Vlastimil Pták

О полных топологических линейных пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 4, 301–364

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100092

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. 3 (78) ПРАГА 12. XII. 1953 г. • № 4

Работы этого номера посвящаются

АКАДЕМИКУ ЭДУАРДУ ЧЕХУ

ко дню его 60-летия

О ПОЛНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВЛАСТИМИЛ ПТАК (Vlastimil Pták), Прага.

(Поступило в редакцию 11/XI 1952 г.)

Посвящается академику Эдуарду Чеху ко дню его 60-летия.

Главной целью настоящей работы является обсуждение теоремы о непрерывности обратного оператора в выпуклых топологических линейных пространствах общего типа. Подробный анализ показывает, что сущность упомянутой теоремы выражена в следующих двух определениях:

Непрерывное линейное отображение одного выпуклого линейного топологического пространства на другое мы назовем почти открытым, если ни одно открытое множество не отображается им на нигде не плотное множество. Выпуклое топологическое линейное пространство X мы назовем B-полным, если каждое непрерывное почти открытое линейное отображение пространства X на произвольное выпуклое топологическое линейное пространство Z будет открытым.

Дается простая характеризация пространств, двойственных B-полным пространствам. Можно ожидать, что понятие B-полноты будет тесно связано с понятием полноты. Для этого необходимо подробно изучить пространства, полные в смысле *А. Вейля*. Дается непосредственная характеризация элементов пополнения произвольного выпуклого топологического линейного пространства. Отсюда вытекает интересная характеризация пространств, двойственных полным пространствам.

Вторая часть работы посвящена изучению пространств всех непрерывных функций на данном топологическом пространстве. Указаны способы построения некоторых топологических пространств так, чтобы соответствующие пространства непрерывных функций обладали наперед заданными свойствами. Используя эти построения, мы получаем (помимо других результатов) примеры, показывающие, что гомоморфный образ полного линейного пространства не будет обязательно полным и что полное пространство еще не должно быть B-полным.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ.

Одним из важнейших результатов функционального анализа бесспорно является знаменитая теорема Банаха о непрерывности обратного оператора. В несколько сжатой, но наиболее важной для применений, формулировке эта теорема имеет следующий вид:

Пусть X — полное нормированное линейное пространство, и пусть φ — непрерывное линейное отображение X на нормированное пространство Z. Тогда, если Z будет второй категории в себе, то отображение φ будет открытым, а пространство Z полным.

Подробный анализ показывает, что теорема основывается на следующем свойстве полных нормированных пространств: образ единичной сферы является всегда или неплотным или открытым в Z. Одной из задач настоящей работы будет исследование, при каких условиях и в какой форме эту теорему можно распространить на наиболее широкую категорию линейных пространств.

Дело в том, что развитие функционального анализа очень скоро показало, что теория нормированных пространств не может удовлетворить всем требованиям, которые на нее налагаются ввиду применений в математическом анализе. Таким образом, понятие нормированного линейного пространства оказалось недостаточным; это обстоятельство, так же как и параллельно протекающее развитие общей топологии, привело к необходимости дальнейшего обобщения понятия нормированного линейного пространства. Естественным обобщением понятия нормированного линейного пространства является понятие выпуклого топологического линейного пространства. Однако теория нормированных пространств уже сама по себе естественным образом требует введения понятия выпуклого топологического линейного пространства, так как известно, что отношение между данным нормированным пространством и пространством с ним сопряженным, как нормированным пространством, не является, вообще говоря, симметричным. Так же хорошо известно, что эта ассимметрия неизбежно приводит в теории к некоторым затруднениям, которые в конце концов должны проявиться, как ограничение ее применимости в приложениях. Понятие же выпуклого топологического линейного пространства, в отличие от предыдущего, позволяет нам ввести простое соотношение двойственности между двумя пространствами [3], в котором каждое из этих пространств является пространством всех линейных функционалов другого, так что их отношение вполне симметрично, и оба они совершенно равноправны.

Представляется поэтому естественным и целесообразным задаться вопросом об обобщении известных из теории нормированных пространств теорем на топологические пространства общего типа. Этому и посвящается настоящая работа, причем мы в первую очередь займемся вопросами, связанными с теоремой Банаха и с понятием полноты. Уже в теории нормированных линейных пространств выяснилась принципиальная важность предположения о полноте пространства и его связь с теоремой Банаха, так что сразу же возникает вопрос, в какой форме нужно распространить понятие полноты на выпуклые топологические линейные пространства, чтобы известные из теории нормированных пространств теоремы остались справедливыми.

Первые результаты в этом направлении получил И. ф. Нейман [11]. С тех пор этими вопросами занимался ряд авторов, которые дали несколько различных определений полноты. Нас будет прежде всего интересовать общее определение полноты для произвольного равномерного пространства, данное А. Вейлем [13]. Возникает прежде всего вопрос, каким образом сформулировать теорему о непрерывности обратного оператора в выпуклых топологических линейных пространствах общего типа. Более подробный анализ показывает, что сущность свойства Банаха характеризуется следующим определением:

Выпуклое топологическое линейное пространство мы назовем B-полным, если оно обладает следующим свойством: пусть φ — непрерывное линейное отображение пространства X на выпуклое топологическое линейное пространство Z такое, что никакая окрестность нуля в X не отобразится на неплотное в Z множество; тогда φ будет открытым.

Самым важным этапом дальнейших исследований будет простой прием, который позволит нам без труда охарактеризовать пространства, двойственные B-полным пространствам. Пользуясь этим приемом, мы покажем, что пространство X будет B-полным тогда и только тогда, если двойственное ему пространство Y удовлетворяет следующему условию:

(B) *Если Q — подпространство Y такое, что для любой окрестности нуля U в X пересечение $Q \cap U^*$ замкнуто, то Q замкнуто.*

(Притом U^* всегда обозначает множество, полярное к U (см. определение (2,4) настоящей работы). В частности, в случае нормированного пространства, если U обозначает единичную сферу в X, то U^* будет тождествено с единичной сферой пространства Y).

Известно [9], что подпространство Q пространства Y, двойственного полному нормированному линейному пространству X, замкнуто, поскольку его пересечение с замкнутой единичной сферой пространства Y замкнуто. Можно поэтому ожидать, что будет полезно заняться подробным изучением строения пространств, двойственных пространствам, являющимся естественным обобщением полных нормированных линейных пространств. В этой работе мы покажем, что это будут как раз пространства, полные в смысле А. Вейля.

Самым важным результатом, которого мы достигнем в этом направлении, является непосредственная характеризация элементов пополнения данного выпуклого топологического линейного пространства. Этот результат, который мы выводим двумя различными способами, дает нам одновременно и новое доказательство известной теоремы о существовании пополнения. В то же время он позволяет нам получить представление о строении пространств, двойственных полным пространствам. Нам удастся установить следующее характерное свойство: пространство X будет полным тогда и только тогда, если двойственное ему пространство Y удовлетворяет следующему условию:

(C) *Если Q — гиперплоскост в Y такая, что для любой окрестности нуля U в X пересечение $Q \cap U^*$ замкнуто, то и Q замкнута.*

Сравнение с предыдущим условием (B) показывает, что оба свойства весьма родствены друг другу. Согласно только-что цитированному результату Крейна и Шмульяна [9] эти два условия равносильны, если X является нормированным пространством. Этот результат можно без труда распространить и на пространства, в которых точка 0 имеет счетный характер. Автор довольно долгое время считал, что удастся доказать эквивалентность этих двух свойств, т. е. что теорему Банаха можно будет распространить на произвольные полные пространства. Только когда автор убедился, что эквивалентность этих двух свойств упрямо сопротивляется всем попыткам доказать ее, он обратился к изучению некоторых конкретных пространств.

Подходящим типом таких пространств являются пространства $C(T)$ всех непрерывных функций на данном топологическом пространстве T, топологизированные с помощью псевдонорм, соответствующих компактным подмножествам пространства T, так как, по мнению автора, изучение зависимостей между свойствами пространства $C(T)$ и свойствами пространства T может привести к интересным результатам в общей топологии. Этим вопросам посвящена вторая часть настоящей работы.

Наметим вкратце важнейшие результаты этой части. Прежде всего очень легко охарактеризовать топологические пространства T, для которых пространство $C(T)$ является полным. Введем для этой цели простое понятие. Функцию $x(t)$, определенную на вполне регулярном топологическом пространстве T, мы назовем почти непрерывной, если для каждого компактного $K \subset T$ частичная функция x_K будет непрерывной. Потом нетрудно доказать, что $C(T)$ будет полным тогда и только тогда, если каждая почти непрерывная функция на T непрерывна. С понятием почти непрерывной функции тесно связано понятие почти замкнутого множества. Множество $M \subset T$ мы назовем почти замкнутым, если для любого компактного $K \subset T$ пересечение $M \cap K$ замкнуто. Ясно на первый взгляд, что в пространстве, в котором каждое почти замкнутое множество замкнуто, будет и каждая почти непрерывная функция непрерывной.

Используя эти результаты, мы покажем, что гомоморфный образ полного выпуклого топологического линейного пространства не будет непременно полным. Этот результат может показаться несколько неожиданным, ибо известно, что гомоморфный образ полного нормированного пространства всегда полный. (Под гомоморфным отображением мы понимаем, как обычно, линейное отображение, являющееся одновременно непрерывным и отркытым).

Построим для этого вполне регулярное топологическое пространство T, в котором каждое почти замкнутое множество является замкнутым, так что $C(T)$ будет полным. При этом T будет содержать замкнутое множество B такое, что топология пространства T индуцирует на B дискретную топологию. Определим теперь линейное отображение $C(T)$ в $C(B)$ так, что каж дой непрерывной функции на T поставим в соответствие ее частичную функцию на B. Мы обнаружим, что это отображение непрерывно и открыто. Так как топология пространства B дискретна, то пространство $C(B)$ будет, очевидно, полным. Пространство T построено однако так, что $C(T)$ отобразится только на некоторое плотное подпространство $C(B)$, отличное от $C(B)$, так что образ пространства $C(T)$ не будет полным. (Это значит, что не всякую функцию, непрерывную на B, можно непрерывно распространить на все пространство T, так что T не является нормальным).

В дальнейшем мы исследуем связь между B-полнотой пространства $C(T)$ и свойствами пространства T. Получится интересный результат.

Если $C(T)$ является B-полным, то каждое множество $M \subset T$, одновременно плотное в T и почти замкнутое, непременно совпадает с T. Возникает вопрос, теперь уже чисто топологического характера, в каждомли вполне регулярном пространстве, в котором почти непрерывные функции являются непрерывными, будут уже и почти замкнутые множества замкнутыми. Ответ отрицателен, как видно из примера пространства, приведенного проф. М. Катетовым. Этим пространством T уже раньше по предложению проф. Э. Чеха занимался проф. Й. Новак, который установил, что T не является нормальным. Из предыдущего непосредственно следует, что $C(T)$ есть полное, но не B-полное пространство.

В заключение можно сказать, что все исследования настоящей работы выявляют довольно тесную связь с некоторыми чисто топологическими вопросами, и представляется весьма вероятным, что в этом направлении будут получены дальнейшие интересные результаты.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ УЖЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

В этом параграфе мы даем сводку основных определений и известных теорем из теории выпуклых топологических линейных пространств. Все они содержатся в работах [1], [3], [7], [8], [10], [12].

Под линейным пространством мы понимаем непустое множество X, являющееся аддитивной абелевой группой, где каждому действительному числу поставлен в соответствие некоторый оператор, причем должны выполняться следующие требования (элементы пространства мы обозначаем малыми латинскими буквами, действительные числа — малыми греческими; элемент, получающийся в результате применения к элементу $x \in X$ оператора, соответствующему действительному числу α, обозначаем через αx):

(1) оператор, соответствующий сумме чисел α_1 и α_2, тождественно равен сумме операторов, соответствующих α_1 и α_2

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\, x = \alpha_1 x + \alpha_2 x$$

(2) оператор, соответствующий произведению чисел α_1 и α_2, тождественно равен произведению операторов, соответствующих α_1 и α_2

$$(\alpha_1 \alpha_2)\, x = \alpha_1(\alpha_2 x)$$

(3) оператор, соответствующий действительному числу 1, есть единичный оператор

$$1x = x\,.$$

Если X — линейное пространство, λ — действительное число, $A \subset X$, $B \subset X$, то $A + B$ означает множество всех $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$, и аналогично λA означает множество всех λa, где $a \in A$.

Множество $L \subset X$ назовем линейным подпространством пространства X, если имеет место

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in L$$

для любых $x_1, x_2 \in L$, и для любых действительных чисел λ_1, λ_2.

Каждое линейное подпространство пространства X само является в легко понятном смысле линейным пространством. Если L — линейное подпространство пространства X, мы будем писать $L \subset\subset X$. Если $M \subset X$, то нетрудно убедиться в том, что имеется наименьшее линейное подпространство в X, содержащее M. Мы будем его называть линейной оболочкой множества M и обозначать через $\mathfrak{L}(M)$.

Отображение f пространства X в множество действительных чисел мы назовем линейной функцией, если оно одновременно аддитивно и однородно. (Во избежание недоразумений мы обращаем внимание читателя на то, что выражением линейный функционал мы будем пользоваться для обозначения линейных функций, подчиняющихся некоторым требованиям непрерывности).

Множество $Q \subset X$ мы назовем гиперплоскостью в X, если существует ненулевая линейная функция f на X такая, что Q является как раз множеством всех нулевых точек функции f. В таком случае мы будем говорить о гиперплоскости, образованной линейной функцией f. Нетрудно убедиться, что все линейные функции, образующие данную гиперплоскость Q, отличаются друг от друга только ненулевым числовым фактором. Каждая гиперплоскость в X будет, очевидно, подпространством в X.

Множество $K \subset X$ мы назовем выпуклым, если с каждыми двумя точками оно содержит и отрезок, соединяющий эти точки. Мы назовем его симметричным, если с каждым элементом x оно содержит и элемент $-x$. Множество $K \subset X$ назовем симметричным выпуклым телом в X, если оно симметрично и выпукло, и притом $\mathfrak{L}(K) = X$.

Легко обнаружить, что симметричное и выпуклое множество $K \subset X$ будет симметричным выпуклым телом в X тогда и только тогда, если для каждого $x \in X$ существует $\lambda > 0$, так, что $x \in \lambda K$.

Пусть X — произвольное множество. Пусть u — система подмножеств множества X такая, что

(1) пустое множество и множество X принадлежат u

(2) соединение произвольной системы множеств, принадлежащих u, также принадлежит u

(3) пересечение произвольной конечной системы множеств, принадлежащих u, также принадлежит u.

Тогда мы называем u топологией на X, а (X, u) — топологическим пространством. Если $M \subset X$, то замыкание множества M при топологии u мы обозначим через uM.

Если u_1 и u_2 две топологии на X такие, что $u_1 \supset u_2$, то для каждого $M \subset X$ имеет место

$$u_1 M \subset u_2 M \ .$$

Так как в дальнейшем топология нас будет интересовать главным образом как оператор замыкания, то не помешает ввести следующее соглашение:

Если $u_1 \supset u_2$, то мы будем говорить, что топология u_2 сильнее, чем u_1, и писать $u_1 \leqq u_2$.

Здесь могло бы возникнуть недоразумение, так как в литературе еще нет установившейся терминологии. Многие авторы пользуются названием „более сильная топология" как раз в обратном смысле. Обращаем внимание читателя на то, что по смыслу нашего соглашения т. наз. слабая топология линейных пространств является как раз самой сильной из всех эквивалентных ей топологий.

Множество X мы назовем выпуклым топологическим линейным пространствам, если

(1) X — линейное пространство

(2) на X определена топология u такая, что имеет место

(21) отображение топологического пространства $X \times X$ в X, ставящее паре (x_1, x_2) в соответствие элемент $x_1 + x_2$, непрерывно

(22) отображение топологического пространства $E_1 \times X$ в X, ставящее паре (λ, x) в соответствие элемент λx, непрерывно

(23) существует полная система окрестностей нуля, состоящая из симметричных выпуклых тел

(24) одноточечное множество, содержащее элемент 0, замкнуто.

Для топологии, имеющей свойства (21)—(24), мы введем для сокращения название: допустимая топология на X. Легко установить, что свойство (24) равносильно требованию, чтобы пересечение всех окрестностей нуля было как раз точкой 0.

Из свойств (21)—(24) топологии u и из общего результата Понтрягина, касающегося топологических групп, вытекает, что каждое выпуклое топологическое линейное пространство вполне регулярно.

Пусть f есть линейная функция, определенная на выпуклом топологическом линейном пространстве X. Если f непрерывна, то мы будем называть ее линейным функционалом на X.

(2,1) *Пусть f есть линейная функция, определенная на выпуклом топологическом линейном пространстве X. Потом f будет линейным функционалом на X тогда и только тогда, если множество* $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) = 0]$ *замкнуто в X.*

Вспомним следующую хорошо известную теорему, равносильную теореме Хан-Банаха.

(2,2) *Пусть X есть выпуклое топологическое линейное пространство, и пусть $K \subset X$ выпукло. Пусть $a \in X$, a non $\in \overline{K}$. Тогда существует линейный функционал f на X такой, что*

$$\sup f(K) > f(a)\ .$$

Пусть теперь X — линейное пространство, и пусть u_1 и u_2 — две различные допустимые топологии на X. Так как (X, u_1) и (X, u_2) вполне регулярны, то множества всех функций на X, непрерывных при топологии u_1 и u_2, соответственно, будут отличаться друг от друга. Тем не менее может наступить (и, как правило, наступает) случай, что $u_1 \neq u_2$, а множества всех линейных функционалов на (X, u_1) и (X, u_2) совпадают. Поэтому целесообразно ввести следующее определение:

Пусть X — линейное пространство. Пусть u_1 и u_2 — две топологии на X такие, что (X, u_1) и (X, u_2) являются выпуклыми топологическими линейными пространствами. Мы скажем, что u_1 и u_2 эквивалентны (обозначение $u_1 \sim u_2$), если каждая линейная функция, непрерывная в одной из них, будет непрерывной и в другой.

Из предыдущей теоремы непосредственно вытекает следующий результат:

(2,3) *Топологии u_1 и u_2 эквивалентны тогда и только тогда, если для любого выпуклого $K \subset X$ будет*

$$u_1 K = u_2 K .$$

Пусть (X, u) — произвольное выпуклое топологическое линейное пространство и пусть Y означает линейное пространство всех линейных функционалов на X. Тогда на X можно ввести новую допустимую топологию тем, что в качестве полной системы окрестностей нуля в X возьмем как раз систему всех множеств вида

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\,[|f_i(x)| \leqq 1, \ i = 1, 2, \ldots, n] ,$$

где $f_1, \ldots, f_n$ пробегает все конечные системы линейных функционалов на X. Эта топология называется слабой топологией, соответствующей топологии u; мы обозначим ее через $\bar{u}$. Нетрудно видеть, что $u \leqq \bar{u}$ и что $\bar{u} \sim u$. Так как для определения топологии $\bar{u}$ достаточно знать только пространство всех линейных функционалов на X, то ясно, что имеет место

$$u' \sim u \Rightarrow u' \leqq \bar{u}.$$

Это значит, что среди всех допустимых топологий на X, эквивалентных данной топологии u, существует самая сильная топология.

Не так легко доказать ([1], [8], [10]) существование допустимой топологии такой, что $\underline{u} \sim u$, причем имеет место

$$u' \sim u \Rightarrow u' \geqq \underline{u} .$$

Эту топологию мы будем называть минимальной топологией, эквивалентной топологии u.

Пусть теперь X и Y — два выпуклых топологических линейных пространства. Мы скажем, что X и Y двойственны друг другу, если для каждого $x \in X$ и для каждого $y \in Y$ определено действительное число xy так, что выполняются следующие требования:

(1а) Если $f(x) = xy_o$, где x пробегает X, а y_o есть фиксированный элемент $y_o \in Y$, то f есть линейный функционал на X.

(1б) Если $g(y) = x_o y$, где y пробегает Y, а x_o есть фиксированный элемент $x_o \in X$, то g есть линейный функционал на Y.

(2а) Если f есть линейный функционал на X, то существует $y_o \in Y$ так, что для всех $x \in X$ будет $f(x) = xy_o$.

(2б) Если g есть линейный функционал на Y, то сущесвтует $x_o \in X$ так, что для всех $y \in Y$ будет $g(y) = x_o y$.

