Otakar Borůvka

О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 3, 199–255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100084

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. 3. (78) ПРАГА 30. IX. 1953 г. № 3

О КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ИНТЕГРАЛАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ОГО ПОРЯДКА

ОТАКАР БОРУВКА (Otakar Borůvka), Брно.

(Поступило в редакцию 9. XII. 1952 г.)

Посвящено профессору г. д-ру Й. Гронцу и д-ру Л. Сейферту ко дню их 70-летия.

В этой работе я занимаюсь изучением свойств дифференциального (д.) линейного уравнения 2-го порядка

$$y'' = Q(x)y\ ; \tag{a}$$

предполагаю, что функция Q определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, что она всюду отрицательна и непрерывна и что решения д. уравнения (а) колеблются.

Результаты работы касаются размещения нулевых и экстремальных значений интергала д. уравнения (а) и являются, по-моему, основательным вкладом в классическую теорию. Я вывожу новые свойства интегралов д. уравнения (а), которые можно представить в виде простых и элегантных формул; я нахожу узкую связь между д. уравнением (а) и одним нелинейным д. уравнением 3-его порядка, интегралы которого образуют непрерывную группу с тремя параметрами; мимоходом я дошел до интересных простых теорем о сложных функциях, производные от которых более высоко порядка чем их компоненты.

Основным понятием являются определенные функции, которые я называю *центральными (ц.) дисперсиями 1-ого—4-ого рода.* Их значения при любом x являются корнями интегралов д. уравнения (а) или их производных, которые, или производные которых имеют один корень x. При исследовании свойств ц. дисперсии 1. рода я дошел до нелинейного уравнения 3. порядка

$$\sqrt{|\zeta'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right)'' + \zeta'^2\, Q(\zeta) = Q(x), \tag{b}$$

изучение которого составляет центральную проблему этой работы. Я показываю, что через каждую точку x_0; ζ_0, $\zeta_0' \neq 0$, ζ_0'' проходит один и только один интеграл д. уравнения (b), который определен в интервале $(-\infty, +\infty)$, и вывожу его конструктивное и аналитичное выражение. Узкая связь между д. уравнениями (a) и (b) порождается тем обстоятельством, что функция $y(\zeta) : \sqrt{|\zeta'|}$ составленная из любого интеграла y д. уравнения (a) и из любого интеграла ζ д. уравнения (b), является опять интегралом д. уравнения (a). Интегралы д. уравнения (b) — это так называемые *собственные дисперсии 1. рода;* они образуют непрерывную группу с тремя параметрами. Возрастающие собственные дисперсии 1. рода ($\zeta' > 0$) образуют в этой группе инвариантную подгруппу с индексом 2, центр которой состоит в точности из всех ц. дисперсий 1. рода.

I. Введение.

1. Исходное положение.

1. Объектом наших рассуждений являются свойства интегралов линейного дифференциального (д.) уравнения 2. порядка

$$y'' = Q(x)\,y\,. \tag{a}$$

В дальнейшем везде предполагаем, что функция Q определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, отрицательна[1]) и непрерывна и что решения д. уравнения (a) колеблются.

Под *решением*, или *интегралом* д. уравнения (a) мы подразумеваем решение, которое определено во всем интервале $(-\infty, +\infty)$; исключаем решение тождественно равное нулю, которое не будем принимать во внимание. По предположению все решения д. уравнения (a) колеблются; следовательно, каждое из них имеет бесконечно много нулевых и экстремальных значений при отрицательных и положительных значениях аргумента, которые по абсолютной величине больше любого числа. Самым простым примером функции Q, которая входит в рамки этих рассуждений, может служить любая отрицательная постоянная.

Из классических теорем мы знаем, что для каждого числа x существуют решения д. уравнения (a), одним из корней которых есть x. Все такие решения взаимно зависимы и, следовательно, отличаются друг от друга только постоянными множителями. У этих решений все корни общие, а также корни их производных.[2]) Знаем тоже, что существуют решения д. уравнения (a), которые характерны тем, что одним из корней их производной есть x. Все такие решения тоже взаимно зависимы, и, следовательно, для них имеют место приведенные результаты.

2. Пусть u, v упорядоченная пара любых интегралов д. уравнения (a). Определитель Вронского w упорядоченной пары интегралов u, v определен формулой

$$w = uv' - u'v\,,$$

[1]) Для вывода некоторых результатов достаточно предполагать $Q \leq 0$.

[2]) Под производной, не будет ли она ближе определена, мы будем всегда подразумевать первую производную.

и его (постоянное) значение не равно нулю, соответственно равно нулю, если интегралы u, v независимы, соответственно зависимы.

Элементарным вычислением мы выводим уравнения

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{w}{v^2}\,; \quad \left(\frac{u'}{v'}\right)' = w\,\frac{Q}{v'^2}\,; \quad \left(\frac{uu'}{vv'}\right)' = w\,\frac{Quv - u'v'}{v^2v'^2}\,, \tag{1}$$

которые имеют место всюду, где знаменатели не равны нулю.

Если интегралы u, v независимы, тогда между всякими двумя соседними корнями интеграла v функция $u:v$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ или убывает от $+\infty$ до $-\infty$ в соответствии с тем, если определитель Вронского w отрицательный или положительный; то же самое свойство имеет функция $u' : v'$ между всякими двумя соседними корнями интеграла v'.

Пусть $\eta < \xi$ — два любых числа, которые характеризуются тем, что в интервале $[\eta, \xi]$[3]) функция v или v' или vv' нигде не равна нулю. Из уравнений (1) следуют формулы

$$\frac{u(\xi)}{v(\xi)} - \frac{u(\eta)}{v(\eta)} = -\int\limits_{\eta}^{\xi} \frac{w}{v^2}\,\mathrm{d}t\,; \quad \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)} - \frac{u'(\eta)}{v'(\eta)} = \int\limits_{\eta}^{\xi} \frac{wQ}{v'^2}\,\mathrm{d}t\,;$$

$$\frac{u(\xi)\,u'(\xi)}{v(\xi)\,v'(\xi)} - \frac{u(\eta)\,u'(\eta)}{v(\eta)\,v'(\eta)} = \int\limits_{\eta}^{\xi} w\,\frac{Quv - u'v'}{v^2v'^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{2}$$

2. Полярные координаты.

1. Пусть в дальнейшем u, v означают упорядоченную пару любых независимых интегралов д. уравнения (a) и $w = uv' - u'v$ ее определитель Вронского. Пусть ϱ, σ -функции, определенные в интервале $(-\infty, +\infty)$ формулами:[4])

$$\varrho = \sqrt{u^2 + v^2}\,, \qquad \sigma = \sqrt{u'^2 + v'^2}\,. \tag{1}$$

Мы называем ϱ (σ) *первой (второй) амплитудой* упоряадоченной пары интегралов u, v.

Не трудно убедиться в том, что функции ϱ, σ удовлетворяют д. уравнениям 2. порядка:[5])

$$\varrho'' = Q\varrho + \frac{w^2}{\varrho^3}\,; \quad \sigma'' = Q\sigma + \frac{w^2Q^2}{\sigma^3} + \frac{Q'}{Q}\,\sigma'\,. \tag{2}$$

Вторая формула требует существования производной от функции Q.

---

[3]) $[\eta, \xi]$ означаем сегмент с концами η, ξ; (η, ξ)-открытый интервал.

[4]) Символ $\sqrt{\ }$ означает неотрицательное число.

[5]) *G. Hamel:* Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten (Math. Annalen, Bd. **73** (1913), стр. 381).

2. Пусть α_0 — любой корень интеграла v; обозначим n-тый следующий за α_0 (предыдущий α_0) корень этого интеграла α_n (α_{-n}), $n = 1, 2, \ldots$. Пусть для функции v' символы α_0', α_n', α_{-n}' имеют аналогичное значение.

Пусть $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Из абз. **1**,2 мы знаем, что функция $u:v$ в любом интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ в случае $w < 0$ и убывает от $+\infty$ до $-\infty$ вслучае $w > 0$. В обоих случаях существует для всякого $x \in (\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ одно и только одно число $\operatorname{arctg} \dfrac{u(x)}{v(x)}$, лежащее в интервале $(-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi)$.

Имея в виду этот факт, мы определим в интервале $(-\infty, +\infty)$ функцию α следующими формулами:

$$\alpha(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}\pi - \nu\pi) \operatorname{sgn} w & \text{для} \quad x = \alpha_\nu, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{u(x)}{v(x)} - \nu\pi \operatorname{sgn} w & \text{для} \quad x \in (\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}). \end{cases} \tag{3}$$

Так же функция $u' : v'$ в любом интервале $(\alpha_\nu', \alpha_{\nu+1}')$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ в случае $w < 0$ и убывает от $+\infty$ до $-\infty$ в случае $w > 0$. Б обоих случаях определим в интервале $(-\infty, +\infty)$ функцию β формулами:

$$\beta(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}\pi - \nu\pi) \operatorname{sgn} w & \text{для} \quad x = \alpha_\nu', \\ \operatorname{arctg} \dfrac{u'(x)}{v'(x)} - \nu\pi \operatorname{sgn} w & \text{для} \quad x \in (\alpha_\nu', \alpha_{\nu+1}'). \end{cases} \tag{4}$$

Функцию α (β) мы называем *первой* (*второй*) *фазой* упорядоченной пары интегралов u, v.[5])

Из этого определения мы видим, что фазы α, β определены упорядоченной парой интегралов с точностью до аддитивных целых кратных π.

Функции α, β имеют следующие свойства:

а) Они непрерывны во всякой точке x и имеют производные:

$$\alpha'(x) = -\frac{w}{\varrho^2(x)}; \quad \beta'(x) = \frac{w \,.\, Q(x)}{\sigma^2(x)}. \tag{5}$$

Имея в виду формулы (2), мы убеждаемся, что функции α, β удовлетворяют следующим д. соотношениям:

$$\left(\sqrt{\frac{-w}{\alpha'}}\right)'' = (Q + \alpha'^2) \sqrt{\frac{-w}{\alpha'}},$$

$$\left(\sqrt{\frac{w\,.\,Q}{\beta'}}\right)'' = (Q + \beta'^2) \sqrt{\frac{w\,.\,Q}{\beta'}} + \frac{Q'}{Q}\left(\sqrt{\frac{w\,.\,Q}{\beta'}}\right)'.$$

б) Они всегда возрастают от $-\infty$ до $+\infty$ в случае $w < 0$ и убывают от $+\infty$ до $-\infty$ в случае $w > 0$. Отсюда, в частности, следует, что всегда существуют в интервале $(-\infty, +\infty)$ обратные функции α^{-1}, β^{-1}, которые возрастают или убывают согласно тому, если $w < 0$ или $w > 0$.

в) Для всякого числа x имеют место формулы:

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{sgn} v'(\alpha_0) \,.\, \varrho(x) \,.\, \sin\alpha(x)\,; \quad u'(x) = -\operatorname{sgn} v(\alpha_0') \,.\, \sigma(x) \,.\, \sin\beta(x)\,, \\ v(x) &= \operatorname{sgn} v'(\alpha_0) \,.\, \varrho(x) \,.\, \cos\alpha(x)\,; \quad v'(x) = -\operatorname{sgn} v(\alpha_0') \,.\, \sigma(x) \,.\, \cos\beta(x)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что эти формулы упрощаются, напр., тогда, если корень α_0' функции v' непосредственно предшествует числу α_0, после этого

$$-\operatorname{sgn} v(\alpha_0') = \operatorname{sgn} v'(\alpha_0)\,.$$

3. Из приведенных выше свойств 2,а мы видим, что *для всяких двух чисел ξ, x имеют место формулы:*

$$\alpha(x) = \alpha(\xi) - \int_\xi^x \frac{w}{\varrho^2(t)}\,\mathrm{d}t\,; \quad \beta(x) = \beta(\xi) + \int_\xi^x \frac{w \,.\, Q(t)}{\sigma^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Отсюда и из свойств 2,б следует, что *функции переменной x:*

$$\int_\xi^x \frac{1}{\varrho^2(t)}\,\mathrm{d}t\,, \qquad \int_\xi^x \frac{-Q(t)}{\sigma^2(t)}\,\mathrm{d}t\,,$$

определенные в интервале $(-\infty, +\infty)$, *всегда возрастают от* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Значит, мы имеем:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} \int_\xi^x \frac{1}{\varrho^2(t)}\,\mathrm{d}t = -\infty\,; \quad \lim_{x\to+\infty} \int_\xi^x \frac{1}{\varrho^2(t)}\,\mathrm{d}t = +\infty\,; \\ &\lim_{x\to-\infty} \int_\xi^x \frac{-Q(t)}{\sigma^2(t)}\,\mathrm{d}t = -\infty\,; \quad \lim_{x\to+\infty} \int_\xi^x \frac{-Q(t)}{\sigma^2(t)}\,\mathrm{d}t = +\infty\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Из этого рассуждения следует следующая теорема, которой воспользуемся в дальнейшем:

Пусть f-любая функция, непрерывная в интервале $(-\infty, +\infty)$. *Тогда через каждую точку (ξ, η) проходит один и только один*[6]) *интеграл каждого из д. уравнений:*

$$\zeta' = \varrho^2(\zeta)\, f(x)\,; \quad \vartheta' = \frac{\sigma^2(\vartheta)}{-Q(\vartheta)} \cdot f(x)\,, \tag{8}$$

определенный в интервале $(-\infty, +\infty)$; *всякое решение, проходящее через точку (ξ, η) есть часть этого общего интеграла. Оба интеграла определены формулами:*

$$\zeta(x) = \alpha^{-1}\{\alpha(\eta) - w\int_\xi^x f(t)\,\mathrm{d}t\}\,, \quad \vartheta(x) = \beta^{-1}\{\beta(\eta) - w\int_\xi^x f(t)\,\mathrm{d}t\}. \tag{9}$$

---

[6]) *E. Kamke:* Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig, 1930), стр. 11

3. Билинейные соотношения между интегралами.

В дальнейших исследованиях важную роль играют билинейные соотношения между интегралами д. уравнения (a).

1. *Пусть* ξ, η *— любые числа. Уравнение*

а) $u(\xi) . v(\eta) - u(\eta) . v(\xi) = 0$,

б) $u'(\xi) . v'(\eta) - u'(\eta) . v'(\xi) = 0$,

в) $u(\xi) . v'(\eta) - u'(\eta) . v(\xi) = 0$

удовлетворяется тогда и только тогда, если

а) ξ, η *— корни некоторого решения д. уравнения* (a);[7]

б) ξ, η *— корни производной от некоторого решения д. уравнения* (a);

в) ξ *— корень некоторого решения д. уравнения* (a) *и* η *— корень производной от него.*

Ограничимся доказательством одного из утверждений, напр. об уравнений а); в остальных случаях ход доказательства аналогичный.

Если это уравнение удовлетворяется, то линейные уравнения с неизвестными λ, μ:

$$\lambda u(\xi) + \mu v(\xi) = 0 ,$$
$$\lambda u(\eta) + \mu v(\eta) = 0 ,$$

имеют нетривиальные решения λ_0, μ_0 и числа ξ, η являются корнями интеграла д. уравнения (a):

$$y = \lambda_0 u + \mu_0 v .$$

Если наоборот, числа ξ, η — корни некоторого решения y д. уравнения (a), то существуют числа λ_0, μ_0; $\lambda_0^2 + \mu_0^2 \neq 0$, характеризующиеся тем, что всюду

$$y(x) = \lambda_0 u(x) + \mu_0 v(x) ,$$

и, в частности,

$$\lambda_0 u(\xi) + \mu_0 v(\xi) = 0 ,$$
$$\lambda_0 u(\eta) + \mu_0 v(\eta) = 0 .$$

Из этого следует уравнение (a).

2. Пусть U, V будут наряду с упорядоченной парой независимых интегралов u, v д. уравнения (a) такой же парой. Пусть F означает функцию двух независимых переменных x, y, которая определена для всех чисел x, y одним из следующих выражений:

$$\begin{matrix} U(x) . v(y) - V(x) . u(y) ; & U'(x) . v'(y) - V'(x) . u'(y) ; \\ U(x) . v'(y) - V(x) . u'(x) ; & U'(x) . v(y) - V'(x) . u(y) . \end{matrix} \tag{1}$$

1. *Пусть* ξ, η *— любые числа, удовлетворяющие уравнению* $F(\xi, \eta) = 0$. *Существует одна и только одна функция* $y(x)$, *определенная в некоторой*

[7]) *Ch. Fox:* An Introduction to the Calculus of Variations (Oxford, 1950), стр. 40.

окрестности числа ξ, *которая в числе* ξ *принимает значение* η, *в этой окрестности непрерывна и всюду в ней удовлетворяет уравнению* $F(x, y(x)) = 0$; *эта функция имеет в этой окрестности непрерывную производную* y', *которая определена формулой:*

$$y'(x) = -\frac{F'_x[x, y(x)]}{F'_y[x, y(x)]}.$$

В овдельных приведенных выше случаях функсия $y'(x)$ определена следуюшими формулами:

$$-\frac{U'(x)\, v[y(x)] - V'(x)\, u[y(x)]}{U(x)\, v'[y(x)] - V(x)\, u'[y(x)]};$$

$$\frac{Q(x)}{Q[y(x)]} \cdot \frac{U(x)\, v'[y(x)] - V(x)\, u'[y(x)]}{U'(x)\, v[y(x)] - V'(x)\, u[y(x)]};$$

$$\frac{1}{Q[y(x)]} \cdot \frac{U'(x)\, v'[y(x)] - V'(x)\, u'[y(x)]}{U(x)\, v[y(x)] - V(x)\, u[y(x)]};$$

$$Q(x) \cdot \frac{U(x)\, v[y(x)] - V(x)\, u[y(x)]}{U'(x)\, v'[y(x)] - V'(x)\, u'[y(x)]};$$

Доказательство проведем, напр. для того случая, когда F — первое из выражений (1); значит,

$$F(x, y) = U(x)\, v(y) - V(x)\, u(y).$$

Функция F имеет следующие свойства:

а) $F(\xi, \eta) = 0$.

б) Во всякой точке (x, y) существуют непрерывные частные производные

$$F'_x(x, y) = U'(x)\, v(y) - V'(x)\, u(y),$$
$$F'_y(x, y) = U(x)\, v'(y) - V(x)\, u'(y);$$

в) $F'_y(\xi, \eta) \neq 0$.

Из этих утверждений а) справедливо по предположению, б) очевидно; итак, достаточно доказать в).

Потому что интегралы U, V независимы, обе числа $U(\xi)$, $V(\xi)$ не равны нулю. Если мы отвергнем утверждение в), мы имеем:

$$(F(\xi, \eta) \equiv)\quad U(\xi)\, v(\eta) - V(\xi)\, u(\eta) = 0,$$
$$(F'_y(\xi, \eta) \equiv)\quad U(\xi)\, v'(\eta) - V(\xi)\, u'(\eta) = 0,$$

и из этих уравнений вытекает неверное следствие, что интегралы u, v зависимы. Итак, утверждение в) доказано.

Чтобы закончить доказательство, достаточно применить классическую теорему о неявных функциях.

2. *Если две функции* X, Y, *определенные в некотором общем интервале* $\mathbf{j}$, *характеризуются тем, что при некотором числе имеют одинаковое зна-*

чение, во всяком числе $x \in \mathbf{j}$ непрерывны и их значения $(y =)$ $X(x)$, $Y(x)$ *удовлетворяют уравнению* $F(x, y) = 0$, *то они в интервале* $\mathbf{j}$ *тождественны.*

Действительно, допустим, что в некотором числе $b \in \mathbf{j}$ имеет место неравенство $X(b) \neq Y(b)$. Тогда существует число $(b \neq)$ $a \in \mathbf{j}$, напр. $a < b$, характеризующиеся тем, что $X(a) = Y(a)$ и $X(x) \neq Y(x)$ для $a < x \leqq b$. Мы видим, что существуют две функции, определенные в окрестности числа a, а именно, части функций X, Y, которые не равны, так как при числах больших чем x имеют различные значения, и которые обладают следующими свойствами: в числе a имеют одинаковое значение, в окрестности непрерывны и удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Это противоречит утверждению теоремы 1.

4. Сопроводительные уравнения.

В этом абзаце предполагаем, что у функции Q всюду производная 2. порядка и, возможно, производные высших порядков.

Пусть y любое решение д. уравнения (a):

$$y'' = Q(x)\, y \,. \tag{a}$$

Мы легко убедимся в том, что функция

$$y_1 = \frac{y'}{\sqrt{-Q}}$$

есть решение д. уравнения (a_1):

$$y'' = Q_1(x)\, y \,, \tag{a_1}$$

где

$$Q_1 = Q - \tfrac{1}{2}\left(\frac{Q'}{Q}\right)' + \tfrac{1}{4}\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2 , \tag{1}$$

или

$$Q_1 = Q + \sqrt{-Q}\left(\frac{1}{\sqrt{-Q}}\right)'' .$$

Д. уравнение (a_1) называется *первое сопроводительное уравнение относительно д. уравнения* (a). Первое сопроводительное уравнение относительно (a_1) есть так называемое *вторoe сопроводительное уравнение относительно* (a), и т. д.

