Jan Mařík

Конспект статьи „Основы теории интеграла в евклидовых пространствах”

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 273–277

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100051`

КОНСПЕКТ СТАТЬИ „ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ“

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 31/I 1952 г.)

В статье приведены главные результаты, которые автор получил в реферате, опубликованном в чешском журнале *„Časopis pro pěstování matematiky“*, **77** (1952).

Словом интервал (m-мерный) мы будем всегда обозначать замкнутый невырожденный интервал. Мы будем говорить, что функция G *супераддитивна* в интервале K, если она определена на множестве всех интервалов $I \subset K$ и если имеет место

$$G(I + J) \geqq G(I) + G(J)$$

для всех неперекрывающихся интервалов I, J таких, что $I + J$ будет также интервалом, входящим в K, при условии, что сумма в правой части имеет смысл (т. е. не имеет вид $\infty - \infty$). Подобным же образом определим функцию *субаддитивную* и функцию *аддитивную*. Если теперь F — произвольная функция интервала и если G — конечная *неотрицательная* функция интервала (обе они определены для всех интервалов $I \subset K$), то мы определим *верхнюю проигводную* функции F по функции G в точке $x \in K$ по отношению к интервалу K, обозначение $\overline{F}(G, x, K)$, как супремум множества всех пределов вида $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{F(I_n)}{G(I_n)}$, где $x \in I_n$ для $n = 1, 2, \ldots$ и диаметры интервалов $I_n \subset K$ сходятся к нулю. Иных требований на последовательность I_n мы накладывать не будем; мы говорим, следовательно, о т. наз. сильной производной. Аналогично определим нижнюю производную $\underline{F}(G, x, K)$.*)

---

*) В выражении $\dfrac{F(I_n)}{G(I_n)}$ положим $\dfrac{a}{0} = \infty$ для $a > 0$, $\dfrac{a}{0} = -\infty$ для $a < 0$; $\dfrac{0}{0}$ не имеет для нас смысла. Если в некоторой окрестности точки x всегда $F(I) = G(I) = 0$, то не существует ни одного предела требуемого вида; тогда по определению $\overline{F}(G, x, K) = -\infty$, $\underline{F}(G, x, K) = \infty$. Иначе всегда $\underline{F}(\ldots) \leqq \overline{F}(\ldots)$.

Если f — функция точки в интервале K и если G — конечная неотрицательная аддитивная в K, то мы назовем *мажорантой* функции f по отношению к функции G в интервале K каждую функцию M, супераддитивную в интервале K и удовлетворяющую соотношению

$$-\infty \neq \underline{M}(G, x, K) \geqq f(x)$$

для любого $x \in K$. *Верхним интегралом Перрона-Стилтьеса* функции f по отношению к конечной неотрицательной аддитивной функции G в интервале K мы назовем тогда число (или символ $\pm\infty$)

$$\overline{\int\limits_K} f \, \mathrm{d}G = \inf M(K),$$

где M пробегает все мажоранты. Аналогично определим $\underline{\int\limits_K} f \, \mathrm{d}G$.

Всегда имеет место $\overline{\int\limits_K} f \, \mathrm{d}G \geqq \underline{\int\limits_K} f \, \mathrm{d}G$; если $\overline{\int\limits_K} f \, \mathrm{d}G = \underline{\int\limits_K} f \, \mathrm{d}G \neq \pm\infty$, то мы будем говорить, что существует соответствующий *интеграл Перрона-Стилтьеса* и напишем

$$\int\limits_K f \, \mathrm{d}G = \overline{\int\limits_K} f \, \mathrm{d}G = \underline{\int\limits_K} f \, \mathrm{d}G.$$

Теперь доказываются некоторые основные теоремы об интеграле, напр. теорема о перестановке предела и интеграла и теорема Фубини о преобразовании $(m + n)$-мерного интеграла в m-мерный интеграл из n-мерного интеграла. Из доказательства теоремы Фубини ясно, почему интеграл определен с помощью супераддитивных мажорант; определение интеграла имело бы, конечно, смысл и в том случае, если бы мы говорили только о аддитивных мажорантах. Однако, приведенное доказательство теоремы Фубини не имело бы в таком случае силы.

Легко доказать, что в одномерном случае можно ограничиться аддитивными мажорантами, не внося этим никаких изменений; точно так же дело обстоит и при большем числе размеров у абсолютно сходящихся интегралов. Не могу, однако, утверждать, что эта возможность сохраняет силу и в общем случае.