(3a) Пусть $y_0 \in Y$ такой, что имеет место $xy_0 = 0$ для всех $x \in X$. Тогда $y_0 = 0$.

(3б) Пусть $x_0 \in X$ такой, что имеет место $x_0 y = 0$ для всех $y \in Y$. Тогда $x_0 = 0$.

Ясно, что если X и Y — два двойственных друг другу выпуклых топологических линейных пространства, то они останутся двойственными друг другу даже если в каждом из них заменить данную топологию произвольной эквивалентной ей допустимой топологией.

Можно доказать следующую теорему:

(2,4) *Пусть (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство. Тогда существует выпуклое топологическое линейное пространство Y такое, что X и Y двойственны друг другу.*

Пусть теперь X и Y — двойственные друг другу пространства. Если $A \subset X$, то пусть A^* означает множество

$$\underset{y}{\mathrm{E}}\,[|Ay| \leqq 1]\,.^{*)}$$

Множество A^* мы будем называть множеством, полярным к множеству A. Легко установить, что для каждого A множество A^* будет симметричным выпуклым и замкнутым в Y. (Нет нужды предписывать, в которой из возможных топологий пространства Y, ибо речь идет о выпуклом множестве).

В дальнейшем нам понадобится следующее легкое следствие теоремы (2,2):

(2,5) *Для каждого A множество A^{**} является наименьшим симметричным выпукнутым множеством, содержащим A.*

Наметим д о к а з а т е л ь с т в о: Прежде всего, ясно, что $A \subset A^{**}$ и что множество A^{**} является симметричным выпуклым и замкнутым в X. Если теперь обозначить через C наименьшее симметричное выпуклое замкнутое множество, содержащее A, то будет $C \subset A^{**}$.

Если бы теперь существовало $x \in A^{**}$ так, что $x \operatorname{non} \in C$, то, согласно (2,2), существовало бы $y \in Y$ так, что

$$|Cy| \leqq 1\,, \quad xy > 1\,.$$

Так как $A \subset C$ и $|Cy| \leqq 1$, будет $y \in A^*$. Так как $y \in A^*$ и $x \in A^{**}$, должно быть $|xy| \leqq 1$, что противоречит допущению.

---

*) $|Ay| \leqq 1$ значит: Для любого $a \in A$ будет $|ay| \leqq 1$. По мнению автора это не совсем обычное обозначение не лишено известных преимуществ, и он решил пользоваться им везде, где оно упрощает запись. Так например, если M — множество чисел, то неравенство $M \geqq 0$ означает, что все числа множества M неотрицательны и т. п.

Обратим внимание на то, что из теоремы (2,5) вытекает следствие

(2,6) *Если множество $K \subset X$ симметрично и выпукло, то*

$$\overline{K} = K^{**} .$$

Итак, если K — замкнутое симметричное выпуклое множество, то K совпадает с множеством K^{**}. Это обстоятельство вместе с регулярностью пространства X приводит нас к следующему соглашению:

Под окрестностью нуля мы всегда понимаем симметричную выпуклую и замкнутую окрестность нуля.

Основную роль в теории выпуклых топологических линейных пространств играют следующие две теоремы:

(2,7) *Пусть X и Y — два выпуклых пространства, двойственных друг другу. Пусть U есть окрестность нуля в пространстве X. Тогда множество U^* будет компактным в слабой топологии пространства Y.*

(2,8) *Пусть X и Y — два выпуклых топологических линейных пространства, двойственных друг другу. Пусть множество $B \subset X$ симметрично, выпукло и компактно в слабой топологии пространства X. Тогда B^* будет окрестностью нуля в минимальной топологии пространства Y.*

Одна из задач настоящей работы заключается в том, чтобы покатзаь возможность усиления этих двух теорем.

§ 3. ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

В настоящем параграфе мы займемся прежде всего пополнением данного выпуклого топологического линейного пространства. Нам удастся несложным способом дать непосредственное описание элементов пополнения данного пространства и тем самым получить одновременно представление о строении пространств, двойственных полным пространствам, причем в виде побочного результата мы получим простое доказательство теоремы о существовании пополнения данного выпуклого топологического линейного пространства. Главным результатом является теорема о связи между полнотой данного пространства и строением пространства ему двойственного.

Пусть дано выпуклое топологическое линейное пространство R. Пусть X — плотное подпространство в R. Тогда каждый непрерывный линейный функционал, определенный на X, можно одним и только одним способом непрерывно распространить на все пространство R. Если, наоборот, y есть непрерывный линейный функционал, определенный на R, то частичная функция y_X будет непрерывным линейным функционалом, определенным на X.

Это значит, что пространство всех непрерывных линейных функционалов на R и пространство всех непрерывных линейных функционалов на X будут в качестве абстрактных линейных пространств изоморфными. Итак, поскольку нас не интересует их топологизация, мы будем их всегда отождествлять и говорить, что R и X имеют одно и то же пространство линейных функционалов Y.

Ясно, что если v_R и v_X — две топологии на Y такие, что R двойствено (Y, v_R), и одновременно X двойствено (Y, v_X), то не может иметь места $v_R = v_X$; более того, эти топологии даже не могут быть эквивалентными.

(3,1) *Пусть дано выпуклое топологическое линейное пространство R. Пусть X — плотное подпространство в R. Пусть U — произвольная окрестность нуля в R. Тогда*

$$U = \overline{U \cap X}.$$

Доказательство: Пусть $x \in U$ и пусть W есть открытая окрестность точки x. Тогда существует $0 < \lambda < 1$ так, что $\lambda x \in W$. Так как $0 < \lambda < 1$, будет $\lambda x \in \operatorname{int} U$. Множество $G = \operatorname{int} U \cap W$ поэтому непусто и открыто, так что существует

$$z \in G \cap X \subset W \cap (U \cap X).$$

Итак, $x \in \overline{U \cap X}$, что и требовалось доказать.

На протяжении всего параграфа мы зададимся фиксированным выпуклым топологическим линейным пространством (X, u). Пусть далее (Y, u_X^*) означает двойственное ему пространство в слабой топологии.

(3,2) **Определение:** *Выпуклое множество $K \subset Y$ мы назовем почти замкнутым, если для любой u-окрестности нуля U в пространстве X множество $K \cap U^*$ будет замкнутым в Y.*

Мы видим, что понятие почти замкнутого подпространства в Y зависит от выбора топологии пространства X. В частности, если топология u пространства X есть слабая топология, то каждое подпространство в Y будет почти замкнутым.

(3,3) **Определение:** *Линейную функцию r, определенную на Y мы назовем почти непрерывной, если для любого U частичная функция r_{U^*} будет непрерывной в топологии u_X^*.*

Теперь имеет место следующая теорема:

(3,4) *Пусть r — линейная функция, определенная на Y. Введем обозначение $Q = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[ry = 0]$. Тогда r будет почти непрерывной в том и только в том случае, когда гиперплоскость Q почти замкнута.*

В дальнейшем нам понадобится подобная теорема для линейных функций, не являющихся определенными на всем Y. Во избежание повторения подобных рассуждений мы тут же докажем эту более общую теорему. Наша теорема (3,4) будет из нее вытекать, как частный случай.

Пусть (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство, (Y, u^*_X) — пространство, двойственное ему в слабой топологии.

(3,4) *Пусть $L \subset\subset Y$ и пусть $g(y)$ есть линейная функция, определенная на L. Пусть для любого действительного α*

$$Q_\alpha = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[y \in L,\ g(y) = \alpha]\ .$$

Тогда следующие утверждения будут равносильными друг другу:

(1) *$g(y)$ являться u^*_X-непрерывной на любом $L \cap U^*$*

(2) *для любого α и любого U^* множество $Q_\alpha \cap U^*$ относительно замкнуто в L,*

(3) *для любого U^* множество $Q_0 \cap U^*$ относительно замкнуто в L.*

Доказательство: Очевидно, имеют место импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

Пусть теперь справедливо утверждение (3); докажем, что имеет место (2). В самом деле, возьмем некоторое Q_α и некоторое U^*. Имеем две возможности: или $Q_\alpha \cap U^*$ пусто, тогда мы у цели; или существует $y_\alpha \in Q_\alpha \cap U^*$ — тогда мы утверждаем, что

$$Q_\alpha \cap U^* = (y_\alpha + 2(Q_0 \cap U^*)) \cap U^*\ .$$

Правая часть содержится, очевидно, в левой. Возьмем затем

$$y'_\alpha \in Q_\alpha \cap U^*\ .$$

Тогда, во — первых, $y'_\alpha - y_\alpha \in Q_0$ и во — вторых, $y'_\alpha - y_\alpha \in 2U^*$, ибо как y_α, так и y'_α лежит в U^*, откуда $y'_\alpha \in y_\alpha + (Q_0 \cap 2U^*) = y_\alpha + 2(Q_0 \cap U^*)$, и наше равенство доказано.

Так как по предположению множество $Q_0 \cap U^*$ относительно замкнуто в L, то отсюда следует, что и множество $Q_\alpha \cap U^*$ относительно замкнуто в L.

Пусть теперь справедливо утверждение (2) и докажем, что имеет место (1).

Пусть произвольно заданы U^*, $y_0 \in L \cap U^*$ и число $\varepsilon > 0$. (Конечно, мы предполагаем, что $g \neq 0$). Проведем гиперплоскости в L:

$$Q_- = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[y \in L\ ,\quad gy = gy_0 - \varepsilon]\ ,$$

$$Q_+ = \underset{g}{\mathrm{E}}\,[y \in L\ ,\quad gy = gy_0 + \varepsilon]\ .$$

Множество $W = (Q_- \cap U^*) \cup (Q_+ \cup U^*)$ по предположению относительно замкнуто в L. Следовательно, существует симметричная выпуклая окрестность нуля V (при топологии u^*_X) так, что $y_0 + V$ не пересекается с W. Теперь мы утверждаем, что имеет место импликация

$$y \in U^* \cap L\ ,\quad y \in y_0 + V \ \Rightarrow\ |gy - gy_0| \leqq \varepsilon\ .$$

Предположим, наоборот, что существует $y \in U^* \cap L$, $y \in y_o + V$ так, что $gy < gy_0 - \varepsilon$.

Следовательно, $g(y_0 - y) > \varepsilon > 0$.

Положим $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{g(y_0 - y)}$, так что будет $0 < \lambda < 1$.

Так как

$$y \in U^* \cap L \cap (y_o + V)$$
$$y_o \in U^* \cap L \cap (y_o + V),$$

и эти два множества выпуклы, то будет также

$$y_- = y_o + \lambda(y - y_0) \in U^* \cap L \cap (y_0 + V)\,.$$

Легко однако убедиться, в том что

$$gy_- = gy_o - \varepsilon\,,$$

следовательно,

$$y_- \in Q_- \cap U^* \cap (y_0 + V) \subset W \cap (y_0 + V)\,,$$

что противоречит предположению.

В целях дальнейшего изложения мы уже теперь обобщим определение (3,3).

(3,5) Определение: *Пусть дано $L \subset\subset Y$ и некоторая линейная функция $g(y)$, определенная на L. Мы назовем g почти непрерывной функцией, если выполнено одно (а, значит, и все) из свойств, указанных в предыдущей теореме.*

Для дальнейших применений приведем теперь без доказательства хорошо известную теорему о существовании пополнения [13]. Впрочем, из последующих рассуждений легко получится в качестве побочного результата новое доказательство этой теоремы для выпуклых топологических линейных пространств.

(3,6) *Если (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство, то существует выпуклое топологическое линейное пространство (R, u_R) так, что*

(1) $X \subset R$,

(2) *топология u_R индуцирует на X топологию u,*

(3) *X плотно в R,*

(4) *R есть полное пространство.*

Пространство R является (с точностью до изоморфизна) однозначно определенным и называется пополнением пространства X.

Теперь мы можем сформулировать усиление теоремы (2,7), о котором мы уже говорили.

(3,7) *Пусть (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство, (Y, u_X^*) — двойственное ему пространство в слабой топологии. Пусть R*

означает пополнение пространства X и пусть u_R^* означает слабую топологию на Y, соответствующую пространству R. Тогда имеет место:

Если U есть произвольная окрестность нуля в X, то множество U^* является u_R^*-компактным.

Доказательство: Существует окрестность нуля U_R в пространстве R так, что $U = U_R \cap X$. В то же время из (3,1) нам известно, что

$$U_R = \overline{U_R \cap X} = \overline{U}\ ,$$

так что из леммы (2,6) следует $U_R = U^{**}$, где на этот раз вторая звездочка означает, конечно, полярность в R. Отсюда

$$U_R^* = U^{***} = U^*\ .$$

Так как U_R — окрестность нуля в R, то U_R^* компактно в топологии u_R^*. Но мы как раз только что доказали, что $U^* = U_R^*$.

Сформулируем теперь главную теорему настоящего параграфа.

(3,8) *Пусть (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство. Тогда X будет полным в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) *если Q — почти замкнутая гиперплоскость в Y, то Q замкнута,*

(2) *если r — почти непрерывный функционал на Y, то r будет непрерывным.*

Доказательство: Эквивалентность этих двух условий очевидна из (3,4).

Для большей ясности мы разделим доказательство главной теоремы на несколько этапов.

(1) *Пусть пространство (X, u) неполно. Тогда существует гиперплоскость $Q \subset\subset Y$ так, что Q почти замкнута, но не замкнута.*

Пусть (X, u) неполно. Возьмем тогда (R, u_R) так, чтобы оно имело все свойства, перечисленные в (3,6). Так как X неполно, будет $X \neq R$. Так как X плотно в R, (X, u) и (R, u) обладают одним и тем же множеством непрерывных функционалов Y.

Введем теперь на Y слабые топологии u_X^* и u_R^*. Так как $X \subset R$, будет $u_X^* \geqq u_R^*$. Однако, ввиду того, что равенство $X = R$ не имеет места, u_X^* и u_R^* не являются эквивалентными. Следовательно, существует гиперплоскость $Q \subset\subset Y$, являющаяся u_R^*-замкнутой, но u_X^*-плотной. Докажем, что Q почти замкнута. Тем самым будет доказано, что условие (1) не выполнено.

Рассмотрим теперь множество $Q \cap U^*$.

Так как Q — u_R^*-замкнуто, а U^* — u_R^*-компактно, $Q \cap U^*$ будет компактно в топологии u_R^*; но так как $u_X^* \geqq u_R^*$, множество $Q \cap U^*$ будет компактно и в топологии u_X^*, то есть u_X^*-замкнуто.

Теперь нам нужно доказать вторую часть нашего утверждения:

(2) *Если пространство X полно, то каждый почти непрерывный функционал на Y будет непрерывным.*

Прежде всего обратим внимание на то, что каждому $x \in X$ легко понятным образом соответствует некоторый непрерывный, а, значит, и почти непрерывный функционал на Y. Следовательно, если через R обозначить линейное пространство всех почти непрерывных функционалов на Y, то можно себе представить, что произведено погружение $X \subset R$.

Доказательство мы проведем в основном таким образом, что покажем, что пополнение произвольного пространства тождественно с пространством всех почти непрерывных функционалов на Y.

Тем самым будет доказано и то, что нам нужно. В самом деле, если X полно, то оно совпадает со своим пополнением, следовательно, каждый почти непрерывный функционал на Y образован некоторым элементом пространства X и будет поэтому непрерывным.

Пусть (X, u) — произвольное выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. Пусть R означает линейное пространство всех почти непрерывных функционалов на Y, так что $R \supset X$.

Тогда на R можно определить выпуклую топологию u_R так, что

(1) *(R, u_R) есть полное пространство,*

(2) *u_R индуцирует на X топологию u,*

(3) *$u_R X = R$.*

(21) Прежде всего уясним себе, что для любого $r \in R$ и любого U^* множество rU^* ограничено. Это следует непосредственно из того, что U^* является u_X^*-компактным.

Для каждого U введем определение

$$U_R = \mathop{\mathrm{E}}_{r} [r \in R, \quad |rU^*| \leqq 1] ,$$

так что U_R есть тело в R.

Определим теперь топологию u_R тем, что за полную систему окрестностей нуля в топологии u_R возьмем как раз систему всех U_R, где U пробегает все u-окрестности нуля в X.

Пересечением всех U_R будет как раз точка 0, ибо соединение всех U^* есть все пространство Y.

Очевидно для любого U будет $U = X \cap U_R$, так что топология u_R индуцирует на X как раз топологию u.

Докажем теперь, что Y является как раз множеством всех непрерывных линейных функционалов на (R, u_R).

Итак, пусть z — непрерывный линейный функционал на (R, u_R). Тогда существует U так, что z будет ограниченным на U_R. Можно предположить

$$\sup |U_R z| = 1 .$$

Нужно найти $y \in Y$ так, чтобы для всех $r \in U_R$ имело место

$$ry = rz .$$

Пусть даны $r_1, r_2, \ldots, r_n \in U_R$. Пусть для любого $y \in U^*$ символ $\varphi(y)$ означает следующий вектор в E_n:

$$\varphi(y) = (r_1 y, r_2 y, \ldots, r_n y) \in E_n .$$

Обозначим $A = \varphi(U^*)$. Это симметричное выпуклое множество в E_n. Но тогда эти функции $r_i y$ будут на U^* непрерывными функциями y в топологии u_X^*. Так как U^* есть u_X^*-компактно, то A будет компактным. Теперь мы утверждаем, что вектор

$$(r_1 z, r_2 z, \ldots, r_n z) \in A .$$

Действительно, в противном случае, согласно (2,2), существовали бы λ_i так, что

$$\sup_{y \in U^*} \Sigma\, \lambda_i r_i y < \Sigma\, \lambda_i r_i z .$$

Если обозначить $r_o = \Sigma\, \lambda_i r_i$, будет

$$\sup_{y \in U^*} r_o y < r_o z .$$

При подходящей нормировке r_o можно предположить

$$\sup_{y \in U^*} |r_o y| = \sup_{y \in U^*} r_o y \leqq 1 , \quad r_o z > 1 .$$

Однако, согласно предложению $\sup |U_R z| = 1$,

$$|rU^*| \leqq 1 \Rightarrow |rz| \leqq 1 ,$$

и получается противоречие.

Для каждого $r \in U_R$ пусть $Q(r)$ означает

$$Q(r) = \mathop{\mathrm{E}}_{y} [y \in U^* , \quad ry = rz] .$$

Так как r непрерывно на U^*, это будут замкнутые части U^*.

Мы только что доказали, что они образуют центрированную систему. Ее пересечение является как раз искомым y.

Итак, мы доказали, что (R, u_R) имеет то же пространство линейных функционалов, как и (X, u). Отсюда X плотно в R, т. е. $u_R X = R$.

(22) Остается доказать, что (R, u_R) полно. Доказательство проведем с помощью доказанной уже части (1). А именно, докажем следующее утверждение:

Если ввести в Y топологию u_R^*, то каждая гиперплоскость $Q \subset\subset Y$, почти замкнутая относительно (R, u_R), будет u_R^*-замкнутой.

Пусть дана произвольная окрестность нуля U в пространстве X. Мы утверждаем, что

$$U_R^* = U^* .$$

В самом деле, если мы обратим внимание на то, как было определено U_R, то можно написать

$$U_R = U^{**} ,$$

где вторая звездочка означает, конечно, полярность в R. Тогда будет

$$U_R^* = U^{***} = U^* .$$

Итак, каждое U^* будет даже u_R^*-компактным.

Возьмем теперь гиперплоскость $Q \subset\subset Y$, почти замкнутую относительно (R, u_R). Тогда имеем:

для любого U множество $Q \cap U_R^*$ будет u_R^*-замкнутым, или u_R^*-компактным.

В силу только что доказанного равенства $U_R^* = U^*$, справедливо также: для любого U множество $Q \cap U^*$ будет u_R^*-компактным.

Но так как $u_X^* \geqq u_R^*$, это значит, что гиперплоскость Q почти замкнута относительно (X, u), так что Q будет u_R^*-замкнутой, что и требовалось доказать. Этим завершается доказательство главной теоремы.

(3,9) Ход доказательства части (2) теоремы (3,8) был следующий:

Прежде всего мы показали, что пространство (X, u) можно погрузить в (R, u_R) и что первое пространство плотно во втором. Это было сделано в части (21). Часть (22) была посвящена доказательству полноты пространства (R, u_R). Для доказательства полноты (R, u_R) мы использовали результаты пункта (1) доказательства теоремы (3,8), т. е. в сущности теорему о существовании пополнения произвольного выпуклого топологического линейного пространства.