II. Центральные дисперсии.

5. Определение центральных дисперсий.

Пусть x — произвольное число. Пусть A означает множество интегралов д. уравнения (a), одним из корней которых является x; B — множество интегралов, которые характеризуются тем, что одним из корней их производных есть x. Напоминаем, что все интегралы множеств A а B имеют все корни общие, а также имеют общие корни и их производные.

Пусть $n = 1, 2, \ldots$; обозначим через

$\varphi_n(x)$ $[\varphi_{-n}(x)]$ n-тый следующий за числом x (предшествующий числу x) общий корень интегралов множества A;

$\psi_n(x)$ $[\psi_{-n}(x)]$ n-тый следующий за числом x (предшествующий числу x) общий корень производных интегралов множества B;

$\chi_n(x)$ $[\chi_{-n}(x)]$ n-тый следующий за числом x (предшествующий числу x) общий корень производных интегралов множества A;

$\omega_n(x)$ $[\omega_{-n}(x)]$ n-тый следующий за числом x (предшествующий числу x) общий корень интегралов множества B.

Таким образом, у нас определены четыре счетные системы функций $\varphi_\nu, \psi_\nu, \chi_\nu, \omega_\nu, \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$, в интервале $(-\infty, +\infty)$, значения которых — общие корни всех интегралов или производных от них, которые имеют, или производные от которых имеют корень в числе x.

Функции φ_ν, ψ_ν, χ_ν, ω_ν мы называем ν-тая центральная (ц) дисперсия 1., 2., 3., 4., рода относительно д. уравнения (а)*: короче: ν-тая ц. дисперсия 1., 2., 3., 4. рода. В частности φ_1, ψ_1, χ_1 ω_1 — это так называемые основные ц. дисперсии соответствующих родов.* Любую центральную дисперсию 1., 2., 3., 4. рода мы обозначаем обыкновенно φ, ψ, χ, ω. *Значения отдельных ц. дисперсий 1., 2., 3., 4. рода при любом числе x называются сопряженными с числом x числами 1., 2., 3., 4. рода.*

Заметим, что значения отдельных ц. дисперсий, напр. 1. рода, в любом числе x мы получим, если мы возьмем любой интеграл д. уравнения (а), который в числе x принимает значение 0; его остальные корни — это значения отдельных ц. дисперсий 1. рода в числе x, и, в частности, корень, который непосредственно следует за числом x, является значением $\varphi_1(x)$ основной ц. дисперсии 1. рода. Аналогичные замечания имеют место относительно значений ц. дисперсий остальных родов.

6. Свойства центральных дисперсий.

1. Непосредственно из определения ц. дисперсий вытекают следующие формулы:

$$\begin{aligned} &\varphi_n = \varphi_1^n\,; \quad \psi_n = \psi_1^n\,; \quad \chi_n = \psi_1^{n-1}\chi_1\,; \quad \omega_n = \varphi_1^{n-1}\omega_1\,; \\ &\varphi_{-n} = \varphi_n^{-1}\,; \quad \psi_{-n} = \psi_n^{-1}\,; \quad \chi_{-n} = \psi_{n-1}^{-1}\omega_1^{-1}\,; \quad \omega_{-n} = \varphi_{n-1}^{-1}\chi_1^{-1}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

В них означает $n = 1, 2, \ldots$, и напр., φ_1^n сложную функцию $\overbrace{\varphi_1 \ldots \varphi_1}^{n}$; φ_n^{-1} — функцию обратную к φ_n, и всякий символ φ_1^0, ψ_1^0, φ_0^{-1}, ψ_0^{-1} тождество.

Из этих формул мы видим, что *для всякой ц. дисперсии существует обратная функция и дальше, что значения ц. дисперсии можно выразить через значения основных ц. дисперсий и функций к ним обратных.*

2. Далее мы видим, что *для всякого числа* $x \in (-\infty, +\infty)$ *справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \ldots < \chi_{-2}(x) < \varphi_{-1}(x) < \chi_{-1}(x) < x < \chi_1(x) < \varphi_1(x) < \chi_2(x) < \ldots, \\ \ldots < \omega_{-2}(x) < \psi_{-1}(x) < \omega_{-1}(x) < x < \omega_1(x) < \psi_1(x) < \omega_2(x) < \ldots. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Из этих формул мы заключаем, что *все ц. дисперсии 1. рода образуют циклическую бесконечную группу; основным элементом ее является основная ц. дисперсия* φ_1, *а единицей - тождество; все ц. дисперсии 1. рода с положительными индексами образуют подгруппу этой группы. Также все ц. дисперсии 2. рода образуют циклическую бесконечную группу, основным элементом ее является основная ц. дисперсия* ψ_1, *а единицей — тождество; все ц. дисперсии 2. рода с положительными индексами образуют подгруппу этой группы.*

4. Из теоремы **3**,1 следует, что *ц. дисперсии тождественно удовлетворяют следующим соотношениям между интегралами д. уравнения* (a):

$$\begin{aligned} u(x)\, v\,[\varphi(x)] - u\,[\varphi(x)]\, v(x) &= 0\,, \\ u'(x)\, v'\,[\psi(x)] - u'\,[\psi(x)]\, v'(x) &= 0\,, \\ u(x)\, v'\,[\chi(x)] - u'[\chi(x)]\, v(x) &= 0\,, \\ u'(x)\, v\,[\omega(x)] - u\,[\omega(x)]\, v'(x) &= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

5. *Наконец, мы видим, что любая* ν*-тая ц. дисперсия 2. рода д. уравнения* (a), $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$, *есть* ν*-тая ц. дисперсия 1. рода первого сопроводительного уравнения* (a_1) *относительно д. уравнения* (a); *разумеется, если д. уравнение* (a_1) *существует.*

7. Дальнейшие свойства.

1. *Множество значений всякой ц. дисперсии — интервал* $(-\infty, +\infty)$.

Пусть Δ любая ц. дисперсия некоторого рода. Утверждение следует из того, что всякое число $x \in (-\infty, +\infty)$ — значение ц. дисперсии Δ в числе $\Delta^{-1}(x)$.

2. *Всякая ц. дисперсия всегда возрастает.*

Согласно формулам **6**,1, достаточно установить это свойство для основных ц. дисперсий. Рассмотрим любую основную ц. дисперсию δ. В этом абзаце φ, ψ, χ, ω означает основную ц. дисперсию 1., 2., 3., 4. рода.

Пусть $x < y$ — любые числа. Мы должны установить, что имеет место неравенство $\delta(x) < \delta(y)$.

Согласно теореме **6**,2, имеют место неравенства: $x < \delta(x)$, $y < \delta(y)$. Если $\delta(x) \leq y$, мы имеем уже $\delta(x) < \delta(y)$. Мы видим, что доказательство сводится к установлению того факта, что из неравенства $x < y < \delta(x)$ следует $\delta(x) < \delta(y)$. Это будет установлено, если мы покажем, что неравенства $x < y < \delta(y) < \delta(x)$ не имеют места. Отметим, что равенство $\delta(x) = \delta(y)$ исключено существованием обратной функции δ^{-1}.

Итак, допустим, что имеют место неравенства $x < y < \delta(y) < \delta(x)$.

а) $\delta = \varphi$. В этом случае несправедливость этих неравенств вытекает из классической теоремы о взаимном положении корней двух интегралов д. уравнения (а). С целью сохранения одинакового хода во всех случаях, мы производим соответствующее доказательство.

Из определения функции φ следует, что существуют интегралы u, v д. уравнения (а) такие, что имеют место формулы:

$$u(y) = u\,[\varphi(y)] = 0\,, \quad u(t) \neq 0 \quad \text{для} \quad t \in (y, \varphi(y))\,;$$
$$v(x) = v\,[\varphi(x)] = 0\,, \quad v(t) \neq 0 \quad \text{для} \quad t \in (x, \varphi(x))\,.$$

Если мы применим первую формулу **1** (2) для $\xi = y$, $\eta = \varphi(y)$, мы видим, что интеграл в правой части равен нулю, что невозможно.

б) $\delta = \psi$. Из определения функции ψ следует, что существуют интегралы u, v д. уравнения (а), для которых:

$$u'(y) = u'\,[\psi(y)] = 0\,, \quad u'(t) \neq 0 \quad \text{для} \quad t \in (y, \psi(y))\,;$$
$$v'(x) = v'\,[\psi(x)] = 0\,, \quad v'(t) \neq 0 \quad \text{для} \quad t \in (x, \psi(x))\,.$$

Если мы воспользуемся второй формулой **1** (2) для $\xi = y$, $\eta = \psi(y)$, мы видим, что интеграл в правой части равен нулю, что, в виду предположения $Q < 0$, невозможно.

в) $\delta = \chi$. Из определения функции χ следует, что существуют интегралы u, v д. уравнения (а) такие, что имеют место следующие формулы:

$$u(y) = u'\,[\chi(y)] = 0\,, \quad u(t) > 0\,, \quad u'(t) > 0 \quad \text{для} \quad t \in (y, \chi(y))\,;$$
$$v(x) = v'\,[\chi(x)] = 0\,, \quad v(t) > 0\,, \quad v'(t) > 0 \quad \text{для} \quad t \in (x, \chi(x))\,.$$

Если мы воспользуемся третьей формулой **1** (2) для $\xi = y$, $\eta = \chi(y)$, мы видим, что функция $Quv - u'v'$ в интервале $(y, \chi(y))$ равна нулю; но это невозможно, в виду предположения $Q < 0$.

г) $\delta = \omega$. В этом случае существуют интегралы д. уравнения (а), и для них:

$$u'(y) = u\,[\omega(y)] = 0\,, \quad u(t) > 0\,, \quad u'(t) < 0 \quad \text{для} \quad t \in (y, \omega(y))\,;$$
$$v'(x) = v\,[\omega(x)] = 0\,, \quad v(t) > 0\,, \quad v'(t) < 0 \quad \text{для} \quad t \in (x, \omega(x))\,.$$

Если мы воспользуемся той же формулой **1** (2), мы получим опять невозможный результат.

3. *Всякая ц. дисперсия всюду непрерывна.*

Это утверждение является следствием предыдущих теорем 1. и 2.

8. Производные.

Пусть φ, ψ, χ, ω означает любую ц. дисперсию 1., 2., 3., 4. рода.

1. *Все ц. дисперсии имеют во всяком числе* $x \in (-\infty, +\infty)$ *непрерывные производные, которые определены следующими формулами:*

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\frac{u'(x)\, v[\varphi(x)] - u[\varphi(x)]\, v'(x)}{u(x)\, v'[\varphi(x)] - u'[\varphi(x)]\, v(x)}\,, \\
\psi'(x) &= -\frac{Q(x)}{Q[\psi(x)]} \cdot \frac{u(x)\, v'[\psi(x)] - u'[\psi(x)]\, v(x)}{u'(x)\, v[\psi(x)] - u[\psi(x)]\, v'(x)}\,, \\
\chi'(x) &= -\frac{1}{Q[\chi(x)]} \cdot \frac{u'(x)\, v'[\chi(x)] - u'[\chi(x)]\, v'(x)}{u(x)\, v[\chi(x)] - u[\chi(x)]\, v(x)}\,, \\
\omega(x) &= -Q(x) \cdot \frac{u(x)\, v[\omega(x)] - u[\omega(x)]\, v(x)}{u'(x)\, v'[\omega(x)] - u'[\omega(x)]\, v'(x)}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство проведем, напр., для первого случая.

Пусть φ — любая ц. дисперсия 1. рода. Пусть F означает функцию двух независимых переменных x, y, которая определена формулой:

$$F(x, y) = u(x)\, v(y) - u(y)\, v(x)\,.$$

Пусть $\xi \in (-\infty, +\infty)$ — любое число и $\eta = \varphi(\xi)$ — значении функции φ в ξ. Согласно теореме **6**, 4, числа ξ, η удовлетворяют уравнению $F(\xi, \eta) = 0$. По теореме **3**, 2, 1 существует одна и только одна функция $y(x)$, определенная в некоторой окрестности числа ξ, которая в числе ξ принимает значение η, в этой окрестности непрерывна и всюду в ней удовлетворяет уравнению $F[x, y(x)] = 0$; эта функция имеет в этой окрестности непрерывную производную y', которая определена формулой:

$$y'(x) = -\frac{u'(x)\, v[y(x)] - v'(x)\, u[y(x)]}{u(x)\, v'[y(x)] - v(x)\, u'[y(x)]}\,.$$

Потому что функция φ определена (всюду, а, значит, и) в некоторой окрестности числа ξ, принимает в числе ξ значение η, в этой окрестности непрерывна (**7**, 3) и всюду в ней удовлетворяет уравнению $F[x, \varphi(x)] = 0$ (**6**, 4), из теоремы **3**, 2, 1 следует правильность уравнения $y(x) = \varphi(x)$ и правильность первой формулы (1) для числа ξ. Теорема доказана.

2. *Производные ц. дисперсий можно выразить также формулами:*

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{u^2[\varphi(x)]}{u^2(x)}\,, & \text{если} \quad u(x) \neq 0\,, \\[2ex] \dfrac{u'^2(x)}{u'^2[\varphi(x)]}\,, & \text{если} \quad u(x) = 0\,; \end{cases} \tag{2}$$

$$
\psi'(x) = \begin{cases} \dfrac{Q(x)}{Q[\psi(x)]} \cdot \dfrac{u'^2[\psi(x)]}{u'^2(x)}, & \text{если} \quad u'(x) \neq 0\,, \\ \dfrac{Q(x)}{Q[\psi(x)]} \cdot \dfrac{u^2(x)}{u^2[\psi(x)]}, & \text{если} \quad u'(x) = 0\,; \end{cases}
$$

$$
\chi'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{Q[\chi(x)]} \cdot \dfrac{u'^2[\chi(x)]}{u^2(x)}, & \text{если} \quad u(x) \neq 0\,, \\ -\dfrac{1}{Q[\chi(x)]} \cdot \dfrac{u'^2(x)}{u^2[\chi(x)]}, & \text{если} \quad u(x) = 0\,; \end{cases} \tag{2}
$$

$$
\omega'(x) = \begin{cases} -Q(x) \cdot \dfrac{u^2[\omega(x)]}{u'^2(x)}, & \text{если} \quad u'(x) \neq 0\,, \\ -Q(x) \cdot \dfrac{u^2(x)}{u'^2[\omega(x)]}, & \text{если} \quad u'(x) = 0\,. \end{cases}
$$

Мы проведем доказательство, напр. для первого случая.

Пусть φ — любая ц. дисперсия 1. рода, а x — любое число. Тогда имеет место первая формула 8 (1).

В случае $u(x) \neq 0$ мы умножим числителя и знаменателя на число $u(x)$ и воспользуемся для числителя соотношением: $u(x) \,.\, v[\varphi(x)] = u[\varphi(x)] \,.$ $. \, v(x)$; после этого мы умножим числителя и знаменателя на число $u[\varphi(x)]$ и воспользуемся для знаменателя тем же соотношением. После сокращения на число $w(x) = w[\varphi(x)]$ мы получим формулу:

$$
\varphi'(x) = \frac{u^2[\varphi(x)]}{u^2(x)}\,.
$$

В случае $u(x) = 0$ есть $u'(x) \,.\, u'[\varphi(x)] \neq 0$. Сперва мы умножим числителя и знаменателя на число $u'(x)$ и после этого на $u'[\varphi(x)]$ и аналогичным указанному выше образом получим

$$
\varphi'(x) = \frac{u'^2(x)}{u'^2[\varphi(x)]}\,.
$$

3. Пусть ϱ, σ означают первую и вторую амплитуду упорядоченной пары интегралов u, v (2, 1).

Из результатов предыдущего абзаца 2. мы легко получим, что *производные ц. дисперсии заданы также следующими формулами, которые имеют место во всяком числе* $x \in (-\infty, +\infty)$:

$$
\varphi'(x) = \frac{\varrho^2[\varphi(x)]}{\varrho^2(x)}\,; \quad \psi'(x) = \frac{Q(x)}{Q[\psi(x)]} \cdot \frac{\sigma^2[\psi(x)]}{\sigma^2(x)}\,,
$$

$$
\chi'(x) = -\frac{1}{Q[\chi(x)]} \cdot \frac{\sigma^2[\chi(x)]}{\varrho^2(x)}\,; \quad \omega'(x) = -Q(x) \cdot \frac{\varrho^2[\omega(x)]}{\sigma^2(x)}\,. \tag{3}
$$

4. Из предыдущих результатов мы видим, что *все ц. дисперсии 1. рода имеют всюду непрерывные производные до третьего порядка включительно.*

В более общем случае имеет место: *Если функция Q имеет всюду непрерывную производную k-того порядка ($k = 0, 1, 2, \ldots$), то все ц. дисперсии 1. порядка имеют всюду непрерывную производную порядка $k + 3$, и все ц. дисперсии высших порядков имеют непрерывные производные порядка $k + 1$.*

9. Выражение производных от ц. дисперсий через значения функции Q.

Обратив внимание на то, что значения производных от всех ц. дисперсий можно выразить при помощи производных основных ц. дисперсий, как мы видим из тождеств **6**,1, ограничимся выводами соотношений между значениями производных основных ц. дисперсий и значениями функции Q.

Пусть φ, ψ, χ, ω означают основные ц. дисперсии 1., 2., 3., 4. рода.

Мы докажем следующую теорему:

Значения производных от основных ц. дисперсий во всяком числе x являются частными от деления значений функции Q на значения той же функции, выраженные формулами:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{Q(x_1)}{Q(x_3)}\,, \quad \psi'(x) = \frac{Q(x)}{Q(x_2)} \cdot \frac{Q(x_4)}{Q[\psi(x)]}\,, \\ \chi'(x) &= \frac{Q(x_1)}{Q[\chi(x)]}\,, \quad \omega'(x) = \frac{Q(x)}{Q(x_2)}\,; \end{aligned} \tag{1}$$

при том x_1, x_2, x_3, x_4 подходящие числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$x < x_1 < \chi(x) < x_3 < \varphi(x)\,; \quad x < x_2 < \omega(x) < x_4 < \psi(x)\,.$$

Доказательство: Прежде всего заметим, что всякий интеграл u д. уравнения (а) удовлетворяет уравнению:

$$u''u' = Qu\,u'$$

и, значим, также:

$$(u'^2)' = Q \,.\, (u^2)'\,.$$

Из этого следует для всяких двух чисел x, ξ:

$$u'^2(\xi) - u'^2(x) = \int_x^\xi Q(t) \,.\, [u^2(t)]'\, \mathrm{d}t\,.^{8)} \tag{2}$$

а) Пусть u — любой интеграл д. уравнения (а), x — один его корень, так что $u(x) = u'[\chi(x)] = 0$.

В уравнении (2) мы возьмем $\xi = \chi(x)$. Мы получим:

$$-u'^2(x) = \int_x^{\chi(x)} Q(t) \,.\, [u^2(t)]'\, \mathrm{d}t\,.$$

[8]) *G. Sansone:* Equazioni differenziali nel campo reale. Parte seconda. (Bologna, 1941), стр. 24.

В интервале $(x, \chi(x))$ функция uu', а, значит и $(u^2)'$ положительна. Согласно теореме о среднем значении интеграла, мы имеем:

$$\int\limits_x^{\chi(x)} Q(t) \,.\, [u^2(t)]' \,\mathrm{d}t = Q(x_1) \,.\, u^2[\chi(x)] \,,$$

при этом x_1 — подходящее число, удовлетворяющее неравенствам: $x < x_1 < \chi(x)$. Эти две формулы приводят нас к уравнению:

$$-u'^2(x) = Q(x_1) \,.\, u^2[\chi(x)] \,,$$

и, согласно 8 (2), к результату:

$$\chi'(x) = \frac{Q(x_1)}{Q[\chi(x)]} \,, \quad (x < x_1 < \chi(x)) \,.$$

б) Пусть теперь u — любой интеграл д. уравнения (а) такой, что одним корнем производной от него есть x, так что $u'(x) = u[\omega(x)] = 0$.

В уравнении (2) мы возьмем $\xi = \omega(x)$.

