предельное порядковое число.

В случае 1. возьмем разложение

$$R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \tau - 1)} = R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots 0 \, (\lambda < \tau)} \cup R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots 1 \, (\lambda < \tau)}$$

множества $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \tau - 1)}$ на две бесконечные непересекающиеся части. В случае 2. пусть $i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \tau)$ представляет произвольную, но фиксированную двоичную последовательность типа τ. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots \to \tau$. Для каждого $n = 0, 1, \dots$ выберем натуральное число $r_{\lambda_n} \in R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \lambda_n)} - R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \lambda_n + 1)}$ и обозначим $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \tau)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} r_{\lambda_n}$. Последнее множество будет, очевидно, бесконечным. По этому трансфинитному правилу проводится построение бесконечной части натурального ряда $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)}$ $(\varrho < \omega_1)$ такой, что $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \sigma')} \supset R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \sigma)}$ для $\sigma' < \sigma < \omega_1$ и что всякое множество $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \sigma')} - R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)}$ бесконечно.

Рассмотрим непустые множества $f(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)}) = \beta(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)}) - R$, открыто-замкнутые в пространстве $\alpha(R)$. Пусть $i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \omega_1)$ — произвольная, но фиксированная двоичная последовательность типа ω_1. Тогда последовательность открыто-замкнутых бикомпактных множеств

$$f(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < 0)}) \supset f(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < 1)}) \supset \dots \supset f(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)}) \supset \dots \quad (\varrho < \omega_1)$$

будет существенно убывающей и ее пересечение

$$\bigcap_{\varrho < \omega_1} f(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)}) \neq 0 ;$$

это следует из того, что множества натуральных чисел $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)} - R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho + 1)}$ бесконечны, так что $f(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)}) \neq f(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho + 1)})$, и из бикомпактности открыто-замкнутого множества в бикомпактном пространстве $\alpha(R)$. Докажем теперь, что соответствие между пересечениями вида $\bigcap_{\varrho < \omega_1} f(R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots (\lambda < \varrho)})$ и двоичными последовательностями типа ω_1 будет взаимно однозначным. Действительно, из допущения $i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots \neq j_0 j_1 \dots j_\lambda \dots$ для $\lambda < \omega_1$ можно заключить, что существует наименьший индекс σ такой, что $i_\sigma \neq j_\sigma$; поэтому $R_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots i_\sigma (\lambda < \sigma + 1)} \cap R_{j_0 j_1 \dots j_\lambda \dots j_\sigma (\lambda < \sigma + 1)} =$

$= 0$, так что и $f(R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots i_\sigma}\ (\lambda < \sigma+1)) \cap f(R_{j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots j_\sigma}\ (\lambda < \sigma+1)) = 0$, откуда следует, что множества $\bigcap_{\varrho < \omega_1} f(R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}\ (\lambda < \varrho))$ и $\bigcap_{\varrho < \omega_1} f(R_{j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots}\ (\lambda < \varrho))$ не пересекаются, значит, и не равны друг другу. Этим мы доказали, что система всех пересечений вида $\bigcap_{\varrho < \omega_1} f(R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}\ (\lambda < \varrho))$ дизъюнктна и имеет мощность $2^{\aleph_1}$.

Если бы теперь $\operatorname{int} \bigcap_{\varrho < \omega_1} f(R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}\ (\lambda < \varrho)) \neq 0$ для любой двоичной последовательности $i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda < \omega_1)$, то в пространстве $\alpha(R)$ существовала бы дизъюнктная система открытых множеств мощности $2^{\aleph_1}$. Это противоречит предположению $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ и теореме 1. Поэтому имеется хоть одна двоичная последовательность $k_0 k_1 \ldots k_\lambda \ldots (\lambda < \omega_1)$ такая, что $\operatorname{int} \bigcap_{\varrho < \omega_1} f(R_{k_0 k_1 \ldots k_\lambda \ldots}\ (\lambda < \varrho)) = 0$. Этим теорема доказана, ибо достаточно положить $A_\varrho = f(R_{k_0 k_1 \ldots k_\lambda \ldots}\ (\lambda < \varrho))$ для $\varrho < \omega_1$.