Изложим еще один способ доказательства теоремы (3,8), не использующий теоремы (3,6). Больше того, при этом способе доказательства мы дадим одновременно доказательство существования пополнения.

Докажем прежде всего, что на R можно определить топологию u_R так, что (X, u) будет топологически погружено в (R, u_R) и лежит в нем плотно; это можно провести дословно тем же самым способом, как в части (21) доказательства теоремы (3,8).

Остается доказать полноту пространства (R, u_R). Пусть $\mathfrak{A}$ — центрированная система замкнутых множеств в (R, u_R), содержащая произвольно малые множества. Пусть дано произвольное $y \in Y$. Обозначим через $\mathfrak{A}(y)$ систему всех множеств вида $\overline{Ay}$, где $A \in \mathfrak{A}$. Нетрудно убедиться, в том, что $\mathfrak{A}(y)$ есть центрированная система Коши замкнутых множеств на прямой.

Пересечение системы $\mathfrak{A}(y)$ обозначим через $r_o y$. Таким образом мы получили некоторую линейную функцию r_o, определенную на Y.

Докажем теперь следующее утверждение: если дано произвольное U и произвольное $\varepsilon > 0$, то существует $A \in \mathfrak{A}$ так, что

$$r \in A \Rightarrow |(r - r_o)\, U^*| \leqq \varepsilon\,.$$

Действительно, пусть дано U и число $\varepsilon > 0$. Тогда существует $A \in \mathfrak{A}$ так, что A будет порядка малости εU.*) Это значит, что для произвольного $y \in U^*$ множество Ay имеет диаметр $\leqq \varepsilon$. Возьмем теперь фиксированное $r \in A$. Если $y \in U^*$, то $ry \in Ay$, $r_o y \in \overline{Ay}$. Итак, мы имеем

$$|ry - r_0 y| \leqq \varepsilon\,.$$

Так как y было выбрано произвольно, то будет

$$|(r - r_o)\, U^*| \leqq \varepsilon\,.$$

Из только что доказанного утверждения следует прежде всего, что r_o — почти непрерывный функционал. Это ясно из того, что для любого U^* и любого $\varepsilon > 0$ функцию r_o можно равномерно апроксимировать на U^* с помощью непрерывной функции r с погрешностью не больше ε.

Докажем далее, что r_o лежит во всех $A \in \mathfrak{A}$.

Пусть дано $A \in \mathfrak{A}$. Возьмем произвольное U. Согласно предыдущему, существует $A_U \in \mathfrak{A}$ так, что

$$r \in A_U \Rightarrow |(r - r_o)\, U^*| \leqq 1\,.$$

Теперь существует $r \in A \cap A_U$. Из предыдущего неравенства тогда следует $r \in r_o + U$. Так как U было произвольным, это значит, что для любого U множество $r_o + U$ пересекается с A, или $r_o \in A$.

(3,10) *Пусть* (X, u) — *полное выпуклое топологическое линейное пространство.*

Пусть $u_1 \leqq u$, $u_1 \sim u$. *Тогда пространство* (X, u_1) *также полно.*

Доказательство: Пусть Q — гиперплоскость в Y такая, что для любого U_1 множество $Q \cap U_1^*$ замкнуто. Так как $u_1 \leqq u$, то множество $Q \cap U^*$ будет замкнутым и для любого U, так что из полноты (X, u) следует, что Q замкнуто.

Итак, согласно (3,8), пространство (X, u_1) полно.

(3,11) В теореме (3,7) мы обнаружили следующее обстоятельство: если (X, u) неполно, то существует топология v пространства Y такая, что $v \leqq u_X^*$, v non $\sim u_X^*$, причем каждое U^* будет даже v-компактным. Теорема (3,8) дает нам теперь возможность показать, что это свойство характерно для неполных пространств. Действительно, имеет место

*) Множество A имеет порядок малости εU означает: если $r_1, r_2 \in A$, то $r_1 - r_2 \in \varepsilon U$.

(3,11) *Пусть* (X, u) — *выпуклое топологическое линейное пространство, пусть* (Y, u_X^*) — *двойственное ему пространство в слабой топологии. Пространство* (X, u) *неполно тогда и только тогда, если на пространстве* Y *существует топология* v *такая, что* $v \leqq u_X^*$, v non $\sim u_X^*$, *и притом каждое множество* U^* *является* v*-компактным.*

Доказательство: Ввиду упомянутой уже теоремы (3,7) можно ограничиться доказательством достаточности приведенного условия. Итак, пусть v означает топологию на Y такую, что $v \leqq u_X^*$, v non $\sim u_X^*$ и притом каждое U^* есть v-компактно. Так как $v \leqq u_X^*$, v non $\sim u_X^*$, существует функционал r на Y, являющийся v-непрерывным, но не u_X^*-непрерывным. Если Q означает нулевую гиперплоскость функционала r, то Q будет v-замкнутой, но u_X^*-плотной.

Если U^* произвольно, то $Q \cap U^*$ будет v-компактным; но так как $v \leqq u_X^*$, то $Q \cap U^*$ будет компактным и в топологии u_X^*, а, значит, и u_X^*-замкнутым. Это значит, что гиперплоскость Q почти замкнута, но не замкнута. Согласно (3,8) пространство не является полным.

*

Представляется естественным и, как выяснится в дальнейшем, целесообразным, поставить вопрос, справедливали для почти непрерывных функционалов теорема, аналогичная теореме Хана-Банаха о распространении. В настоящем параграфе мы покажем, что каждый почти непрерывный функционал, определенный на подпространстве L пространства Y, можно распространить на подпространство размерности на единицу большей. К сожалению, дальнейшие результаты показывают, что этот результат не поддается значительному улучшению.

Докажем прежде всего некоторые вспомогательные теоремы.

(3,12) *Пусть* (X, u) — *выпуклое топологическое линейное пространство. Пусть* N — *симметричное выпуклое замкнутое множество. Тогда*

$$\bigcap_{\lambda>1} \lambda N = N .$$

Доказательство: Обозначим $M = \bigcap_{\lambda>1} \lambda N$. Очевидно будет $N \subset M$. Предположим, что существует $m \in M$, m non $\in N$. Тогда существует $y \in Y$, так, что

$$my > \sup Ny . \qquad (1)$$

Если обозначить $\sigma = \sup Ny$, то будет, очевидно, $\sigma \geqq 0$. Для любого $\lambda > 1$ существует $n_\lambda \in N$ так, что $m = \lambda n_\lambda$. Отсюда

$$my = \lambda n_\lambda y \leqq \lambda\sigma$$

для любого $\lambda > 1$. Это означает, что $my \leqq \sigma$, что противоречит неравенству (1). Итак, $M \subset N$, и доказательство закончено.

Из теоремы (3,12) вытекает следующее усиление теоремы (3,1):

(3,13) *Пусть (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство. Пусть U — окрестность нуля в X. Пусть $L \subset\subset X$. Тогда*

$$uL \cap U = u(L \cap U) .$$

Доказательство: Прежде всего ясно, что $u(L \cap U) \subset uL \cap U$. Пусть, наоборот, $x \in uL \cap U$. Пусть $\lambda > 1$. Тогда множество λU будет окрестностью точки x. Если V — произвольная окрестность точки x, то множество $V \cap \lambda U$ пересечет L, т. е. для любого V будет

$$V \cap (L \cap \lambda U) \neq 0 .$$

Это значит, что $x \in u(L \cap \lambda U) = \lambda u(L \cap U)$. Так как λ было произвольное число $\lambda > 1$, то, согласно предыдущему, $x \in u(L \cap U)$, и доказательство закончено.

(3,14) *Пусть $g(y)$ — почти непрерывный функционал, определенный на $L \subset\subset Y$. Тогда для любого U^* функционал g будет ограниченным на U^*.*

Доказательство: Докажем прежде всего, что $g(y)$ равномерно непрерывен на $L \cap U^*$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда существует слабая окрестность нуля V так, что имеет место

$$y \in L \cap V \cap U^* \Rightarrow |g(y)| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Если теперь y_1 и y_2 — две точки множества $L \cap U^*$, для которых $y_1 - y_2 \in V$, то мы получим $\frac{1}{2}(y_1 - y_2) \in L \cap U^* \cap V$ так что из приведенной выше импликации вытекает оценка $|g(y_1) - g(y_2)| \leqq \varepsilon$. Итак, равномерная непрерывность доказана.

По известной теореме $g(y)$ можно распространить на $\overline{L \cap U^*}$ с сохранением равномерной непрерывности. Однако множество $\overline{L \cap U^*}$ компактно.

Приступим теперь к доказательству теоремы о распространении.

(3,15) *Пусть $L \subset\subset Y$ и пусть $g(y)$ — почти непрерывный функционал, определенный на L. Пусть y_0 non $\in L$. Обозначим через L_0 подпространство в Y, образованное точкой y_0. Пусть $L_1 = L + L_0$. Тогда существует функционал $g_1(y)$, определенный и почти непрерывный на L_1, являющийся распространением $g(y)$.*

Доказательство: возможны два случая:

(1) для любого U будет

$$(\overline{L \cap U^*}) \cap (L + L_0) \subset L \tag{1}$$

(2) первый случай не имеет места.

Обозначим кроме того $Q = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[y \in L,\ g(y) = 0]$. (Мы предполагаем, конечно, что $g \neq 0$.) Предположение почти-непрерывности равносильно, согласно (3,4), тому, что для каждого U имеет место включение

$$\overline{(Q \cap U^*)} \cap L \subset Q . \tag{2}$$

Случай (1): Если $y_1 \in L_1$, то будет однозначно $y_1 = y + \lambda y_o$, где $y \in L$. Положим теперь

$$g_1(y_1) = g(y) .$$

Нулевая гиперплоскость функции g_1 будет, следовательно, $Q + L_o$. Нашей целью является доказательство справедливости включения

$$\overline{(Q + L_o) \cap U^*} \cap (L + L_o) \subset Q + L_o \tag{3}$$

для произвольного U^*.

Докажем прежде всего, что для любого U будет

$$\overline{(Q \cap U^*)} \cap (Q + L_o) \subset Q . \tag{4}$$

В самом деле, мы имеем

$$\overline{(Q \cap U^*)} \cap (Q + L_o) = \overline{(Q \cap U^*)} \cap \overline{(L \cap U^*)} \cap (L + L_o) \cap (Q + L_o) \subset$$
$$\subset \overline{(Q \cap U^*)} \cap L \cap (Q + L_o) \subset Q \cap (Q + L_o) = Q .$$

Возьмем теперь пространство $Q + L_o$. Имеем $Q \cap L_o = (0)$, ибо даже $L \cap L_o = (0)$. Итак, для $y \in Q + L_o$ будет однозначно $y = q + \lambda y_o$, где $q \in Q$. Положим теперь $h(y) = \lambda$. Включение (4) тогда значит, согласно (3,4), что $h(y)$ есть почти непрерывный функционал на $Q + L_o$. Из теоремы (3,14) тогда следует, что $h(y)$ ограничен на $(Q + L_o) \cap U^*$. Итак, существует σ^* так, что имеет место импликация

$$q + \sigma y_o \in U^* \Rightarrow |\sigma| \leqq \sigma^* .$$

Возвратимся теперь к доказательству включения (3).

Пусть дано произвольное U. Опять могут наступить два подслучая:

(11) $$(Q + L_o) \cap U^* = Q \cap U^* .$$

Тогда

$$\overline{(Q + L_o) \cap U^*} \cap (L + L_o) = \overline{(Q \cap U^*)} \cap (L + L_o) = \overline{(Q \cap U^*)} \cap \overline{(L \cap U^*)} \cap$$
$$\cap (L + L_o) \subset \overline{(Q \cap U^*)} \cap L \subset Q \subset Q + L_o .$$

(12) пересечение $(Q + L_o) \cap U^*$ больше чем $Q \cap U^*$. Тогда существуют $q_o \in Q$ и $\sigma_o > 0$, так, что

$$q_o + \sigma_o y_o = u_0^* \in U^* . \tag{5}$$

Теперь мы утверждаем, что

$$(Q + L_o) \cap U^* = U^* \cap \mathop{\mathrm{E}}_{y} \left[y = q + \lambda u_0^*,\ q \in \left(1 + \frac{\sigma^*}{\sigma_o}\right)(Q \cap U^*),\ |\lambda| \leqq \frac{\sigma^*}{\sigma_o} \right] \tag{6}$$

Действительно, пусть $q + \sigma y_o = u^* \in U^*$. Тогда, по только что доказанному, $|\sigma| \leqq \sigma^*$, и мы имеем

$$u^* = \left(q - \frac{\sigma}{\sigma_o} q_o\right) + \frac{\sigma}{\sigma_o} u_0^*.$$

причем

$$q - \frac{\sigma}{\sigma_o} q_o \in Q \cap \left(1 + \frac{\sigma^*}{\sigma_o}\right) U^* .$$

Этим доказано равенство (6), ибо правая часть содержится, очевидно, в левой.

Введем для простоты следующие обозначения:

$$1 + \frac{\sigma^*}{\sigma_o} = \alpha .$$

Пусть L_0^* означает подпространство, образованное точкой u_0^*,

$$B_0^* = \underset{y}{\mathrm{E}}\left[y = \lambda u_o , \quad |\lambda| \leqq \frac{\sigma^*}{\sigma_o}\right] .$$

Равенство (6) можно тогда переписать в виде

$$(Q + L_o) \cap U^* = U^* \cap (\alpha(Q \cap U^*) + B_0^*) . \tag{7}$$

Так как

$$\alpha(Q \cap U^*) + B_0^* \subset \alpha(\overline{Q \cap U^*}) + B_0^* ,$$

и ввиду того, что последнее множество компактно, из (7) вытекает далее

$$\overline{(Q + L_o) \cap U^*} \subset \alpha(\overline{Q \cap U^*}) + B_0^* . \tag{8}$$

Теперь нужно образовать пересечение $\overline{(Q + L_o) \cap U^*} \cap (L + L_o)$. Учитывая уравнение (5), мы видим однако, что

$$Q + L_o = Q + L_0^* ,$$
$$L + L_o = L + L_0^* .$$

Отсюда, используя включение (8), получаем

$$\overline{(Q + L_o) \cap U^*} \cap (L + L_o) \subset (\alpha(\overline{Q \cap U^*}) + B_0^*) \cap (L + L_0^*) . \tag{9}$$

Легко однако убедится в том, что

$$(\alpha(\overline{Q \cap U^*}) + B_0^*) \cap (L + L_0^*) \subset (\alpha(\overline{Q \cap U^*}) \cap (L + L_0^*)) + B_0^* , \tag{10}$$

так что из (9) и (10) следует

$$\overline{(Q + L_o) \cap U^*} \cap (L + L_o) \subset (\alpha(\overline{Q \cap U^*}) \cap (L + L_0^*)) + L_0^* . \tag{11}$$

Далее,

$$\alpha(\overline{Q \cap U^*}) \cap (L + L_0^*) = \alpha(\overline{Q \cap U^*}) \cap (L + L_o) = \alpha(\overline{Q \cap U^*}) \cap$$
$$\cap\ \alpha(\overline{L \cap U^*}) \cap (L + L_o) \subset \alpha(\overline{Q \cap U^*}) \cap L \subset Q .$$

Этот результат вместе с (11) дает

$$(\overline{Q + L_o) \cap U^*} \cap (L + L_o) \subset Q + L_0^* = Q + L_o ,$$

что доказывает включение (3) и заканчивает рассмотрение случая (1).

Случай (2). Существует U_0^* так, что

$$\overline{(L \cap U_0^*)} \cap (L + L_o) \text{ non} \subset L .$$

Существует точка $u_0^* = l_o + \sigma_o y_o$, $l_o \in L$, $\sigma_o \neq 0$, причем

$$u_0^* \in \overline{L \cap U_0^*} .$$

Пусть дано произвольное U^*. Обозначим через U_*^* замкнутую симметричную выпуклую оболочку множеств U^* и U_0^*; имеем

$$U_*^* = (U \cap U_o)^* .$$

Обозначим

$$\beta = \inf_{\alpha} [\alpha > 0, (u_0^* + \alpha U_*^*) \cap L \neq 0] .$$

Непременно будет $\beta \leqq 1$, ибо $0 \in (u_0^* + U_0^*) \cap L$. Снова могут наступить два случая:

(21) $\beta = 0$. Тогда можно утверждать, что

$$(L + L_o) \cap U_*^* \subset \overline{L \cap U_*^*} . \tag{12}$$

Обозначим опять через L_0^* пространство, образованное точкой u_0^*, так что

$$L + L_o = L + L_0^* .$$

Пусть дано $\varrho > 1$. Пусть $l + \lambda u_0^* \in U_*^*$. Пусть V — произвольная слабая окрестность нуля в Y. Поставим себе целью доказать, что

$$(l + \lambda u_0^* + V) \cap L \cap \varrho U_*^* \neq 0 . \tag{13}$$

Доказав это, мы получим

$$(L + L_0^*) \cap U_*^* \subset \varrho(\overline{L \cap U_*^*}) .$$

Однако, так как ϱ было произвольное число > 1, согласно (6,1), будет доказано равенство

$$(L + L_0^*) \cap U_*^* = \overline{L \cap U_*^*} .$$

Возвратимся к доказательству (13). Так как множество U_*^* слабо компактно, существует $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < \varrho - 1$ и притом, что

$$\varepsilon U_*^* \subset V .$$

Итак, соотношение (13) будет доказано, если мы докажем, что

$$(l + \lambda u_0^* + \varepsilon U_*^*) \cap L \cap \varrho U_*^* \neq 0 . \tag{14}$$

Справедливость соотношения (14) очевидна, если $\lambda = 0$. Если же $\lambda \neq 0$, то из предположения $\beta = 0$ следует, что существует

$$z \in \left(u_0^* + \frac{\varepsilon}{\lambda} U_*^*\right) \cap L .$$

Тогда
$$l + \lambda z \in (l + \lambda u_0^* + \varepsilon U_*^*) \cap L\,.$$
Так как $l + \lambda u_0^* \in U_*^*$ и так как $\varepsilon < \varrho - 1$, будет и
$$l + \lambda z \in \varrho U_*^*\,,$$
и соотношение (14) доказано.

(22) $\beta > 0$. Докажем, что в этом случае имеет место
$$l + \sigma u_0^* \in U_*^* \Rightarrow |\sigma| \leqq \frac{1}{\beta}\,. \tag{15}$$
Допустим, в самом деле, что существует $|\sigma| > \dfrac{1}{\beta}$ так, что
$$l + \sigma u_0^* = u \in U_*^*\,.$$
Тогда имело бы место $-\dfrac{1}{\sigma} l = u_0^* - \dfrac{1}{\sigma} u$, следовательно, $u_0^* + \dfrac{1}{|\sigma|} U_*^*$ пересекалось бы с L, что невозможно, ибо $\dfrac{1}{|\sigma|} < \beta$. Соотношение (15) доказано.

Докажем далее
$$(L + L_0) \cap U_*^* \subset \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \overline{(L \cap U_*^*)}\,. \tag{16}$$
Действительно, если $l + \sigma u_0^* \in U_*^*$, то прежде всего
$$\sigma u_0^* \in \sigma\overline{(L \cap U_*^*)} \subset \frac{1}{\beta}\,\overline{(L \cap U_*^*)}\,,$$
$$l \in -\sigma u_0^* + U_*^* \subset \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) U_*^*\,,$$
следовательно, $l \in \left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)(L \cap U_*^*)$. Отсюда следует (16).

Срезюмировав результаты, полученные в пунктах **(21)** и **(22)** [соотношения (12) и (16)], мы можем теперь утверждать:

Существует $\varkappa \geqq 1$ так, что
$$(L + L_0) \cap U_*^* \subset \varkappa\overline{(L \cap U_*^*)}\,. \tag{17}$$
Для каждого U^* мы определили U_*^* так, что $U^* \subset U_*^*$, $U_0^* \subset U_*^*$. Так как функционал $g(y)$ равномерно непрерывен на $L \cap U_*^*$, существует функция $g_v^*(y)$, определенная и равномерно непрерывная на $\overline{L \cap U_*^*}$, являющаяся распространением $g(y)$.