Получим

$$u'^2[\omega(x)] = \int\limits_x^{\omega(x)} Q(t) \,.\, [u^2(t)]' \,\mathrm{d}t \,.$$

В интервале $(x, \omega(x))$ функция uu', а также $(u^2)'$, отрицательна. Согласно теореме о среднем значении интеграла, мы имеем:

$$\int\limits_x^{\omega(x)} Q(t) \,.\, [u^2(t)]' \,\mathrm{d}t = -Q(x_2) \,.\, u^2(x) \,,$$

при этом x_2 — подходящее число, удовлетворяющее неравенствам: $x < x_2 < \omega(x)$. Из этих двух формул следует уравнение:

$$u'^2[\omega(x)] = -Q(x_2) \,.\, u^2(x) \,,$$

и из этого, согласно 8 (2), результат:

$$\omega'(x) = \frac{Q(x)}{Q(x_2)} \,, \quad (x < x_2 < \omega(x)).$$

в) Из тождества $\varphi(x) = \omega[\chi(x)]$ следует, если принять во внимание верхние формулы:

$$\varphi'(x) = \omega'[\chi(x)] \,.\, \chi'(x) = \frac{Q[\chi(x)]}{Q(x_3)} \cdot \frac{Q(x_1)}{Q[\chi(x)]} = \frac{Q(x_1)}{Q(x_3)} \,,$$

где x_3 — подходящее число, удовлетворяющее неравенствам: $\chi(x) < x_3 < \varphi(x)$. Таким образом, мы получим результат:

$$\varphi'(x) = \frac{Q(x_1)}{Q(x_3)} \,, \quad (\chi(x) < x_3 < \varphi(x)) \,.$$

г) Аналогично из тождества:

$$\psi(x) = \chi[\omega(x)]$$

мы получим результат:

$$\psi'(x) = \frac{Q(x)}{Q(x_2)} \cdot \frac{Q(x_4)}{Q[\psi(x)]} \,, \quad (\omega(x) < x_4 < \psi(x)) \,.$$

10. Применение.

Простое применение теоремы из предыдущего абзаца **9** мы получим в том случае, когда функция Q монотонная. Мы сохраняем обозначение из абзаца **9**. Из найденных формул мы видим, что если функция Q не убывает, значения всех функций φ', ψ', χ', ω' всюду $\geqq 1$. Из этого следует, что функции $\varphi(x) - x$, $\psi(x) - x$, $\chi(x) - x$, $\omega(x) - x$ имеют всюду производную, которая или больше нуля, или равна нулю, значит, не убывают. Итак, мы получаем результат, что *если функция Q не убывает, то расстояния $\varphi(x) - x$, $\psi(x) - x$, $\chi(x) - x$, $\omega(x) - x$ также не убывают.*

Аналогично мы убедимся в том, что *если функция Q не возрастает, то эти расстояния также не возрастают.*

11. Теоремы о производных сложных функций.

Дальнейшим следствием предыдущих рассуждений являются замечательные теоремы о сложных функциях, у которых всюду производные высших порядков, чем у их частей. Мы принимаем обозначение из абзаца **9**.

1. *Пусть функция Q определена в интервале $(-\infty, +\infty)$ всюду отрицательна и непрерывна, и интегралы д. уравнения $y'' = Q(x)y$ колеблются. Тогда существуют функции X, Y, определенные в интервале $(-\infty, +\infty)$, которые характерны тем, что во всяком числе $x \in (-\infty, +\infty)$ имеют место неравенства $x < X(x) < Y(x)$, и сложная функция $Q[X(x)] : Q[Y(x)]$ имеет всюду непрерывную производную 2. порядка. Если функция Q строго монотонная то существуют такие всюду непрерывные функции X, Y.*

Действительно, мы получим функции X, Y имеющее приведенные свойства, если всякому числу $x \in (-\infty, +\infty)$ поставим в соответствие некоторые числа $(X(x) =)\, x_1$, $(Y(x) =)\, x_3$, удовлетворяющее неравенствам $x < x_1 < x_3$, и для которых первая формула **9** (1) имеет место. После этого сложная функция $Q[X(x)] : Q[Y(x)]$ $(= \varphi'(x))$ имеет в числе x непрерывную производную 2. порядка, что мы уже знаем из абзаца 8, 4.

Если функция Q строго монотонная, то из 3. и 4. из формул **9** (1) следует:

$$X(x) = Q^{-1}\{Q[\chi(x)] \cdot \chi'(x)\}\,; \quad Y(x) = Q^{-1}\left\{\frac{Q[\chi(x)]}{\omega'[\chi(x)]}\right\},$$

при чем Q^{-1} означает обратную функцию от Q. Из этих формул мы находим, что функции X, Y всюду непрерывны.

2. *Пусть функция Q определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, всюду непрерывна и удовлетворяет неравенству:* $\inf\limits_{x \in (-\infty, +\infty)} |Q(x)| > 0$. *Тогда существуют функции X, Y, определенные в интервале $(-\infty, +\infty)$, которые имеют все свойства, описанные в предыдущей теореме* 1.

Действительно, пусть предположения выполнены. После этого функция $-|Q|$ определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, всюду отрицательна и непрерывна, и интегралы д. уравнения $y'' = -|Q(x)|\,y$ колеблются.[9]) Согласно предыдущей теореме 1., существуют функции X, Y определенные в интервале $(-\infty, +\infty)$, которые характеризуются тем, что во всяком числе $x \in (-\infty, +\infty)$ верны неравенства $x < X(x) < Y(x)$, и сложная функция $-|Q[X(x)]| : -|Q[Y(x)]|$ имеет в нем непрерывную производную 2. порядка. Таким образом, доказана первая часть утверждения, потому что $-|Q[X(x)]| : -|Q[Y(x)]| = Q[X(x)] : Q[Y(x)]$. Вторая часть есть также следствие предыдущей теоремы 1., потому что если функция Q строго монотонная, то же самое верно и для функции $-|Q|$.

3. *Пусть функция Q имеет в интервале $(-\infty, +\infty)$ отрицательную непрерывную производную Q', и интегралы д. уравнения $y'' = Q'(x)\,y$ колеблются. Тогда существует функция X, определенная в интервале $(-\infty, +\infty)$, которая во всяком числе $x \in (-\infty, +\infty)$ удовлетворяет неравенству $x < X(x)$, имеет всюду положительную непрерывную производную 1. порядка, и сложная функция $Q[X(x)]$ имеет непрерывную производную 3. порядка.*

Действительно, мы получим функцию со всеми описанными свойствами, если мы возьмем $X = \chi$, где χ — основная ц. дисперсия 3. рода д. уравнения $y'' = Q'(x)\,y$. Функция X определена в интервале $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяет во всяком числе $x \in (-\infty, +\infty)$ неравенству $x < X(x)$, имеет в нем положительную непрерывную производную 1. порядка и удовлетворяет уравнению 8 (2)

$$Q[X(x]' = -\frac{u'^2[X(x)]}{u^2(x)};$$

где u означает любой интеграл д. уравнения $y'' = Q'(x)\,y$, для которого $u(x) \neq 0$. Утверждение следует из того, что функция в правой части предыдущей формулы имеет в числе x непрерывную производную 2. порядка.

4. *Пусть функция Q имеет в интервале $(-\infty, +\infty)$ отрицательную (положительную) непрерывную производную и убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (возрастает от $-\infty$ до $+\infty$). Тогда существует функция X, которая имеет в интервале $(-\infty, +\infty)$ положительную непрерывную производную, возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, удовлетворяет неравенству $x < X(x)$, и сложная функция $Q[X(x)]$ имеет всюду непрерывную производную 3. порядка.*

Действительно, если функция Q имеет в интервале $(-\infty, +\infty)$, напр. отрицательную непрерывную производную и убывает от $+\infty$ до $-\infty$,

[9]) *В. В. Степанов:* Курс дифференциальных уравнений (изд. пятое, Москва, 1950, стр. 250.).

тогда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q'(t)\,\mathrm{d}t$ относительно обоих своих пределов расходится, и в таком случае д. уравнение $y'' = Q'(x)\,y$ имеет колеблющееся решение.[10] Из этого согласно предыдущей теореме 3, следует утверждение.

12. Дифференциальное уравнение центральных дисперсий.

Все ц. дисперсии 1. рода — это решения некоторого д. уравнения 3. порядка. В том случае, когда функция Q имеет всюду производную 2. порядка, имеет место тот же самый результат и о центральных дисперсиях остальных рядов. Эти д. уравнения 3. порядка получаются двойным дифференцированием формул **8** (2) и исключением интеграла u и его первой и второй производной.

Обратим особое внимание на д. уравнение 3. порядка, которому удовлетворяют все ц. дисперсии 1. рода. В абзаце **17**,5 мы покажем, что это д. уравнение следующее:

$$\sqrt{\varphi'} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\right)'' + \varphi'^2\, Q(\varphi) = Q(x)\,. \tag{b}$$

Д. уравнение (b) — это источник многих сведений и проблем, которые будем рассматривать с более широкой точки зрения в следующих главах. Здесь мы ограничимся следующим замечанием:

Если расстояние между всякими двумя соседними корнями всех интегралов д. уравнения (a) постоянное и для всех интегралов одинаковое ($= d$), т. е. если корни интегралов д. уравнения (a) равноотстоящие, то основная ц. дисперсия $\varphi(x)$ определена формулой

$$\varphi(x) = x + d\,,$$

и мы имеем всюду $\varphi'(x) = 1$. Из д. уравнения (b) следует, что во всяком числе x имеет место

$$Q(x + d) = Q(x)\,,$$

так, что функция Q периодическая с периодом d.

Мы видим, что д. *уравнение* (a) *имеет интегралы с равноотстоящими корнями, расположенными друг от друга на растоянии d только тогда, если функция Q периодическая с периодом d.*

Если функция Q имеет постоянное значение $-\pi^2/d^2$, корни интегралов д. уравнения (a) отстоят друг от друга на одном и том же расстоянии d (> 0). На вопрос о существовании других функций Q с этим свойством можно дать утвердительный ответ. Г. др. *L. Frank* построил в этом направлении ряд примеров. Напр. д. уравнение

---

[10]) *A. Wintner:* A criterion of oscillatory stability (Quarterly of Applied Mathematics, Vol. VII (1949)).

$$y'' = \frac{5 - 9\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}\, y \tag{1}$$

характерно тем, что корни его интегралов расположены на равном расстоянии π; общий неопределенный интеграл этого д. уравнения есть функция

$$y(x) = (\sin x + \sin^3 x)\,.\left[C_1 + C_2\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{2}} - 4\operatorname{cotg} x - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\operatorname{cotg} x}{2 + \operatorname{cotg}^2 x}\right)\right]. \tag{2}$$

III. Дисперсии первого рода.

13. Проективное соответствие в системе интегралов д. уравнения (а).

Согласно классической теореме, всякая пара линейно независимых интегралов U, V д. уравнения (а) определяет систему всех интегралов в том смысле, что всякий интеграл Y есть линейная комбинация интегралов U, V с постоянными коэффициентами λ, μ,

$$Y = \lambda U + \mu V\,,$$

и наоборот, всякая такая линейная комбинация представляет собой интеграл д. уравнения (а).

Пусть U, V; u, v — упорядоченные пары линейно независимых интегралов д. уравнения (а), а W, w — их определители Вронского, так что $W \neq 0 \neq$ $\neq w$.

Установим некоторый порядок обоих пар, напр. U, V; u, v. Тогда нами однозначно установлено некоторое *проективное отображение*, или *проективное соответствие* $\mathfrak{p}$, системы всех интегралов д. уравнения (а) на себя; это отображение определено так, что образом всякого интеграла

$$Y = \lambda U + \mu V$$

есть интеграл

$$y = \lambda u + \mu v\,.$$

В проективном соответствии $\mathfrak{p}$ образом интеграла $U\,(V)$ служит интеграл $u\,(v)$. Упорядоченные пары U, V и u, v называются *первая и вторая база* проективного соответствия $\mathfrak{p}$; мы говорим, что проективное соответствие $\mathfrak{p}$ определено базами U, V и u, v (в данном порядке) и пишем $\mathfrak{p} =$ $= [U \to u,\ V \to v]$. Образ y интеграла Y в проективном соответствии $\mathfrak{p}$ мы обозначаем также $\mathfrak{p}Y$. Число

$$(\tau =)\ W : w$$

мы называем *характеристикой проективного соответствия* $\mathfrak{p}$.

То же самое проективное соответствие $\mathfrak{p}$ задано любой первой базой P, Q и второй базой $\mathfrak{p}P$, $\mathfrak{p}Q$, так, что мы имеем: $\mathfrak{p} = [P \to \mathfrak{p}P,\ Q \to \mathfrak{p}Q)$. Определители Вронского баз P, Q, и $\mathfrak{p}P$, $\mathfrak{p}Q$ отличаются от чисел W, w тем же постоянным множителем, так, что *характеристика проективного соответствия* $\mathfrak{p}$ *не зависит от выбора баз проективного соответствия.*

В проективном соответствии $\mathfrak{p}$ образы всяких двух линейно независимых интегралов линейно независимы, в то время как образы всяких двух линейно зависимых интегралов линейно зависимы и отличаются тем же самым постоянным множителем, как их прообразы.

О двух проективных соответствиях мы говорим, что они имеют *равный* или *неравный характер* в соответствии с тем, если их характеристики имеют одинаковые или неодинаковые знаки.

Пусть $c \neq 0$ — любое число. Проективное соответствие, определенное базами U, V и cu, cv обозначается $c\mathfrak{p}$, так что: $c\mathfrak{p} = [U \to cu,\ V = cv]$. В проективном соответствии $c\mathfrak{p}$ образом всякого интеграла Y есть интеграл $c\,.\,\mathfrak{p}Y$, значит, интеграл линейно зависимый от интеграла $\mathfrak{p}Y$; о проективном соответствии $c\mathfrak{p}$ мы говорим, что оно *линейно зависимо*, короче: *засисимо* от проективного соответствия $\mathfrak{p}$. Характеристика проективного соответствия $c\mathfrak{p}$ есть $(1 : c^2)\ .\ (W : w)$, и тогда проективные соответствия $\mathfrak{p}$, $c\mathfrak{p}$ имеют равный характер. Корни образов всякого интеграла в проективных соответствиях $\mathfrak{p}$ и $c\mathfrak{p}$ одни и те же.

Между всеми проективными соответствиями, зависимыми от $\mathfrak{p}$, существуют два и только два, характеристики которых равны $+1$ или -1 в зависимости от того, если характеристика проективного соответствия $\mathfrak{p}$ положительна или отрицательна. Это проективные соответствия

$$\sqrt{|W : w|}\,\mathfrak{p} \quad \text{и} \quad -\sqrt{|W : w|}\,\mathfrak{p}\,.$$

Образы всякого интеграла в этих проективных соответствиях отличаются только знаком; из этого мы видим, что одна и только одна из них характерна тем, что образ заданного интеграла имеет в заданном числе, которое не является его корнем, заданный знак.

Проективное соответствие, определенное равными базами, есть тождественное проективное соответствие $\mathfrak{e}$, характеристика которого $\tau = 1$.

Проективное соответствие, полученное из проективного соответствия $\mathfrak{p} = [U \to u,\ V \to v]$, с характеристикой τ, заменой баз, есть обратное проективное соответствие $\mathfrak{p}^{-1}$, так, что $\mathfrak{p}^{-1} = [u \to U,\ v \to V]$; его характеристика равна $1/\tau$.

Проективиое соответствие $\mathfrak{p}$, полученное из проективных соответствий $\mathfrak{p}_1 = [U \to u_1,\ V \to v_1]$ с характеристикой τ_1 и $\mathfrak{p}_2 = [u_1 \to u,\ v_1 \to v]$, с характеристикой τ_2, по формуле $\mathfrak{p} = [U \to u,\ V \to v]$, есть сложное проективное соответствие $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1$, так, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1$; его характеристика равна $\tau_2\tau_1$.

14. Регулярные проективные соответствия первого рода.

Пусть α, β — упорядоченная пара любых чисел и $\mathfrak{p}$ — любое проективное соответствие в системе интегралов д. уравнения (а).

Проективное соответствие $\mathfrak{p}$ называется *регулярным 1. рода относительно чисел* α, β (в данном порядке), если всякий интеграл, который имеет корень α, отображается в нем на интеграл $\mathfrak{p}Y$, имеющий корень β; другими словами, если из равенства $Y(\alpha) = 0$ следует $\mathfrak{p}Y(\beta) = 0$.

Если проективное соответствие $\mathfrak{p}$ регулярное 1. рода относительно чисел α, β, то то же самое имеет место и для всякого проективного соответствия, которое зависимо от $\mathfrak{p}$.

Примечание: В абзаце **26** мы будем говорить о дальнейших родах проективных соответствий, которые аналогичны регулярным проективным соответствиям 1. рода и которые мы называем *регулярные* проективные соответствия *2., 3., 4. рода*. В этой статье достаточно рассмотреть регулярные проективные соответствия 1. рода и, имея в виду это ограничение, *мы* в дальнейших рассуждениях *называем регулярные проективные соответствия 1. рода просто регулярными*, выпуская определение: 1. рода.

Теоремы о регулярных проективных соответствиях.

1. *Если проективное соответствие* $\mathfrak{p}$ *регулярно относительно чисел* α, β, *тогда всякая его первая и вторая база* U, V *и* u, v *удовлетворяет уравнению*

$$U(\alpha) \,.\, v(\beta) - V(\alpha) \,.\, u(\beta) = 0 \;. \tag{1}$$

Наоборот, если некоторая первая и вторая база U,V *и* u,v *проективного соответствия* $\mathfrak{p}$ *удовлетворяет уравнению* (1), *то проективное соответствие* $\mathfrak{p}$ *регулярно относительно* α, β.

Доказательство. Предположим, что проективное соответствие $\mathfrak{p}$ регулярно относительно чисел α, β. Пусть Y — любой интеграл, удовлетворяющий уравнению $Y(\alpha) = 0$. Тогда имеют место формулы: $Y(\alpha) = 0 = \mathfrak{p}Y(\beta)$. Из них следует для всякой первой и второй базы U,V и u, v проективного соответствия $\mathfrak{p}$ уравнения:

$$\lambda U(\alpha) + \mu V(\alpha) = 0 \;,$$

$$\lambda u(\beta) + \mu v(\beta) = 0 \;,$$

при этом λ, μ — подходящие числа, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Из этих формул следует уравнение (1).

Предположим наоборот, что некоторая первая и вторая база U, V и u, v проективного соответствия $\mathfrak{p}$ удовлетворяет (1). Потому что интегралы U, V независимы, мы имеем: $U^2(\alpha) + V^2(\alpha) \neq 0$. Пусть $Y = \lambda U + \mu V$ — любой интеграл, который имеет корень α, так что $Y(\alpha) = 0$. Тогда имеет место уравнение:

$$\lambda U(\alpha) + \mu V(\alpha) = 0 .$$

Из этого и дальше из уравнения (1) и неравенства $U^2(\alpha) + V^2(\alpha) \neq 0$ следует:

$$\lambda u(\beta) + \mu v(\beta) = 0 ,$$

так, что $\mathfrak{p}Y(\beta) = 0$. Таким образом установлено, что проективное соответствие $\mathfrak{p}$ регулярно относительно чисел α, β.

2. *Тождественное проективное соответствие регулярно относительно чисел α, β тогда и только тогда, α, β — сопряженные числа 1. рода.*

Действительно, согласно теореме 1., тождественное проективное соответствие регулярно относительно чисел α, β тогда и только тогда, если для всяких двух независимых интегралов U, V имеет место уравнение

$$U(\alpha) \,.\, V(\beta) - V(\alpha) \,.\, U(\beta) = 0 ,$$

т. е. если числа α, β — сопряженные числа 1. рода (**3**,1).

3. *Пусть проективное соответствие $\mathfrak{p}$ регулярно относительно чисел α, β. Тогда и обратное проективное соответствие $\mathfrak{p}^{-1}$ регулярно относительно чисел β, α.*

Доказательство. Пусть U, V и u, v любая первая и вторая база проективного соответствия $\mathfrak{p}$. Тогда u, v и U, V — первая и вторая база проективного соответствия $\mathfrak{p}^{-1}$.

Согласно теореме 1, справедливость уравнения

$$U(\alpha) \,.\, v(\beta) - V(\alpha) \,.\, u(\beta) = 0$$

есть необходимое условие для регулярности проективного соответствия $\mathfrak{p}$ относительно чисел α, β и одновременно достаточное для регулярности проективного соответствия $\mathfrak{p}^{-1}$ относительно чисел β, α.

4. *Пусть проективное соответствие $\mathfrak{p}_1$ ($\mathfrak{p}_2$) регулярно относительно чисел α_1, β_1 (β_1, α_2). Тогда и сложное проективное соответствие $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1$ регулярно относительно чисел α_1, α_2.*

Доказательство: Пусть U_1, V_1 и u_1, v_1 — любая первая и вторая база проективного соответствия $\mathfrak{p}_1$ и дальше u_1, v_1 и U_2, V_2 — первая и вторая база проективного соответствия $\mathfrak{p}_2$. Тогда U_1, V_1 и U_2, V_2 — первая и вторая база сложного проективного соответствия $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1$. Согласно теореме 1., из предположения вытекают следующие уравнения:

$$U_1(\alpha_1) \,.\, v_1(\beta_1) - V_1(\alpha_1) \,.\, u_1(\beta_1) = 0 ,$$
$$U_2(\alpha_2) \,.\, v_1(\beta_1) - V_2(\alpha_2) \,.\, u_1(\beta_1) = 0 .$$

Потому что интеграли u_1, v_1 независимы, имеет место $u_1^2(\beta_1) + v_1^2(\beta_1) \neq 0$, и из предыдущих уравнений следует:

$$U_1(\alpha_1) \,.\, V_2(\alpha_2) - V_1(\alpha_1) \,.\, U_2(\alpha_2) = 0\,.$$

Отсюда и из теоремы 1. следует утверждение.

