

Václav Alda

О полноте полиномов для распределения Пуассона

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 1, 83–85

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100070>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1953

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О ПОЛНОТЕ ПОЛИНОМОВ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАСОНА

ВАЦЛАВ АЛДА (Václav Alda), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VIII 1952 г.)

В этой заметке изложено короткое доказательство полноты полиномов в пространстве $l^{(2)}$, принадлежащем к распределению Пуассона. Доказательство можно также получить с помощью преобразования Фурьера, но изложенное здесь доказательство совершенно простое.

Лемма 1. Пусть $\lambda > 0$ и далее

$$\alpha_n = (n!)^{-2} (n + 1)^{2n} \lambda^{n+1} [(n + 1)!]^{-1}.$$

Потом $\sum_n \alpha_n < +\infty$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \left(\frac{n!}{(n+1)!} \right)^2 \cdot \frac{(n+2)^{2n+2}}{(n+1)^{2n}} \cdot \lambda \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} \\ &= (n+1)^{-2} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{2n} (n+2)^2 \lambda (n+2)^{-1} \\ &\leq e^2 \lambda (n+1)^{-2} (n+2) \rightarrow 0 \quad \text{для } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

и по известному критерию $\sum_n \alpha_n < \infty$.

Лемма 2. Пусть $\lambda > 0$ и

$$\sigma_n = (n!)^{-2} \sum_{x>n} x^{2n} \lambda^x (x!)^{-1}.$$

Существует $C = C(\lambda) < \infty$, так что $\sigma_n \leq C$ для всякого n .

Доказательство. Обозначим $N = [2e^2\lambda] + 1$ и $C = \text{Max}_{n \leq N} \sigma_n + \sum_n \alpha_n$. По лемме 1 — $C < \infty$.

Для $n \leq N$ мы имеем

$$\sigma_n \leq \text{Max}_{n \leq N} \sigma_n + \sum_{p \leq n} \alpha_p. \tag{1}$$

Докажем, что (1) справедливо также для $n > N$.

Пишем

$$\sigma_{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} u_j, \quad \sigma_n = \alpha_n + \sum_{j=1}^{\infty} v_j,$$

где

$$u_j = ((n-1)!)^{-2} (n-1+j)^{2n-2} \lambda^{n-1+j} ((n-1+j)!)^{-1}$$

$$v_j = (n!)^{-2} (n+1+j)^{2n} \lambda^{n+1+j} ((n+1+j)!)^{-1},$$

и поэтому

$$\frac{v_j}{u_j} = n^{-2} \left(1 + \frac{2}{n-1+j}\right)^{2n-2} (n+1+j)^2 \lambda^2 (n+j)^{-1} (n+1+j)^{-1}$$

$$\leq 4e^4 \lambda^2 n^{-2} \leq 1.$$

Тогда

$$\sigma_n \leq \alpha_n + \sigma_{n-1} \leq \max_{k \leq N} \sigma_k + \sum_{p \leq n-1} \alpha_p + \alpha_n.$$

Лемма доказана.

Теорема. Пусть $\lambda > 0$ и последовательность $\{a_x\}_{x=0}^\infty$ такая, что

$$\sum_{x=0}^\infty |a_x|^2 \lambda^x (x!)^{-1} < \infty. \quad (2)$$

Если для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_x a_x x^n \lambda^x (x!)^{-1} = 0, \quad (*) \quad (3)$$

то $a_x = 0$ для всякого x .

Доказательство. Пусть уже доказано, что $a_x = 0$ для $x < p$ ($p \geq 0$). Положим $s_n(x) = (n!)^{-1} (x - (p+1)) \dots (x - (p+n))$.

Из этого следует, что

- 1° $s_n(x) = 0$ для $p < x \leq p+n$,
- 2° $s_n(p) = (-1)^n$,
- 3° $0 \leq s_n(x) \leq (n!)^{-1} x^n$ для $x > p+n \geq n$.

Из (3) вытекает

$$S = \sum_x a_x s_n(x) \lambda^x (x!)^{-1} = 0 \quad (4)$$

и в силу 1°, 2° и предположения $a_x = 0$ для $x < p$,

$$S = \pm a_p \frac{\lambda^p}{p!} + \sum_{x>n+p} a_x s_n(x) \lambda^x (x!)^{-1}. \quad (5)$$

По неравенству Шварца и 3°

$$\left| \sum_{x>n+p} a_x s_n(x) \lambda^x (x!)^{-1} \right| \leq \sum_{x>n} |a_x| (n!)^{-1} x^n \lambda^x (x!)^{-1} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{x>n} |a_x|^2 \lambda^x (x!)^{-1}} \cdot \sqrt{(n!)^{-2} \sum_{x>n} x^{2n} \lambda^x (x!)^{-1}}.$$

Но это

$$\leq \sqrt{C} \cdot \sqrt{\sum_{x>n} |a_x|^2 \lambda^x (x!)^{-1}}.$$

*) $x^n = 1$ для $x = n = 0$.

Так как это выражение сходится к 0 для $n \rightarrow \infty$ (это вытекает из (2)), сравнением (4) и (5) мы получим $a_p = 0$.

Так как предположение доказательства выполняется именно для $p = 0$, то в силу полной индукции, теорема доказана.

COMPLETENESS OF POLYNOMIALS FOR POISSON'S DISTRIBUTION

VÁCLAV ALDA, Praha.

(Received August 12, 1952.)

Let λ be a positive number. The space $l^{(2)}$ consists of all sequences $\{a_x\}_{x=0}^{\infty}$ for which $\sum |a_x|^2 \lambda^x (x!)^{-1} < \infty$. An elementary proof for completeness of polynomials in this space is given, viz.

if for $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum a_x x^n \lambda^x (x!)^{-1} = 0,$$

then $a_x = 0$ for all x .

The proof is based on two lemmas:

L. 1. Let $\lambda > 0$ and

$$\alpha_n = (n!)^{-2} (n+1)^{2n} \lambda^{n+1} [(n+1)!]^{-1};$$

then $\sum_n \alpha_n < \infty$.

L. 2. Let $\lambda > 0$ and

$$\sigma_n = (n!)^{-2} \sum_{x>n} x^{2n} \lambda^x (x!)^{-1}.$$

Then there exists a $C = C(\lambda) < \infty$, so that $\sigma_n \leq C$ for all n .

For the prof of this lemma we write $\sigma_{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} u_j$, and $\sigma_n = \alpha_n + \sum_{j=1}^{\infty} v_j$, and we have $v_j/u_j \leq 1$ for $n > N = [2e^2\lambda] + 1$, hence $\sigma_n \leq \alpha_n + \sigma_{n-1}$.

The proof of the theorem is given by induction. We introduce the polynomial $s_n(x) = (n!)^{-1} \prod_{k=1}^n (x - (p+k))$, if $a_x = 0$ for $x < p$. Then we have (4) and (5) and following Schwarz's inequality and lemma 2 we obtain $a_p = 0$.