Пусть $g_v^{**}(y)$ означает линейную функцию, определеную на $L + \mathfrak{L}(\overline{L \cap U_*^*})$ так, чтобы она являлась распространением $g(y)$ и совпадала на множестве $\overline{L \cap U_*^*}$ с $g_v^*(y)$. Пусть наконец $g_v(y)$ означает линейную функцию, определенную на $L+L_o$ такую, чтобы она совпадала на этом пространстве с $g_U^{**}(y)$. Тогда, из соотношения (17) следует, что $g_U(y)$ непрерывна на $(L+L_o) \cap U_*^*$.

Итак, мы видим, что для каждого U существует линейная функция $g_U(y)$, определенная на $L+L_o$, непрерывная на $(L+L_o) \cap U_*^*$ и являющаяся распространением $g(y)$.

Доказательство нашей теоремы будет закончено, если мы покажем, что все функции $g_U(y)$ принимают в точке u_0^* одно и то же значение. Тогда все функции $g_U(y)$ будут совпадать на всем $L+L_o$ и их общее значение будет значением искомого почти непрерывного функционала $g_1(y)$.

Точка u_0^* лежит однако в $\overline{L \cap U_0^*}$, а тем более в $L \cap U_*^*$, Итак, в точке u_0^* однозначно определяется значение всех $g_U^*(y)$, а значит и всех $g_U(y)$.

Последний результат позволяет нам дополнить теорему (3,8) следующим образом:

(3,8) *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. Пространство X будет полным тогда и только тогда, когда будет выполнено одно из следующих условий:*

(1) *если Q — почти замкнутое подпространство в Y с конечным дефектом в Y, то Q замкнуто*

(2) *если r — почти непрерывный функционал, определенный на подпространстве $L \subset\subset Y$ с конечным дефектом в Y, то r является непрерывным.*

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы (3,8) и только-что доказанной теоремы о распространении.

Теорема (3,8) позволит нам распространить важный результат Эберлейна, известный для нормированных пространств [5], на произвольные выпуклые топологические линейные пространства.

(3,16) *Пусть X — полное выпуклое топологическое линейное пространство. Пусть множество $M \subset X$ симметрично, выпукло и замкнуто. Тогда M будет слабо компактным в том и только в том случае, если M будет слабо счетно компактным.*

Доказательство: Теорема будет доказана, если показать, что при слабой топологии из счетной компактности множества M следует ее компактность. В силу теоремы (2.7) для этого достаточного доказать, что множество M^* является окрестностью нуля в минимальной топологии пространства Y. Пусть z — линейная функция, определенная на Y, для которой $\sup |zM^*| < \infty$. Требуется доказать, что из этого предположения уже вытекает, что z непрерывна. Обозначим через Q нулевую гиперплоскость функции z. Согласно теореме (3,8) достаточно доказать, что Q почти замкнута.

Без ограничения общности можно предположить, что $\sup |zM^*| = 1$. Нетрудно доказать, что для каждого конечного количества $y_1, \ldots, y_n \in Y$ существует $x \in M$ так, что

$$xy_i = zy_i .$$

Нужно доказать, что Q почти замкнута. Пусть дано U и пусть $y_o \in \overline{Q \cap U^*}$. Если мы докажем, что $zy_o = 0$, то доказательство будет закончено.

Для этой цели мы используем остроумный прием Эберлейна почти без существенных изменений.

Пусть дано $\varepsilon > 0$.

Первый этап. Существует $x_o \in M$ так, что

$$x_o y_o = zy_o .$$

Далее, существует $y_1 \in Q \cap U^*$ так, что

$$|x_o y_1 - x_o y_o| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Второй этап. Существует $x_1 \in M$ так, что

$$x_1 y_o = zy_o ,$$
$$x_1 y_1 = zy_1 .$$

Далее, существует $y_2 \in Q \cap U^*$ так, что

$$|x_o y_2 - x_o y_o| < \tfrac{1}{2}\varepsilon ,$$
$$|x_1 y_2 - x_1 y_o| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Вообще n-й этап. Предположим, что уже построены элементы $x_o, x_1, \ldots, x_{n-1} \in M$ и одновременно $y_o, y_1, \ldots, y_n$ так, что имеет место

(α_n) $\qquad y_1, \ldots, y_n \in Q \cap U^*$

(β_n) если дано j $(0 \leqq j \leqq n-1)$, то для всех i $(0 \leqq i \leqq j)$ будет

$$x_j y_i = zy_i ,$$

(γ_n) если дано i $(0 \leqq i \leqq n)$, то для всех j $(0 \leqq j \leqq i-1)$ будет

$$|x_j y_i - x_j y_o| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Возьмем теперь $x_n \in M$ так, чтобы имело место

$$x_n y_i = zy_i \quad (0 \leqq i \leqq n) .$$

Тогда существует $y_{n+1} \in Q \cap U^*$ так, что

$$|x_j y_{n+1} - x_j y_o| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad (0 \leqq j \leqq n) .$$

Итак, снова выполнены (α_{n+1}), (β_{n+1}) и (γ_{n+1}). Так как y_i, начиная с y_1, лежат в Q, имеет место: Если дано j, то для всех i $(1 \leqq i \leqq j)$ будет

$$x_j y_i = 0 .$$

Далее, для любого j имеем $x_j y_o = z y_o$, так что имеет место:
Если дано i, то для всех j $(0 \leqq j \leqq i - 1)$ будет

$$|x_j y_i - z y_o| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Из счетной компактности множества M следует, что последовательность $x_n \in M$ обладает в M хоть одной предельной точкой x в слабой топологии пространства X. Для каждого фиксированного $i \geqq 1$ имеет место $x_j y_i = 0$, коль скоро $j \geqq i$. Поэтому будет и $x y_i = 0$. Так как x является предельной точкой множества всех x_j то x лежит в замыкании выпуклой оболочки всех x_j. Следовательно, существует натуральное число N и неотрицательные числа $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_N$ так, что $\Sigma\lambda_j = 1$ и притом

$$x - \Sigma\lambda_j x_j \in \tfrac{1}{2}\varepsilon U .$$

Возьмем теперь y_{N+1}; тогда для $j = 0, 1, \ldots, N$ будет

$$|x_j y_{N+1} - z y_o| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Если j-ое неравенство помножить на число λ_j и сложить, то получим

$$z y_o = \Sigma\lambda_j x_j y_{N+1} + \Theta\tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Одновременно из приведенного выше включения следует, что $x y_{N+1} - \Sigma\lambda_j x_j y_{N+1} = \Theta\frac{1}{2}\varepsilon$. В общем получаем $|z y_o| < \varepsilon$, так что $z y_o = 0$, так как ε было произвольно; доказательство закончено.

§ 4. ТЕОРЕМА ОБ ОТКРЫТОМ ОТОБРАЖЕНИИ.

Пусть (X, u) и Y — два выпуклых топологических линейных пространства, двойственных друг другу. Пусть Y_o есть плотное в Y подпространство. Мы уже знаем, что пространство всех линейных функционалов на Y_o можно отождествить с X в качестве абстрактного линейного пространства. Однако в дальнейшем будет необходимо знать топологию u_o такую, чтобы (X, u_o) было двойственно к Y_o.

Связь между уменьшением пространства Y до Y_o и соответствующим усилением топологии u показана в следующих леммах.

(4,1) *Пусть (X, u) и Y — два выпуклых топологических линейных пространства, двойственных друг другу. Пусть $Y_0 \subset\subset Y$ плотно в Y. Для каждой u-окрестности нуля U, для которой $Y_0 \cap U^*$ есть u_X^*-компактным, образуем множество $U_0 = (Y_0 \cap U^*)^*$. Тогда система всех U_0 есть полная система окрестностей нуля некоторой допустимой топологии u_0 на X, имеющей следующие свойства:*

(1) $u \leqq u_0$,

(2) (X, u_0) *и* (Y_0, u_X^*) *двойственны друг другу*,

(3) *топология u_0 есть самая слабая из всех топологий со свойствами* (1) *и* (2).

Доказательство: Прежде всего ясно, что топология u_o допустима и выполняет $u \leqq u_o$. Пусть $y \in Y$ непрерывно при топологии u_o. Тогда существует U_o так, что $U_o y$ ограничено, т. е. $y \in \lambda U_0^*$ при подходящем λ. Это значить, что $y \in \lambda(Y_o \cap U^*)^{**}$, но так как $Y_o \cap U^*$ есть u_X^*-компактно, то, согласно, (2,6) $y \in \lambda(Y_o \cap U^*)$ и, следовательно, $y \in Y_o$.

Обратно, пусть $y_o \in Y_o$. Обозначим $U = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[|xy_o| \leqq 1]$. Множество U^* одномерно, и имеет место $U^* \subset Y_o$, так что $Y_o \cap U^*$ есть u_X^*-компактным. Тогда будет $U_o = (Y_o \cap U^*)^* = U$, следовательно, $|U_o y| \leqq 1$, другими словами y_o является u_o-непрерывным.

Этим доказано, что топология u_o имеет свойство (2).

Пусть $u_{\min}$ означает инфимум всех топологий со свойствами (1) и (2). Так как $u_{\min} \geqq u$ и одновременно $u_{\min} \geqq \underline{u_o}$, топология $u_{\min}$ опять имеет свойства (1) и (2).

Пусть теперь U есть $u_{\min}$-окрестность нуля. Тогда $uU \subset u_{\min}U = U$, так что U является также и u-окрестностью нуля. При этом по теореме (2,7) $Y_o \cap U^*$ компактно в топологии u_X^*. Тогда, в силу нашего соглашения о замкнутости окрестности и теоремы (2,6), мы получим

$$U = u_{\min}U = u_o U = (Y_o \cap U^*)^* \,.$$

Ответим теперь на вопрос, в некотором смысле обратный.

(4,2) *Пусть* (X, u) *и* Y *— два выпуклых топологических линейных пространства, двойственных друг другу. Пусть* $Y_0 \subset\subset Y$ *плотно в* X. *Для каждого* U *образуем множество* $U_0 = (Y_0 \cap U^*)^*$. *Тогда система всех* U_0 *будет полной системой окрестностей нуля некоторой допустимой топологии* u_0 *на* Y. *Пространством, двойственным* (X, u_0), *будет как раз пространство* $\mathfrak{L}(\overline{Y_0 \cap U^*})$.

(Замечание: $\mathfrak{L}(\overline{Y_o \cap U^*})$ означает линейную оболочку всех множеств вида $\overline{Y_0 \cap U^*}$ где U пробегает все u-окрестности нуля в пространстве X.)

Доказательство: Пусть прежде всего $y \in \mathfrak{L}(\overline{Y_o \cap U^*})$.

Это значит что для подходящих $\lambda > 0$ и U будет $y \in \lambda(\overline{Y_o \cap U^*})$. Так как $\overline{Y_o \cap U^*} = (Y_o \cap U^*)^{**}$, то $|(Y_o \cap U^*)^*\, y| \leqq \lambda$.

Это значит, что y непрерывно при топологии u_o. Обратно, пусть $y \in Y$ и U таковы, что $|U_o y| \leqq \lambda$. Тогда

$$y \in \lambda U_0^* = \lambda(Y_o \cap U^*)^{**} = \lambda(\overline{Y_o \cap U^*}) \subset \mathfrak{L}(\overline{Y_o \cap U^*}) \,.$$

(4,3) Определение: *Пусть* (X, u), (Z, w) *— два выпуклых топологических линейных пространства,* φ *— непрерывное линейное отображение* X *на* Z. *Отображение* φ *мы назовем почти открытым, если никакая* u*-окрестность нуля в* X *не переводится отображением* φ *в нигде неплотное подмножество* Z

(4,4) *Пусть (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. В таком случае следующие два условия всегда эквивалентны друг другу:*

(1) *если φ — почти открытое отображение (X, u) на выпуклое топологическое линейное пространство (Z, w), то φ открыто.*

(2) *если $Q \subset\subset Y$ почти замкнуто, то Q замкнуто.*

Доказательство этой теоремы можно провести непосредственно. Однако мы докажем сперва ее частный случай, к которому теорему (4,4) можно привести путем несложного видоизменения. В то же время на этом частном случае значительно рельефнее выделится сущность теоремы и ее доказательства.

(4,5) *Пусть (X, u) — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. В таком случае следующие два условия всегда эквивалентны друг другу:*

(1′) *если дана допустимая топология $u_0 \geqq u$ такая, что никакая u-окрестность нуля не является нигде не плотной при топологии u_0, то $u_0 = u$,*

(2′) *если $Q \subset\subset Y$ плотно в Y и одновременно почти замкнуто, то $Q = Y$.*

Доказательство: Пусть прежде всего выполнено условие (1′). Пусть $Q \subset\subset Y$ плотно в Y и пусть для любой u-окрестности нуля U пересечение $Q \cap U^*$ замкнуто.

Нужно докаказать, что $Q = Y$.

Определим для каждого U множество

$$U_o = (Q \cap U^*)^* .$$

Ясно, что $U_o \supset U$ и что это опять симметричное выпуклое и замкнутое множество. Определим далее на X новую топологию u_o таким образом, что за полную систему окрестностей нуля мы примем как раз систему всех U_o, где U пробегает систему всех u-окрестностей нуля. Прежде всего ясно, что топология u_o допустима и что $u_o \geqq u$.

Далее будет

$$U_0^* = (Q \cap U^*)^{**} = \overline{Q \cap U^*}$$

Однако, так как $Q \cap U^*$ замкнуто, то

$$U_0^* = Q \cap U^* .$$

Докажем теперь, что пространством всех u_o-непрерывных функционалов на X является как раз Q.

Пусть $y \in Y$ непрерывно при топологии u_o. Это значит, что существует U так, что y ограничено на U_o, следовательно для подходящего λ имеет место

$$y \in \lambda U_o^* = \lambda(Q \cap U^*) \subset Q .$$

Если, наоборот, $y \in Q$, то возьмем

$$U = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[|xy| \leqq 1]\,,$$

так что будет $y \in U^*$; отсюда $y \in Q \cap U^* = U_0^*$ и, следовательно, y непрерывно при топологии u_o.

Итак, мы доказали, что Q образует как раз пространство всех u_o-непрерывных функционалов на X.

Теперь мы утверждаем, что $U_o = u_oU$. Действительно, мы знаем, что

$$U_o = (Q \cap U^*)^*\,.$$

Одновременно, согласно (2,6), $u_oU = U^{**}$, где первая звездочка означает, конечно, полярность в Q, откуда

$$u_oU = (Q \cap U^*)^* = U_o\,.$$

Итак, мы видим, что топология u_o имеет следующее свойство: Прежде всего $u_o \geqq u$, и, во-вторых, для любой u-окрестности нуля U, u_oU будет u_o-окрестностью нуля. Так как мы предполагаем выполнение условия (1′) будет $u_o = u$, следовательно, множество всех u_o-непрерывных функционалов должно быть тождествено с множеством u-непрерывных функционалов, или $Q = Y$.

Пусть, наоборот, выполнено условие (2′).

Пусть дана допустимая топология $u_o \geqq u$ такая, что для любого U множество u_oU будет окрестностью нуля при топологии u_o. Обозначим через Q множество всех u_o-непрерывных функционалов на X. Имеем $Q \subset\subset Y$ и Q плотно в Y. Возьмем далее произвольное U. Ясно, что U и u_oU обладают в Q одним и тем же полярным множеством, а именно

$$Q \cap U^*\,.$$

Однако, так как u_oU является u_o-окрестностью нуля, то $Q \cap U^*$ слабо компактно, а, значит, и замкнуто в Y. Отсюда и из условия (2′) следует, что $Q = Y$, или $u_o \sim u$. Но это значит, что для любого U имеет место

$$U_o \doteq u_oU = uU = U\,.$$

Итак, каждое U является также u_o-окрестностью нуля, следовательно, $u_o \leqq u$, откуда $u_o = u$.

Этим завершается доказательство эквивалентности.

Закончим теперь доказательство теоремы (4,4).

Пусть имеет место (1). Пусть $Q \subset\subset Y$ почти замкнуто. Как известно, существует выпуклое топологическое линейное пространство (X', u') так, что (X', u') двойствено $\overline{Q}$, и притом существует гомоморфизм φ пространства (X, u) на пространство (X', u').

Докажем теперь, что пространство (X', u') имеет свойство $(1')$. Согласно предыдущему, тогда получим $Q = \overline{Q}$, или другими словами, Q будет замкнуто.

Действительно, пусть на X' определена еще одна допустимая топология u'_0 такая, что $u'_0 \geqq u'$ и притом никакая u'-окрестность нуля не является нигде не плотной при топологии u'_0. Нетрудно видеть, что отображение φ пространства (X, u) на (X', u'_0) почти открыто, а, значит, согласно (1), открыто, так что $u'_0 = u'$. Пространство (X', u') имеет, следовательно, свойство $(1')$, что и требовалось доказать.

Пусть имеет место (2). Пусть дано почти открытое отображение φ пространства (X, u) на (X_o, u_o). Нетрудно убедиться в том, что на X_o можно ввести допустимую топологию u таким образом, что за полную систему окрестностей нуля мы примем все множества вида $\varphi(U)$, где U пробегает все u-окрестности нуля в X. Так как отображение φ почти открыто, непосредственно получаем, что $u_o \geqq u$ и никакая u-окрестность нуля не является нигде не плотной при топологии u_o.

Обозначим теперь через Y_o аннигилятор пространства $\varphi^{-1}(0)$, так что Y_o есть замкнутое пространство в Y. Если $x_o \in X_o$, $y_o \in Y_o$, то для всех $x \in X$ таких, что $\varphi(x) = x_o$, произведение xy_o имеет одинаковое значение. Это значение мы примем за произведение x_oy_o. Легко обнаружить, что при таком определении произведения наши пространства (X_o, u) и Y_o будут двойственными друг другу.

Так как (2) справедливо для пространства Y, $(2')$ будет справедливо для пространства Y_o. Согласно предыдущему из этого следует, что $u_o = u$, другими словами, что отображение φ открыто.

Введем следующие определения:

(4,6) Определение. *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство. Пространство X мы назовем B-полным, если выполнено одно (а, значит, оба) из условий теоремы* (4,5).

(4,7) Определение. *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство. Пространство X мы назовем наследственно B-полным, если оно выполняет одно (а, значит, оба) из условий теоремы* (4,4).

Обозначение „B-полное" было нами выбрано в связи с тем, что в этих пространствах справедлива теорема Банаха для простых отображений. Приведем еще одно определение:

(4,8) Определение. *Выпуклое топологическое линейное пространство X мы назовем наследственно полным, если для любого гомоморфизма φ пространство $\varphi(X)$ будет полным.*

Теперь справедлива следующая простая теорема:

(4,9) *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство. Если*

X будет B-полным, то оно будет и полным. Если X наследственно B-полно, то оно наследственно полно.

Доказательство непосредственно следует из сравнения условия (2′) теоремы (4,5) и условия (2) теормы (4,4) с условием (1) теоремы (3,8).

Для того, чтобы иметь возможность сравнения исследуемых свойств, представляется целесообразным сформулировать полученные только что условия в таком виде, чтобы было использовано понятие почти непрерывного функционала. С этой целью докажем предварительно простую лемму.

(4,10) *Пусть Q_1 и Q_2 — два подпространства в Y. Пусть существует аддитивная и однородная функция h, определенная на Q_2 такая, что $Q_1 = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[y \in Q_2,\ h(y) = 0]$. В таком длучае Q_1 будет почти замкнутым тогда и только тогда, если одновременно Q_2 почти замкнуто и h почти непрерывно.*

Доказательство: Пусть прежде всего Q_2 почти замкнуто и h почти непрерывно. Так как h почти непрерывно, то согласно (3,5), для каждого U^* имеет место

$$\overline{Q_1 \cap U^*} \cap Q_2 \subset Q_1\,.$$

Но мы имеем

$$\overline{Q_1 \cap U^*} = \overline{Q_1 \cap U^*} \cap \overline{Q_2 \cap U^*} = \overline{Q_1 \cap U^*} \cap Q_2 \cap U^* \subset Q_1 \cap U^*\,,$$

так что Q_1 почти замкнуто.

Обратно, пусть Q_1 почти замкнуто. Согласно (3,5), $h(y)$ тогда почти непрерывно. Пусть дано U^*. Согласно (3,14), имеем

$$\lambda^* = \sup_{y \in Q_2 \cap U^*} |h(y)| < \infty\,.$$

Если этот супремум равен нулю, то $Q_2 \cap U^* = Q_1 \cap U^*$, так что $Q_2 \cap U^*$ замкнуто. Однако если существует $y_2 \in Q_2 \cap U^*$ так, что $h(y_2) \neq 0$, то мы докажем, что имеет место

$$Q_2 \cap U^* = U^* \cap \underset{y}{\mathrm{E}}\left[y = q_1 + \sigma y_2\,,\quad q_1 \in \left(1 + \frac{\lambda^*}{|h(y_2)|}\right)(Q_1 \cap U^*)\,,\right.$$
$$\left.|\sigma| \leqq \frac{\lambda^*}{|h(y_2)|}\right].$$

Так как это равенство представляет нам $Q_2 \cap U^*$ в виде пересечения двух замкнутых множеств, то, доказав его, мы убедимся, что $Q_2 \cap U^*$ замкнуто.

