Miloš Zlámal

Об одном критерии устойчивости Ляпунова

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 3, 257–264

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100085

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.

(Поступило в редакцию 22. XII. 1952 г.)

При изучении устойчивости движения *Ляпунов* исследовал между прочим дифференциальное уравнение $y'' + p(x)\, y = 0$, где $p(x)$ — периодическая функция, и установил достаточное условие для ограниченности всех решений этого уравнения. Содержанием настоящей работы являются две теоремы, представляющие обобщение критерий Ляпунова.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)\, y = 0\,, \tag{1}$$

где $p(x)$ — действительная непрерывная периодическая функция с периодом ω. В своей известной работе [1] Ляпунов доказал, что все решения уравнения (1) будут ограничены, если $p(x) \geqq 0$, $p(x) \not\equiv 0$ и

$$\omega \int_0^\omega p(x)\, \mathrm{d}x \leqq 4\,.$$

Критерий Ляпунова был за последние годы несколько раз обобщен, напр. в [2], [3], [4]. Эти обобщения касались т. наз. первой зоны устойчивости. Недавно *Гусарова* в [5] установила критерий, касающийся дальнейших зон устойчивости. Ее достаточное условие имеет вид ($\omega = \pi$)

$$p(x) \geqq n^2\,, \quad \pi \int_0^\pi p(x)\, \mathrm{d}x \leqq 4(n+1) + n^2(\tfrac{1}{2}\pi^2 + 4)\,, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4\,.$$

В настоящей работе мы докажем две теоремы, справедливые для всех зон устойчивости; притом вторая из них существенно улучшает результат Гусаровой. По окончании работы автор, однако, узнал, что критерий Гусаровой был снова существенно улучшен *Крейном* [6], который установил следующее достаточное условие ограниченности всех решений:

$$p(x) \geqq \frac{n^2\pi^2}{\omega^2}\,, \quad \int_0^\omega p(x)\, \mathrm{d}x < \frac{\pi^2}{\omega}\, n^2 + \frac{2\pi}{\omega}\, n(n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{\omega}\left(\pi^2 n^2 + \pi^2 n + \frac{\pi^4 n}{12\omega(n+1)^3} + \ldots\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Хотя наша теорема в случае $p(x) \geqq n^2$ дает худший результат, тем не менее она не содержится в критерии Крейна.

Теорема 1. *Пусть* $p(x)$ — *действительная непрерывная периодическая функция с периодом* π, *причем*

$$\int_0^\pi |p(x) - a^2| \, dx < 2a \min \left\{ \left| \sin \frac{a\pi}{2} \right| , \quad \left| \cos \frac{a\pi}{2} \right| \right\} , \tag{2}$$

где

$$a > 0 , \quad a \neq 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Тогда все решения уравнения (1) *ограничены.*

Доказательство. Положим $q(x) = p(x) - a^2$ и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] \, y = 0 . \tag{4}$$

При $\lambda = 1$ (4) перейдет в (1). Пусть $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ означают два решения уравнения (4) с начальными значениями

$$y_1(0, \lambda) = 1, \;\; y_1'(0, \lambda) = 0; \quad y_2(0, \lambda) = 0, \;\; y_2'(0, \lambda) = 1 .$$

Если положить

$$A(\lambda) = \tfrac{1}{2}[y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda)] ,$$

то из теории Флоке вытекает, что, как только $|A(\lambda)| < 1$, все решения уравнения (4) ограничены, а в случае $|A(\lambda)| > 1$, существуют неограниченные решения. Граничный случай $A(\lambda) = \pm 1$ характеризуется тем, что для $A(\lambda^*) = 1$, λ^* будет собственным значением краевой задачи

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] \, y = 0 , \quad y(0) = y(\pi) , \quad y'(0) = y'(\pi) . \tag{5}$$

(уравнение (4) имеет поэтому периодическое решение с периодом π), а для $A(\lambda^{**}) = -1$, λ^{**} будет собственным значением краевой задачи

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)] \, y = 0 , \quad y(0) = - y(\pi) , \quad y'(0) = - y'(\pi) \tag{6}$$

(в этом случае уравнение (4) имеет полупериодическое решение $y(x)$, т. е. $y(x + \pi) = - y(x)$).