Теорема 4 дает решение IV проблемы Лузина. Этой теоремой мы воспользуемся также для решения III проблемы Лузина, которое выражено

Теоремой 5. *Пусть $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Тогда имеются две существенно возрастающие последовательности частей нарурального ряда $E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_\lambda \prec \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$ и $F_0 \prec F_1 \prec \ldots \prec F_\lambda \prec \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$, которые взаимно ортогональны и имеют в точности одну общую покрышку, не считая покрышек, отличающихся друг от друга только лишь конечным количеством натуральных чисел.*

Доказательство. Эта теорема, очевидно, равносильна теореме:

Пусть $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Тогда имеются две существенно возрастающие последовательности в пространстве $\alpha(R)$ открыто-замкнутых множеств $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\lambda \subset \ldots$ и $B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\lambda \subset \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$ таких, что $\bigcup_{\lambda < \omega_1} A_\lambda \cap \bigcup_{\lambda < \omega_1} B_\lambda = 0$ и что единственным открыто-замкнутым множеством, содержащим соединение $\bigcup_{\lambda < \omega_1} (A_\lambda \cup B_\lambda)$, будет пространство $\alpha(R)$.

Докажем эту последнюю теорему. Пусть $R = L \cup S$, где L — множество всех нечетных, а S — множество всех четных натуральных чисел. Пусть $E_0 \succ E_1 \succ \ldots \succ E_\lambda \succ \ldots$ и $F_0 \succ F_1 \succ \ldots \succ F_\lambda \succ \ldots$, где $E_\lambda \subset L$, $F_\lambda \subset S$ для $\lambda < \omega_1$, представляют две существенно убывающие последовательности частей натурального ряда со свойством, указанным в теореме 4. Тогда $f(E_0) \supset f(E_1) \supset \ldots f(E_\lambda) \supset \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$ и $f(F_0) \supset f(F_1) \supset \ldots \supset f(F_\lambda) \supset \ldots$ $(\lambda < \omega_1)$ будут двумя убывающими последовательностями открыто-замкнутых множеств в пространстве $\alpha(R)$ такими, что $\operatorname{int} \bigcap_{\lambda < \omega_1} f(E_\lambda) = \operatorname{int} \bigcap_{\lambda < \omega_1} f(F_\lambda) = 0$. Теперь достаточно положить $A_\lambda = f(L) - f(E_\lambda)$ и $B_\lambda = f(S) - f(F_\lambda)$. Очевидно, эти множества образуют две существенно возрастающие последовательности

открыто-замкнутых множеств таких, что $A_\lambda \cap B_\mu = 0$ для всех $\lambda < \omega_1$ и $\mu \prec \omega_1$ и что $\alpha \bigcup\limits_{\lambda<\omega_1} A_\lambda = \alpha L$ и $\alpha \bigcup\limits_{\lambda<\omega_1} B_\lambda = \alpha S$, так что $\alpha(\bigcup\limits_{\lambda<\omega_1} A_\lambda \cup B_\lambda) =$
$= \alpha(\bigcup\limits_{\lambda<\omega_1} A_\lambda \cup \bigcup\limits_{\lambda<\omega_1} B_\lambda) = \alpha L \cup \alpha S = \alpha(R)$.

Summary.

ON SOME PROBLEMS OF LUZIN CONCERNING THE SUBSETS OF NATURAL NUMBERS.

JOSEF NOVÁK, Praha.

(Received June 29, 1953.)

Following N. N. Luzin, two subsets E and F of the set of all naturals R are said to be *orthogonal* if their common part $E \cap F$ is finite. We shall use the symbol $E \prec F$ denoting that the set $E - F$ is finite. The (transfinite) sequence of sets $E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_\lambda \prec \ldots$, where $E_\lambda \subset R$, is *strictly* increasing if the set $E_\beta - E_\alpha$ is infinite for every $\beta > \alpha$. The subset $H \subset R$ is called a *cover* of a system $\mathfrak{M}$ — elements of which are subsets in R — if $M \prec H$ for every $M \in \mathfrak{M}$. Two systems $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are *separated* if there exist two their disjoint covers. The systems $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are *orthogonal* provided that any two sets $M \in \mathfrak{M}$ and $N \in \mathfrak{N}$ are orthogonal.