Правая часть, очевидно, содержится в левой. Пусть наоборот $y \in Q_2 \cap U^*$. Тогда, очевидно, $y - \dfrac{h(y)}{h(y_2)}\,y_2$ лежит в Q_1, а так как $|h(y)| \leqq \lambda^*$, эта точка лежит и в $\left(1+\frac{\lambda^*}{|h(y_2)|}\right)U^*$. Теперь достаточно положить $q_1 = y - \frac{h(y)}{h(y_2)} y_2$ и число $\sigma = \frac{h(y)}{|h(y_2)|}$ и доказательство закончено.

Используя только что доказанную лемму, мы приведем условия B-полноты к виду, в котором фигурирует понятие почти непрерывного функционала.

(4,11) *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство. Тогда X будет B-полным в том и только в том случае, если выполнено следующее условие:*

(3′) *Пусть r — почти непрерывный функционал, определенный на плотном и почти замкнутом подпространстве $L \subset\subset Y$. Тогда функционал r непрерывен.*

Пространство X будет наследственно B-полным в том и только в том случае, если выполнено следующее условие:

(3) *Пусть r — почти непрерывный функционал, определенный на почти замкнутом подпространстве $L \subset\subset Y$. Тогда функционал r непрерывен.*

Доказательство: Пусть прежде всего выполнено условие (3′); докажем, что пространство X будет B-полным. Пусть $Q \subset\subset Y$ плотно и почти замкнуто, причем пусть $Q \neq Y$. Возьмем $y_o \in Y$ так, что y_o non $\in Q$. Если Q_2 означает линейную оболочку пространства Q и точки y_o и если положить для $y \in Q_2$, $y = q + \lambda y_o$

$$h(y) = \lambda\,;$$

из предыдущей леммы видно, что Q_2 почти замкнуто и $h(y)$ почти непрерывно. Из условия (3′), следовательно, вытекает, что h непрерывно. Однако функционал h аннулируется на плотном пространстве Q, т. е. $h = 0$. Но это находится в противоречии с тем фактом, что $h(y_o) \neq 0$. Итак, предположение $Q \neq Y$ привело нас к противоречию, которое доказывает, что должно быть $Q = Y$, т. е. что пространство X является B-полным.

Пусть далее пространство X B-полно. Пусть r — почти непрерывный функционал, определенный на почти замкнутом плотном подпространстве $L \subset\subset Y$. Так как X B-полно, будет $L = Y$, так что r будет почти непрерывным функционалом, определенным на всем Y. Однако пространство X полно, следовательно r непрерывно.

Доказательство второй части теоремы (о наследственно B-полном пространстве) проводится подобным же образом. Ввиду только что указанной характеризации B-полных и наследственно B-полных пространств представляется естественным ввести следующие дальнейшие понятия:

(4,12) Определение. *Выпуклое топологическое линейное пространство X*

мы назовем R-полным, если каждый почти непрерывный функционал, определенный на плотном $L \subset\subset Y$, является непрерывным. Мы назовем его наследственно R-полным, если каждый почти непрерывный функционал, определенный на каком-либо $L \subset\subset Y$, является непрерывным.

(4,13) *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство. Если X R-полно, то оно будет и B-полным. Если X наследственно R-полно, то оно будет и наследственно B-полным.*

(4,14) *Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. Пространство X будет R-полным тогда и только тогда, когда имеет место:*

если $Q \subset\subset Y$ плотно, то $Y = \mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*})$.

Пространство X будет наследственно R-полным тогда и только тогда, когда имеет место

если $Q \subset\subset Y$, то $\overline{Q} = \mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*})$.

(Замечание: $\mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*})$ означает, конечно, линейную оболочку всех множеств вида $\overline{Q \cap U^*}$, где U пробегает все u-окрестности нуля в X.)

Доказательство: Мы проведем его лишь для наследственной R-полноты. Вторую же часть можно доказать аналогично.

Пусть пространство X наследственно R-полно и пусть дано $Q \subset\subset Y$. Нужно доказать, что $\overline{Q} = \mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*})$. Прежде всего, очевидно

$$\mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*}) \subset \overline{Q}\,.$$

Пусть $y_0 \operatorname{non} \in \mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*})$. Если L_0 означает пространство, образованное точкой y_0 и если обозначить $L = Q + L_0$, то для каждого $y \in L$ будет однозначно $y = q + \lambda y_0$, где $q \in Q$. Для $y \in L$ положим $g(y) = \lambda$. Так как $y_0 \operatorname{non} \in \mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*})$, из (3,5) легко вытекает, что функционал $g(y)$ почти непрерывен. Так как X наследственно R-полно, то g непрерывно. Так как $g(Q) = 0$ и $g(y_0) = 1$, то $y_0 \operatorname{non} \in \overline{Q}$, чем доказывается равенство $\overline{Q} = \mathfrak{L}(Q \cap U^*)$.

Пусть наоборот для любого $Q \subset\subset Y$ имеет место

$$\overline{Q} = \mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*})\,.$$

Пусть дан почти непрерывный функционал r, определенный на $L \subset\subset Y$. Нужно доказать, что r непрерывно. Обозначим $Q = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[y \in L,\ ry = 0]$.

Предположение почти-непрерывности r означает, согласно (3.5), что

$$\mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*}) \cap L \subset Q\,.$$

Но так как $\mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*}) = \overline{Q}$, мы получаем $\overline{Q} \cap L \subset Q$, другими словами, r непрерывно.*)

§ 5. МЕТРИЗУЕМЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Прежде всего мы видели, что полнота пространства эквивалентна требованию, чтобы каждая почти замкнутая гиперплоскость $Q \subset\subset Y$ была замкнутой. Далее мы знаем, что для того, чтобы в X была справедливой теорема Банаха, необходимо и достаточно выполнение более сильного требования: каждое почти замкнутое подпространство $Q \subset\subset Y$ замкнуто. Мы уже сказали, что эти требования, вообще говоря, неравносильны. Однако существует некоторая категория пространств, в которых из полноты следует уже и наследственная B-полнота. Это пространства, в которых каждая точка имеет счетный характер. Этот результат по существу уже давно известен (понятно, в несколько ином виде) и восходит к Банаху. Для полности мы приведем как соответствующие теоремы, так и их доказательства. Доказательства не принадлежат, конечно, автору, ибо они базируются на идеях Банаха. При этом способе доказательства счетность является существенным фактором, так как мы существенным образом используем бесконечные ряды.

(5,1) Определение. *Выпуклое топологическое линейное пространство (X, u) мы назовем пространством счетного характера, если существует полная счетная система окрестностей нуля.*

(5,2) *Пусть (X, u) — пространство счетного характера. Пусть φ — гомоморфное отображение (X, u) на выпуклое топологическое линейное пространство (Z, w).*

Если (X, u) полно, то и (Z, w) будет полным.

Доказательство: существует счетная полная система окрестностей нуля U_n. Можно предположить, что $U_n \supset U_{n+1}$. В пространстве Z множе-

---

*) Можно дать и непосредственную характеризацию R-полных пространств.

Выпуклое топологическое линейное пространство (X, u) будет R-полным, если для каждой выпуклой топологии $v \geq u$, топология, определенная всеми множествами вида vU, где U пробегает все u-окрестности нуля в X, эквивалентна топологии u.

Доказательство: Пусть прежде всего пространство (X, u) является R-полным. Возьмем топологию $v \geq u$. Пространству (X, v) соответствует в качестве двойственного некоторое плотное подпространство Q пространства Y. Пусть теперь $y \in Y$. Так как (X, u) R-полно, то согласно (4,14) существует окрестность U так, что $y \in (Q \cap U^*)^{**}$. Но так как, очевидно, $(Q \cap U^*)^* = vU$, выполняется неравенство $|(vU)\ y| \leq 1$, так что y непрерывно при топологии, образованной всеми множествами вида vU. Так как это справедливо для каждого $y \in Y$, эта топология эквивалентна топологии u.

Обратно, пусть наше условие выполнено. Возьмем плотное подпространство $Q \subset\subset Y$. Обозначим через v слабую топологию пространства X, соответствующую пространству Q. Пусть $y \in Y$. По предположению существует u-окрестность нуля U так, что $|(vU)\ y| \leq$ ≤ 1. Так как $vU = (Q \cap U^*)^*$, будет следовательно $y \in (Q \cap U^*)^{**} = \overline{Q \cap U^*}$. Отсюда следует равенство $\mathfrak{L}(\overline{Q \cap U^*}) = Y$, так что (X, u) является R-полным.

ства $\varphi(U_n)$ образуют также монотонную счетную полную систему окрестностей нуля. Пусть теперь z_n означает последовательность Коши в Z. Существует выделенная последовательность z_n' так, что

$$z_{n+1}' - z_n' \in \frac{1}{2^n}\,\varphi(U_n)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теперь существуют $r_n \in \dfrac{1}{2^n}\,U_n$ так, что $\varphi(r_n) = z_{n+1}' - z_n'$.

Пусть x_1 таково, что $\varphi(x_1) = z_1'$.

Обозначим для $n > 1$

$$x_n = x_1 + r_1 + \ldots + r_{n-1}\,,$$

так что для всех натуральных n будет $\varphi(x_n) = z_n'$. Если $m > n$, то

$$x_m - x_n = r_n + r_{n+1} + \ldots + r_{m-1} \in \frac{1}{2^n}\,U_n + \frac{1}{2^{n+1}}\,U_{n+1} + \ldots \subset \frac{1}{2^{n-1}}\,U_n\,.$$

Итак, x_n будет последовательностью Коши и значит, существует x так что $x_n \to x$. Отсюда $z_n' \to \varphi(x)$, а поэтому и $z_n \to \varphi(x)$. Следовательно, z_n есть сходящаяся последовательность, что и требовалось доказать.

(5,3) *Пусть (X, u) — пространство счетного характера. Тогда X будет полным в том и только в том случае, когда имеет место: если φ почти открытое отображение пространства (X, u) на (Z, w), то φ открыто.*

Доказательство: при соблюдении указанного условия пространство X полно, как непосредственно следует из теорем (4,4) и (3,8). Пусть, наоборот, пространство X полно; нужно доказать, что соблюдается условие (1) теоремы (4,4). В силу предыдущего результата, (5,2), достаточно однако доказать только соблюдение условия (1') теоремы (4,5).

Пусть U_n снова означает монотонную счетную полную систему окрестностей нуля.

Пусть u_o — допустимая топология в X такая, что $u_o \geqq u$ и для любого U_n множество u_oU_n будет u_o-окрестностью нуля.

Пусть U_o есть некоторая u_o-окрестность нуля. Тогда она будет и u-окрестностью нуля, значит для подходящего n будет $U_n \subset U_o$, следовательно,

$$u_oU_n \subset u_oU_o = U_o\,,$$

откуда видно, что множества u_oU_n образуют полную систему окрестностей нуля для топологии u_o. Введем далее обозначение $U_{no} = u_oU_n$.

Пусть $x \in U_{1o}$. Существует $x_1 \in U_1 \cap (x + \frac{1}{2}U_{2o})$, так что

$$x - x_1 \in \tfrac{1}{2}U_{2o}\,.$$

Далее существует

$$x_2 \in \tfrac{1}{2}U_2 \cap \left(x - x_1 + \frac{1}{2^2}\,U_{3o}\right),$$

так что

$$x - x_1 - x_2 \in \frac{1}{2^2} U_{30} .$$

Допустим, что мы уже имеем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, что

$$(1) \qquad x_i \in \frac{1}{2^{i-1}} U_i ,$$

$$(2) \qquad x - \sum_1^n x_i \in \frac{1}{2^n} U_{n+1,o} .$$

Тогда существует

$$x_{n+1} \in \frac{1}{2^n} U_{n+1} \cap \left(x - \sum_1^n x_i + \frac{1}{2^{n+1}} U_{n+2,o} \right)$$

откуда

$$x - \sum_1^{n+1} x_i \in \frac{1}{2^{n+1}} U_{n+2,o} .$$

Обозначим теперь $s_n = \sum_1^n x_i$. Так как $x - s_n \in \frac{1}{2^n} U_{n+1,o}$ будет

$$x = u_o\text{-}\lim s_n .$$

Если далее $p < q$, то

$$s_q - s_p = x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots + x_q \in \frac{1}{2^p} U_{p+1} + \frac{1}{2^{p+1}} U_{p+2} + \ldots \subset \frac{1}{2^{p-1}} U_{p+1} .$$

Следовательно, s_n есть u-фундаментальная последовательность, а тем самым и u-сходящаяся, так что $x = u\text{-}\lim s_n$. Однако все s_n лежат в множестве $2U_1$, которое u-замкнуто, откуда $x \in 2U_1$. Итак, получается включение

$$U_1 \subset U_{1o} \subset 2U_1 .$$

Тем же способом можно доказать для произвольного n

$$U_n \subset U_{no} \subset 2U_n ,$$

так что $u_o = u$.

Счетный характер пространства X является существенным для примененного способа доказательства, но не является таковым для B-полноты пространства X. В самом деле, мы имеем

(5,4) *Существуют два двойственных друг другу пространства X и Y так, что имеет место*

(1) *пространство X наследственно R-полно и имеет несчетный характер*,

(2) *пространство Y имеет счетный характер.*

Доказательство: обозначим через X линейное пространство всех последовательностей действительных чисел $x = \{x_k\}$ таких, что почти для всех k будет $x_k = 0$. Топологию на X мы выберем так, что за полную систему окрестностей нуля примем все симметричные выпуклые тела в X.

Пространство X не имеет счетного характера в точке 0. Действительно, если U_n — произвольные симметричные выпуклые тела в X, то можно задать симметричное выпуклое тело U так, что ни для какого n не имеет места $U_n \subset U$. Обозначим для этой цели

$$\sigma_k = \sup_{\lambda} \mathrm{E}\,[\lambda = x_k,\ x \in U_k]\,.$$

Так как U_n являются телами, будет $\sigma_k > 0$. Теперь достаточно взять

$$U = \mathop{\mathrm{E}}_{x}\,[x \in X,\ |x_k| \leqq \tfrac{1}{2}\sigma_k]\,.$$

Обозначим через Y линейное пространство всех последовательностей действительных чисел $y = \{y_k\}$. Топология на Y выбрана как топология декартова произведения прямых. Если определить скалярное произведение xy как сумму $\Sigma x_k y_k$, то X и Y будут двойственны друг другу (см. [8], теорема (2,2)). Докажем теперь, что пространство X наследственно R-полно.

Пусть $Q \subset\subset Y$ и пусть $y_o \in \overline{Q}$. Докажем, что существует U так, что $y_o \in \overline{Q \cap U^*}$. Легко обнаружить, что пространство Y можно метризировать, например, при помощи метрики

$$\varrho(y^1, y^2) = \sum \frac{1}{2^k} \frac{|y^1_k - y^2_k|}{1 + |y^1_k - y^2_k|}$$

и далее, что сходимость означает сходимость по координатам. Так как $y_o \in \overline{Q}$, существует последовательность $q_n \in Q$ так, что для любого k будет

$$\lim_{n} q_{nk} = y_{ok}\,.$$

Теперь мы утверждаем, что существует последовательность $\alpha_k > 0$ так, что

$$\sup_{n,k} \alpha_k |q_{nk}| < \infty\,.$$

Если взять фиксированное k, то последовательность $\{q_{nk}\}_n$ будет сходящейся и, следовательно, ограниченной. Если обозначить

$$\sigma_k = \sup_{n} |q_{nk}|\,,$$

то достаточно положить $\alpha_k = 1$, если $\sigma_k = 0$, и $\alpha_k = \dfrac{1}{\sigma_k}$, если $\sigma_k > 0$.

Положим теперь

$$U = \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[x \in X,\ |x_k| \leqq \frac{1}{2^k}\,\alpha_k\right].$$

Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что все $q_n \in U^*$. Итак, пусть $x \in U$. Нужно доказать, что $|xq_n| \leqq 1$ для всех n. Однако

$$|xq_n| = |\Sigma x_k q_{nk}| \leqq \sum \frac{1}{2^k} \alpha_k |q_{nk}| \leqq \sup_{n,k} \alpha_k |q_{nk}| \leqq 1 .$$

Этим доказательство завершается.

§ 6. ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ.

В настоящем параграфе мы будем исследовать выпуклые топологические линейные пространства специального типа. Дело в том, что если T — произвольное вполне регулярное топологическое пространство и если $C(T)$ означает линейное пространство всех непрерывных функций на T, то $C(T)$ можно топологизировать с помощью псевдонорм, соответствующих компактным подмножествам пространства T. Таким образом $C(T)$ становится выпуклым топологическим линейным пространством. Прежде всего мы займемся связью между свойствами пространства T и различными видами полноты пространства $C(T)$. Мы получим некоторые необходимые условия, которым должно удовлетворять T, для того, чтобы пространство $C(T)$ обладало данным свойством. Пользуясь этими результатами, мы построим некоторые вполне регулярные пространства так, чтобы соответствующие пространства непрерывных функций имели требуемые свойства. Из главных результатов этого параграфа заслуживает внимания прежде всего то обстоятельство, что полное пространство не должно быть обязательно ни B-полным, ни наследственно полным, и наконец, что B-полное пространство не должно быть R-полным.

Пусть T — вполне регулярное топологическое пространство, пусть $\mathfrak{K}$ означает систему всех компактных подмножеств пространства T. Систему $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}$ мы назовем полной системой компактных множеств, если для каждого $K \in \mathfrak{K}$ существует $K_0 \in \mathfrak{K}_0$ так, что $K \subset K_0$. Тогда можно говорить о компактном характере пространства T, как о наименьшей мощности полной системы компактных множеств. В этом смысле, например, евклидовы пространства имеют счетный компактный характер.

Обозначим через $C(T)$ линейное пространство всех непрерывных функций, определенных на T. Если $M \subset T$, то пусть $U(M, \varepsilon)$ означает множество всех $x(t) \in C(T)$ таких, что для них имеет место

$$|x(M)| \leqq \varepsilon .$$

(Неравенство $|x(M)| \leqq \varepsilon$ означает, конечно, $|x(t)| \leqq \varepsilon$ для всех $t \in M$.) Нетрудно видеть, что система всех $U(K, \varepsilon)$ ($K \in \mathfrak{K}$, $\varepsilon > 0$) образует полную систему окрестностей нуля некоторой допустимой топологии на $C(T)$. В дальнейшем мы всегда будем рассматривать $C(T)$ с этой топологией, так что $C(T)$ будет выпуклым топологическим линейным пространством.

Напомним еще, что для любого K и любого ε множество $U(K, \varepsilon)$ замкнуто. Действительно, пусть x лежит в замыкании множества $U(K, \varepsilon)$. Предположим, что существует $t_o \in K$ так, что $\sigma = |x(t_o)| > \varepsilon$. Положим $\varepsilon' = \frac{1}{2}(\sigma - \varepsilon)$. Множество $x + U(K, \varepsilon')$ должно пересекать $U(K, \varepsilon)$. Существует, следовательно, $x_1 \in U(K, \varepsilon)$ и $x_2 \in U(K, \varepsilon')$ так, что $x_1 = x + x_2$.

Но тогда

$$|x(t_o)| = |x_1(t_o) - x_2(t_o)| \leqq \varepsilon + \varepsilon' < \sigma ,$$

что противоречит предположению.