Теперь, очевидно, будет $A(0) = \cos a\pi$, так что, ввиду (3), будет $|A(0)| < 1$. Далее $A(\lambda)$ является непрерывной и даже целой аналитической функцией параметра λ. Следовательно, если нам удастся найти два таких числа R_1 и R_2, что все собственные значения для краевой задачи (5) по абсолютной величине больше или равны R_1, а для краевой задачи (6), больше или равны R_2, то для $|\lambda| < \min (R_1, R_2)$ все решения ограничены.

Для отыскания R_1 приведем (5) к виду интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Если ввести на ближайшее время обозначение

$$\lambda q(x) \, y = F(x) , \tag{7}$$

то получим

$$y'' + a^2 y = -F(x)\,, \quad y(0) = y(\pi)\,, \quad y'(0) = y'(\pi)\,.$$

Поэтому

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax - \frac{1}{a} \int_0^x F(t) \sin a(x-t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

Притом постоянные c_1 и c_2 нужно определить так, чтобы были соблюдены граничные условия. Таким образом, мы получим уравнения

$$c_1 = c_1 \cos a\pi + c_2 \sin a\pi - \frac{1}{a} \int_0^\pi F(t) \sin a(\pi - t)\, \mathrm{d}t$$

$$ac_2 = -ac_1 \sin a\pi + ac_2 \cos a\pi - \int_0^\pi F(t) \cos a(\pi - t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Определив из них c_1 и c_2 и подставив в (8), мы получим после простых преобразований результат

$$y(x) = \int_0^\pi K(x, t)\, F(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2a \sin \dfrac{a\pi}{2}} \cos a(x - t - \tfrac{1}{2}\pi) & \text{для } t \leqq x \\[2ex] -\dfrac{1}{2a \sin \dfrac{a\pi}{2}} \cos a(x - t + \tfrac{1}{2}\pi) & \text{для } t \geqq x\,. \end{cases}$$

Подставив выражение для $F(x)$ из уравнения (7), мы видим, что краевая задача (5) перешла в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi K_1(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

где $K_1(x, t) = K(x, t)\, q(t)$ является непрерывным ядром и

$$|K_1(x, t)| \leqq \frac{1}{2a \left| \sin \dfrac{a\pi}{2} \right|} |q(t)|\,.$$

Из критерия Вайнштейна [7] вытекает, что

$$R_1 = \frac{1}{\max\limits_{x \in \langle 0, \pi \rangle} \int_0^\pi |K_1(x, t)|\, \mathrm{d}t} \geqq \frac{2a \left| \sin \dfrac{a\pi}{2} \right|}{\int_0^\pi |q(t)|\, \mathrm{d}t}\ {}^{1)}$$

1) Эта оценка справедлива и для целых нечетных a.

Аналогично можно показать, что краевая задача (6) равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \overline{K}_1(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

где $\overline{K}_1(x, t) = \overline{K}(x, t)\, q(t)$ и

$$\overline{K}(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2a\cos\dfrac{a\pi}{2}}\sin a(x - t - \tfrac{1}{2}\pi) & \text{для } t \leqq x \\ \dfrac{1}{2a\cos\dfrac{a\pi}{2}}\sin a(x - t + \tfrac{1}{2}\pi) & \text{для } t \geqq x\,. \end{cases}$$

Отсюда вытекает

$$R_2 \geqq \frac{2a\left|\cos\dfrac{a\pi}{2}\right|}{\int_0^\pi |q(t)|\,\mathrm{d}t}\ ^{2)}$$

Итак, для

$$|\lambda| < \min\left\{\frac{2a\left|\sin a\dfrac{a\pi}{2}\right|}{\int_0^\pi |q(t)|\,\mathrm{d}t}\,,\ \frac{2a\left|\cos\dfrac{a\pi}{2}\right|}{\int_0^\pi |q(t)|\,\mathrm{d}t}\right\}$$

все решения уравнения (4) ограничены. Положив $\lambda = 1$ и $q(x) = p(x) - a^2$, мы получим (2).