N. N. Luzin put forward the following four problems concerning the subsets of natural numbers:

I. *Are there a countable system $\mathfrak{M}$ and a system $\mathfrak{N}$ of power $\aleph_1$ which are orthogonal and which cannot be separated one from another?*

II. *Are there two orthogonal and strictly increasing sequences of sets $E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_n \prec \ldots$ and $F_0 \prec F_1 \prec \ldots \prec F_\lambda \prec \ldots$ where $E_n \subset R$, $F_\lambda \subset R$ for $n < \omega$ and $\lambda < \omega_1$ which cannot be separated one from another?*

III. *Are there two strictly increasing sequences of sets $E_0 \prec E_1 \prec \ldots \prec E_\lambda \prec \ldots$ and $F_0 \prec F_1 \prec \ldots \prec F_\lambda \prec \ldots$ where $E_\lambda \subset R$, $F_\lambda \subset R$ for $\lambda < \omega_1$, such that there exists only one common cover irrespective of covers which differ from one another by a finite number of naturals?*

IV. *Is there a strictly decreasing sequence of sets $E_0 \succ E_1 \succ \ldots \succ E_\lambda \succ \ldots$, where $E_\lambda \subset R$ for $\lambda < \omega_1$, such that the assumption $E_\lambda \succ E$ for all λ implies that E is finite?*

Using the method of transfinite induction W. Sierpiński constructed — under the assumption that the continuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ is true — a transfinite sequence of sets satisfying the condition of the problem IV. In the present paper I give the solution (positive) of problems I and II under the continuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ and that of III and IV under the weaker supposition

that $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. The suitable tool for the solution of the problems mentioned above was the ČECH bicompactification $\beta(R)$ of the set of all naturals R.

The set $\beta(E) - R$ whereby $E \subset R$ will be denoted by $f(E)$. The set $f(E)$ is *ambiguous* (i. e. open and closed simultaneously) in $\beta(R) - R$ and $f(E) = f(F)$ if and only if the symmetrical difference $E - F \cup F - E$ is finite. The system of all sets $f(E)$, $E \subset R$, has the power $2^{\aleph_0}$. It contains all ambiguous sets in $\beta(R) - R$ which form an open basis in $\beta(R) - R$. From this follows that two subsets E and F in R are orthogonal if and only if $f(E) \cap f(F) = 0$ further $E \prec F$ if and only if $f(E) \subset f(F)$; the subset $H \subset R$ is a cover of a system $\mathfrak{M}$ if and only if $\bigcup_{E \in \mathfrak{M}} f(E) \subset f(H)$; two systems $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are separated if and only if the sets $\bigcup_{E \in \mathfrak{M}} f(E)$ and $\bigcup_{E \in \mathfrak{N}} f(E)$ can be separated in $\beta(R) - R$ by two ambiguous sets. Now, the problems of Luzin are equivalent to topological problems. For instance, the problem I is equivalent to the following problem I*: Are there in $\beta(R) - R$ a countable disjoint system $\mathfrak{M}^*$ and a disjoint system $\mathfrak{N}^*$ of power $\aleph_1$ of ambiguous sets such that the unions $\bigcup \mathfrak{M}^*$ and $\bigcup \mathfrak{N}^*$ are disjoint and cannot be separated by any two ambiguous sets?

The solution of the problem II is contained in

Theorem 3. *Let $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Then there exist two strictly increasing sequences of ambiguous sets $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ and $B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\lambda \subset \ldots$ $(n < \omega, \lambda < \omega_1)$ such that $\bigcup A_n \cap \bigcup B_\lambda = 0$ and that the unions $\bigcup_0^\infty A_n$* and *$\bigcup_{\lambda < \omega} B_\lambda$ cannot be separated in $\beta(R) - R$ by any two ambiguous sets.*

The main features of the proof are as follows: Let E_n $(n = 0, 1, \ldots)$ be the set of all naturals m such that $m2^{-n-1}$ non ϵ R. Let F be the set of all naturals 2^{n+1}, $n = 0, 1, \ldots$. Then it is possible to construct a transfinite strictly increasing sequence of ambiguous sets $C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_\lambda \subset \ldots$, whereby $C_0 = f(F)$ and $\bigcup f(E_n) \cap \bigcup C_\lambda = 0$. Since the cardinality of the system of all ambiguous sets in $\beta(R) - R$ is $2^{\aleph_0}$ (which equals to $\aleph_1$ according to our assumption) there exists the least ordinal $\mu < \omega_2$ such that

$$\beta(\bigcup_{n=0}^{\infty} f(E_n)) \cap \beta(\bigcup_{\lambda < \mu\omega_1} C_\lambda) \neq 0 .$$

Therefore we can put $A_n = f(E_n)$ and $B_\lambda = C_{\mu_\lambda}$, where $\mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_\lambda < \mu\omega_1$ and $\lambda < \omega_1$.