Дальше мы легко убедимся в том, что имеет место следующее утверждение:

Если проективное соответствие $\mathfrak{p}$ *регулярно относительно чисел* α, β, *то всякий интеграл* Y, *который не имеет корень* α, *отображается на интеграл* $\mathfrak{p}Y$, *неимеющий корень* β; *другими словами, из неравенства* $Y(\alpha) \neq 0$ *следует* $\mathfrak{p}Y(\beta) \neq 0$.

Действительно, согласно теореме 3., из уравнения $\mathfrak{p}Y(\beta) = 0$ следует соотношение: $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}Y(\alpha) = 0$, т. е. $Y(\alpha) = 0$.

Если проективное соответствие $\mathfrak{p}$ *регулярно относительно чисел* α, β, *тогда существует одно и только одно от него зависимое проективное соответствие* $\mathfrak{p}^* = [U^* \to u^*,\ V^* \to v^*]$, *которое регулярно относительно чисел* α, β *имеет характеристику* $+1$ *или* -1, *и его базы удовлетворяют формулам*: $U^*(\alpha) > 0$, $V^*(\alpha) = 0$; $u^*(\beta) > 0$, $v^*(\beta) = 0$; проективное соответствие $\mathfrak{p}$ мы называем *нормированным проективным соответствием* $\mathfrak{p}$.

15. Дисперсии первого рода.

1. *Основные числа и интервалы.* Пусть α — любое число. Пусть α_ν ν-тое с числом α сопряженное число 1. рода, так что $\alpha_\nu = \varphi_\nu(\alpha)$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Числа α_ν — это корни всякого интервала V д. уравнения (а), одним из корней которого есть α; α_ν при $\nu = 0$ есть число α, при $\nu > 0$ — ν-тый за числом α следующий, а при $\nu < 0$ — ν-тый числу α предшествующий корень интеграла V.

Число α_ν *мы называем* ν-*тое основное число относительно числа* α, *короче*, ν-*тое основное число*.

Интервал $[\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ *мы называем* ν-*тый правый и аналогично* $(\alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu]$ ν-*тый левый основный интервал относительно числа* α, *короче* — ν-*тый правый или левый основной интервал.*

ν-тый правый и левый основные интегрвалы имеют одно и только одно общее число α_ν; внутренние точки ν-того правого основного интервала совпадают с внутренними точками $(\nu + 1)$-того левого основного интервала. Всякое число $x \in (-\infty, +\infty)$ лежит в некотором ν-том правом и μ-том левом основном интервале, если $x = \alpha_\nu$, то $\mu = \nu$, и если $x \neq \alpha_\nu$, то $\mu = \nu + 1$.

Всякий корень любого интеграла Y д. уравнения (а), лежит в одном и только одном правом и левом основном интервале; согласно теореме об положении корней двух интегралов, мы видим, что и, наоборот, всякий правый и левый основной интервал содержит один и только один корень интеграла Y.

Легко видеть, что верны следующие теоремы:

Если число x лежит в ν-том правом (левом) основном интервале, то $\varphi_n(x)$ лежит в $(\nu+n)$-том правом (левом) основном интервале; ν, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Если числа x, y сопряженные 1. рода и если число x лежит в ν-том правом (левом) основном интервале относительно α, и одновременно y в ν-том правом (левом) основном интервале относительно $\varphi_n(\alpha)$, то есть $y = \varphi_n(x)$; ν, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. *Определение дисперсий 1. рода.* Определим в интервале $(-\infty, +\infty)$ две вещественные функции Φ, $\overline{\Phi}$, которые имеют в дальнейших исследованиях основное значение.

Пусть α, β — любые числа и α_ν, β_ν, ν-тые основные числа относительно α, β; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Далее, пусть $\mathfrak{p}$ — любое проективное соответствие в системе интегралов д. уравнения (a), которое регулярно относительно α, β.

Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ — любое число, и Y — любой интеграл д. уравнения (a) с корнем x; число x лежит в некотором ν-том правом и μ-том левом основном интервале относительно α.

Значение функции Φ в числе x есть корень интеграла $\mathfrak{p}Y$, лежащий в ν-том правом или в μ-том левом основном интервале относительно β.

Значение функции $\overline{\Phi}$ в числе x есть корень интеграла $\mathfrak{p}Y$, лежащий в $-\nu$-том левом или в $-\mu$-том правом основном интервале относительно β.

Функцию Φ $(\overline{\Phi})$ мы называем прямой (непрямой) дисперсией 1. рода относительно чисел α, β, определенной проективным соответствием $\mathfrak{p}$, или также: прямой (непрямой) дисперсей 1. рода определенной числами α, β и проективным соответствием $\mathfrak{p}$. Проективное соответствие $\mathfrak{p}$ называется носитель, а числа α_ν (β_ν) — первые (вторые) основные числа дисперсий Φ, $\overline{\Phi}$.

Относительно этих определений заметим, что носитель тех же самых дисперсий Φ, $\overline{\Phi}$ есть также всякое от проективного соответствия $\mathfrak{p}$ зависимое проективное соответствие $c\mathfrak{p}$, потому что проективное соответствие $c\mathfrak{p}$ опять регулярно относительно чисел α, β и корни образов всякого интеграла в проективном соответствии $\mathfrak{p}$ и $c\mathfrak{p}$ те же самые. В качестве носителя дисперсии мы можем, таким образом, взять нормированное проективное соответствие $\mathfrak{p}$.

Обратим тоже внимание на то, что имеют место формулы:

$$\Phi(\alpha_\nu) = \beta_\nu\,, \quad \overline{\Phi}(\alpha_\nu) = \beta_{-\nu}\,,$$

и что для $x \in (\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ имеет место

$$\Phi(x) \in (\beta_\nu, \beta_{\nu+1})\,, \quad \overline{\Phi}(x) \in (\beta_{-\nu-1}, \beta_{-\nu})\,;$$

$\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Примечание. В абз. **26** мы будем говорить о других функциях, которые аналогичны дисперсиям 1. рода и которые мы называем *дисперисии* 2., 3., *и* 4. *рода*. В этой статье мы ограничимся изучением дисперсий 1. рода. Имея в виду это ограничение, *мы будем называть в дальнейших исследованиях дисперсии 1. рода кратко дисперсиями.*

16. Основные свойства дисперсий.

Пусть α, β — любые числа и $\mathfrak{p}$ — любое проективное соответствие, которое относительно этих чисел регулярно; пусть ζ — прямая (Φ) или непрямая ($\overline{\Phi}$) дисперсия определенная числами α, β и проективным соответствием $\mathfrak{p}$.

1. *Значения функции* ζ *заполняют интервал* $(-\infty, +\infty)$.

Действительно, всякое число $x \in (-\infty, +\infty)$ является корнем подходящего интеграла y и лежит в некотором ν-том правом и μ-том левом основном интервале относительно β. x есть значение функции ζ в корне интеграла $\mathfrak{p}^{-1}y$, лежащем в ν-том или в $-\mu$-том правом основном интервале относительно α, в соответствии с тем, если дисперсия ζ прямая или непрямая.

2. *Для всякого x проективное соответствие $\mathfrak{p}$ регулярно относительно чисел x, $\zeta(x)$, так что для всякой его первой и второй базы U, V и u, v имеет место уравнение:*

$$U(x)\, v[\zeta(x)] - V(x)\, u[\zeta(x)] = 0\,. \tag{1}$$

Действительно, пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ — любое число, и Y — любой интеграл с корнем x. Согласно определению функции ζ, имеет место уравнение $Y(x) = 0 = \mathfrak{p}Y[\zeta(x)]$; итак, ясно, что проективное соответствие $\mathfrak{p}$ регулярно относительно чисел x, $\zeta(x)$.

3. *Пусть φ_n — любая n-тая центральная дисперсия 1. рода. Для всякого числа $x \in (-\infty, +\infty)$ имеют место формулы:*

$$\Phi[\varphi_n(x)] = \varphi_n[\Phi(x)]\,, \quad \overline{\Phi}[\varphi_n(x)] = \varphi_{-n}[\overline{\Phi}(x)]\,. \tag{2}$$

Доказательство: Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ — любое число, и Y — любой интеграл с корнем x. x лежит в некотором ν-том правом основном интервале относительно α. Число $\varphi_n(x)$ есть также корень интеграла Y и лежит в $(\nu + n)$-том правом основном интервале относительно α. Обратив внимание на определение функции Φ ($\overline{\Phi}$), мы видим, что число $\Phi(x)$ ($\overline{\Phi}(x)$) — корень интеграла $\mathfrak{p}Y$, лежащий в ν-том правом ($-\nu$-том левом) основном интервале относительно β, и следовательно, число $\varphi_n[\Phi(x)]$ ($\varphi_{-n}[\overline{\Phi}(x)]$) есть корень интеграла $\mathfrak{p}Y$, лежащий в $(\nu + n)$-том правом ($(-\nu - n)$-том левом) основном интервале относительно β. Одновременно $\Phi[\varphi_n(x)]$ ($\overline{\Phi}[\varphi_n(x)]$) есть корень интеграла $\mathfrak{p}Y$, лежащий в том же самом $(\nu+n)$-том правом ($(-\nu-n)$-том левом) основном интервале относительно β. Этим завершается доказательство.

В частности, мы видим, что *всякая центральная дисперсия 1. рода заменима всякой прямой дисперсией.*

4. *Если $\beta = \varphi_n(\alpha)$ и проективное соответствие $\mathfrak{p}$ — тождественное, то прямая дисперсия является n-той центральной дисперсией 1. рода, т. е. $\Phi = \varphi_n$.*

Действительно, пусть имеют место приведенные предположения. Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ — любое число, и Y — любой интеграл с корнем x; x лежит в некотором ν-том правом основном интервале относительно α. Потому что проективное соответствие $\mathfrak{p}$ тождественно, имеет место уравнение $\mathfrak{p}Y = Y$; из этого мы находим, согласно определению функции Φ, что числа x, $\Phi(x)$ сопряженные 1. рода, и число $\Phi(x)$ лежит в ν-том правом основном интервале относительно $\varphi_n(\alpha)$. Из этого мы видим, что справедливо уравнение $\Phi(x) = \varphi_n(x)$.

17. Дальнейшие свойства.

Пусть опять α, β — любое числа, и α_ν, β_ν, ν-тые основные числа относительно α, β; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Пусть $\mathfrak{p}$ — любое проективное соответствие в системе интегралов д. уравнения (a), которое регулярно относительно чисел α, β и τ его характеристика. Пусть ζ — прямая (Φ) или непрямая ($\overline{\Phi}$) дисперсия определенная числами α, β и проективным соответствием $\mathfrak{p}$.

1. *Монотонность*. Верны следующие теоремы:

Пусть дисперсия ζ прямая. Если $\tau > 0$, то функция ζ возрастает во всем интервале $(-\infty, +\infty)$; если $\tau < 0$, то функция ζ убывает во всяком интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ от $\beta_{\nu+1}$ до β_ν, так что $\lim\limits_{t\to\alpha_\nu+} \zeta(t) = \beta_{\nu+1}$, $\lim\limits_{t\to\alpha_{\nu+1}-} \zeta(t) = \beta_\nu$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Пусть дисперсия ζ непрямая. Если $\tau < 0$, то функция ζ убывает во всем интервале $(-\infty, +\infty)$; если $\tau > 0$, то функция ζ возрастает во всяком интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ от $\beta_{-\nu-1}$ до $\beta_{-\nu}$, так что $\lim\limits_{t\to\alpha_\nu+} \zeta(t) = \beta_{-\nu-1}$, $\lim\limits_{t\to\alpha_{\nu+1}-} \zeta(t) = \beta_{-\nu}$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Доказательство: Пусть дисперсия ζ, для примера, прямая.

Пусть U, V и u, v — первая и вторая база проективного соответствия $\mathfrak{p}$ характерная тем, что интеграл $V(v)$ имеет корень $\alpha(\beta)$, так что $\alpha_\nu(\beta_\nu)$ — отдельные корни интеграла $V(v)$.

Пусть $x < y$ — любые числа, и $[\alpha_\mu, \alpha_{\mu+1})$, $[\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ — правые основные интервалы относительно α, содержащие числа x, y так, что $\alpha_\mu \leqq \alpha_\nu$.

Из определения функции ζ следуют неравенства:

$$\beta_\mu \leqq \zeta(x) < \beta_{\mu+1}\,, \quad \beta_\nu \leqq \zeta(y) < \beta_{\nu+1}\,. \tag{1}$$

В случае $\alpha_\mu < \alpha_\nu$ имеет место $\beta_\mu < \beta_\nu$, и из неравенств (1) следует $\zeta(x) < \zeta(y)$.

При $\alpha_\mu = \alpha_\nu$ имеют место неравенства:

$$\alpha_\nu \leqq x < y < \alpha_{\nu+1}\,, \quad \beta_\nu \leqq \zeta(x)\,,\ \zeta(y) < \beta_{\nu+1}\,. \tag{2}$$

Если $x = \alpha_\nu$, мы имеем $\zeta(x) = \beta_\nu$, и из неравенств (2) вытекает: $\zeta(x) < \zeta(y)$.

Остается обдумать тот случай, когда:

$$\alpha_\nu < x < y < \alpha_{\nu+1}\,, \quad \beta_\nu < \zeta(x)\,,\ \zeta(y) < \beta_{\nu+1}\,.$$

Согласно теореме **16,2**, во всяком числе $t \in (\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ справедливо уравнение:

$$\frac{U(t)}{V(t)} = \frac{u\,[\zeta(t)]}{v\,[\zeta(t)]}\,. \tag{3}$$

Функция $U : V$ в интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$ или возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ в соответствии с тем, если определитель Вронского упорядоченной пары интегралов U, V отрицательный или положительный; аналогично функция $u : v$ в интервале $(\beta_\nu, \beta_{\nu+1})$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$ или возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ в соответствии с тем, если определитель Вронского упорядоченной пары интегралов u, v отрицательный или положительный. Из уравнения (3) мы видим, что во всяком числе $t \in (\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$, $\zeta(t)$ есть значение обратной функции относительно $u : v$ в числе $U(t) : V(t)$.

Если $\tau > 0$, то определители Вронского упорядоченных пар U, V и u, v имеют тот же знак, т. е. оба положительны (отрицательны). Функция $U : V$ в интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (возрастает от $-\infty$ до $+\infty$) так что

$$\frac{U(x)}{V(x)} > \frac{U(y)}{V(y)}\,, \quad \left(\frac{U(x)}{V(x)} < \frac{U(y)}{V(y)}\right). \tag{4}$$

Подобным же образом, функция $u : v$ в интервале $(\beta_\nu, \beta_{\nu+1})$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (возрастает от $-\infty$ до $+\infty$), так что функция к ней обратная в интервале $(-\infty, +\infty)$ убывает от $\beta_{\nu+1}$ до β_ν (возрастает от β_ν до $\beta_{\nu+1}$). Из этого и из неравенств (4) следует: $\zeta(x) < \zeta(y)$.

Если $\tau < 0$, то определители Вронского упорядоченных пар U, V и u, v имеют противоположные знаки, т. е. первый положительный (отрицательный), а вторый отрицательный (положительный). Функция $U : V$ в интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (возрастает от $-\infty$ до $+\infty$), так что верны неравенства (4); функция $u : v$ в интервале $(\beta_\nu, \beta_{\nu+1})$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ (убывает от $+\infty$ до $-\infty$), так что функция к ней обратная в интервале $(-\infty, +\infty)$ возрастает от β_ν до $\beta_{\nu+1}$ (убывает от $\beta_{\nu+1}$ до β_ν). Из этого и из неравенств (4) следует $\zeta(x) > \zeta(y)$, и дальше:

$$\lim_{t\to\alpha_\nu+} \zeta(t) = \beta_{\nu+1}, \quad \lim_{t\to\alpha_{\nu+1}-} \zeta(t) = \beta_\nu .$$

В обзоре мы видим, что если $\tau > 0$, то функция ζ возрастает во всем интервале $(-\infty, +\infty)$; если $\tau < 0$, то она убывает во всяком интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ от $\beta_{\nu+1}$ до β_ν и ее пределы справа и слева в концовых точках этого интервала принимают значения $\beta_{\nu+1}, \beta_\nu$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

2. *Непрерывность.*

Пусть дисперсия ζ прямая. Если $\tau > 0$, то функция ζ непрерывна во всем интервале $(-\infty, +\infty)$; если $\tau < 0$, то функция ζ непрерывна во всяком интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$, между тем как во всяком числе α_ν претерпевает разрыв непрерывности и удовлетворяет уравнениям:

$$\lim_{t\to\alpha_\nu-} \zeta(t) = \beta_{\nu-1}, \quad \lim_{t\to\alpha_\nu+} \zeta(t) = \beta_{\nu+1}; \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Пусть дисперсия ζ непрямая. Если $\tau < 0$, то функция ζ непрерывна во всем интервале $(-\infty, +\infty)$; если $\tau > 0$, функция ζ непрерывна во всяком интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$, между тем как во всяком числе α_ν имеет разрыв непрерывности и удовлетворяет уравнениям

$$\lim_{t\to\alpha_\nu-} \zeta(t) = \beta_{-\nu+1}, \quad \lim_{t\to\alpha_\nu+} \zeta(t) = \beta_{-\nu-1}; \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Доказательство следует из теорем **16**,1 и **17**,1.

3. *Производная.*

1. *Функция ζ имеет во всяком числе x, в котором она непрерывна, производную $\zeta'(x)$, которая определена формулой:*

$$\zeta'(x) = -\frac{U'(x)\, v[\zeta(x)] - V'(x)\, u[\zeta(x)]}{U(x)\, v'[\zeta(x)] - V(x)\, u'[\zeta(x)]}; \tag{5}$$

где U, V и u, v означает любую первую и вторую базу проективного соответствия $\mathfrak{p}$.

Доказательство: Пусть U, V и u, v — любая первая и вторая база проективного соответствия $\mathfrak{p}$, и пусть x — любое число, в котором функция ζ непрерывна.

Пусть F значит функцию двух независимых переменных ξ, η которая определена для всех чисел ξ, η формулой:

$$F(\xi, \eta) = U(\xi)\, v(\eta) - V(\xi)\, u(\eta) .$$

Согласно теореме **16**,2 числа $x, \zeta(x)$ удовлетворяют уравнению: $F(x, \zeta(x)) = 0$.

Согласно теореме **3**,2,1, существует одна и только одна функция $\eta(\xi)$, которая принимает в числе x значение $\zeta(x)$, непрерывна в некоторой окрестности числа x и в ней удовлетворяет уравнению: $F(\xi, \eta(\xi)) = 0$.

Функция $\zeta(\xi)$ приинмает в числе x значение $\zeta(x)$ (очевидно), непрерывна в некоторой окрестности числа x (согласно 2.) и в ней удовлетворяет уравнению: $F(\xi, \zeta(\xi)) = 0$ (согласно **16**,2).

Из этого мы находим, что в некоторой окрестности числа x: $\eta(\xi) = \zeta(\xi)$, так что, согласно дальнейшему утверждению тепремы **3**,2,1, функция ζ имеет в числе x производную $\zeta'(x)$, которая определена формулой (5).

2. *Во всяком числе x, в котором функция ζ непрерывна, тоже имеет место формула*

$$\zeta'(x) = \begin{cases} \tau \cdot \dfrac{u^2[\zeta(x)]}{U^2(x)} & \text{для} \quad U(x) \neq 0\,, \\ \dfrac{1}{\tau} \cdot \dfrac{U'^2(x)}{u'^2[\zeta(x)]} & \text{для} \quad U(x) = 0\,; \end{cases} \tag{6}$$

где U означает любой интеграл д. уравнения (а), *и u его образ в проективном соответствии* $\mathfrak{p}$.

Доказательство. Пусть U — любой интеграл д. уравнения (а), u его образ в проективном соответствии $\mathfrak{p}$. Пусть V — любой иной интеграл д. уравнения (а), харектеризующийся тем, что интегралы U, V независимы, и v — его образ в проективном соответствии $\mathfrak{p}$. Тогда U, V и u, v — первая и вторая база проективного соответствия $\mathfrak{p}$.

Пусть x — любое число, в котором функция ζ непрерывна. Тогда имеет место формула (5).