(6,1) Определение. *Пусть функция $x(t)$ определена на вполне регулярном топологическом пространстве T. Функцию $x(t)$ мы назовем почти непрерывной, если для любого $K \in \mathfrak{K}$ частичная функция x_K непрерывна.*

(6,2) *Пространство $C(T)$ будет полным тогда и только тогда, если каждая почти непрерывная функция, определенная на T, непрерывна.*

Доказательство: Пусть условие выполнено. Пусть $\mathfrak{A}$ — центрированная система Коши замкнутых множеств в $C(T)$. Пусть $t \in T$. Если $A \in \mathfrak{A}$, то положим

$$A(t) = \mathop{\mathrm{E}}_{\alpha}[\alpha = x(t),\ x \in A] .$$

Пусть $\mathfrak{A}(t)$ означает систему всех $\overline{A(t)}$. Докажем теперь, что для любого $t \in T$ система $\mathfrak{A}(t)$ будет центрированной системой Коши замкнутых множеств на прямой. Действительно, пусть дано $\varepsilon > 0$. Так как одноточечное множество, состоящее из точки t, компактно, то множество

$$U = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[x \in C(T),\ |x(t)| \leqq \varepsilon]$$

будет окрестностью нуля в $C(T)$. По предположению существует $A \in \mathfrak{A}$ так, что имеет место

$$x_1, x_2 \in A \ \Rightarrow\ x_1 - x_2 \in U$$

или, что то же самое,

$$x_1, x_2 \in A \ \Rightarrow\ |x_1(t) - x_2(t)| \leqq \varepsilon .$$

Это значит, что для любого t диаметр множества $A(t)$, а, значит, и $\overline{A(t)}$, будет не больше ε. Для любого t пусть $x_o(t)$ означает пересечение системы $\mathfrak{A}(t)$. Этим мы определили на T некоторую функцию $x_o(t)$.

Докажем теперь следующее утверждение:

если дано произвольное компактное $K \subset T$ и произвольное $\varepsilon > 0$, то существует $A \in \mathfrak{A}$ так, что имеет место

$$x \in A,\ t \in K \ \Rightarrow\ |x(t) - x_o(t)| \leqq \varepsilon .$$

Действительно, пусть дано компактное $K \subset T$ и $\varepsilon > 0$. Теперь существует $A \in \mathfrak{A}$ так, что

$$x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 - x_2 \in U(K, \varepsilon) ,$$

или

$$x_1, x_2 \in A,\ t \in K \Rightarrow |x_1(t) - x_2(t)| \leqq \varepsilon .$$

Отсюда следует, что для произвольного $t \in K$ диаметр множества $A(t)$ будет не больше ε, так что для любого $x \in A$ и любого $t \in K$ получим

$$|x(t) - x_o(t)| \leqq \varepsilon ,$$

чем и доказывается наше утверждение.

Докажем теперь, что функция $x_o(t)$ непрерывна на каждой компактной части пространства T. Это непосредственно вытекает из только что доказанного утверждения, ибо для каждого компактного $K \subset T$ и для каждого $\varepsilon > 0$ функцию $x_o(t)$ можно равномерно апроксимировать на K непрерывной функцией с погрешностью не более ε. Так как мы предполагаем, что условие нашей теоремы выполнено, то $x_o(t)$ непрерывна на всем T.

Остается доказать, что $x_o(t)$ лежит в пересечении системы $\mathfrak{A}$. Пусть дано $A \in \mathfrak{A}$ и пусть $U(K, \varepsilon)$-произвольная окрестность нуля в (CT). Из предыдущего результата следует существование $A_K \in \mathfrak{A}$ такого, что

$$x \in A_K,\ t \in K \Rightarrow |x(t) - x_o(t)| \leqq \varepsilon .$$

Так как система $\mathfrak{A}$ центрирована, существует $x \in A \cap A_K$. Для этого x имеет место

$$x - x_o \in U(K, \varepsilon) .$$

Так как U было выбрано произвольно, каждая окрестность точки x_o пересекается с множеством A, т. е. $x_o \in A$.

Этим завершается доказательство полноты пространства $C(T)$.

Пусть, наоборот, пространство $C(T)$ полно. Пусть $w(t)$ есть функция, определенная на T и такая, что для любого $K \in \mathfrak{K}$ частичная функция $w_K(t)$ непрерывна. Для каждого $K \in \mathfrak{K}$ обозначим

$$A(K) = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[x \in C(T),\ t \in K \Rightarrow x(t) = w(t)] .$$

Множества $A(K)$, очевидно, замкнуты. Система всех $A(K)$ центрирована, как вытекает из теоремы Титце. Далее имеет место

$$x_1, x_2 \in A(K) \Rightarrow x_1 - x_2 \in U(K, \varepsilon)$$

даже для любого $\varepsilon > 0$. Итак, существует $x \in C(T)$ так, что $x(t) = w(t)$ для любого $t \in T$, следовательно, w непрерывна.

(6,3) Определение. *Пусть T — вполне регулярное топологическое пространство. Множество $M \subset T$ мы назовем почти замкнутым, если для каждого компактного $K \subset T$ пересечение $M \cap K$ замкнуто.*

(6,4) *Пусть пространство $C(T)$ будет B-полным. Тогда мы утверждаем: если $M \subset T$ почти замкнуто и плотно в T, то $M = T$.*

Доказательство: Пусть пространство $C(T)$ является B-полным. Пусть M плотно в T и притом $M \cap K$ замкнуто для любого $K \in \mathfrak{K}$. Нужно доказать, что $M = T$. Обозначим через u_o топологию с образующими окрестностями $U(K \cap M, \varepsilon)$. Тогда будет $u_o \geqq u$, и из плотности M следует допустимость топологии u_o. Докажем теперь, что для любого K

$$u_o U(K, \varepsilon)$$

будет окрестностью нулю при топологии u_o. Действительно, докажем включение

$$U(K \cap M, \tfrac{1}{2}\varepsilon) \subset u_o U(K, \varepsilon) .$$

Пусть $x \in U(K \cap M, \frac{1}{2}\varepsilon)$ и пусть $K_1 \in \mathfrak{K}$. Докажем, что существует x' так, что имеет место

$$t \in K_1 \cap M \Rightarrow x'(t) = x(t) ,$$
$$|x'(K)| \leqq \varepsilon .$$

Для этой цели обозначим $W = \underset{t}{\mathrm{E}} [t \in K, |x(t)| \geqq \varepsilon]$; поэтому будет $M \cap W = 0$.

Теперь существует функция $z(t) \in C(T)$ так, что $0 \leqq z(t) \leqq 1$, причем имеет место

$$t \in (K_1 \cup K) \cap M \Rightarrow z(t) = 1 ,$$
$$t \in W \Rightarrow z(t) = 0 .$$

Положим $x'(t) = x(t) . z(t)$ и покажем, что x' удовлетворяет указанным условиям. Прежде всего

$$t \in K_1 \cap M \Rightarrow z(t) = 1 \Rightarrow x'(t) = x(t) .$$

Если $t \in K$, то могут наступить два случая: или $t \in W$, так что $z(t) = 0$, а поэтому и $x'(t) = 0$, т. е. $|x'(t)| \leqq \varepsilon$; или же $t \operatorname{non} \in W$, но тогда $|x(t)| < \varepsilon$, $|z(t)| \leqq 1$, следовательно снова $|x'(t)| \leqq \varepsilon$.

Этим мы доказали, что $x \in u_o U(K, \varepsilon)$, значит доказано и наше включение. Так как по предположению $C(T)$ является B-полным, то $u_o = u$. Пусть теперь $t \in T$; докажем, что $t \in M$. Множество $U(t, \varepsilon)$ является u-окрестностью нуля, а, следовательно, и u_o-окрестностью нуля. Итак существует $K' \in \mathfrak{K}$ и число $\eta > 0$ так, что $U(K' \cap M, \eta) \subset U(t, \varepsilon)$. Допустим, что $t \operatorname{non} \in M$. Однако теперь $K' \cap M$ компактно, следовательно, существует $x \in C(T)$ так, что $x(K' \cap M) = 0$, $x(t) = 1$. Так как $x(K' \cap M) = 0$, для всех действительных λ выполняется соотношение $\lambda x \in U(K' \cap M, \eta)$ и, следовательно, с учетом приведенного выше включения также $\lambda x \in U(t, \varepsilon)$. Это однако невозможно, так как $x(t) = 1$.

Итак, приведенное в теореме (6,4) условие является необходимым для того, чтобы пространство $C(T)$ было B-полным. Было бы интересно найти необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять пространство T, для того, чтобы пространство $C(T)$ было B-полным.

(6,5) *Пусть T — вполне регулярное топологическое пространство. Пусть пространство $C(T)$ наследственно R-полно. Тогда пространство T имеет следующее свойство:*

(2) *Если $M \subset T$ и точка $t \in \overline{M}$, то существует компактное $K \subset T$ так, что $t \in \overline{K \cap M}$.*

Доказательство. Пусть Y означает пространство, двойственное пространству $C(T)$. Для каждого $t \in T$ обозначим через $\varphi(t)$ тот элемент $\varphi(t) \in Y$, для которого имеет место

$$x\varphi(t) = x(t) .$$

Пусть теперь $M \subset T$ и пусть $t \in \overline{M}$. Обозначим через Q множество всех $y \in Y$ следующего вида

$$y = \lambda_1\varphi(m_1) + \ldots + \lambda_n\varphi(m_n) ,$$

где λ_i — действительные числа и $m_i \in M$. Итак, $Q \subset\subset Y$.

Теперь мы утверждаем, что $\varphi(t) \in \overline{Q}$. В самом деле, в противном случае существовало бы $x \in C(T)$ так, что

$$xQ = 0 , \quad x\varphi(t) = 1 .$$

Уравнение $xQ = 0$ означает в частности, что для любого $m \in M$ будет $x\varphi(m) = 0$, так что $x(M) = 0$. Но одновременно $x\varphi(t) = 1$, одткуда $x(t) = 1$, что противоречит тому факту, что $t \in \overline{M}$.

Так как пространство $C(T)$ является по предположению наследственно R-полным, то существует окрестность нуля U в $C(T)$ так, что

$$\varphi(t) \in \overline{Q \cap U^*} .$$

Пусть $U = U(K, \varepsilon)$, где $K \subset T$ компактно. Докажем, что

$$t \in \overline{K \cap M} .$$

Прежде всего займемся множеством $Q \cap U^*$. Докажем следующее утверждение:

Если $y \in Q \cap U^*$, $y = \Sigma\lambda_i\varphi(m_i)$, причем форма записи выбрана так, что $\lambda_i \neq 0$ и все m_i отличны друг от друга, то все $m_i \in K \cap M$.

Действительно, предположим, что например m_1 non $\in K$. Положим

$$B = K \cup (m_2) \cup \ldots \cup (m_n) .$$

Множество B также компактно и не содержит m_1, так что существует $x \in C(T)$ так, что $x(m_1) = 1$, $x(B) = 0$. Так как $x(K) = 0$, для любого $\sigma > 0$ будет $\sigma x \in U(K. \varepsilon)$. Наш элемент y принадлежит, однако, к U^*; это значит, что для любого σ будет $|\sigma xy| \leq 1$, что возможно только при $xy = 0$. Но судя по тому, как было выбрано x, видно, что $xy = \lambda_1 \neq 0$; получаме противоречие, которое и доказывает наше утверждение.

Возвратимся к доказательству включения $t \in \overline{K \cap M}$. Предположим, что $t \operatorname{non} \in \overline{K \cap M}$. Тогда существует $x_o \in C(T)$ так, что

$$x_o(K \cap M) = 0 , \quad x_o(t) = 1 .$$

Согласно только что доказанному, отсюда следует

$$x_o(Q \cap U^*) = 0 , \quad x_o\varphi(t) = 1 ,$$

что противоречит включению $\varphi(t) \in \overline{Q \cap U^*}$.

Этим и завершается доказательство.

(6,6) *Пусть T — вполне регулярное топологическое пространство. Пусть пространство $C(T)$ R-полно. Тогда пространство T имеет следующее свойство:*

(3) *Если $M \subset T$ плотно в T, то соединением всех множеств вида $\overline{M \cap K}$, $(K \in \mathfrak{K})$, является все пространство T.*

Ход доказательства одинаков с доказательством теоремы (6,5) с той разницей, что в настоящем случае подпространство Q плотно в Y.

Следующая лемма носит чисто технический характер. Мы приводим ее уже теперь, чтобы в последствии не нарушать хода мыслей.

(6,7) *Пусть T — вполне регулярное топологическое пространство. Пусть $B \subset T$ замкнуто. Обозначим через $C_T(B)$ пространство всех непрерывных на B функций, допускающих непрерывное распродстранение на все T. Пусть топология пространства $C_T(B)$ определяется его погружением в $C(B)$.*

Для любого $x \in C(T)$ пусть $\beta(x)$ означает частичную функцию x_B. Тогда β представляет собой непрерывное и открытое отображение $C(T)$ на $C_T(B)$.

Доказательство: Прежде всего ясно, что $\beta(C(T)) = C_T(B)$. Докажем, что β непрерывно. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и компактное $K \subset B$. Тогда

$$\beta(U(K, \varepsilon)) \subset \mathop{\mathrm{E}}_z[z \in C_T(B), \ |z(K)| \leqq \varepsilon],$$

так что β непрерывно.

Пусть далее дано $U(K, \varepsilon)$. Нужно доказать, что $\beta(U(K, \varepsilon))$ будет окрестностью нуля в $C_T(B)$. Пусть $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Мы докажем, что имеет место

$$\mathop{\mathrm{E}}_z [z \in C_T(B) , \quad |z(K \cap B)| \leqq \varepsilon'] \subset \beta(U(K, \varepsilon)) .$$

Пусть $z \in C_T(B)$ и пусть имеет место $|z(K \cap B)| \leqq \varepsilon'$. Существует $x \in C(T)$ так, что $x_B = z$. Положим

$$W = \mathop{\mathrm{E}}_t [t \in K , \quad |x(t)| \geqq \varepsilon] .$$

Очевидно, $B \cap W = 0$. Следовательно, существует $v \in C(T)$ так, что $0 \leqq \leqq v(t) \leqq 1$, $v(B) = 1$, $v(W) = 0$. Положим $x'(t) = x(t)\, v(t)$. Для $t \in B$ будет

$x'(t) = x(t)$, так что $x'_B = z$. Пусть теперь $t \in K$. Могут наступить два случая. Или t non $\in W$, но тогда $|x(t)| < \varepsilon$, а, значит, в силу неравенства $|v(t)| \leqq 1$, также и $|x'(t)| < \varepsilon$. Или же $t \in W$, но тогда $v(t) = 0$, значит и $x'(t) = 0$. Итак $x' \in U(K, \varepsilon)$. Одновременно $\beta(x') = x'_B = z$, так что наше включение доказано, и отображение β открыто.

В дальнейшем мы дадим построение некоторых вполне регулярных топологических пространств T, выбранных так, чтобы соответствующие пространства $C(T)$ имели предписанные свойства.

Идея построения первых двух пространств подобна одной мысли Хьюитта [6]. Прежде чем приступить к их построению, нам нужно будет заняться простой леммой.

(6,8) *Пусть последовательности действительных чисел s_n и σ_n имеют следующие свойства:*

(1) $s_n > 0$, $s_n > s_{n+1}$, $\lim s_n = 0$,

(2) $\sigma_n > 0$.

Тогда существует непрерывная функция $p(s)$, определенная для $s \geqq 0$ так, что $p(0) = 0$, для $s > 0$ будет $p(s) > 0$, причем

$$s_{n+1} \leqq s \leqq s_n \Rightarrow p(s) < \sigma_n .$$

Доказательство: Положим прежде всего $q_n = \min(1/n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Очевидно $0 < q_n \leqq \sigma_n$, далее $q_{n+1} \leqq q_n$ и при этом $q_n \to 0$. Положим теперь $p(0) = 0$ и $p(s) = \frac{1}{2}q_1$ для $s > s_1$. Для любого натурального n определим $p(s_n) = \frac{1}{2}q_n$ и дополним определение функции $p(s)$ в остальных точках $s > 0$ с помощью линейной интерполяции. Определенная таким образом функция $p(s)$ удовлетворяет, очевидно, всем требованиям нашей леммы.

(6,9) *Существует вполне регулярное топологическое пространство T со следующими свойствами:*

(1) *каждое почти замкнутое множество $M \subset T$ замкнуто,*

(2) *существует множество $M \subset T$ и точка $m \in \overline{M}$ так, что ни для какого компактного $K \subset T$ не будет $m \in \overline{M \cap K}$*

(3) *пространство T имеет счетный компактный характер.*

Доказательство. Пусть T состоит из всех пар действительных чисел $t = (t_1, t_2)$. Для каждого t определим, как обычно,

$$|t| = (t_1^2 + t_2^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Обозначим $A = \underset{t}{\mathrm{E}}\,[t_1 = 0]$, $B = \underset{t}{\mathrm{E}}\,[t_2 = 0]$, $m = (0, 0)$. Пусть $p(s)$ — непрерывная функция, определенная для $s \geqq 0$ такая, что

$$p(0) = 0, \quad s > 0 \Rightarrow p(s) > 0 . \qquad (p)$$

Положим
$$U(p, \varepsilon) = (m) \cup \mathop{\mathrm{E}}_{t} [|t_2| < \varepsilon\,, \quad |t_1| < p(|t_2|])\,.$$
Топология в пространстве T будет определена следующим образом. Если $t_o \in T$, $t_o \neq m$, то за полную систему окрестностей точки t_o мы примем все множества вида
$$U_n(t_o) = \mathop{\mathrm{E}}_{t} \left[|t - t_o| < \frac{1}{n} \right],$$
где n пробегает все натуральные числа. За полную систему окрестностей точки m мы примем систему всех множеств вида $U\left(p, \dfrac{1}{n}\right)$, где n пробегает все натуральные числа, а p — все функции с указанными под (p) свойствами. Определенную таким образом топологию пространства мы обозначим через v. Очевидно, что

(1) топология v слабее обычной евклидовой топологии плоскости,

(2) на множестве A топология v индуцирует обычную топологию,

(3) на множестве $T - (m)$ топология v индуцирует обычную топологию.

Докажем, что пространство (T, v) вполне регулярно. Пусть дана точка $t_o \in T$, $|t_o| > 0$ и ее окрестность $U_n(t_o)$. Тогда функция
$$x(t) = \min (1, n|t - t_o|)$$
непрерывна (даже при обычной топологии плоскости) и принимает значение 0 в точке t_o и значение 1 на дополнении множества $U_n(t)$, причем для любого t будет $0 \leqq x(t) \leqq 1$. Если теперь $t_o = m$ и дано $U(p, 1/n)$, то мы определим $x(t)$ следующим образом:

$x(t) = 1$ во всех точках, не лежащих в $U(p, 1/n)$,

$x(t) = n|t_2|$ для точек $t = (0, t_2)$, $|t_2| < 1/n$. Если $t = (t_1, t_2) \in U(p, 1/n)$ и притом $t_1 > 0$, то пусть $x(t)$ определяется линейной интерполяцией между значением $n|t_2|$ в точке $(0, t_2)$ и значением 1 в точке $(p(|t_2|), t_2)$. Если $t = (t_1, t_2) \in U(p, 1/n)$ и притом $t_1 < 0$, то пусть $x(t)$ определяется линейной интерполяцией между значением $n|t_2|$ в точке $(0, t_2)$ и значением 1 в точке $(- p(|t_2|), t_2)$.

Легко обнаружить, что $x(t)$ непрерывна при топологии v, что имеет место $0 \leqq x(t) \leqq 1$, $x(t_o) = 0$ и что функция $x(t)$ принимает значение 1 на дополнении множества $U(p, 1/n)$.

Посмотрим теперь, как выглядят компактные подмножества пространства (T, v).

Множество $K \subset T$ компактно тогда и только тогда, если

(α) K компактно в обычном смысле,

(β) существует число $\varepsilon > 0$ так, что
$$\mathop{\mathrm{E}}_{t} [t \in K, |t| \leqq \varepsilon] \subset A\,.$$

Пусть прежде всего K — множество, выполняющее оба наших условия. Обозначим

$$K_1 = K \cap \underset{t}{\mathrm{E}}\,[|t| \geqq \varepsilon]\,.$$

Множество K_1, очевидно, компактно в обычном смысле. Так как $K_1 \subset T - (m)$, то K_1 будет компактным и в топологии v, ибо топология v на $T - (m)$ всопадает с обычной. Обозначим $K_2 = K \cap \underset{t}{\mathrm{E}}\,[|t| \leqq \varepsilon]$. Множество K_2, очевидно, компактно в обычном смысле. Но так как $K_2 \subset A$, K_2 будет компактно и в топологии v, ибо топология v на A совпадает с обычной. Итак, множество K компактно, так как $K = K_1 \cup K_2$.