Замечание 1. Правая часть неравенства (2) имеет наибольшее значение при $a = \dfrac{2n+1}{2}$, где $n = 0, 1, \ldots$ Следовательно, мы получаем, в частности, результат:

Если

$$\int_0^\pi \left| p(x) - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \right| \mathrm{d}x < \sqrt{2}(n + \tfrac{1}{2})\,, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

то все решения ограничены.

Предположим теперь, что $q(x) \geqq 0$, и с помощью одной осциляционной теоремы Биркгоффа [8] установим следующий критерий.

Теорема 2. *Пусть* $p(x) \geqq a^2 > 0$ *и*

$$\int_0^\pi p(x)\,\mathrm{d}x < \pi a^2 + 2a\left|\cos\frac{a\pi}{2}\right|,$$

---

[2]) Эта оценка справедлива и для целых четных a.

если

$$2k \leqq a < 2k + 1\,, \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{9}$$

или

$$\int_0^\pi p(x)\,\mathrm{d}x < \pi a^2 + 2a\left|\sin\frac{a\pi}{2}\right|\,, \tag{10}$$

если $\qquad 2k + 1 \leqq a < 2k + 2.$

Тогда все решения уравнения (1) *ограничены.*

Доказательство 1. Пусть $2k \leqq a < 2k + 1$. Предположим временно, что

$$q(x) = p(x) - a^2 > 0\,.$$

Обозначим собственные значения краевой задачи (5) через λ_ν, краевой задачи (6) через $\bar\lambda_\nu$. Ни одно из $\bar\lambda_\nu$ не равняется нулю, так как $2k \leqq a < 2k + 1$. Пусть λ_{ν_1} — собственное значение, лежащее ближе всего к нулю слева от него, так что

$$\lambda_{\nu_1} \leqq 0 < \lambda_{\nu_1+1}\,.$$

Если $\lambda = 0$, то одним из решений уравнения (4) будет $\sin ax$, имеющее в интервале $(0, \pi\rangle$ $2k$ нулей. Отсюда, на основании теоремы сравнения Штурма, вытекает, что при $\lambda = \lambda_{\nu_1}$ решения уравнения (4) имеют не более $2k + 1$, а при $\lambda = \lambda_{\nu_1+1}$ не менее $2k$ нулей в $(0, \pi\rangle$. Из осциляционной теоремы Биркгоффа (см. [8] стр. 269) вытекает прежде всего, что для ν_1 возможны три значения, а именно $2k - 2$, $2k - 1$, $2k$. Если $a = 2k$, то $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = 0$, так что $\nu_1 = 2k$. Если же $a > 2k$, то точно так же $\nu_1 = 2k$. Действительно, если бы было $\nu_1 = 2k - 2$ или $\nu_1 = 2k - 1$, то, согласно той же осциляционной теореме Биркгоффа, собственная функция, принадлежащая к λ_{ν_1+1}, имела бы в точности $2k$ нулей в $(0, \pi\rangle$, а так как она периодическая функция с периодом π, то она имела бы в $(0, m\pi\rangle$ точно $2mk$ нулей ($m = 1, 2, \ldots$). Однако, функция $\sin ax$, являющаяся решением уравнения (4) при $\lambda = 0$, имеет в $(0, m\pi\rangle$ всего $[ma]$[1]) нулей, и для больших m имеет место

$$[ma] = 2km + [m(a - 2k)] > 2km + 2\,.$$

Это неравенство противоречит, однако, теореме сравнения Штурма. Поэтому должно быть

$$\lambda_{2k} \leqq 0 < \lambda_{2k+1}\,. \tag{11}$$

Аналогично можно доказать

$$\bar\lambda_{2k-1} < 0 < \bar\lambda_{2k}\,. \tag{12}$$

Кроме того имеет еще место

$$\bar\lambda_{2k} < \lambda_{2k+1}\,. \tag{13}$$

---

[1]) $[x]$ означает наибольшее целое число, меньшее или равное x.

В самом деле, собственная функция, принадлежащая к λ_{2k+1}, имеет, согласно осциляционной теореме Биркгоффа, $2k + 2$ нулей в $(0, \pi\rangle$ и, в силу своей периодичности, $4k + 4$ нулей в $(0, 2\pi\rangle$, а собственная функция, принадлежащая к $\bar{\lambda}_{2k}$, имеет $2k + 1$ нулей в $(0, \pi\rangle$ и, в силу своей полупериодичности, $4k + 2$ в $(0, 2\pi\rangle$.