Чтобы вывести формулу (6), поступают следующим образом:

При $U(x) \neq 0$ тоже $u[\zeta(x)] \neq 0$. В формуле (5) умножим числителя и знаменателя на число $U(x) \,.\, u[\zeta(x)]$ и используем в числителе и знаменателе соотношение: $U(x)\, v[\zeta(x)] = V(x) \,.\, u[\zeta(x)]$.

При $U(x) = 0$ имеет место $u[\zeta(x)] = 0$, так что $U'(x)\, u'[\zeta(x)] \neq 0$. Формула (5) имеет простой вид:

$$\zeta'(x) = U'(x) \,.\, v[\zeta(x)] : V(x) \,.\, u'[\zeta(x)]\,;$$

умножим числителя и знаменателя на число $U'(x) \,.\, u'[\zeta(x)]$ и воспользуемся формулами:

$$W = -V(x)\, U'(x)\,, \quad w = -v[\zeta(x)] \,.\, u'[\zeta(x)]\,.$$

3. *Пусть ϱ и P означают первые амплитуду упорядоченной пары интегралов u, v и U, V* (**2**,1).

Из формулы (6) легко выводим, что *во всяком числе x, в котором функция ζ непрерывна, также имеет место формула*

$$\zeta'(x) = \tau \frac{\varrho^2[\zeta(x)]}{P^2(x)} . \tag{7}$$

4. *Функция ζ имеет во всяком числе x, в котором она непрерывна, непрерывную производную 3. порядка.*

Действительно, пусть x — любое число, в котором функция ζ непрерывна. Пусть U — любой интеграл д. уравнения (a), удовлетворяющий неравенству $U(x) \neq 0$, и u — его образ в проективном соответствии $\mathfrak{p}$. Согласно предыдущей теореме 2, функция ζ имеет во всяком числе ξ некоторой окрестности числа x первую производную, определенную формулой:

$$\zeta'(\xi) = \tau \,.\, u^2[\zeta(\xi)] : U^2(\xi) .$$

Мы видим, что функция в правой части имеет в числе x непрерывную производную 2. порядка.

5. *Дифференциальное уравнение дисперсий.*

Дисперсия ζ удовлетворяет во всяком числе x, в котором она непрерывна, д. уравнению 3. порядка:

$$\sqrt{|\zeta'|} \left(\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right)'' + \zeta'^2 \,.\, Q(\zeta) = Q(x) . \tag{b}$$

Доказательство. Пусть x — любое число, в котором функция ζ непрерывна. Возможным изменением первой базы проективного соответствия $\mathfrak{p}$ достигнем того, что $U(x) \neq 0$, так что в дальнейшем соображении мы предполагаем правильность этого неравенства, следовательно, правильность соответствующей формулы (6). Ради краткости обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}} = T . \tag{8}$$

После этого мы имеем в числе x и в его окрестности, согласно этой формуле,

$$T \,.\, u(\zeta) = \delta \,.\, U , \tag{9}$$

причем $\delta = \pm 1 : \sqrt{|\tau|}$.

Дифференцируя дважды уравнение (6), получим

$$T' \,.\, u(\zeta) + T \,.\, u'(\zeta) \,.\, \zeta' = \delta \,.\, U' ,$$

$$T'' \,.\, u(\zeta) + (2T' \,.\, \zeta' + T \,.\, \zeta'') \,.\, u'(\zeta) + T \,.\, \zeta'^2 \,.\, u''(\zeta) = \delta \,.\, U'' .$$

Из первого уравнения и формулы (9) следует:

$$u'(\zeta) \,.\, \zeta' = -\delta \,.\, \frac{T'}{T^2} \,.\, U + \delta \,.\, \frac{1}{T} \,.\, U' , \tag{10}$$

из второй и из формул (9) и (10) мы имеем:

$$\left[\frac{T''}{T} - 2\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - \frac{T'}{T} \cdot \frac{\zeta''}{\zeta'} + \zeta'^2 \,.\, Q(\zeta) - Q\right] . U + \left(2\frac{T'}{T} + \frac{\zeta''}{\zeta'}\right) . U' = 0 \,.$$

Из формулы (8) мы находим, что в числе x имеет место:

$$2\frac{T'}{T} + \frac{\zeta''}{\zeta'} = 0 \,.$$

Из этого и из предыдущей формулы следует, что в числе x имеет место уравнение:

$$\frac{T''}{T} + \zeta'^2 \,.\, Q(\zeta) = Q \,,$$

т. е. уравнение (b).

18. Дисперсии собственные и несобственные.

Оставим предположения и обозначения предыдущего абз. **17**.

1. *Определение и основные свойства.* Дисперсия ζ называется *собственной*, если она прямая и $\tau > 0$, или если она непрямая и $\tau < 0$. В остальных случаях она называетця *несобственной*.

Если дисперсия ζ собственная, то она непрерывна во всем интервале $(-\infty, +\infty)$ и возрастает или убывает, в соответствии с тем, если она прямая или непрямая.

Если дисперсия ζ несобственная, то она нерперывна во всяком интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ и в нем убывает или возрастает, в соответствии с тем, если она прямая или непрямая; во всяком числе α_ν она имеет разрыв непрерывности; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Всякая несобственная дисперсия сложена из частей собственных дисперсий. Об этом говорит следующая теорема:

Пусть ζ — несобственная дисперсия. Тогда ее часъ в любом интервале $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ является частью собственной дисперсии, которая определена числами x, $\zeta(x)$ и тем же самым проективным соотзетствием $\mathfrak{p}$; x означает любое число этого интервала, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Доказательство. Пусть Z — собственная дисперсия определенная числами x, $\zeta(x)$ и проективным соответствием $\mathfrak{p}$. Функции ζ, Z принимают в числе x то же значение $\zeta(x)$, во всяком числе $\xi \in (\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ непрерывны и их значения $(\eta \equiv)$ $\zeta(\xi)$, $Z(\xi)$ удовлетворяют уравнению:

$$(F(\xi, \eta) \equiv) \quad U(\xi)\, v(\eta) - V(\xi)\, u(\eta) = 0 \,.$$

Из этого следует равенство $\zeta(\xi) = Z(\xi)$, согласно теореме **3**,2,2.

19. Собственные дисперсии.

Предметом наших исследований будут только собственные дисперсии. Пусть ζ — собственная дисперсия, определенная любими числами α, β и любым проективным соответствием $\mathbf{p}$. Пусть τ характеристика проективного соответствия $\mathbf{p}$; припомним, что $\tau > 0$ или $\tau < 0$ в соответствии с тем, если ζ прямая или непрямая.

1. *Основные свойства.* Из предыдущих исследований легко следует, что дисперсия ζ:

во всем интервале $(-\infty, +\infty)$ непрерывна и возрастает или убывает в соответствии с тем, если она прямая или непрямая (**18**,1);

имеет во всем интервале $(-\infty, +\infty)$ производную ζ' (**17**,3) положительную или отрицательную в соответствии с тем, если она прямая или непрямая, так что имеет место уравнение: $\operatorname{sgn} \zeta' = \operatorname{sgn} \tau$;

даже во всем интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет непрерывную производную 3. порядка и удовлетворяет в нем уравнению (b) (**17**,4,5).

Дальше справедливы следующие теоремы:

1. *Пусть Y — любой интеграл д. уравнения* (a) *и $y = \mathbf{p}Y$ его образ в проективном соответствии $\mathbf{p}$. Тогда во всем интервале* $(-\infty, +\infty)$ *имеют место уравнения:*

$$\operatorname{sgn} y(\zeta) = \operatorname{sgn} Y \quad \textit{или} \quad \operatorname{sgn} y(\zeta) = -\operatorname{sgn} Y\,, \tag{1}$$

а то всегда те же, при всяком выборе интеграла Y.

Доказательство. Пусть η_0 — любой корень интеграла Y и η_ν, ν-тое основное число относительно η_0, так что: $Y(\eta_\nu) = 0$; дальше пусть $\zeta_0 = \zeta(\eta_0)$ и ζ_ν, ν-тое основное число относительно ζ_0, так что: $y(\zeta_\nu) = 0$. Тогда имеет место формула $\zeta_\nu = \zeta(\eta_\nu)$ или $\zeta_\nu = \zeta(\eta_{-\nu})$, в соответствии с тем, если $\tau > 0$ или $\tau < 0$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Пусть $\Delta\,(\delta)$ — знак интеграла Y (y) в интервале (η_0, η_1) $((\zeta_0, \zeta_1))$.

Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ — любое число, так что при подходящем ν есть $x \in [\eta_\nu, \eta_{\nu+1})$.

Если $x = \eta_\nu$, то $\zeta(x) = \zeta(\eta_\nu) = \zeta_{\pm\nu}$ и имеем:

$$\operatorname{sgn} y[\zeta(x)] = \operatorname{sgn} y(\zeta_{\pm\nu}) = 0 = \operatorname{sgn} Y(\eta_\nu) = \operatorname{sgn} Y(x)\,;$$

очевидно, что верно уравнение $\operatorname{sgn} y[\zeta(x)] = \operatorname{sgn} Y(x)$ и, конечно, также: $\operatorname{sgn} y[\zeta(x)] = -\operatorname{sgn} Y(x)$.

Если $x \in (\eta_\nu, \eta_{\nu+1})$, то $\operatorname{sgn} Y(x) = (-1)^\nu \Delta$ и дальше: $\zeta(x) \in (\zeta_\nu, \zeta_{\nu+1})$ или $\zeta(x) \in (\zeta_{-\nu-1}, \zeta_{-\nu})$, в соответствии с тем, если дисперсия ζ прямая или непрямая. В первом случае: $\operatorname{sgn} y[\zeta(x)] = (-1)^\nu \delta$ и $\operatorname{sgn} y[\zeta(x)] = \delta \,.\, \Delta \,.\, \operatorname{sgn} Y(x)$, во втором: $\operatorname{sgn} y[\zeta(x)] = -(-1)^\nu \delta$ и $\operatorname{sgn} y[\zeta(x)] = -\delta \,.\, \Delta \,.\, \operatorname{sgn} Y(x)$.

Остается доказать, что имеет место первое или второе уравнение независимо от выбора интеграла Y. Пусть имеет место, для примера, уравнение: $\operatorname{sgn} y(\zeta) = \operatorname{sgn} Y$. Пусть Z — любой иной интеграл д. уравнения (a) и $z = \mathfrak{p}Z$ его образ в проективном соответствии $\mathfrak{p}$. Тогда имеет место уравнение: $Y \,.\, z(\zeta) = Z \,.\, y(\zeta)$ и из него следует: $\operatorname{sgn} z(\zeta) = \operatorname{sgn} Z$. Теорема доказана.

2. *Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ любое число. Дисперсия ζ тоже определена числами x, $\zeta(x)$ и проективным соответствием $\mathfrak{p}$.*

Доказательство следует из теоремы **3**,2,2.

2. *Дальнейшие свойства.* Замечательна следующая тепрема:

1. *Пусть y — любой интеграл д. уравнения* (a) *и $Y = \mathfrak{p}^{-1}y$ его прообраз в проективном соответствии $\mathfrak{p}$. Тогда функция $y(\zeta) : \sqrt{|\zeta'|}$ есть опять интеграл д. уравнения* (a) *и во всем интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет место формула:*

$$\frac{y(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\, Y\,; \tag{2}$$

притом знак в правой части всегда тот же самый и не зависит от выбора интеграла y.

Доказательство. Очевидно, что во всем интервале $(-\infty, +\infty)$ верно уравнение:

$$\frac{|y[\zeta(x)]|}{\sqrt{|\zeta'(x)|}} = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\, |Y(x)|\,.$$

Действительно, если число x не является корнем интеграла Y, то, согласно формуле **17** (6), это уравнение верно; если x есть корень интеграла Y, то его правильность следует из определения дисперсии. Из этого уравнения и из теоремы 1,1 следует уравнение (2), притом знак в правой части не зависит от выбора интеграла y.

Интеграл $y(\zeta) : \sqrt{|\zeta'|}$ мы называем *образом интеграла y в преобразовании ζ.*

2. *При подходящем выборе проективного соответствия $\mathfrak{p}$ верна для всякого интеграла y д. уравнения* (a) *и его прообраза $Y = \mathfrak{p}^{-1}y$ во всем интервале $(-\infty, +\infty)$ формула:*

$$\frac{y(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = Y\,; \tag{3}$$

притом характеристика проективного соответствия $\mathfrak{p}$ есть $\operatorname{sgn} \zeta'$.

Действительно, вместо первоначального проективного соответствия $\mathfrak{p}$ для которого имеет место формула (2), достаточно выбрать зависимое от него проективное соответствие $\pm\sqrt{|\tau|}\,\mathfrak{p}$, характеристика которого $\operatorname{sgn}\zeta'$.

3. *Пусть u, v — независимые интегралы д. уравнения* (a) *и U, V — их образы в преобразовании ζ. Интегралы U, V также независимы.*

Действительно, согласно теореме 2, интегралы U, V — это образы независимых интегралов u, v при подходящем поерктивном соответствии; итак, они независимы.

4. *Пусть ζ — центральная дисперсия 1. рода с четным или нечетным индексом, то для всяких двух независимых интегралов u, v д. уравнения* (a) *в интервале $(-\infty, +\infty)$ имеют место уравнения:*

$$\frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = u\,, \quad \frac{v(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = v\,,$$

или (4)

$$\frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = -v\,, \quad \frac{v(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = -v\,.$$

Наоборот, если для некоторых независимых интегралов u, v д. уравнения (a) *имеют место формулы* (4), *тогда ζ — центральная дисперсия 1. рода, в первом случае с четным, а во втором с нечетным индеком.*

Доказательство. Пусть $\zeta (= \varphi_\nu)$ — центральная дисперсия 1. рода. ζ собственная прямая дисперсия, определенная числами α, $\varphi_\nu(\alpha)$ с тождественным проективным соответствием $\mathbf{e}$ (**16**,4) с характеристикой $\tau = 1$; α означает любое, а ν подходящее целое число. Согласно теореме 2,1, для всякого интеграла y д. уравнения (a) имеет место формула:

$$\frac{y(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = \pm\, y\,, \tag{5}$$

причем знак в правой части всегда тот же самый и не зависит от выбора интеграла y. Чтобы мы определили его, возьмем любой интеграл y и любое число x, для которого $y(x) \neq 0$. Тогда между числами x, $\varphi_\nu(x)$ лежит $|\nu|$ и только $|\nu|$ корней интеграла y; когда y проходит через корень, его значения меняют знак. Из этого следует: $\operatorname{sgn} y(\zeta) = (-1)^\nu \operatorname{sgn} y$, так что в формуле (5) стоит знак $+$ или $-$, соответственно с тем, если ν четное или нечетное. Итак, доказана первая часть теоремы.

Наоборот, предположим, что выполнены предположения второй части. В обоих случаях во всяком числе $x \in (-\infty, +\infty)$ имеет место уравнение: $u(x)\,v(\zeta) - v(x)\,u(\zeta) = 0$. Из этого мы находим, согласно теоремам **6**,4 и **3**,2,2, что ζ — центральная дисперсия 1. рода, так что $\zeta = \varphi_\nu$, причем ν — подходящее целое число. Чтобы мы убедились об его паритете, возьмем любое число x, для которого $u(x) \neq 0$ и рассуждаем аналогично, как и в доказательстве первой части. Мы видим, что в первом случае ν четное, а во втором нечетное. Таким образом, доказана и вторая часть теоремы.

20. Группа собственных дисперсий.

Рассуждения в этом абзаце направлены на то, чтобы показать что все собственные дисперсии образуют непрерывную группу с термя параметрами и чтобы объяснить ее строение.

1. *Пусть ζ — (собственная) прямая дисперсия, определенная произвольными двумя совпадающими числами α, α и тождественным проективным соответствием $\mathfrak{e}$. Тогда в каждом числе $x \in (-\infty, +\infty)$ будет $\zeta(x) = x$.*

Доказательство. Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ — произвольное число.

При $x = \alpha$ мы имеем $\zeta(x) = \alpha = x$, так что $\zeta(x) = x$. Итак, пусть $x \neq \alpha$. Пусть Y означает произвольный интеграл д. уравнения (a) с корнем x; x лежит в определенном ν-том правом основном интервале относительно α. Тогда $\zeta(x)$ является корнем интеграла $\mathfrak{e}Y = Y$, лежащим в ν-том правом основном интервале относительно α. Отсюда вытекает: $\zeta(x) = x$.

2. *Пусть ζ — собственная дисперсия, определенная произвольными числами α, β и произвольным проективным соответствием $\mathfrak{p}$. Тогда обратная функция ζ^{-1} будет собственной дисперсией, определенной числами β, α и обратным проективным соответствием $\mathfrak{p}^{-1}$ и она будет прямой или непрямой в зависимости от того, будет ли дисперсия ζ прямой или непрямой.*

Доказательство. Пусть τ — характеристика проективного соответствия $\mathfrak{p}$, так что $\tau > 0$ или $\tau < 0$, смотря потому будет ли дисперсия ζ прямой или непрямой. Проективное соответствие $\mathfrak{p}^{-1}$ имеет по абзацу **13** характеристику $1:\tau$ и по **14**,3 оно регулярно относительно чисел β, α. Пусть Z — собственная дисперсия, определенная числами β, α и проективным соответствием $\mathfrak{p}^{-1}$; следовательно, дисперсия Z будет прямой или непрямой в зависимости от того, будет ли дисперсия ζ прямой или непрямой.

Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ — произвольное число.

При $x = \beta$ есть $\zeta^{-1}(x) = \zeta^{-1}(\beta) = \alpha = Z(\beta) = Z(x)$, так что мы имеем: $\zeta^{-1}(x) = Z(x)$. Итак, пусть $x \neq \beta$. Пусть Y — произвольный интеграл д. уравнения (a) с корнем x; x лежит в определенном ν-том правом и в μ-том левом основном интервале относительно β. Тогда $\zeta^{-1}(x)$ является корнем интеграла $\mathfrak{p}^{-1}Y$, лежащим в ν-том или в μ-том правом основном интервале относительно α в зависимости от того, будет ли дисперсия ζ прямой или непрямой. Отсюда мы заключаем, имея в виду определенные функции Z, что равенство $\zeta^{-1}(x) = Z(x)$ справедливо.

3. *Пусть ζ_1 (ζ_2) — собственная дисперсия, определенная числамы α_1, β_1 (β_1, α_2) и произвольным проективным соответствием $\mathfrak{p}_1$ ($\mathfrak{p}_2$). Тогда сложная функция $\zeta_2[\zeta_1]$ будет собственной дисперсией, определенной числами α_1, α_2 и проективным соответствием $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1$, и она будет прямой*

(*непрямой*), *если дисперсии* ζ_1, ζ_2 *обе прямые или непрямые* (*из дисперсий* ζ_1, ζ_2 *одна прямая, а вторая непрямая*).

Доказательство. Пусть τ_1 (τ_2) — характеристика проективного соответствия $\mathfrak{p}_1$ ($\mathfrak{p}_2$), так что $\tau_1 > 0$ или $\tau_1 < 0$ ($\tau_2 > 0$ или $\tau_2 < 0$) в завиисмости от того, будет ли дисперсия ζ_1 (ζ_2) прямой иил непрямой. Проективное соответствие $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1$ имеет по абз. **13** характеристику $\tau_2\tau_1$ и по **14**,4 будет регулярним относительно чисел α_1, α_2. Пусть ζ — собственная дисперсия определенная числами α_1, α_2 и проективным соответствием $\mathfrak{p}$; итак, дисперсия ζ будет прямой или непрямой, в зависимости от того, будет ли $\tau_2\tau_1 > 0$ или $\tau_2\tau_1 < 0$.

Пусть $x \in (-\infty, +\infty)$ — произвольное число.

При $x = \alpha_1$ есть $\zeta_1(x) = \beta_1$, $\zeta_2[\zeta_1(x)] = \zeta_2(\beta_1) = \alpha_2 = \zeta(\alpha_1) = \zeta(x)$, так что мы имеем: $\zeta_2[\zeta_1(x)] = \zeta(x)$.

Итак, пусть $x \neq \alpha_1$. Пусть Y — произвольный интеграл д. уравнения (a) с корнем x; x лежит в определенном ν-том правом основном интервале относительно α_1. $\zeta_1(x)$ является корнем интеграла $\mathfrak{p}_1 Y$, лежащим в ν-том правом или в $-\nu$-том левом основном интервале относительно β_1, в зависимости от того, будет ли $\tau_1 > 0$ или $\tau_1 < 0$.

Если $\tau_1 > 0$, то $\zeta_2[\zeta_1(x)]$ будет корнем интеграла $\mathfrak{p}_2[\mathfrak{p}_1 Y] = \mathfrak{p}Y$, лежащим в ν-том правом или в $-\nu$-том левом основном интервале относительно α_2, в зависимости от того, будет ли $\tau_2 > 0$ или $\tau_2 < 0$.