Обратно, пусть множество K компактно. Так как топология v слабее обычной топологии плоскости, K компактно в обычном смысле. Для доказательства свойства (β) предположим, наоборот, что существуют точки $t_n \in K$, $|t_n| < 1/n$, $t_n \operatorname{non} \in A$. Из последовательности t_n можно выделить последовательность t'_n так, что последовательность t'_{n2} будет строго монотонной. По лемме (6,8) существует непрерывная функция $p(s)$, определенная для $s \geqq 0$, положительная для $s > 0$ и такая, что $p(|t'_{n2}|) < |t'_{n1}|$. Обозначим теперь через S множество всех членов последовательности t'_n. Мы имеем $S \subset K$ и далее $U(p, 1) \cap S = 0$. Следовательно, точка m не лежит в замыкании множества S. При этом, однако, vS является частью евклидова замыкания множества S, равного $S \cup (m)$. Итак, множество S замкнуто в топологии v; так как $S \subset K$, множество S компактно в топологии v, а, значит, компактно и в обычном смысле. Это противоречие доказывает наше утверждение.

Используя только что полученный результат, мы видим, что система всех множеств вида

$$\underset{t}{\mathrm{E}}\,[t_1 = 0,\ |t_2| \leqq 1] \cup \underset{t}{\mathrm{E}}\left[\frac{1}{n} \leqq |t| \leqq n\right]$$

образует полную систему компактных множеств пространства T.

Пусть множество $M \subset T$ почти замкнуто. Докажем, что M замкнуто. Пусть $t_0 \in vM$. Пусть прежде всего $t_0 \neq m$. Множество $W = \underset{t}{\mathrm{E}}\,[|t - t_0| \leqq \frac{1}{2}|t_0|]$ компактно, множество $M \cap W$ компактно по предположению. При этом однако, ввиду определения топологии в точке t_0, будет $t_0 \in v(M \cap W) = M \cap W$. Пусть теперь $t_0 = m$, так что имеем $m \in vM$. Возьмем множество $K = \underset{t}{\mathrm{E}}\,[t_1 = 0,\ |t_2| \leqq 1]$, которое v-компактно. Множество $M \cap K$ по предположению снова v-компактно, значит компактно и в обычном смысле. Предположим, что $m \operatorname{non} \in M$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ так, что имеет место

$$t_1 = 0,\ |t_2| \leqq \varepsilon \Rightarrow (t_1, t_2) \operatorname{non} \in M\,.$$

Обозначим

$$W_n = \mathop{\mathrm{E}}_t \left[|t_1| \leqq 1, \ \frac{1}{n}\,\varepsilon \leqq |t_2| \leqq \varepsilon \right].$$

Пересечение $M \cap W_n$ есть компактное в обычном смысле множество, дизъюнктное с K. Поэтому существуют положительные числа σ_n так, что

$$\mathop{\mathrm{E}}_t \left[|t_1| \leqq \sigma_n \right[\ \cap \ M \ \cap \ W_n = 0 \ .$$

Согласно (6,8) существует далее непрерывная функция $p(s)$, определенная для $s \geqq 0$ так, что $p(0) = 0$, $p(s) > 0$ для $s > 0$ и что имеет место

$$\frac{1}{n}\,\varepsilon \leqq s \leqq \varepsilon \Rightarrow p(s) < \sigma_n \ .$$

Но тогда мы получаем $U(p, \varepsilon) \cap M = 0$, так что не может быть $m \in vM$, что противоречит допущению.

Возьмем теперь множество $M = T - A$. Множество M, очевидно, плотно в T. Учитывая вид компактных множеств в T, мы видим однако что, для каждого компактного множества K существует число $\varepsilon > 0$ так, что

$$\mathop{\mathrm{E}}_t \left[|t| < \varepsilon \right] \cap M \ \cap \ K = 0 \ .$$

Это значит, что ни для какого компактного K не будет $m \in v\,(M \ \cap \ K)$.

(6,10) *Существует полное выпуклое топологическое линейное пространство X такое, что точка* 0 *имеет в нем счетный характер и притом X не является R-полным.*

Доказательство: Положим $X = C(T)$, где T — топологическое пространство, построенное в (6,9). В $C(T)$ существует счетная полная система окрестностей нуля, так как в пространстве T существует счетная полная система компактных множеств. Согласно теореме (6,6), пространство $C(T)$ не является R-полным, так как T содержит плотное множество M и точку m такую, что ни для какого $K \in \mathfrak{K}$ не будет $m \in \overline{M \cap K}$. Остается доказать, что $C(T)$ полно. Согласно (6,2), для этого достаточно показать, что каждая почти непрерывная функция $x(t)$, определенная на T, непрерывна. Итак, возьмем почти непрерывную функцию $x(t)$, определенную на T; пусть λ — произвольное действительное число. Рассмотрим множество

$$C = \mathop{\mathrm{E}}_t \left[t \in T \ , \quad x(t) \geqq \lambda \right] .$$

Легко убедиться в том, что для любого $K \in \mathfrak{K}$ будет

$$K \ \cap \ C = \mathop{\mathrm{E}}_t \left[t \in K \ , \quad x_K(t) \geqq \lambda \right] ,$$

так что множество $K \cap C$ замкнуто. Итак, множество C почти замкнуто и, следовательно, замкнуто. Ввиду произвольности λ это доказывает, что функция $x(t)$ непрерывна. Доказательство закончено.

(6,11) *Существует вполне регулярное топологическое пространство T со следующими свойствами:*

(1) *каждое почти замкнутое множество $M \subset T$ замкнуто,*

(2) *T содержит замкнутое множество B такое, что пространство $C_T(B)$ неполно.*

Доказательство: Пусть T означает, как и в прошлом случае, евклидову плоскость. Все обозначения случая (6,9) остаются в силе. Определим теперь на T топологию v следующим образом:

Пусть дана точка $t_o \in T$ такая, что $t_{o2} \neq 0$. Тогда за топологию v в точке t_o примем обычную евклидову топологию плоскости. Обратно, если $b \in B$, то в качестве полной системы окрестностей точки b возьмем все множества вида

$$b + U\left(p, \frac{1}{n}\right),\text{*)}$$

где n пробегает все натуральные числа, а p — все функции со свойствами (p).

(T, v) будет, очевидно, пространством Хаусдорфа и так же, как и в предыдущем случае, докажем, что оно вполне регулярно. Введем дальнейшее обозначение. Для каждого действительного s пусть $A(s)$ означает множество

$$\mathop{\mathrm{E}}_{t}\,[t_1 = s]\,.$$

Прежде всего ясно, что

(1) топология v слабее обычной евклидовой топологии плоскости,

(2) на каждом множестве $A(s)$ топология v индуцирует обычную топологию,

(3) на множестве $T - B$ топология v индуцирует обычную топологию.

Докажем теперь следующее утверждение:

Множество $K \subset T$ компактно тогда и только тогда, если

(α) K компактно в обычном смысле,

(β) существует $\varepsilon > 0$ и конечное количество действительных чисел $s_1, \ldots, s_n$ так, что

$$\mathop{\mathrm{E}}_{t}\,[t \in K,\ |t_2| \leqq \varepsilon] \subset A(s_1) \cup \ldots \cup A(s_n)\,.$$

Пусть множество K выполняет прежде всего оба наших условия. Как и в предыдущем случае, построим разложение

$$K = (K \cap \mathop{\mathrm{E}}_{t}\,[|t_2| \leqq \varepsilon]) \cup (K \cup \mathop{\mathrm{E}}_{t}\,[|t_2| \geqq \varepsilon])\,.$$

причем легко обнаружить, что каждое слагаемое является компактным в топологии v, следовательно, K компактно в топологии v.

---

*) Здесь знак $+$ означает сложение, а не соединение.

Обратно, пусть множество K компактно в топологии v. Тогда K будет компактным и в обычной топологии плоскости. В частности существует $\lambda > 0$ так, что

$$t \in K \Rightarrow |t| \leqq \lambda .$$

Предположим, что не существует $\varepsilon > 0$ с указанными свойствами. Это значит, что ни одно из множеств

$$K_n = \mathop{\mathrm{E}}_{t}\left[t \in K , \quad |t_2| \leqq \frac{1}{n}\right]$$

нельзя поместить на конечном количестве вертикальных прямых. Итак, существует последовательность $t_n \in K$ так, что $|t_{n2}| \leqq 1/n$, и среди чисел t_{n1} нет одинаковых. Так как $|t_{n1}| \leqq \lambda$, можно предположить, что последовательность t_n была выбрана так, что последовательность t_{n1} сходится к пределу s_0. В дальнейшем мы будем различать два случая.

(1) для бесконечного числа индексов n имеет место $t_{n2} = 0$. Тогда мы видим, что множество $B \cap K$ бесконечно. Однако множество B замкнуто, значит, множество $B \cap K$ компактно. Но топология v индуцирует на B дискретную топологию; таким образом получается противоречие.

(2) если же равенство $t_{n2} = 0$ справедливо не более чем для конечного числа индексов n, то легко видеть, что из последовательности t_n можно выделить последовательность t'_n так, что $|t'_{n2}| > 0$, $|t'_{n,2}| > |t'_{n+1,2}|$. Теперь существует непрерывная функция $p(s)$, определенная для $s \geqq 0$, причем $p(0) = 0$, для $s > 0$ будет $p(s) > 0$ и в то же время

$$p(|t'_{n2}|) < |t'_{n1} - s_0| .$$

Если b означает точку $(s_0, 0)$, то $b + U(p, 1)$ дизъюнктно с множеством S, состоящим из всех членов последовательности t'_n. Тогда точка b не лежит в замыкании множества S (при топологии v), значит, множество S замкнуто, а, следовательно, и компактно, ибо $S \subset K$. Но это противоречит тому обстоятельству, что множество S не является компактным в обычном смысле

Тем же путем, что и в предыдущем случае, можно доказать, что каждое почти замкнутое множество $M \subset T$ уже замкнуто.

Обозначим теперь через R множество всех точек $t \in B$, для которых t_1 рационально. Докажем теперь следующее утверждение:

если $x \in C(T)$ таково, что $x(R) = 0$, то сущесвтует точка $b \in B$ так, что $b \operatorname{non} \in R$, $x(b) = 0$.

Итак, пусть $x \in C(T)$, $x(R) = 0$. Обозначим через W_n множество всех действительных чисел t_1 таких, что

$$|t_2| \leqq \frac{1}{n} \Rightarrow |x(t_1, t_2)| \geqq \frac{1}{n} .$$

Допустим, что имеет место

$$b \in B,\ b \operatorname{non} \in R \Rightarrow |x(b)| > 0 .$$

Тогда, очевидно, соединение всех W_n тождественно с множеством всех иррациональных чисел. По теореме Бэра тогда существует натуральное число m и интервал P на прямой так, что множество W_m лежит плотно в P. Возьмем рациональное число $r \in P$. Так как $x(r, 0) = 0$ и функция x непрерывна в обычном смысле на прямой $A(r)$, то существует число $0 < < s < \frac{1}{m}$ так, что в точке $t = (r, s)$ функция x принимает значение $|x(t)| \leqq \leqq \frac{1}{2m}$. Теперь для $t_1 \in P$ функция $x(t_1, s)$ является непрерывной функцией t_1. На плотном множестве в P она принимает значения по абсолютной величине $\geqq \frac{1}{m}$. Итак, имеем

$$t_1 \in P \Rightarrow |x(t_1, s)| \geqq \frac{1}{m} ,$$

что невозможно, так как $r \in P$ и $|x(r, s)| \leqq \frac{1}{2m}$.

Остается доказать, что пространство $C_T(B)$ неполно. Докажем сначала следующее простое утверждение.

Если дано конечное число точек $b_1, \ldots, b_n \in B$, то существует $x \in C(T)$ так, что $x(b\ ) = 0$ и $x(b) = 1$ для всех остальных точек $b \in B$.

Это утверждение, очевидно, достаточно доказать для одной точки $b_o \in B$, так как в общем случае мы получим искомую функцию как произведение функций, соответствующих отдельным точкам. Поэтому, если дана точка $b_o = (b_{o1}, 0) \in B$, то положим

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \quad \text{для} \quad |t_2| \geqq |t_1 - b_{01}| , \\ x(t) &= 1 \quad \text{для} \quad t \in B , \quad t \neq b_0 . \end{aligned}$$

В остальных точках значения функции $x(t)$ пусть будут определены при помощи линейной интерполяции вдоль вертикальных прямых. Очевидно $x(t) \in C(T)$.

Определим функцию $z(t)$ на B следующим образом:

$$\begin{aligned} z(t) &= 0 , \quad \text{если } t_1 \text{ рационально}, \\ z(t) &= 1 , \quad \text{если } t_1 \text{ иррационально}. \end{aligned}$$

Так как $z(t)$ исчезает как раз на R, то из предыдущих рассуждений следует, что z non $\in C_T(B)$.

Пусть теперь K — произвольная конечная часть множества B. Обозначим $A(K) = \underset{v}{\mathrm{E}} [v \in C_T(B), v_K = z_K]$. Множества $A(K)$, очевидно, замкнуты в $C_T(B)$. По только что доказанному они образуют центрированную систему. Далее, если $v_1, v_2 \in A(K)$, то для $t \in K$ будет $v(t_1) - v(t_2) = 0$, откуда $v_1 - v_2 \in \in U(K, \varepsilon)$ даже для каждого $\varepsilon > 0$. Итак, мы имеем центрированную систему Коши замкнутых множеств с пустым пересечением.

Доказательство теоремы (6,11) вполне закончено.

Приведем еще некоторые дальнейшие свойства только что построенного пространства T. Пространство T не является нормальным. Действительно, пространство T содержит замкнутое множество B такое, что существует функция $z(t)$, непрерывная на B, которую нельзя непрерывно распространить на все T. Более того, каждая функция на пространстве B будет непрерывной. В то же время, как можно легко доказать, пространство $C_T(B)$ состоит именно из всех функций, являющихся в обычном смысле слова функциями первого класса на прямой. (Отсюда, между прочим, снова вытекает доказанное уже нами утверждение, что никакая функция $x \in C(T)$ не может удовлетворить соотношениям $x(R) = 0$ и $x(b) \neq 0$ для любого $b \in B - R$. Действительно, частичная функция x_B является функцией первого класса на прямой, но в то же время она претерпевает разрыв в каждой иррациональной точке. Множество точек разрыва функции первого класса является, однако, всегда множеством первой категории, и мы приходим к противоречию).

Множество R является в пространстве T замкнутым G_δ. Не существует, однако, никакого $x \in C(T)$, которое исчезало бы как раз на R. Отсюда опять вытекает, что пространство T не является нормальным.

(6,12) *Существует полное выпуклое топологическое линейное пространство X и выпуклое топологическое линейное пространство Z так, что Z является гомоморфным образом X, но Z неполно.*

Доказательство: Возьмем $X = C(T)$, где T — топологическое пространство, построенное в (6,11). Возьмем $Z = C_T(B)$ и поставим в соответствие каждому $x \in C(T)$ частичную функцию x_B. По лемме (6,7) это отображение есть гомоморфизм; согласно (6,11), пространство X полно в то время как Z неполно. Итак, пространство X не является наследственно полным. Доказательство закончено.

В (6,10) мы видели пример пространства счетного характера, которое было полным (а, значит, и B-полным), но не было R-полным. Покажем теперь, что существует даже нормированное полное пространство, не являющееся R-полным. Его построение будет несколько более сложным, но зато мы одновременно установим, что теорема (6,5) не допускает обращения. Мы воспользуемся при этом некоторыми простыми оценками, которые мы в целях обозримости сформулируем отдельно в виде лемм.

(6,13) *Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_{2s}$ — действительные числа. Пусть*

$$a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_{2s} .$$

Тогда для действительных x будет

$$\min \sum_{i=0}^{2s} |a_i + x| = a_{2s} + a_{2s-1} + \ldots + a_{s+1} - a_{s-1} - a_{s-2} - \ldots - a_0.$$

Доказательство: Если обозначить $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{2s} |a_i + x|$, то

$$\varphi(-a_s) = \sum_{i=0}^{s-1} |a_i - a_s| + \sum_{i=s+1}^{2s} |a_i - a_s| .$$

Для $i \leqq s-1$ будет $a_i \leqq a_s$, так что $|a_i - a_s| = a_s - a_i$, для $i \geqq s+1$ будет $a_i \geqq a_s$, так что $|a_i - a_s| = a_i - a_s$. Итак, $\varphi(-a_s) = a_{2s} + a_{2s-1} + \ldots + a_{s+1} - a_{s-1} - a_{s-2} - \ldots - a_0$. Далее имеем

$$\varphi(x) = |x + a_s| + \sum_{i=0}^{s=1} (|x + a_i| + |x + a_{2s-i})| \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=0}^{s-1} (|-x - a_i| + |x + a_{2s-i}|) \geqq \sum_{i=0}^{s-1} |a_{2s-i} - a_i| = \sum_{i=0}^{s-1} (a_{2s-i} - a_i) .$$

(6,14) *Пусть даны числа $a_0, b_1, b_2, \ldots, b_{2s}$, причем пусть $b_i \geqq 0$. Тогда минимум выражения*

$$|a_o + x| + \sum_{i=1}^{2s} |a_o + b_1 + \ldots + b_i + x|$$

будет как раз

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + sb_s + sb_{s+1} + (s-1)\, b_{s+2} + \ldots + 2b_{2s-1} + b_{2s} .$$

Доказательство: Достаточно в приведенной выше лемме положить $a_i = a_o + b_1 + \ldots + b_i$.

(6,15) *Существует компактное топологическое пространство T такое, что пространство $C(T)$ не является R-полным.*

Замечание: Так как T компактно, то $C(T)$ будет полным и даже нормированным. Пространство $C(T)$ будет поэтому даже наследственно B-полным. При этом пространство T выполняет условие теоремы (6,5). Итак, только что высказанная теорема показывает, что теорема (6,5) не допускает обращения.

Доказательство: Пусть T состоит из числа 0 и из всех чисел вида $1/n$, где n — натуральное число. Пусть топология в T определяется обычной евклидовой метрикой, так что T компактно. Введем обычные обозначения. Если $x(t) \in C(T)$, то положим

$$x_0 = x(0) , \quad x_n = x(1/n)$$

для натуральных n. Тогда имеем $\lim x_n = x_0$. Пусть для любого натурального n символ e_n означает единичный вектор, т. е. такой элемент пространства $C(T)$, что $e_{nn} = 1$, в то время как $e_{nk} = 0$ для всех остальных индексов k. Пусть U означает замкнутую единичную сферу в $C(T)$ (в качестве нормированного пространства).

Известно, что двойственное пространство Y тождествено с пространством всех последовательностей $y = \{y_k\}_0^\infty$ таких, что

$$\sum_0^\infty |y_k| < \infty .$$

При этом произведение xy дано выражением $\sum_0^\infty x_k y_k$, и множество U^* тождествено с множеством всех $y \in Y$, для которых

$$\sum_0^\infty |y_k| \leqq 1 .$$

Обозначим далее через W множество всех целых неотрицательных чисел. Если $M \subset W$, то для каждого $y \in Y$ обозначим

$$M(y) = \sum_{k \in M} y_k .$$

Пусть $p_1, p_2, \ldots$ означает последовательность всех простых чисел, упорядоченных по величине, так что $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, и т. д. Для каждого натурального n пусть P_n означает множество всех чисел вида p_{n+2}^m, где m — произвольное натуральное число. Для каждого натурального n пусть R_n означает множество всех чисел вида $3m$, где $m \geqq n$. Обозначим для каждого натурального n

$$M_n = R_n \cup P_n .$$

Все числа множества W, не лежащие ни в каком множестве M_n, обьединим в множество M_0. Например, все числа вида 2^m (при натуральном m) принадлежат к M_0. Обозначим теперь

$$Q = \mathop{\mathrm{E}}_y [y \in Y,\ M_j(y) = 0,\ j = 1, 2, \ldots] .$$

Докажем, что Q — плотное подпространство в Y. Очевидно, достаточно показать, что для каждого $x \in X$, $x \neq 0$ существует $q \in Q$, так, что $xq \neq 0$.

Итак, пусть $x \in X$, $x \neq 0$.

Или существует $k \in M_o$ так, что $x_k \neq 0$. В таком случае возьмем $y \in Y$ так, чтобы $y_k \neq 0$, в то время как все остальные координаты его равны нулю. Очевидно, $y \in Q$ и $xy \neq 0$.

Или для каждого $k \in M_o$ будет $x_k = 0$. Тогда по необходимости будет $\lim x_n = 0$, ибо M_0 содержит сколь угодно большие числа. Пусть k — первая координата, для которой $x_k \neq 0$. Тогда $k \geqq 3$. Снова возможны два случая.