Теперь мы имеем $|A(0)| < 1$, если $2k < a < 2k + 1$ и $A(0) = 1$, если $a = 2k$. Поэтому из (11), (12) и (13) следует, что для $0 \leqq \lambda < \bar{\lambda}_{2k}$, а тем более для $0 \leqq \lambda < R_2$ все решения уравнения (4) ограничены. Теорема (2) для случая $q(x) > 0$ доказана. Если имеет место только $p(x) \geqq a^2$, следовательно $q(x) \geqq 0$, положим $\bar{q}(x) = q(x) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + [a^2 + \lambda\bar{q}(x)]\, y = 0\,. \tag{14}$$

Тогда характеристическая постоянная A будет непрерывной функцией λ и ε, $A(\lambda, \varepsilon)$. Если справедливо (9), то для достаточно малых ε

$$\int_0^\pi \bar{q}(x)\, \mathrm{d}x < 2a \left| \cos \frac{a\pi}{2} \right| ,$$

так что все решения уравнения (14) для $0 \leqq 0 < R_2$ и достаточно малых ε будут ограниченными, откуда следует

$$|A(\lambda, \varepsilon)| \leqq 1$$

а также, ввиду непрерывности,

$$|A(\lambda, 0)| \leqq 1 \quad \text{для} \quad 0 \leqq \lambda < R_2$$

Это неравенство означает, что все решения уравнения (4) для $0 \leqq \lambda < R_2$ ограничены, так как, если даже $|A(\lambda, 0)| = 1$, то эти λ являются двукратными собственными значениями, и уравнение (4) имеет в этом случае два периодических или полупериодических линейно независимых решения.

2. В случае $2k + 1 \leqq a < 2k + 2$ доказательство протекает аналогично. Здесь имеет место

$$\lambda_{2k} < 0 < \lambda_{2k+1}, \quad \bar{\lambda}_{2k+1} \leqq 0 < \bar{\lambda}_{2k+2}, \quad \lambda_{2k+1} < \bar{\lambda}_{2k+2}\,,$$

так что для $0 \leqq \lambda < \lambda_{2k+1}$, а тем более для $0 \leqq \lambda < R_1$, все решения ограничены.

Замечание 2. Из теоремы (2) вытекает: Если

$$p(x) \geqq n^2\,, \quad \int_0^\pi p(x)\, \mathrm{d}x < \pi n^2 + 2n\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то все решения уравнения (4) ограничены. Этот результат, однако, слабее результата Крейна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ляпунов Л. М.*: Общая задача об устойчивости движения.
[2] *Borg G.:* On a Liapounoff criterion (Amer. Journ. of Math., 1949).
[3] *Еругин Н. П.*: Обобщение одной теоремы Ляпунова (Прикл. Мат. и Мех., т. XII, 1949, 633—638).
[4] *Гусарова Р. С.*: Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами (ПММ, XIII, 1949, 241—243).
[5] *Гусарова Р. С.*: Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами (ПММ, XIV, 1950, 313—314).
[6] *Крейн М. Г.*: О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости (ПММ, XV, 1951, 323—348).
[7] *Weinstein A.*: Ein einfaches Kriterium für die Konvergenz der Neumannschen Reihe (S.-B. Berliner Math. Ges., *26*, 168—170), 1927.
[8] *Birkhoff F. D.:* Existence and oscillation theorem for a certain boundary value problem (Transaction of the Amer. Math. Soc., *10*, 259—270, 1909).

Zusammenfassung.

ÜBER EIN KRITERIUM DER STABILITÄT VON LIAPOUNOFF

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eingelangt 22. XII. 1952.)

Es sei die lineare Differentialgleichung

$$y'' + p(x)\, y = 0\,. \tag{1}$$

gegeben, wo $p(x)$ eine reelle, stetige, periodische Funktion mit der Periode π ist. Liapounoff hat in seiner bekannter Arbeit [1][1]) gezeigt, dass alle Lösungen von (1) beschränkt sind, wenn $p(x) \geq 0$, $p(x) \not\equiv 0$ und $\int_0^\pi p(x)\, dx \leq \frac{4}{\pi}$. In dieser Arbeit beweisen wir zwei Sätze, woraus der zweite das Liapounoffsche Kriterium wesentlich verallgemeinert.