Let $\mathfrak{M}^*$ be the system of all sets $A_{n+1} - A_n$, $n = 0, 1, \ldots$ and $\mathfrak{N}^*$ the system of all sets $B_{\lambda+1} - B_\lambda$, $\lambda < \omega_1$. It is easy to see that the systems $\mathfrak{M}^*$ and $\mathfrak{N}^*$ satisfy the conditions of the problem I*.

Now the problems III and IV of Luzin can be solved by means of the following

Theorem 4. *Let $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. Then there exists in $\beta(R) - R$ a strictly decreasing sequence of ambiguous sets $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\lambda \supset \ldots$, $\lambda < \omega_1$, such that $\operatorname{int} \bigcap\limits_{\lambda<\omega_1} A_\lambda = 0$.*

The following idea is used to prove this theorem: By a transfinite construction we get infinite sets $R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\varrho)} \subset R$ where $i_\lambda = 0$ or $= 1$ and $\varrho < \omega_1$, such that

$$R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\sigma')} \supset R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\sigma)}$$

and the set $R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\sigma')} - R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\sigma)}$ is infinite for $\sigma' < \sigma < \omega_1$ and further such that $R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 0\, (\lambda<\varrho)} \cap R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 1\, (\lambda<\varrho)} = 0$. Since $\beta(R) - R$ is a bicompact space we have $\bigcap\limits_{\varrho<\omega_1} f(R_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda<\varrho)}) \neq 0$ for any sequence $i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda < \omega_1)$. The system of all products like these is disjoint and has the power $2^{\aleph_1}$. Since — by our supposition — $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ there exists a subsystem of power $2^{\aleph_1}$ whose elements contain no interior points. Consequently, $\operatorname{int} \bigcap\limits_{\varrho<\omega_1} f(R_{j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots (\lambda<\varrho)}) = 0$ for at least one sequence $j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots (\lambda < \omega_1)$.

If we put $E_\varrho = R_{j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots (\lambda<\varrho)}$ for $\varrho < \omega_1$ we get a sequence satisfying the condition of the problem IV.

Now, let L be the set of all odd naturals. Let $E'_0 \succ E'_1 \succ \ldots \succ E'_\lambda \succ \ldots$ and $F'_0 \succ F'_1 \succ \ldots \succ F'_\lambda \succ \ldots$ where $E'_\lambda \subset L$ and $F'_\lambda \subset R - L$ for $\lambda < \omega_1$, be strictly decreasing sequences such that $\operatorname{int} \bigcap\limits_{\lambda<\omega_1} f(E'_\lambda) = 0 = \operatorname{int} \bigcap\limits_{\lambda<\omega_1} f(F'_\lambda)$. If we put $E_\lambda = L - E'_\lambda$ and $F_\lambda = (R - L) - F'_\lambda$ we get a (positive) solution of the problem III.

ОТ РЕДАКЦИИ

В статье *Шт. Шварц,* К теории периодических полугрупп, т. **3**(**78**), 1953, стр. 7—21 необходимо исправить следующие недосмотры:

на стр. 8,	строчка 3 сверху	вместо	a^{n-m}	должно быть $a^{m(n-m)}$,
,, ,, 9,	,, 4—5 ,,	,,	$\{a, a^2, \ldots a^{\varrho-1}, e\}$	,, ,, $\{a, a^2, \ldots, a^{\varrho-1}, e, \ldots\}$,
,, ,, 9,	,, 16 снизу	,,	$\{a, a^2, \ldots a^{\varrho-1}, a^\varrho\}$	,, ,, $\{a, a^2, \ldots, a^{\varrho-1}, a^\varrho, \ldots\}$,
,, ,, 15,	,, 13—15 ,,	,,	x^{s-m}	,, ,, $x^{m(s-m)}$.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd, Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, tel. 236375. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 100,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 25,—. — Novinové výplatné povoleno Okrskovým pošt. úřadem Praha 022; j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací pošt. úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, třída Rudé armády 171. — Náklad 800 výtisků.