(α) Число k принадлежит одному и только одному множеству M_n. Тогда выберем $l \in P_n$ так, чтобы $|x_l| < \frac{1}{2}|x_k|$. Это возможно, так как $\lim x_l = 0$ и одновременно P_n содержит сколь угодно большие числа. Определим $y \in Y$ так, что $y_k = 1$, $y_l = -1$, а остальные координаты равны нулю. Так как $l \in P_n \subset M_n$, то $M_n(y) = 0$. Если r — натуральное число, отличное от n, то $k \operatorname{non} \epsilon M_r$ по предположению; так как $l \epsilon P_n$, не будет $l \epsilon M_r$. Итак $M_r(y) = 0$, так что $y \epsilon Q$. При этом

$$xy = x_k - x_l \neq 0 \ .$$

(β) Число k принадлежит хотя бы двум множествам M_n. Тогда k должно иметь вид $3m$, где m — натуральное число. Но тогда множества $M_1, M_2, \ldots, \ldots, M_m$ представляют в точности все множества, которым принадлежит число k. Для каждого i ($1 \leqq i \leqq m$) мы найдем $l_i \epsilon P_i$ так, чтобы $|x_{l_i}| < \frac{1}{2m} |x_k|$. Это возможно, так как $\lim x_l = 0$ и множества P_i содержат сколь угодно большие числа. Определим теперь $y \epsilon Y$ так, что

$$y_k = 1, \ y_{l_i} = -1 \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ ,$$

$$y_j = 0 \text{ для всех остальных индексов.}$$

Имеем $xy = x_k - x_{l_1} - \ldots - x_{l_m} \neq 0$, ибо

$$|x_k - x_{l_1} - \ldots - x_{l_m}| \geqq |x_k| - m \frac{1}{2m} |x_k| = \tfrac{1}{2}|x_k| \neq 0 \ .$$

При этом однако $y \epsilon Q$. Чтобы доказать это, возьмем произвольное натуральное число j. Нужно доказать, что $M_j(y) = 0$. Если $j > m$, то $k \operatorname{non} \epsilon M_j$, как мы уже заметили раньше. Больше того, ни для какого l_i не будет $l_i \epsilon M_i$, ибо для $i \leqq m$ имеем $P_i \cap M_j = 0$. Итак, $M_j(y) = 0$. Если же, однако, $1 \leqq j \leqq m$, то $k \epsilon M_j$. Из чисел $l_1, \ldots, l_m$ одно лишь l_j лежит в M_j, так что снова $M_j(y) = 0$.

Определим теперь $y \epsilon Y$ следующим образом: если k — натуральное число, $k = 3m$, то пусть

$$y_k = \frac{1}{m^2} \ .$$

Для остальных $k \epsilon W$ пусть $y_k = 0$.

Покажем, что для любого $\sigma > 0$ существует слабая окрестность точки y, не пересекающаяся с множеством $Q \cap \sigma U^*$.

Так как гармонический ряд расходится, существует натуральное число s так, что

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{s} > \sigma + 1 \ .$$

Пусть $q \epsilon Q$ и пусть имеет место

$$|e_{3r}(q - y)| < \frac{1}{4s^2(s+1)} \, , \quad r = 1, 2, \ldots, 2s \ .$$

Докажем, что

$$|q| = \sum_{k=0}^{\infty} |q_k| > \sigma \ .$$

Обозначим $\lambda = R_{2s+1}(q)$. Для любого $j = 1, 2, \ldots, 2s$ имеет место

$$0 = M_j(q) = R_j(q) + P_j(q) = q_{3j} + q_{3(j+1)} + \ldots + q_{3(2s)} + \lambda + P_j(q) .$$

Тогда будет

$$|q| = \sum_0^\infty |q_k| \geqq |R_{2s+1}(q)| + \sum_{j=1}^{2s} |P_j(q)| = |\lambda| + \sum_{j=1}^{2s} |P_j(q)| =$$
$$= |\lambda| + \sum_{j=1}^{2s} |q_{3j} + \ldots + q_{3(2s)} + \lambda| .$$

Прежде всего заметим, что числа q_{3j} $(j = 1, 2, \ldots, 2s)$ положительны. Действительно,

$$q_{3j} = \frac{1}{j^2} + \Theta \frac{1}{4s^2(s+1)} \geqq \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4s^2(s+1)} \geqq \frac{1}{8s^2} > 0 .$$

Из предыдущей леммы мы получим тогда оценку

$$|q| \geqq q_3 + 2q_{3.2} + 3q_{3.3} + \ldots + sq_{3.s} + sq_{3(s+1)} + \ldots + q_{3.2s} \geqq$$
$$\geqq q_3 + 2q_{3.2} + 3q_{3.3} + \ldots + sq_{3.s} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{s} + \Theta . s . s . \frac{1}{4s^2(s+1)}) \geqq$$
$$\geqq \sigma + 1 - \frac{1}{4(s+1)} > \sigma .$$

Этим и заканчивается доказательство.

(6,16) *Существует полное выпуклое топологическое линейное пространство, не являющееся B-полным.*

Доказательство: Для получения пространства требуемых свойств достаточно, согласно (6,2) и (6,4), взять пространство $C(T)$, где T имеет следующие свойства: каждая почти непрерывная функция на T непрерывна, тем не менее T содержит плотную часть $M \neq T$ так, что M почти замкнуто. Следующий пример такого пространства принадлежит М. Катетову.

Пользуюсь этим случаем, чтобы выразить благодарность проф. Катетову за то, что он по моей просьбе заннмался этим вопросом.

(6,17) *Существует вполне регулярное топологическое пространство T со следующими свойствами:*

(1) *Каждая почти непрерывная функция на T непрерывна,*

(2) *пространство T содержит плотное множество $M \neq T$ так, что M почти замкнуто.*

Доказательство: Пусть T означает вполне регулярное пространство, возникающее из евклидовой плоскости тем, что непрерывными функциями мы условимся считать как раз все функции, непрерывные относительно каждого переменного в отдельности.*) Только что описанную топологию пространства T мы обозначим через v. Очевидно, что

(1) топология v слабее обычной евклидовой топологии плоскости,

(2) топология v индуцирует на каждой горизонтальной и на каждой вертикальной прямой обычную топологию.

Установим прежде всего вид компактных подмножеств пространства (T, v). Докажем следующее утверждение:

Множество $K \subset T$ будет компактно тогда и только тогда, если

(α) оно компактно в обычном смысле,

(β) существует конечное число вертикальных и горизонтальных прямых так, что K является частью их соединения.

Пусть прежде всего K — множество, выполняющее оба наших условия. Тогда K будет соединением конечного числа множеств, компактных в обычном смысле, каждое из которых помещается на некоторой вертикальной или горизонтальной прямой. Но так как на этих прямых топология v совпадает с обычной, каждое из упомянутых множеств компактно в топологии v, так что и K будет компактно в топологии v.

Обратно, пусть множество K компактно в топологии v. Тогда ясно, что оно компактно и в обычной топологии плоскости, так что K ограничено. Предположим, что множество K нельзя поместить на конечном числе вертикальных и горизонтальных прямых. Тогда легко убедиться в том, что сущесвуют две строго монотонные сходящиеся последовательности s_n и t_n так, что $(s_n, t_n) \in K$. Если s и t означают пределы последовательностей s_n и t_n, то из компактности множества K следует, что и $(s, t) \in K$. Нетрудно видеть, что существует функция w, непрерывная относительно каждого перемен ного в отдельности, так, что

$$w(s_n, t_n) = 0\,, \quad w(s, t) = 1\,.$$

Обозначим через S множество, состоящее из всех членов последовательности (s_n, t_n). Его замыкание vS есть часть обычного евклидова замыкания множества S, равного $S \cup (s, t)$. Однако, так как в топологии v точка (s, t) отделена от S непрерывной функцией w, то S замкнуто в топологии v. Так как $S \subset K$, следует отсюда что S компактно. Но это значит, что S компактно также и в евклидовой топологии, что является противоречием.

Отсюда легко вытекает, что каждая почти непрерывная на пространстве (T, v) функция является тем самым и непрерывной. Действительно, учитывая то обстоятельство, что каждый вертикальный и горизонтальный отрезок является компактным в топологии v, мы видим, что почти непрерывная на (T, v) функция будет в обычном смысле непрерывной относитель-

*) Это пространство было впервые исследовано Й. Новаком в работе *Induktion partiell stetiger Funktionen*, Math. Ann., *118* (1942), 449—461.

но каждого переменного в отдельности, так что она будет непрерывной в топологии v.

Докажем теперь, что каждое открытое в топологии v множество имеет непустое открытое ядро при евклидовой топологии плоскости. Действительно, пусть $x(s, t)$ есть функция двух переменных, определенная на всей плоскости и непрерывная относительно каждого переменного в отдельности. Пусть (s_0, t_0) — фиксированная точка и пусть $\varepsilon > 0$. Докажем, что множество

$$H = \mathop{\mathrm{E}}_{(s,t)} [|x(s, t) - x(s_0, t_0)| < \varepsilon]$$

содержит множество, открытое в обычной топологии плоскости. Так как $x(s_0, t)$ является непрерывной функцией от t, существует $\tau > 0$ так, что имеет место

$$|t - t_0| \leqq \tau \Rightarrow |x(s_0, t) - x(s_0, t_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Обозначим

$$T_n = \mathop{\mathrm{E}}_{t} [|t - t_0| \leqq \tau , \quad |s - s_0| \leqq \frac{1}{n} \Rightarrow |x(s, t) - x(s_0, t_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon] .$$

Так как функция $x(s, t)$ непрерывна относительно каждого переменного, то соединение всех T_n тождествено с отрезком $|t - t_0| \leqq \tau$. Итак, существует отрезок $\langle t_1, t_2\rangle \subset \langle t_0 - \tau, t_0 + \tau\rangle$ и натуральное число m так, что $\langle t_1, t_2\rangle \subset \overline{T_m}$.

Теперь мы утверждаем, что имеет место

$$|s - s_o| \leqq \frac{1}{m}, \quad t_1 \leqq t \leqq t_2 \Rightarrow (s, t) \in H .$$

Действительно, возьмем фиксированное s_1 так, что $|s_1 - s_o| \leqq 1/m$. Рассмотрим отрезок, состоящий из всех точек (s_1, t), где t пробегает интервал $\langle t_1, t_2\rangle$. На этом отрезке плотно лежат точки (s_1, t), где $t \in T_m$, для которых, следовательно,

$$|x(s_1. t) - x(s_0, t_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Итак, на всем рассматриваемом отрезке будет иметь место

$$|x(s_1, t) - x(s_0, t_0)| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

так. что все точки рассматриваемого отрезка принадлежат к H.

В частности, из только что доказанного следует. что каждое множество $M \subset T$. плотное в евклидовой топологии, пересекается с каждым множеством, открытым в топологии v, и будет поэтому плотным и в топологии v.

Теперь уже не составит труда построить счетное множество $M \subset T$ так, чтобы оно было плотным в обычной топологии плоскости и притом пересекалось с каждой вертикальной и горизонтальной прямой не более, чем в конечном числе точек. Тогда множество M будет, по только что доказанному, плотным в топологии v. В то же время, учитывая известный уже нам вид компактных множеств в (T, v), мы видим, что M почти замкнуто. При этом, очевидно, $M \neq T$.

ЛИТЕРАТУРА.

[1] *R. Arens:* Duality in linear spaces, Duke Math. Journ., *14* (1947), 787—794.
[2] *S. Banach:* Théorie des opérations linéaires, Monografie matematyczne, Warszawa 1932.
[3] *J. Dieudonné:* La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Ann. de l'École Norm. Sup., *59* (1942), 107—139.
[4] *J. Dieudonné, L. Schwartz:* La dualité dans les espaces (F) et (LF), Annales de l'Inst. Fourier, Université de Grenoble, *1* (1950), 61—101.
[5] *W. F. Eberlein:* Weak compactness in Banach spaces, Proc. Nat. Ac. of Sci., *33* (1947), 51—53.
[6] *E. Hewitt:* Rings of real-valued continuous functions, Trans. Am. Math. Soc., *64* (1948), 45—99.
[7] *M. Katětov:* Zur Theorie der topologischen Vektorräume, Bull. int. Acad. Tchèque, *53* (1943), No 46.
[8] *M. Katětov:* On convex topological linear spaces, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Carol., 181 (1948).
[9] *M. Krein, V. Šmulian:* On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, Ann. of Math., *41* (1940), 556—583.
[10] *G. W. Mackey:* On convex topological linear spaces, Trans. Am. Math. Soc., *60* (1946), 520—537.
[11] *J. v. Neumann:* On complete topological spaces, Trans. Am. Math. Soc., *37* (1935), 1—20.
[12] *V. Šmulian,* Über lineare topologische Räume, Mat. Sbornik, 7 (1941), 425—448.
[13] *A. Weil,* Sur les espaces a structure uniforme, Actualités scientifiques et Industrielles, 551 (1938).

По поступлении рукописи редакцией была получена следующая работа на подобную же тему для случая индуктивных пределов пространств типа F.

G. Köthe, Über zwei Sätze von Banach, Math. Zeitschrift, *53* (1950), 203—209.

Summary.

ON COMPLETE TOPOLOGICAL LINEAR SPACES.

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Received November 11, 1952.)

The well known BANACH theorem on the continuity of inverse operators may undoubtedly be classed with the most important results of Functional Analysis. Under some slight restrictions it assumes the following form:

Let X be a complete normed linear space and let φ be a continuous linear mapping of X on a normed space Z. Let Z be of the second category in itself. Under these conditions the mapping φ is open and the space Z is complete.

It is easy to see that the essential point of the proof lies in the following property of complete linear spaces: the image of the unit sphere of X is either nondense or open in Z. One of the chief aims of the present paper is the investigation under what conditions and in what form it is possible to extend this theorem to as wide a class of linear spaces as possible.

The natural generalization of normed linear spaces is the notion of a convex topological linear space. It is easy to see, however, that the theory of normed spaces itself necessitates in quite a natural way the introduction of convex topological linear spaces because of the well known fact that the relation between a given normed space and its conjugate as a normed space is not symmetric. The notion of a convex topological linear space, however, enables us to introduce the relation of duality between two spaces [3], where neither of the spaces has a privileged position as it is the case in the relation between a normed space and its conjugate.

It seems therefore reasonable to investigate the possibility of extending the results of the theory of normed spaces to general topological linear spaces. This is exactly the object of the present paper, where we concentrate ourselves on questions connected with the theorem of Banach and the notion of completeness.

As far as topology is concerned, terminology coincides with that of BOURBAKI. The terms convex topological linear space, dual space, polar set are employed in the same sense as they are used by J. DIEUDONNÉ [3] and M. KATĚTOV [8]. The term neighbourhood of zero is taken to mean, unless the contrary is specified, a symmetrical convex and closed neighbourhood of zero.

Our first problem is to find how the theorem of Banach should be formulated in the case of general convex topological linear spaces. A detailed analysis shows that the substance of the Banach property is contained in the following definitions:

Let X and Z be two convex topological linear spaces. Let φ be a continuous linear mapping of X onto Z. The mapping φ will be called almost open if it cannot happen that an open set in X has a nondense image under the mapping φ.

A convex topological linear space X will be called B-complete, if every continuous and almost open linear mapping of X on a convex topological linear space Z is already open.

The most essential point in the further investigations is a simple theorem, which enables us to characterize B-complete spaces by means of some interesting properties of their duals. For this purpose we introduce the following definition:

Let X and Y be dual convex topological linear spaces. Let $K \subset Y$ be symmetrical and convex. The set K will be called almost closed if, for every neighbourhood of zero U in X, the intersection $K \cap U^*$ is closed.

Using this concept, we can give the following characterization of B-complete spaces:

Let X and Y be dual convex topological linear spaces. The space X is B-complete if and only if every almost closed subspace of Y is closed.

Let us introduce another definition:

Let X and Y be dual convex topological linear spaces. Let r be a linear function defined on Y. The function r will be called an almost continuous functional on Y if, for every neighbourhood of zero U in X, the restriction of r on U^* is continuous in the weak topology of Y.

It is easy to see, that a linear function r on Y is an almost continuous functional on Y if and only if its zero hyperplane is almost closed in Y.

Now it is to be expected that the notion of B-completeness will be closely connected with the notion of completeness. As a first step toward clearing up the relation between these two notions, we establish a direct characterization of the elements of the complete hull of an arbitrary convex topological linear space. (Completeness is taken in the sense of A. WEIL.) We prove that the complete hull of a convex topological linear space X consists of all almost continuous linear functionals on Y. At the same time we obtain the following characterization of spaces dual to complete convex topological linear spaces:

Let X and Y be dual convex topological linear spaces. The space X is complete if and only if every almost closed hyperplane in Y is closed.

A comparison with the condition for B-completeness shows that both properties are very closely related together. Now there is a well known result of M. KREIN and V. ŠMULIAN [9] which can help us in the case of a normed space. These authors, using a modification of an idea of Banach, have proved the following theorem.

Let X be a complete normed linear space, Y its conjugate space. Let Q be a subspace in Y such that its intersection with the closed unit sphere of Y is weakly closed. Then Q is weakly closed.

In our terminology this result clearly asserts that every almost closed subspace of Y is already closed, i. e. that both properties discussed above are mutually equivalent in the case of normed spaces. This result can be extended without trouble to spaces which fulfil the first axiom of countability. The question arises, whether it remains true in the general case, too. The author expected for some time a positive answer to this question; the study of some concrete spaces, however, has revealed several rather surprising facts.

A suitable and useful category of linear spaces is formed by spaces $C(T)$ of all continuous functions on a given completely regular topological space T, taken in their k-topology. The study of these spaces from the algebraic standpoint has been recently undertaken with most fruitful results by E. HEWITT. As far as we know, however, the question of establishing the connection between the structure of T and the topological structure of $C(T)$ has not been considered. These seems to be little doubt that such a study would bring interesting results in General Topology. Some considerations of this type form the object of the second part of the present paper.

First of all it is easy to characterize topological spaces T whose $C(T)$ is complete. For this purpose it is useful to introduce a simple definition. *A function $x(t)$ defined on a completely regular topological space T will be called almost continuous, if for every compact $K \subset T$ its restriction x_K is continuous.* Now it is obvious that $C(T)$ *is complete if and only if every almost continuous function on T is continuous.*

A subset M of a completely regular topological space T will be called almost closed, if, for every compact $K \subset T$, the intersection $M \cap K$ is closed. Clearly, in a topological space, where almost closed sets are closed, every almost continuous function is continuous.

Now we are able to show that *a homomorphic image of a complete space need not be complete.* For this purpose let us take a completely regular topological space T and a closed set $B \subset T$. To every $x \in C(T)$ let us assign its partial function x_B. It is easy to see that the transformation thus obtained is a homomorphic mapping β of $C(T)$ on a dense subspace of $C(B)$. Suppose further that, in T, every almost closed set is closed. It follows that both $C(T)$ and $C(B)$ are complete. The image of $C(T)$ under β, being dense in the complete space $C(B)$, clearly will be complete if and only if it is equal to $C(B)$, or, which is the same, if and only if every continuous function on B can be extended on the whole of T.

Our task will be therefore fullfilled if we find an example of a space T satisfying the above conditions, where not every continuous function on B can be extended.

A simple example of such a space is given. Of course a space of the required properties cannot be normal.

Further the connection between B-completeness of $C(T)$ and the properties of the space T is examined. We find the following simple result. *If $C(T)$ is B-complete, then every almost closed subset of T is closed.* We are thus led to the following, now purely topological question. Let T be a completely regular topological space, where almost continuous functions are continuous. Does it follow that almost closed sets in T are closed? An example due to Prof. Katětov shows that this is not the case. Clearly the space of all continuous function on the space of Katětov is complete but not B-complete.

There is another notion which seems to be of some interest. We have thus far considered almost continuous functionals defined on the whole of Y only. Entirely different results are obtained, however, if this supposition is dropped.

Let X and Y be dual convex topological linear spaces. The space X will be called R-complete if every almost continuous functional defined on some subspace of Y is continuous.

We give some simple characterizations of these spaces. One of them may be used to prove that the normed space of all convergent sequences, though B-complete, is not R-complete.

All questions discussed in the present paper are closely connected with some questions of a purely topological character. It seems to be probable that further interesting results in this direction may be obtained.