Если $\tau_1 < 0$, то $\zeta_2[\zeta_1(x)]$ будет корнем интеграла $\mathfrak{p}_2[\mathfrak{p}_1 Y] = \mathfrak{p}Y$, лежащим в $-\nu$-том левом или в ν-том правом основном интервале относительно α_2, в зависимости от того, будет ли $\tau_2 > 0$ или $\tau_2 < 0$.

Мы видим, что число $\zeta_2[\zeta_1(x)]$ есть корень интеграла $\mathfrak{p}Y$, лежащий в случае $\tau_2\tau_1 > 0$ в ν-том правом, а в случае $\tau_2\tau_1 < 0$ в $-\nu$-том левом основном интервале относительно α_2. Отсюда мы судим, имея в виду определенные функции ζ, о справедливости равенства $\zeta_2[\zeta_1(x)] = \zeta(x)$.

4. *Пусть* α; ζ_0, $\zeta_0' \neq 0$, ζ_0'' — *произвольные числа. Пусть* u, v — *упорядоченная пара произвольных независимых интегралов д. уравнения* (a). *Пусть далее* U, V — *упорядоченная пара интегралов того же д. уравнения* (a), *которые определены начальными условиями Коши*:

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= \frac{u(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}}; \quad U'(\alpha) = \operatorname{sgn} \zeta_0' \,.\, u'(\zeta_0)\sqrt{|\zeta_0'|} - \frac{1}{2}\frac{u(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}}\cdot\frac{\zeta_0''}{\zeta_0'}, \\ V(\alpha) &= \frac{v(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}}; \quad V'(\alpha) = \operatorname{sgn} \zeta_0' \,.\, v'(\zeta_0)\sqrt{|\zeta_0'|} - \frac{1}{2}\frac{v(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}}\cdot\frac{\zeta_0''}{\zeta_0'}, \end{aligned} \tag{1}$$

так что интегралы U, V *независимы, и проективное соответствие* $\mathfrak{p} = [U \to u,\ V \to v]$ *имеет характеристику* $\operatorname{sgn} \zeta_0'$.

Тогда собственная дисперсия ζ, определенная числами α, ζ_0 и проективным соответствием $\mathfrak{p}$, *характеризуется тем, что в числе α имеет значение ζ_0, и ее первая и вторая производные имеют значения ζ_0', ζ_0''.*

Доказательство. Прежде всего из определения функции ζ следует равенство:

$$\zeta(\alpha) = \zeta_0 .$$

Отсюда и из уравнений (1) мы имеем: $\operatorname{sgn} U(\alpha) = \operatorname{sgn} u[\zeta(\alpha)]$, $\operatorname{sgn} V(\alpha) = \operatorname{sgn} v[\zeta(\alpha)]$ и видим, принимая во внимание теорему **19**,2,2, что в целом интервале $(-\infty, +\infty)$ имеют место формулы:

$$U = \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}, \quad V = \frac{v(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} .$$

Из них следует сравнением с первым и третьим уравнением (1) соотношение: $|\zeta'(\alpha)| = |\zeta_0'|$, одновременно имеет место уравнение $\operatorname{sgn} \zeta'(\alpha) = \operatorname{sgn} \zeta_0'$, так как функция ζ — собственная дисперсия. Следовательно, получаем уравнение:

$$\zeta'(\alpha) = \zeta_0' .$$

Наконец из приведенных выше формул мы видим, что в целом интервале $(-\infty, +\infty)$ имеют место формулы:

$$U' = \operatorname{sgn} \zeta' \,.\, u'(\zeta) \sqrt{|\zeta'|} - \frac{1}{2} \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} \cdot \frac{\zeta''}{\zeta'} ,$$

$$V' = \operatorname{sgn} \zeta' \,.\, v'(\zeta) \sqrt{|\zeta'|} - \frac{1}{2} \frac{v(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} \cdot \frac{\zeta''}{\zeta'} ,$$

и из них сравнением со вторым и третьим уравнением (1) выходит:

$$\zeta''(\alpha) = \zeta_0'' .$$

Этим доказательство закончено.

Заметим, что значение третьей производной функции ζ в числе α связано со значениями α; ζ_0, ζ_0', ζ_0'' формулой (b).

Мы видим, что *множество всех собственных дисперсий зависит от трех произвольных параметров, а то от их значений и от значений их первых и вторых призводных в произвольно заданном числе.*

5. *Все собственные дисперсии образуют непрерывную группу с тремя параметрами. Все собственные прямые дисперсии образуют в ней инвариантную подгруппу, а собственные непрямые дисперсии — класс факторгруппы, определенной этой инвариантной подгруппой.*

Доказательство. Пусть ζ_1, ζ_2 — произвольные собственные дисперсии. По теореме **19**,1,2 дисперсия ζ_1 определена числами α, $\zeta_1(\alpha)$ и некоторым проективным соответствием, а дисперсия ζ_2 — числами $\zeta_1(\alpha)$, $\zeta_2[\zeta_1(\alpha)]$ и некоторым проективным соответствием; при этом α означает произвольное число. По теореме 3. сложная функция $\zeta = \zeta_2\zeta_1$ является собственной дисперсией, а именно: прямой, если дисперсии ζ_1, ζ_2 обе прямые или непрямые, и непрямой, когда одна из них прямая, а другая непрямая. Этим установлено, что множество всех собственных дисперсий вместе с умножением, которое дано складыванием функций, будет ассоциативным группоидом $\mathfrak{G}$, и множество всех собственных прямых дисперсий вемсте с этим умножением, будет его подгруппоидом $\mathfrak{P}$. По теореме 1. имеют группоиды $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{P}$ общую единицу, которой является функция x. По теореме 2. существует к каждой собственной дисперсии дисперсия обратная, а именно: к каждой собственной прямой дисперсии существует обратная собственная прямая дисперсия. Этим выяснено, что группоид $\mathfrak{G}$ — непрерывная группа, а группоид $\mathfrak{P}$ будет его подгруппой. По теореме 4. дисперсии группы $\mathfrak{G}$ зависют от трех параметров. Из теорем 2. и 3. заключаем, что для каждой дисперсии $\zeta \in \mathfrak{G}$ имеет место равенство $\zeta\mathfrak{P}\zeta^{-1} = \mathfrak{P}$, а ето значит, что подгруппа $\mathfrak{P}$ инвариантна в группе $\mathfrak{G}$. Далее мы видим, что множество всех собственных непрерывных дисперсий есть класс $\zeta\mathfrak{P}$, определенный инвариантной подгруппой $\mathfrak{P}$ и произвольной непрямой дисперсией $\zeta \in \mathfrak{G}$. Этим доказательство завершено.

21. Репрезентация группы собственных дисперсий.

1. Группу собственных дисперсий мы обозначаем $\mathfrak{G}$, собственных прямых дисперсий $\mathfrak{P}$, центральных дисперсий 1. рода $\mathfrak{C}$, центральных дисперсий 1. рода с четными коэфициентами $\mathfrak{S}$. Итак, имеют место соотношения:

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{P} \supset \mathfrak{C} \supset \mathfrak{S}.$$

Пусть u, v — упорядоченная пара произвольных независимых интегралов д. уравнения (a) и $w(\neq 0)$ — его определитель Вронского.

Пусть $\zeta \in \mathfrak{G}$ — произвольная дисперсия и U, V функции, определенные формулами:

$$U = \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}, \quad V = \frac{v(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}.$$

Из **19**,2,2 мы знаем, что функции U, V — опять независимые интегралы д. уравнения (a) и что при удобном выборе носителя $\mathfrak{p}$ дисперсии ζ имеют место соотношения:

$$U = \mathfrak{p}^{-1}u, \quad V = \mathfrak{p}^{-1}v;$$

при этом проективное соответствие имеет характеристику $\operatorname{sgn} \zeta'$. Определитель Вронского упорядоченной пары интегралов U, V мы обозначаем W.

Мы видим, что существует квадратная матрица 2. порядка с постоянными членами c_{ik} такая, что имеют место тождества:

$$\frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = c_{11}u + c_{12}v\,, \tag{1}$$
$$\frac{v(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = c_{21}u + c_{22}v\,.$$

Этими формулами матрица C однозначно определена; пусть $|C|$ — ее определитель.

Из формул (1) следует уравнение:

$$W = |C|\,.\,w$$

и из него следует ввиду соотношений: $W = \operatorname{sgn}\zeta'.w$, $w \neq 0$,

$$|C| = \operatorname{sgn}\zeta'\,.$$

Мы видим, *что матрица C является унимодулярной, и ее определитель равен* $\operatorname{sgn}\zeta'$.

С целью получения более коротких формул мы будем в дальнейшем записывать упорядоченную пару интегралов, например u, v, векторным способом, одной жирной буквой, напр. $\boldsymbol{u}$. Формулы (1) мы можем потом заменить единственным уравнением:

$$\frac{\boldsymbol{u}(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = C\boldsymbol{u}\,. \tag{2}$$

2. Если мы присоединим к каждой дисперсии $\zeta \in \mathfrak{G}$ матрицу C, определенную уравнением (2), мы получим отображение $\boldsymbol{d}$ группы $\mathfrak{G}$ на группу $\mathfrak{L}$ унимодулярных квадратных матриц 2. порядка. Что речь действительно идет об отображении *на* группу $\mathfrak{L}$, видно из того, что произвольная унимодулярная кваратная матрица 2. порядка $C = \|c_{jk}\|$является в отображении $\boldsymbol{d}$ образом дисперсии ζ, которая определена проективным соответствием $\boldsymbol{p} = [u \to c_{11}u + c_{12}v, v \to c_{21}u + c_{22}v]$ и числами α, β удовлетворяющими, например, формулам: $v(\alpha) = 0$, $c_{21}u(\beta) + c_{22}v(\beta) = 0$.

Легко убедимся в том, что *отображение $\boldsymbol{d}$ будет деформацией группы $\mathfrak{G}$ на группу $\mathfrak{L}$.*

Действительно, пусть $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{G}$ — произвольные дисперсии и C_1, $C_2 \in \mathfrak{L}$ их образы в $\boldsymbol{d}$. Тогда из уравнений

$$\frac{\boldsymbol{u}(\zeta_1)}{\sqrt{|\zeta_1'|}} = C_1\boldsymbol{u}\,, \quad \frac{\boldsymbol{u}(\zeta_2)}{\sqrt{|\zeta_2'|}} = C_2\boldsymbol{u}\,,$$

иммем:

$$\frac{\boldsymbol{u}[\zeta_2(\zeta_1)]}{\sqrt{|\zeta_2'(\zeta_1)|}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\zeta_1'|}} = C_2\,\frac{\boldsymbol{u}(\zeta_1)}{\sqrt{|\zeta_1'|}} = C_2C_1\boldsymbol{u}\,,$$

или

$$\frac{\boldsymbol{u}[\zeta_2(\zeta_1)]}{\sqrt{|\zeta_2'(\zeta_1)|}} = C_2 C_1 \boldsymbol{u} \,,$$

и отсюда выходит:

$$\boldsymbol{d}[\zeta_2(\zeta_1)] = C_2 C_1 \,.$$

3. Единицей группы $\mathfrak{L}$ будет единичная матрица $E = \|\delta_{ik}\|$, $\delta_{11} = \delta_{22} = 1$, $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$.

Мы легко покажем, что имеет место следующая теорема:

Прообразами единицы E группы $\mathfrak{L}$ в деформации $\boldsymbol{d}$ являются все центральные дисперсии 1. рода с четными индексами и только эти дисперсии; прообразами отрицательной единицы $-E$ являются все центральные дисперсии 1. рода с нечетными индексами и только эти дисперсии.

Действительно если дисперсия ζ — ц. дисперсия 1. рода, то по **19**,2,4 имеет место формула:

$$\frac{\boldsymbol{u}(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = \boldsymbol{u} \quad \text{или} \quad \frac{\boldsymbol{u}(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = -\boldsymbol{u}, \tag{3}$$

в зависимости от того, имеет ли дисперсия ζ четный или нечетный индекс; отсюда выходит $\boldsymbol{d}\zeta = E$ или $\boldsymbol{d}\zeta = -E$. Наоборот, если дисперсия ζ в деформации $\boldsymbol{d}$ будет прообразом единицы E или отрицательной единицы $-E$, то имеют место формулы (3), и из них по **19**,2,4 мы находим, что ζ — ц. дисперсия 1. рода с четным или нечетным индексом.

Следствием[11]) только что доказанной теоремы является то, что *группа $\mathfrak{S}$ центральных дисперсий 1. рода с четными индексами является инвариантной в группе $\mathfrak{G}$ и факторгруппа $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ изоморфна с группой $\mathfrak{L}$. Все дисперсии того же класса факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ отобразятся в деформации α на ту же матрицу группы $\mathfrak{L}$; изоморфизм факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ на группу $\mathfrak{L}$ получим, если каждому классу факторгруппы поставим в соответствие образ ее элементов в деформации $\boldsymbol{d}$.*

4. В абз. **16**,3 мы видели, что каждая ц. дисперсия 1. рода заменима каждой прямой дисперсией, так что группа $\mathfrak{L}$ является частию центра группы $\mathfrak{P}$.

Мы покажем, что группа $\mathfrak{L}$ есть центр группы $\mathfrak{P}$, или другими словами: *центральные дисперсии 1. рода образуют центр группы всех собственных прямых дисперсий.*

Очевидно, достаточно доказать, что каждая собственная прямая дисперсия, которая заменима каждой собственной прямой дисперсией, является ц. дисперсией 1. рода.

---

[11]) См. напр., *O. Borůvka:* Úvod do theorie grup (Прага, 1952), стр. 133.

Итак, пусть ζ_0 — собственная прямая дисперсия, заменимая каждой собственной прямой дисперсией, и ζ — произвольная собственная прямая дисперсия. Пусть далее $C_0 = \|c_{ik}^0\|$, $C = \|c_{ik}\|$ означают образы дисперсий ζ_0, ζ в деформации $\boldsymbol{d}$, так что имеют место формулы: $C_0 = \boldsymbol{d}\zeta_0$, $C = \boldsymbol{d}\zeta$, $|C_0| = |C| = 1$.

Из соотношения $\zeta_0\zeta = \zeta\zeta_0$ следует равенство:

$$C_0C = CC_0\,. \tag{4}$$

Отсюда и из этого, что каждая матрица группы $\mathfrak{L}$ имеет в деформации $\boldsymbol{d}$ прообраз, мы видим, что матрица C_0 заменима каждой матрицей группы $\mathfrak{L}$. Если возьмем в равенстве (4) именно матрицы C с элементами, данными формулами:

$$c_{12} = c_{21} = 0\,, \quad c_{11}c_{22} = 1, c_{11} \neq c_{22}$$

и

$$c_{11} = c_{22} = 0\,, \quad c_{12}c_{21} = -1$$

получим:

$$c_{12}^0 = c_{21}^0 = 0\,; \quad c_{11}^0 = c_{22}^0\,; \quad c_{11}^0c_{22}^0 = 1\,.$$

Таким образом выходит $C_0 = E$ или $C_0 = -E$, и мы видим, что дисперсия ζ_0 — ц. дисперсия 1. рода.

Этим доказательство закончено.

IV. Дифференциальное уравнение дисперсий 1. рода:

$$\sqrt{|\zeta'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right)'' + \zeta'^2\,.\,Q(\zeta) = Q(x)\,. \tag{b}$$

В абз. **19**,1 мы видели, что каждая собственная дисперсия (1. рода) является интегралом д. уравнения (b). Вопрос, которым мы теперь будем заниматься, таков: являются собственные дисперсии и ее чсати единственными решениями этого д. уравнения? Мы покажем, что ответ на этот вопрос будет положительным и, кроме того, представим интегралы д. уравнения (b) несложной формулой.

22. Преобразования д. уравнения (b).

Дифференциальное уравнение (b) характеризуется тем, что ему, наряду с каждой собственной дисперсией, удовлетворяет обратная функция ζ^{-1}, которая также является собственной дисперсией (**20**,2). Вследствие этого можно ожидать, что д. уравнение (b) можно представить в виде, который будет симметричным относительно обеих переменных x, ζ.

Пусть $\zeta(x)$ — произвольная собственная дисперсия, а $x(\zeta)$ — функция к ней обратная. Производные функции ζ мы будем и в дальнейшем означать штрихами, производные функции x (по ζ) пунктами.

Мы покажем, что *взаимно обратные собственные дисперсии* ζ, x *удовлетворяют в каждых двух друг другу отвечающих числах* $\zeta = \zeta(x)$, $x = x(\zeta)$ *д. уравнению 3. порядка:*

$$Q(\zeta) \,.\, \zeta'(x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\zeta'(x)}\right)'' = Q(x) \,.\, \dot{x}(\zeta) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\dot{x}(\zeta)}\right)^{\cdot\cdot} . \tag{1}$$

Доказательство. Функция ζ удовлетворяет уравнению (b) которое можно написать в виде:

$$\operatorname{sgn} \zeta' \,.\, \frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' + Q(\zeta) \,.\, \zeta' = Q(x) \,.\, \frac{1}{\zeta'} . \tag{2}$$

Заметим, что первый член принимает значение:

$$\operatorname{sgn} \zeta' \, \frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' = -\frac{1}{2}\frac{\zeta'''}{\zeta'^2} + \frac{3}{4}\frac{\zeta''^2}{\zeta'^3} . \tag{3}$$

Далее имеют место соотношения:

$$\left(\frac{1}{\zeta'}\right)'' = -\frac{\zeta'''}{\zeta'^2} + 2\frac{\zeta''^2}{\zeta'^3} , \tag{4}$$

$$\left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot\cdot} = -\frac{\dddot{x}}{\dot{x}^2} + 2\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3} .$$

Из уравнения (3) и из первой формулы (4) вытекает:

$$\operatorname{sgn} \zeta' \,.\, \frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)'' - \frac{1}{4}\frac{\zeta''^2}{\zeta'^3} . \tag{5}$$

Рассмотрим теперь значения производных функций ζ, x в двух произвольных числах ξ, η, из которых η есть значение функции ζ в числе ξ, а ξ — значение функции x в числе η.

Повторным дифференцированием получим следующие формулы:

$$\frac{1}{\zeta'} = \dot{x} ,$$

$$-\frac{\zeta''}{\zeta'^2} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} , \tag{6}$$

$$-\frac{\zeta'''}{\zeta'^2} + 2\frac{\zeta''^2}{\zeta'^3} = \frac{\dddot{x}}{\dot{x}^2} - \frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3} .$$

Из первых двух выходит:

$$\frac{\zeta''^2}{\zeta'^3} = \frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3} , \tag{7}$$

и потом из этого уравнения, из третьего уравнения (6) и из второго (4) следует:

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'^2} = \left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot\cdot} + \frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3}. \tag{8}$$

По (3), (7), (8) имеем:

$$\operatorname{sgn} \zeta' \cdot \frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}} \left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot\cdot} + \frac{1}{4}\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3}$$

и отсюда и из формул (5) и (7) выходит:

$$\operatorname{sgn} \zeta' \cdot \frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}} \left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)'' - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot\cdot}.$$

Сравнением с уравнением (2) проходим к результату:

$$Q(\zeta) \cdot \zeta'(x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\zeta'(x)}\right)'' = Q(x) \cdot \dot{x}(\zeta) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\dot{x}(\zeta)}\right)^{\cdot\cdot}.$$

23. Теорема о существовании интегралов д. уравнения (b).

Лемма. *Пусть* ζ — *произвольное решение д. уравнения* (b), *определенное в каком-нибудь интервале* $\mathbf{j}$, *и пусть* u — *произвольный интеграл д. уравнения* (a). *Пусть* $z_0 \in \mathbf{j}$ *означает произвольное число, и* ζ_0, ζ_0' $(\neq 0)$, ζ_0'' — *значение функции* ζ *и ее первой и второй производной в числе* z_0.

Тогда функция

$$U(x) = \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} \tag{1}$$

является в интервале $\mathbf{j}$ *интегралом д. уравнения* (a), *а именно тем, который дан начальными условиями Коши:*

$$U(z_0) = \frac{u(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}}; \quad U'(z_0) = \operatorname{sgn} \zeta_0' \cdot u'(\zeta_0)\sqrt{|\zeta_0'|} - \frac{1}{2}\cdot\frac{u(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}}\cdot\frac{\zeta_0''}{\zeta_0'}. \tag{2}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция ζ' не равна нулю в интервале $\mathbf{j}$ и имеет в нем постоянный знак.