Satz 1. *Es sei $p(x)$ eine reelle, stetige, periodische Funktion mit der Periode π und dabei*

$$\int_0^\pi |p(x) - a^2|\, dx < 2a \min \{|\sin \tfrac{1}{2}a\pi|, |\cos \tfrac{1}{2}a\pi|\}\,, \quad a > 0,\ a \neq 1, 2, \ldots$$

Dann sind alle Lösungen von (1) *beschränkt.*

Satz 2. *Es sei $p(x) \geq a^2 > 0$ und*

$$\int_0^\pi p(x)\, dx < \pi a^2 + 2a\, |\cos \tfrac{1}{2}a\pi|, \quad \textit{wenn } 2k \leqq a < 2k + 1 \ (k = 0, 1, \ldots),$$

[1]) Siehe Literaturverzeichnis.

oder

$$\int_0^\pi p(x)\,dx < \pi a^2 + 2a\,|\sin \tfrac{1}{2}a\pi|\,, \quad \textit{wenn } 2k+1 \leqq a < 2k+2.$$

Dann sind alle Lösungen von (1) *beschränkt.*

Aus dem Satz 2 folgt: Wenn

$$p(x) \geqq n^2\,, \quad \int_0^\pi p(x)\,dx < \pi n^2 + 2n\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

dann sind alle Lösungen von (1) beschränkt. Dieses Resultat ist aber schwächer als das kürzlich von *Krein* [6] bewiesene.

Der Hauptgedanke des Beweises des Satzes 1 ist der folgende: Wir setzen $p(x) - a^2 = q(x)$ und betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)]\,y = 0\,. \tag{2}$$

Für $\lambda = 1$ geht (2) in (1) über. Es seien $y_1(x, \lambda)$ und $y_2(x, \lambda)$ die Lösungen von (2), welche die Anfangswerte $y_1(0, \lambda) = 1, y_1'(0, \lambda) = 0, y_2(0, \lambda) = 0, y_2'(0, \lambda) = 1$ annehmen. Wenn wir $A(\lambda) = \frac{1}{2}[y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda)]$ setzen, dann ist aus der Floquetschen Theorie bekannt, dass, soweit $|A(\lambda)| < 1$, alle Lösungen von (2) beschränkt sind und wenn $|A(\lambda)| > 1$, unbeschränkte Lösungen existieren. Der Grenzfall $A(\lambda) = \pm 1$ ist dadurch charakterisiert, dass für $A(\lambda^*) = 1$ λ^* ein Eigenwert der Eigenwertaufgabe

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)]\,y = 0, \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi) \tag{3}$$

und für $A(\lambda^{**}) = -1$ λ^{**} ein Eigenwert der Eigenwertaufgabe

$$y'' + [a^2 + \lambda q(x)]\,y = 0, \quad y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi) \tag{4}$$

ist. Jetzt haben wir offenbar $A(0) = \cos a\pi$, also mit Rücksicht auf $a \neq 1, 2, \ldots$ $|A(0)| < 1$. Weiter ist $A(\lambda)$ eine stetige, sogar ganze analytische Funktion des Parameters λ. Wenn es uns also gelingt zwei solche Zahlen R_1 und R_2 zu finden, dass der im absoluten Betrage kleinste Eigenwert von (3) grösser oder gleich R_1 und der von (4) grösser oder gleich R_2 ist, dann sind für $|\lambda| < \min(R_1, R_2)$ alle Lösungen von (2) beschränkt. Um R_1 und R_2 zu finden, überführen wir (3) und (4) in eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art und benützen das Weinsteinsche Kriterium über die Konvergenz der Neumannschen Reihe.

Wenn wir $q(x) \geq 0$, d. h. $p(x) \geq a^2$, voraussetzen, bekommen wir mit Hilfe eines Birkhoffschen Oszillationssatzes (siehe [8] S. 269) ein besseres Resultat, nämlich den Satz 2.