Функция

$$U(x) = \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}$$

определена в интервале $\mathbf{j}$ и в каждом числе $x \in \mathbf{j}$ имеет производную первого и второго порядка:

$$U'(x) = \frac{u'(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}\zeta' + u(\zeta)\left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]',$$

$$U''(x) = \frac{u''(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}\cdot\zeta'^2 + \frac{u(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}}\cdot\sqrt{|\zeta'|}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]''.$$

Потому что функция u удовлетворяет в числе $\zeta(x)$ д. уравнению (a) а функция ζ в числе x д. уравнению (b), имеем:

$$u''(\zeta) = Q(\zeta)\, u(\zeta)\ ,$$
$$\sqrt{|\zeta'|} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' = -\,\zeta'^2 \,.\, Q(\zeta) + Q(x)\ .$$

Из этих формул следует:

$$U''(x) = Q(x)\,.\,U(x)\ ,$$

а это и доказывает, что функция U будет в интервале j интегралом д. уравнения (a).

Легко видеть, что функции U, U' имеют в числе z_0 значения, данные формулами (2), и этим лемма доказана.

Теорема. *Пусть* z_0; ζ_0, $\zeta_0' \neq 0$, ζ_0'' — *произвольбые числа. Существует один и только один интеграл* ζ *д. уравнения* (b), *опрдееленный в интервале* $(-\infty, +\infty)$, *который в числе* z_0 *принимает значение* ζ_0, *а его первая (вторая) производная — значение* ζ_0' (ζ_0''). *Каждое решение д. уравнения* (b), *удовлетворяющее тем же начальным условиям, является частью интеграла* ζ.

Пусть u, v — *произвольные независимые интегралы д. уравнения* (a), *и* U, V — (*независимые*) *интегралы того же д. уравнения* (a), *определенные начальным условиями Коши:*

$$\begin{aligned} U(z_0) &= \frac{u(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}}, \quad U'(z_0) = \operatorname{sgn} \zeta_0' \,.\, u'(\zeta_0) \sqrt{|\zeta_0'|} - \frac{1}{2}\frac{u(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}} \cdot \frac{\zeta_0''}{\zeta_0'}, \\ V(z_0) &= \frac{v(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}}, \quad V'(z_0) = \operatorname{sgn} \zeta_0' \,.\, v'(\zeta_0) \sqrt{|\zeta_0'|} - \frac{1}{2}\frac{v(\zeta_0)}{\sqrt{|\zeta_0'|}} \cdot \frac{\zeta_0''}{\zeta_0'}, \end{aligned} \tag{3}$$

и далее, ϱ, P — *функции, определенные формулами:*

$$\varrho = \sqrt{u^2 + v^2}\ , \quad P = \sqrt{U^2 + V^2}\ .$$

Решением ζ *является (единственный) интеграл д. уравнения 1. порядка:*

$$z' = \operatorname{sgn} \zeta_0' \cdot \frac{\varrho^2(z)}{P^2(x)}\ , \tag{B}$$

определенный в интервале $(-\infty, +\infty)$, *который в числе* z_0 *принимает значение* ζ_0.

Доказательство: Пусть $w(W)$ определитель Вронского упорядоченной пары интегралов u, v (U, V). Применяя формулы (3), мы легко убедимся в том, что имеет место соотношение:

$$W = \operatorname{sgn} \zeta_0' \,.\, w\ . \tag{4}$$

Отсюда мы заключаем, что интегралы U, V независимы, и, следовательно, функция P нигде не исчезает.

Заметим, что имеют место формулы:

$$\varrho\varrho' = uu' + vv' , \quad PP' = UU' + VV' ,$$

и далее, ввиду соотношений (3):

$$\zeta_0' = \operatorname{sgn} \zeta_0' \frac{\varrho^2(\zeta_0)}{P^2(z_0)} , \quad \varrho(\zeta_0) \cdot \varrho'(\zeta_0) - \operatorname{sgn} \zeta_0' \cdot P(z_0) \cdot P'(z_0) = \tfrac{1}{2}\varrho^2(\zeta_0) \frac{\zeta_0''}{\zeta_0'^2} . \quad (5)$$

По теореме в абз. 2,3, д. уравнение (B) имеет одно и только одно решение ζ, определенное в интервале $(-\infty, +\infty)$, которое в числе z_0 принимает значение ζ_0; каждое решение д. уравнения (B), которое в числе z_0 принимает значение ζ_0, является частью этого наиболее широкого решения ζ. Очевидно, функция ζ имеет в каждом числе непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Доказательство проведем так, что покажем, что:

а) функция ζ является в интервале $(-\infty, +\infty)$ интегралом д. уравнения (b).

б) ее первая (вторая) пооизводная ζ' (ζ'') принимает в числе z_0 значение ζ_0' (ζ_0'').

в) каждое решение д. уравнения (b), которое принимает в числе z_0 значение ζ_0, а его первая (вторая) производная значение ζ_0 (ζ_0''), является частью интеграла ζ.

а) В каждом числе x

$$\frac{\varrho(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} = P(x) ,$$

легко вычислим, что функция P имеет в числе x производную 2. порядка:

$$P''(x) = \frac{\varrho''(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} \zeta'^2 + \frac{\varrho(\zeta)}{\sqrt{|\zeta'|}} \cdot \sqrt{|\zeta'|} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' .$$

По формуле (4) имеем: $W^2 = w^2$. Имея это в виду, заключаем, что в числе x имеет место уравнение (2,1):

$$\varrho''(\zeta) = Q(\zeta) \cdot \varrho(\zeta) + \frac{w^2}{\varrho^3(\zeta)} ,$$

$$P''(x) = Q(x) \cdot P(x) + \frac{w^2}{P^3(x)} .$$

Из предыдущих формул вытекает соотношение:

$$P(x) \cdot \left\{\sqrt{|\zeta'|} \left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' + \zeta'^2 \cdot Q(\zeta) - Q(x)\right\} = 0 ,$$

а отсюда и из неравенства $P(x) \neq 0$ следует, что функция ζ в интервале $(-\infty, +\infty)$ будет интегралом д. уравнения (b).

б) В каждом числе x имеют место уравнения:

$$\zeta'(x) = \operatorname{sgn}\ \zeta'_0 \frac{\varrho^2(\zeta)}{P^2(x)},$$

$$\zeta''(x) = 2\frac{\varrho^2(\zeta)}{P^4(x)} \cdot \{\varrho(\zeta)\,\varrho'(\zeta) - \operatorname{sgn} \zeta'_0 P(x)\,P'(x)\},$$

и из них следует, ввиду формул (5):

$$\zeta'(z_0) = \zeta'_0, \quad \zeta''(z_0) = \zeta''_0.$$

в) Пусть $\bar{\zeta}$ — произвольное решение д. уравнения (b), определенное в каком-нибудь интервале j, которое удовлетворяет введенным начальным условиям. По лемме функции

$$\bar{U}(x) = \frac{u(\bar{\zeta})}{\sqrt{|\bar{\zeta}'|}}, \quad \bar{V}(x) = \frac{v(\bar{\zeta})}{\sqrt{|\bar{\zeta}'|}} \tag{6}$$

являются в интервале j интегралами д. уравнения (a) и удовлетворяют тем же начальным условиям, как и функции U, V:

$$\bar{U}(z_0) = U(z_0), \quad \bar{U}'(z_0) = U'(z_0);$$
$$\bar{V}(z_0) = V(z_0), \quad \bar{V}'(z_0) = V'(z_0).$$

Отсюда мы заключаем, что функция $\bar{U}$ в интервале j является частью функции U, $\bar{V}$ — частью V, и, следовательно, функция $\bar{P} = \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}$ — частью функции P. Из формул (6) следует, что в каждом числе $x \in \mathrm{j}$ справедливы равенства

$$\bar{\zeta}'(x) = \operatorname{sgn} \zeta'_0 \cdot \frac{\varrho^2(\bar{\zeta})}{\bar{P}^2(x)} = \operatorname{sgn} \zeta'_0 \cdot \frac{\varrho^2(\bar{\zeta})}{P^2(x)},$$

и из них мы видим, что функция $\bar{\zeta}$ является в интервале j решением д. уравнения (B). Потому что решение принимает в числе z_0 значение ζ_0, то оно будет частью интеграла ζ.

Этим доказательство закончено.

24. Аналитическое интегрирование д. уравнения (b).

Мы сохраняем предложения и обозначения из предыдущего абз. **23**.

Прежде всего заметим, что существуют первые фазы α и A упорядоченных пар интегралов u, v и U, V, для которых верно равенство:

$$\alpha(\zeta_0) = A(z_0). \tag{1}$$

Действительно, пусть α (A) — произвольная первая фаза упорядоченной пары интегралов u, v (U, V). Если ζ_0 (z_0) является корнем интеграла v (V), то $\alpha(\zeta_0)$ $(A(\zeta_0))$ будет нечетным кратным числа $\frac{1}{2}\pi$; если же не будет

ζ_0 (z_0) корнем, то $\alpha(\zeta_0)$ ($A(\zeta_0)$) будет отличаться от числа $\operatorname{arctg} u(\zeta_0) : v(\zeta_0)$ ($\operatorname{arctg} U(z_0) : V(z_0)$) аддитивным целым кратным числа π.

Итак, из уравнений **23**,3 мы видим, что число ζ_0 является корнем интеграла v тогда и только тогда, когда z_0 является корнем интеграла V; если этого не будет, то имеет место равенство: $u(\zeta_0) : v(\zeta_0) = U(z_0) : V(z_0)$. Отсюда заключаем, что числа $\alpha(\zeta_0)$ и $A(\zeta_0)$ в обоих случаях отличаются аддитивным целым кратным числа π. Потому что первые фазы упорядоченных пар интегралов u, v и U, V определены с точностью до аддитивных целых кратных числа π, станет возможным присоединением удобного целого кратного, напр. к первой фазе A, модифицировать ее определение так, чтобы имело место равенство (1).

Теперь докажем следующую теорему:

Пусть α *и* A *— первые фазы упорядоченных пар интегралов* u, v *и* U, V, *для которых имеет место равенство* (1). *Тогда интеграл* ζ *будет в интервале* $(-\infty, +\infty)$ *дан формулой:*

$$\zeta(x) = \alpha^{-1}[A(x)] \,. \tag{2}$$

Действительно, по формуле **2**,3 верны в каждом числе x равенства:

$$\alpha(\zeta) = \alpha(\zeta_0) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{w}{\varrho^2(t)}\, dt \,, \quad A(x) = A(z_0) - \int_{z_0}^{x} \frac{W}{P^2(t)}\, dt \,.$$

Потому что функция ζ является решением д. уравнения (B) и в числе z_0 принимает значение ζ_0, справедливо уравнение:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{dt}{\varrho^2(t)} = \operatorname{sgn} \zeta_0' \int_{z_0}^{x} \frac{dt}{P^2(t)} \,.$$

Из этих формул и из соотношений **23** (4) и (1) следует:

$$\alpha(\zeta) = A(x) \,,$$

и таким образом получаем:

$$\zeta(x) = \alpha^{-1}[A(x)] \,.$$

З а м е ч а н и е. Функция α (A) принимает все значения интервала $(-\infty, +\infty)$ и растет или убывает в зависимости от того, будет ли число w (W) отрицательным или положительным. Из формул **23** (4) мы видим, что в случае $\zeta_0' > 0$ обе функции α, A растут или убывают, а в случае $\zeta_0' < 0$ одна растет, а другая убывает. Отсюда и из формулы (2) следует, что *интеграл* ζ *принимает все значения интеграла* $(-\infty, +\infty)$ *и растет или убывает, смотря по тому, будет ли* $\zeta_0' > 0$ *или* $\zeta_0' < 0$. Впрочем, часть этого утверждения, пока оно касается монотонности функции ζ, следует также из того, что функция ζ удовлетворяет д. уравнению B.

25. Значение интегралов д. уравнения (b).

Познания, которые мы получили о дисперсиях и интегралах д. уравнения (b), позволяют показать, что *каждое решение д. уравнения* (b), *определенное в интервале* $(-\infty, +\infty)$, *является собственной дисперсией, а именно прямой или непрямой, смотря по тому, будет ли* $\zeta' > 0$ *или* $\zeta' < 0$.

Действительно, пусть ζ — произвольное решение д. уравнения (b), определенное в интервале $(-\infty, +\infty)$. Пусть z_0 — произвольное число, и $\zeta_0, \zeta_0', \zeta_0''$ — значения функции ζ и ее первой и второй производной в числе z_0.

По теореме **20**,4 существует собственная дисперсия Z, которая характеризуется тем, что в числе z_0 принимает значение ζ_0 и ее первая и вторая производные принимают значения ζ_0', ζ_0'', так что имеют место уравнения:

$$Z(z_0) = \zeta_0', \quad Z'(z_0) = \zeta_0', \quad Z''(z_0) = \zeta_0'';$$

эта дисперсия Z прямая или непрямая, в зависимости от того, будет ли $\zeta_0' > 0$ или $\zeta_0' < 0$.

По теореме в абз. **19**,1, функция Z является решением д. уравнения (b) и, конечно, в числе z_0 удовлетворяет тем же начальным условиям, как и функция ζ. Отсюда и из теоремы существования в абз. **23** мы заключаем, что в каждом числе $x \in (-\infty, +\infty)$ имеет место равенство: $Z(x) = \zeta(x)$.

Этим мы уверились в том, что *собственные дисперсии и их части — единственные решения д. уравнения* (b); из теоремы в обз. **24** мы заключаем, что *каждая собственная дисперсия дана формулой:*

$$\zeta(x) = \alpha^{-1}[A(x)],$$

причем α, A *— удобные первые фазы удобных упорядоченных пар интегралов д. уравнения* (a).

V. Дисперсии высших родов.

26. Доныне мы говорили о дисперсиях 1. рода (см. примечание в конце абз. **15**,2). Предыдущую теорию мы можем расширить на дисперсии 2, 3, 4. родов. Об этих дисперсиях мы не будем подробно говорить, потому что их изучение можно провести теми же методами, которые мы употребили к изучению свойств дисперсий 1. рода. Мы ограничимся эскизом определения этих дисперсий и описанием исходного пункта соответствующей теории.

Пусть α, β — упорядоченная пара произвольных чисел.

Произвольное проективное соответствие $\mathbf{p} = [U \to u, V \to v]$ в системе интегралов д. уравнения (a) называется *относительно чисел* α, β

регулярным 1. рода, если для каждого интеграла Y д. уравнения (a), удовлетворяющего уравнению $Y(\alpha) = 0$, имеет место $\mathbf{p}Y(\beta) = 0$ (см. определение в абз. **14**);

регулярным 2. рода, если для каждого интеграла Y д. иуравнения (а), производная которого удовлетворяет уравнению $Y'(\alpha) = 0$, имеет место $(\mathfrak{p}Y)'(\beta) = 0$;

регулярным 3. рода, если для каждого интеграла д. уравнения (а), удовлетворяющего уравнению $Y(\alpha) = 0$, имеет место $(\mathfrak{p}Y)'(\beta) = 0$;

регулярным 4. рода, если для каждого интеграла д. уравнения (а), производная которого удовлетворяет уравнению $Y'(\alpha) = 0$, имеет место $\mathfrak{p}Y(\beta) = 0$.

С помощью этих понятий мы определяем дисперсии отдельных родов по следующим правилам:

Дисперсии 1. рода Φ, $\overline{\Phi}$, определенные числами α, β и произвольным проективным соответствием $\mathfrak{p}$, регулярным 1. рода, мы получим, когда присоединим к числу α, число β и, более общим образом, к каждому корню каждого интеграла Y д. уравнения (а) присоединим удобный корень интеграла $\mathfrak{p}Y$ (см. подробное определение в абз. **15**,2);

дисперсии 2. рода Ψ, $\overline{\Psi}$, определенные числами α, β и произвольным проективным соответствием $\mathfrak{p}$, регулярным 2. рода, мы получим, когда присоединим к числу α число β и, более общим образом, к каждому корню производной Y' каждого интеграла Y д. уравнения (а), присоединим удобный корень производной $(\mathfrak{p}Y)'$ интеграла $\mathfrak{p}Y$;

дисперсии 3. рода X, $\overline{X}$, определенные числами α, β и произвольным проективным соответствием $\mathfrak{p}$, регулярным 3. рода, мы получим, когда к числу α присоединим число β и, более общим образом, к каждому корню каждого интеграла Y д. уравнения (а) присоединим удобный корень производной $(\mathfrak{p}Y)'$ интеграла $\mathfrak{p}Y$;

дисперсии 4. рода Ω, $\overline{\Omega}$, определенные числами α, β и произвольным проективным соответствием $\mathfrak{p}$, регулярным 4. рода, мы получим, когда к числу α присоединим число β и, более общим образом, к каждому корню производной Y' каждого интеграла д. уравнения (а) присоединим удобный корень интеграла $\mathfrak{p}Y$.

Исходным пунктом теории дисперсий является теорема (см. **16**,2) о том, что дисперсии отдельных родов превращают в тождества следующие уравнения:

$$\begin{array}{ll}
(1.\ \text{рода}) & U(x)\,.\,v(\zeta) - V(x)\,.\,u(\zeta) = 0\,, \\
(2.\ \text{рода}) & U'(x)\,.\,v'(\zeta) - V'(x)\,.\,u'(\zeta) = 0\,, \\
(3.\ \text{рода}) & U(x)\,.\,v'(\zeta) - V(x)\,.\,u'(\zeta) = 0\,, \\
(4.\ \text{рода}) & U'(x)\,.\,v(\zeta) - V'(x)\,.\,u(\zeta) = 0\,.
\end{array} \tag{1}$$

Заметим, что центральные дисперсии φ, ψ, χ, ω о которых мы говорили в главе II., являются особым случаем дисперсий Φ, Ψ, Ξ, Ω а имеют в качестве носителя тождественное проективное соответствие.

Résumé

SUR LES INTÉGRALES OSCILATOIRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

O. BORŮVKA, Brno.

(Reçu le 9 décembre 1952.)

L'hommage aux MM. les professeurs Dr. J. Hronec et Dr. L. Seifert à l'occasion de leurs 70—ièmes anniversaires.

Dans le présent Mémoire je m'occupe des propriétés des intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre:

$$y'' = Q(x)\, y\,; \tag{a}$$

je suppose que la fonction Q est définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, qu'elle est partout négative et continue et les intégrales de l'équation (a) sont oscilatoires.

Les résultats gravitent autour de la distribution de zéros et de valeurs extrêmes des intégrales et, d'après mon avis, ils représentent une contribution remarquable à la théorie classique. Je trouve de nouvelles propriétés des intégrales de l'équation en question qui s'expriment par des formules élégantes et simples; je montre qu'il y a une relation étroite entre cette équation et l'équation différentielle du troisième ordre:

$$\sqrt{|\zeta'|}\left[\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right]'' + \zeta'^2 Q(\zeta) = Q(x)\,, \tag{b}$$

cette relation étant donnée de manière que, pour chaque intégrale y de l'équation (a) et chaque intégrale ζ de l'équation (b), la fonction composée $y(\zeta) : \sqrt{|\zeta'|}$ satisfait encore à l'équation (a); je donne une étude détaillée de l'équation (b), qui permet de reconnaître, en particulier, que les intégrales de cette équation forment un groupe continu à trois paramètres; je déduis, en passant, des théorèmes simples sur fonctions composées qui possèdent des dérivées d'ordres plus élevés que les fonctions primitives.

I. Remarques préliminaires.

1. Par intégrale de l'équation (a) nous entendons une intégrale non identiquement nulle, qui est définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Chaque intégrale de l'équation (a) possède, d'après l'hypothèse, un nombre infini de racines négatives et positives, dont les valeurs absolues surpassent tout nombre arbitrairement donné. Il y en a de même pour la dérivée de chaque intégrale de l'équation (a).

Soit u, v un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendates de l'équation (a) et soit $w = uv' - u'v$ la constante des aires correspondante. On a alors les formules (1) et (2), ces dernières étant valables pour deux nombres $\eta < \xi$ quelconques, pourvu que la fonction v, v', vv' ne s'annule pas dans l'intervalle $[\eta, \xi]$.

2. Les fonctions ϱ, σ, définies par les formules (1), satisfont aux équations (2). Soit α_0 une racine quelconque de l'intégrale v et soit α_n (α_{-n}) la n-ième racine de l'intégrale v, qui suit à (précède) la racine α_0, $n = 1, 2, \ldots$ Pour la fonction v' nous employons les notations analogues α_0', α_n', α_{-n}'. Soit $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Nous définissons dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ les fonctions α, β suivant les formules (3), (4), les nombres arc tg$[u(x) : v(x)]$, arc tg $[u'(x) : : v'(x)]$ étant choisis dans l'intervalle $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. On a alors les formules (5) — (7). Pour toute fonction f continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, chacune des équations (8), possède précisément une intégrale qui passe par un point (ξ, η) arbitrairement donné et qui existe dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; ces deux intégrales s'expriment par les formules (9).

3. Pourque les nombres ξ, η soient une solution de l'équation 1. a), б), в) il faut et il suffit qu'il existe une intégrale de l'équation (a) a) qui s'annule en ξ et en η, б) dont la dérivée s'annule en ξ et en η, в) qui s'annule en ξ et sa dérivée en η. On applique alors le théorème classique sur les fonctions implicites à l'équation $F(x, y) = 0$, où F signifie une expression (1) quelconque, U, V étant encore un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de l'équation (a).

4. Si la fonction Q admet partout la dérivée du second ordre, on peut former l'équation différentielle (a_1), la fonction Q_1 étant donnée par la formule (1). On voit facilement que, pour toute intégrale y de l'équation (a), la fonction $y_1 = y' : \sqrt{-Q}$ est une intégrale de l'équation (a_1).

II. Dispersions centrales.

5. Soit x un nombre arbitraire et y (z) une intégrale de l'équation (a) qui (dont la dérivée) s'annule en x. Soit $n = 1, 2, \ldots$ et désignons par

- $\varphi_n(x)$ $[\varphi_{-n}(x)]$ la n-ième racine de l'intégrale y qui suit à (précède) la racine x;
- $\psi_n(x)$ $[\psi_{-n}(x)]$ la n-ième racine de la fonction z' qui suit à (précède) la racine x;
- $\chi_n(x)$ $[\chi_{-n}(x)]$ la n-ième racine de la fonction y' qui suit à (précède) le nombre x;

$\omega_n(x)$ $[\omega_{-n}(x)]$ la n-ième racine de l'intégrale z qui suit à (précède) le nombre x.

Soit $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Nous appelons la fonction φ_ν, ψ_ν, χ_ν, ω_ν la *dispersion centrale* (c.) *de la première, seconde, troisième, quatrième espèce d'indice* ν, et en particulier, la fonction φ_1, ψ_1, χ_1, ω_1 *la dispersion c. fondamentale* de l'espèce correspondante. Ces définitions ne dépendent manifestement pas du choix particulier des intégrales y et z.

6. Les dispersions c. vérifient identiquement les formules (1)—(3). On voit que, les dispersions c. de la première espèce forment un groupe cyclique infini qui est engendré par la dispersion c. fondamentale φ_1 et dont l'unité est donnée par l'identité x; les dispersions c. de la première espèce d'indices pairs forment un sous-groupe dans le groupe en question. On a des résultats analogues en ce qui concerne les dispersions c. de la seconde espèce.

7. Au sujet des dispersions c. de toutes les espèces on démontre que, l'ensemble de valeurs de chaque dispersion c. est l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et chaque dispersion c. est une fonction croissante. Il en résulte, manifestement, la continuité de chaque dispersion c. en tout nombre x.

8. En appliquant les formules **6** (3) et le théorème classique sur les fonctions implicites, on démontre que toutes les dispersions c. possèdent partout les dérivées continues du premier ordre qui sont données par les formules (1)—(3). On en déduit facilement que chaque dispersion c. de la première espèce possède partout une dérivée continue du troisième ordre. Plus généralement, si la fonction Q possède partout la dérivée continue d'ordre k $(= 0, 1, 2, \ldots)$, toutes les dispersions c. de la première espèce possèdent partout les dérivées continues d'ordre $k + 3$ et les dispersions c. des espèces plus élevées les dérivées continues d'ordre $k + 1$.

9. Les valeurs des dérivées des dispersions c. fondamentales φ, ψ, χ, ω peuvent s'exprimer par les valeurs de la fonction Q suivant les formules (1).

10. Les formules **9** (1) donnent un renseignement sur l'allure des fonctions $\varphi(x) - x$, $\psi(x) - x$, $\chi(x) - x$, $\omega(x) - x$ dans le cas où la fonction Q est monotone. On voit que les fonctions en question ne croissent ou bien ne décroissent pas si la fonction Q jouit de la même propriété.

11. En conséquence des considérations précédentes on démontre des théorèmes remarquables sur les fonctions composées. Nous considérons une fonction Q qui est continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. 1. Supposons que la fonction Q est négative et les intégrales de l'équation $y'' = Q(x)\, y$ sont oscilatoires. Il existe alors deux fonctions X, Y définies dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, qui vérifient partout les inégalités $x < X(x) < Y(x)$ et jouissent de la propriété que la fonction composée $Q[X(x)] : Q[Y(x)]$ possède partout la dérivée continue du second ordre. Si la fonction Q est proprement monotone, les fonctions X, Y résultent continues. 2. Supposons que la fonction Q satisfait à l'inégalité

$\inf\limits_{x\in(-\infty,\,+\infty)} |Q(x)| > 0$. Alors la proposition du théorème précédent subsiste encore. 3. Supposons que la fonction Q possède dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ la dérivée négative et continue Q' et les intégrales de l'équation $y'' = Q'(x)\, y$ sont oscilatoires. Il existe alors une fonction X définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, qui vérifie partout l'inégalité $x < X(x)$, possède la dérivée du premier ordre continue et jouit de la propriété que la fonction composée $Q[X(x)]$ possède partout la dérivée continue du troisième ordre. 4. Supposons que la fonction Q possède dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ la dérivée négative (positive) et continue Q' et qu'elle décroît (croît) de $+\infty$ à $-\infty$ (de $-\infty$ à $+\infty$). Alors la proposition du théorème précédent subsiste encore.

12. On démontrera plus tard (no **17**) que toutes les dispersions c. de la première espèce vérifient l'équation différentielle du troisième ordre (b). On en déduit facilement une condition nécéssaire pourque la distance de deux racines voisines de chaque intégrale de l'équation (a) soit toujours la même $(= d)$. Cette condition subsiste en ceci que la fonction Q doit être périodique avec la période d. M.L. *Frank* a donné un exemple (1) de l'équation (a) où la fonction Q change le signe et les intégrales possèdent la dite propriètė (avec $d = \pi$); l'intégrale générale de cette équation est donnée par la formule (2).

III. Dispersions de la première espèce.

13. Soient U, V; u, v deux couples ordonnés d'intégrales linéairement indépendantes de l' équation (a) et W, w les constantes des aires correspondantes. On définit une correspondance projective $\boldsymbol{p}$ dans le système d'intégrales de l'équation (a) en faisant correspondre à chaque intégrale $Y = \lambda U + \mu V$ l'intégrale $(\boldsymbol{p}Y \equiv)\, y = \lambda u + \mu v$. On écrit alors $\boldsymbol{p} = [U \to u,\ V \to v]$. On appelle le couple ordonné d'intégrales U, V (u, v) *la première* (*sedonde*) *base* et le rapport $(\tau =)\ W : w$ *la caractéristique de la projectivité* $\boldsymbol{p}$. La projectivité $\boldsymbol{p}$ se trouve encore déterminée si l'on se donne arbitrairement la première base P, Q et qu'on choisit pour la seconde les deux intégrales $\boldsymbol{p}P$, $\boldsymbol{p}Q$. La caractéristique τ ne dépend pas de ce choix. Pour tout nombre $c\ (\neq 0)$ on désigne par $c\boldsymbol{p}$ la projectivité $c\boldsymbol{p} = [U \to cu, V \to cv]$ et on dit que cette projectivité $c\boldsymbol{p}$ est linéairement dépendante de la projectivité $\boldsymbol{p}$. La caractéristique de la projectivité $c\boldsymbol{p}$ égale à $(1 : c^2)\, \tau$.

14. Soit α, β un couple ordonné de nombres arbitrairement donnés et $\boldsymbol{p}$ une projectivité dans le système d'intégrales de l'équation (a). On appelle la projectivité $\boldsymbol{p}$ *régulière de la première espèce*, ou bien tout simplement *régulière*, par rapport à α et β, si pour toute intégrale Y de léquation (a) vérifiant l'équation $Y(\alpha) = 0$ on a $\boldsymbol{p}Y(\beta) = 0$. Si la projectivité $\boldsymbol{p}$ est régulière par rapport à α et β, on a la formule (1) quelque soit le choix des bases U, V et u, v de la projectivité $\boldsymbol{p}$; inversement, si cette formule (1) subsiste avec un choix particulier de bases; la projectivité $\boldsymbol{p}$ résulte régulière par rapport à α et β. On démontre d'autres théorèmes qui concernent la régularité de la projectivité identique, de l'inverse $\boldsymbol{p}^{-1}$ et de la projectivité composée de deux projectivités $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$; ces théorèmes sont utiles dans les considérations ultérieures.

15. Soit α un nombre arbitrairement donné. Posons $\alpha_\nu = \varphi_\nu(\alpha)$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de sorte que, si l'on désigne par V une intégrale de l'équation (a) s'annulant en α, on a $\alpha_0 = \alpha$ et le nombre α_ν, pour $\nu > 0$ ($\nu < 0$) coincide avec la ν-ième ($-\nu$-ième) racine de l'intégrale V qui suit à (précède) la racine α. Nous appelons α_ν *le ν-ième nombre fondamental par rapport à α*; l'intervalle $[\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ ($(\alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu]$) s'appelle *le ν-ième intervalle fondamental à droit* (*à gauche*) *par rapport à α*. Cela étant, nous définissons dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ deux fonctions réelles , Φ, $\overline{\Phi}$, qui sont de l'importance fondamentale pour la suite. Considérons deux nombres arbitrairement données α, β. Soient α_ν, β_ν ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) les ν-ièmes nombres fondamentaux par rapport à α, β, et $\boldsymbol{p}$ une projectivité quelconque dans le système d'intégrales de l'équation (a) qui est régulière par rapport à α et β. Soit x un nombre arbitraire et Y une intégrale de l'équation (a) s'annulant en x; le nombre x se trouve situé dans un certain ν-ième intervalle fondamental à droit et dans un certain μ-ième intervalle fondamental à gauche par rapport à α. La définition en question consiste en ceci que, la valeur de la fonction Φ ($\overline{\Phi}$) en x est la racine de l'intégrale $\boldsymbol{p}Y$ qui se trouve située dans le ν-ième ($-\nu$-ième) intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à β, ou bien dans le μ-ième ($-\mu$-ième) intervalle fondamental à gauche (à droit) par rapport à β. Nous appelons la fonction Φ ($\overline{\Phi}$) *la dispersion directe* (*indirecte*) *de la première espèce, déterminée par les nombres α, β et la projectivité* $\boldsymbol{p}$. Comme nous ne considérerons pas ici des dispersions d'ordre plus élévé, nous parlerons simplement de dispersions directes ou indirectes déterminées par les données correspondantes.

16. Dans les *n*os **16—19** nous reprenons les notations du n° **15**; nous désignons par τ la caractéristique de la projectivité $\boldsymbol{p}$. Soit ζ la dispersion directe (Φ) ou bien indirecte ($\overline{\Phi}$) déterminée par les nombres α, β et la projectivité $\boldsymbol{p}$. On démontre que l'ensemble de valeurs de la fonction ζ est l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et que les équations (1), (2) sont vérifiées identiquement. On en voit, en particulier, que toute dispersion c. de la première espèce est échangeable avec toute dispersion directe. Si l'on a $\beta = \varphi_n(\alpha)$ et que la projectivité $\boldsymbol{p}$ est identique, l'égalité suivante est satisfaite identiquement: $\Phi = \varphi_n$.

17. Supposons que la dispersion ζ est directe. Dans le cas $\tau > 0$ la fonction ζ croît dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et par conséquent (n° **16**) elle résulte partout continue. Dans le cas $\tau < 0$, la fonction ζ décroît dans chaque intervalle $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ de $\beta_{\nu+1}$ à β_ν et l'on a $\lim\limits_{t \to \alpha_\nu +} \zeta(t) = \beta_{\nu+1}$, $\lim\limits_{t \to \alpha_{\nu+1} -} \zeta(t) = \beta_\nu$; on voit que la fonction ζ est continue dans chaque intervalle $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ tandis qu'-

elle résulte discontinue en α_ν, la discontinuité étant exprimée par les formules suivantes: $\lim_{t \to \alpha_\nu -} \zeta(t) = \beta_{\nu-1}$, $\lim_{t \to \alpha_\nu +} \zeta(t) = \beta_{\nu+1}$; $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Supposons que la dispersion ζ est indirecte. Dans le cas $\tau < 0$ la fonction ζ décroît dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et par conséquent (n^0 **16**) elle résulte partout continue. Dans le cas $\tau > 0$ la fonction ζ croît dans chaque intervalle $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ de $\beta_{-\nu-1}$ à $\beta_{-\nu}$ et l'on a $\lim_{t \to \alpha_\nu +} \zeta(t) = \beta_{-\nu-1}$, $\lim_{t \to \alpha_{\nu+1} -} \zeta(t) = \beta_{-\nu}$; on en voit que la fonction ζ est continue dans chaque intervalle $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ tandis qu'elle résulte discontinue en α_ν, la discontinuité étant donnée par les formules suivantes: $\lim_{t \to \alpha_\nu -} \zeta(t) = \beta_{-\nu+1}$, $\lim_{t \to \alpha_\nu +} \zeta(t) = \beta_{-\nu-1}$; $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Quelque soit la dispersion ζ, directe ou non, elle possède en tout nombre x de continuité la dérivée du premier ordre qui est donnée par n'importe quelle formule (5)—(7). On en voit que la fonction ζ possède en tout nombre x de continuité même la dérivée continue du troisième ordre et on démontre qu'elle vérifie l'équation (b).

18. La dispersion ζ s'appelle *propre* quand elle est directe et la caractéristique τ est positive, ou bien indirecte et τ est négative. Dans les autres cas ζ s'appelle *impropre*. On démontre que chaque dispersion impropre ζ se compose de parties de convenables dispersions propres; la partie de la dispersion ζ définie dans un intervalle $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ quelconque est en même temps une partie de la dispersion propre qui est déterminée par les nombres x, $\zeta(x)$ et par la même projectivité $\mathfrak{p}$, $x \in (\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ étant un nombre arbitraire, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

19. Dans la suite nous ne nous occupons que de dispersions propres. Soit alors ζ une dispersion propre. Les considérations précédentes entraînent que la dispersion ζ croît ou décroît dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ suivant qu'elle est directe ou indirecte; on a en outre la formule $\operatorname{sgn} \zeta' = \operatorname{sgn} \tau$. La dispersion ζ possède partout la dérivée continue du troisième ordre et elle satisfait à l'équation (b). On démontre d'autres propriétés suivantes: Pour chaque intégrale y de l'équation (a) on a la formule (2), Y étant encore une integrale de l'équation (a) à savoir l'intégrale donnée par la formule $Y = \mathfrak{p}^{-1}y$; la formule (2) peut être simplifiée par la formule (3), si l'on remplace $\mathfrak{p}$ par la projectivité $\pm \sqrt{|\tau|}\, \mathfrak{p}$ qui conduit à la même dispersion ζ. Si ζ est une dispersion centrale d'indice pair ou impair on a pour deux intégrales indépendantes quelconques de équation (a), u, v, les équations (4); inversement, si ces équations sont satisfaites, la dispersion ζ résulte centrale d'indice pair ou impair suivant le signe $+$ ou $-$ dans les seconds membres.

20. Soient α; ζ_0, $\zeta_0' \neq 0$, ζ_0'' des nombres arbitraires. Soit u, v un couple ordonné d'intégrales indépendantes de l'équation (a) et U, V le couple ordonné d'intégrales de la même équation (a), ces dernières étant données par les valeurs initiales exprimées par les formules (1). Dans ces conditions, la dispersion propre ζ, qui est déterminée par les nombres α, ζ_0 et la projectivité $\boldsymbol{p} = [U \to u,\ V \to v]$, jouit de la propriété d'avoir sa valeur en α égale à ζ_0 et les valeurs de ses dérivées du premier et du second ordre à ζ_0', ζ_0''. Les dispersions propres dépendent par conséquent précisément de trois paramètres arbitraires. On démontre que toutes les dispersions propres forment un groupe continu $\mathfrak{G}$ à trois paramètres; toutes les dispersions propres directes forment un sous-groupe invariant $\mathfrak{P}$ dans le groupe $\mathfrak{G}$ et toutes les dispersions propres indirectes forment une classe du groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$.

21. Nous reprenons la signification des symboles $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{P}$ et nous désignons par $\mathfrak{C}$ le groupe formé par toutes les dispersions centrales de la première espèce et par $\mathfrak{S}$ son sous-groupe de toutes les dispersions centrales de la première espèce d'indices pairs. On a alors les relations: $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{P} \supset \mathfrak{C} \supset \mathfrak{S}$. Soit $\zeta \in \mathfrak{G}$ une dispersion propre quelconque et u, v un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes quelconques de l'équation (a). On a alors les formules (1) avec les coefficients $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ bien déterminés. Le déterminant $|C|$ de la matrice C de ces coefficients égale à sgn ζ'. En faisant correspondre à la dispersion ζ la matrice C, on obtient une représentation homomorphe $\boldsymbol{d}$ du groupe $\mathfrak{G}$ sur le groupe $\mathfrak{L}$ formé par les matrices carrées unimodulaires du second ordre. En se servant de cette représentation $\boldsymbol{d}$ on démontre que le groupe $\mathfrak{S}$ est un sous-groupe invariant en $\mathfrak{G}$ et le groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{L}$; on démontre en plus que le groupe $\mathfrak{C}$ est le centre du groupe $\mathfrak{P}$.

IV. L'équation différentielle des dispersions de la premiére espéce:

$$\sqrt{|\zeta'|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\zeta'|}}\right)'' + \zeta'^2 \cdot \mathrm{Q}(\zeta) = \mathrm{Q}(\mathrm{x}). \tag{b}$$

22. L'équation différentielle des dispersions de la première espèce, (b), peut être mise sous la forme (1); dans cette formule ζ et x désignent deux dispersions propres mutuellement inverses et les signes $'$ et $\dot{}$ leurs dérivées, ces dérivées étant prises en deux nombres $x = x(\zeta)$, $\zeta = \zeta(x)$ correspondants quelconques.

23. Lemme. Soit ζ une solution de l'équation (b) définie dans un intervalle $\boldsymbol{j}$ et soit u une intégrale quelconque de l'équation (a). Soit $z_0 \in \boldsymbol{j}$ un nombre arbitrairement donné et ζ_0, ζ_0' $(\neq 0)$, ζ_0'' les valeurs de la fonction ζ et de sa dérivée première et seconde en z_0. Dans ces conditions, la fonction U définie par la formule (1) satisfait encore, dans l'intervalle $\boldsymbol{j}$, à l'équation (a); l'intégrale U est précisément celle qui est déterminée par les conditions initiales exprimées par les formules (2).

Théorème. Soient z_0; ζ_0, ζ_0' $(\neq 0)$, ζ_0'' des nombres arbitrairement donnés. Il existe précisément une intégrale ζ de l'équation (b) définie dans l'intervalle

($-\infty$, $+\infty$), qui prend, en z_0, la valeur ζ_0 et ses dérivées du premier et du second ordre les valeurs ζ_0', ζ_0''. Toute solution de l'équation (b) qui vérifie les mêmes conditions initiales fait partie de l'intégrale ζ. Soient u, v d'arbitraires intégrales indépendantes de l'équation (a) et U, V les deux intégrales de l'équation (a) qui sont déterminées par les conditions initiales (3); soient ϱ, P les fonctions définies par les formules $\varrho = \sqrt{u^2 + v^2}$, $P = \sqrt{U^2 + V^2}$. Dans ces conditions l'intégrale ζ est l'intégrale unique de l'equation différentielle du premier ordre (B) qui existe dans l'intervalle ($-\infty$, $+\infty$) et qui prend, en z_0, la valeur ζ_0.

24. Nous reprenons les notations du n⁰ **23**. On peut s'arranger que les fonctions α et A définies suivant les formules **2** (3) moyennant les deux couples ordonnées d'intégrales u, v et U, V vérifient l'équation (1). On démontre qu' avec ce choix des fonctions α et A l'intégrale ζ peut s'exprimer par la formule (2), α^{-1} étant la fonction inverse par rapport à α.

25. Les considérations précédentes entraînent que toute intégrale de l'équation (b) définie dans l'intervalle ($-\infty$, $+\infty$) est une dispersion propre, qui est directe ou indirecte suivant l'inégalité $\zeta' > 0$ ou $\zeta' < 0$.

V. Dispersions des espèces supérieures.

26. La théorie précédente peut être élargie aux dispersions de la seconde, troisième et quatrième espèce. Dans ce but on définit dans le système d'intégrales de l'équation (a) les projectivités régulières de la seconde, troisième et quatrième espèce, en remplaçant les équations $Y(\alpha) = 0 = \boldsymbol{p}Y(\beta)$ (n° **14**) par les suivantes: $Y'(\alpha) = 0 = (\boldsymbol{p}Y)'(\beta)$, $Y(\alpha) = 0 = (\boldsymbol{p}Y)'(\beta)$, $Y'(\alpha) = 0 = \boldsymbol{p}Y(\beta)$. A la base de ces définitions on introduit les notions des dispersions des espèces supérieures en procédant d'une manière analogue à celle qui a été employée dans la théorie précédente. Les dispersions des quatre espèces vérifient identiquement les équations (1) et elles entraînent comme cas particuliers les dispersions centrales des espèces correspondantes étudiées au Chap. II.