Чтобы показать, насколько общим является интеграл Перрона, заметим, что существует функция f, определенная в квадрате $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, которая имеет в нем (конечный) интеграл Перрона $\int f \, \mathrm{d}G$, где $G(I)$ = площадь I, но не имеет (конечного) интеграла в треугольнике $0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ (это значит, что функция f_1, определенная соотношениями $f_1(x, y) = f(x, y)$ для $y \leqq x$, $f_1(x, y) = 0$ для $y > x$, не имеет интеграла в исходном квадрате). Итак, и для таких функций доказана, напр., теорема Фубини. — Абсолютно сходящийся интеграл Перрона совпадает, конечно, с интегралом Лебега.

В одномерном случае мы обычно заменяем функции интервала функциями точки. Доказана следующая теорема, типичная для интеграла Перрона: Если конечная неубывающая функция G непрерывна слева в точке b, имеет место $\int_a^b f\,\mathrm{d}G = \lim_{x\to b-} \int_a^x f\,\mathrm{d}G$, коль скоро здесь существует конечный предел. Далее для интегралов Перрона-Стилтьеса доказана вторая теорема о среднем значении и теорема о интегрировании по частям в предположении что функция, по которой производится интегрирование, непрерывна (и, конечно, неубывающая). Если теорему о интегрировании по частям сформулировать подходящим образом, то из нее, в частности, следует, что неопределенные интегралы всех функций, которые можно интегрировать по данной непрерывной функции, образуют кольцо (в качестве функций точки). Затем приводятся некоторые основные теоремы о мере и при некоторых допущениях доказываются формулы

$$\int_K f\,\mathrm{d}G_1 = \int_K fg\,\mathrm{d}G$$

(f — функция точки в K, G_1 — неопределенный интеграл функции g по функции G), а также

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\ \ \mathrm{d}G = \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}G(\varphi). \tag{1}$$

Для одномерного случая далее доказано, что производная неопределенного интеграла (по функции G, по которой производится интегрирование) существует и равна значению интегрируемой функции почти всюду; выражение „почти всюду“ относится, конечно, к функции G, причем предполагается, что для этой функции имеет место напр. $G(x) = \frac{1}{2}(G(x+) + G(x-))$. Из соответствующих теорем тогда вытекают различные „теоремы о подстановке“, т. е. теоремы, приводящие к формулам вида

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Имеет, например, место следующая теорема:

Пусть φ, H, k — функции в интервале $\langle a, b\rangle$, пусть G — конечная неубывающая функция в интервале $\langle c, d\rangle$. Пусть функция H будет конечной и неубывающей, φ — непрерывной функцией, $c \leqq \varphi \leqq d$. Пусть функция $G(\varphi)$ будет неопределенным интегралом Перрона функции k по функции H (во всем интервале $\langle a, b\rangle$). Допустим, что каждый интервал $\langle a', b'\rangle \subset \subset (a, b)$ можно разбить на конечное число частичных интервалов так, что в каждом из них функция φ монотонна. Тогда имеет место

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, \mathrm{d}G = \int_a^b f(\varphi) \, . \, k \, . \, \mathrm{d}H,$$

если интеграл вправо существует.

Доказаны также некоторые подобные теоремы без допущения о ,,частичной монотонности" функции φ, с наложением, однако, других ограничений.

Далее исследуется интеграл по функции с конечной вариацией; определение его очевидно. Тогда имеет место

$$\int_K f \, \mathrm{d}G + \int_K f \, \mathrm{d}H = \int_K f \, \mathrm{d}(G + H),$$

если G, H являются функциями с конечной вариацией и если существуют все три интеграла. Я не знаю, вытекает ли из существования двух интегралов существование и третьего; однако, легко доказать, что в случае абсолютной сходимости это, действительно, имеет место.

В конце статьи определяется и криволинейный интеграл Перрона; с помощью формулы (1) можно доказать, что его значение в известном смысле независимо от параметрического выражения кривой, по которой производится интегрирование.

Summary.

Abstract of the article ,,Foundations of the theory of integration in Euclidean spaces".

JAN MAŘÍK, Praha.

(Received January 31th, 1952.)

The article in question has been published in Czech in the *Časopis pro pěstování matematiky*, **77** (1952). The autor starts by the definition of the n-dimensional Perron-Stieltjes integral $\int_K f \, \mathrm{d}G$, where K is an n-dimensional interval and $G(I)$ is a non-negative additive function of an interval $I \subset K$. Especially the theorem on integration of sequences of functions, the Fubini theorem and under some restrictions the formula

$$\int_K fg \, \mathrm{d}G = \int_K f \, \mathrm{d}G_1,$$

where $G(I) = \int_I g \, \mathrm{d}G_1$, are proved.

For the one-dimensional case, instead of $\int\limits_K f \, \mathrm{d}\tilde{G}$ we write $\int\limits_a^b f \, \mathrm{d}G$, where $K = \langle a, b\rangle$, $\tilde{G}(\langle c, d\rangle) = G(d) - G(c)$. If the function G is non-decreasing and continuous, the autor shows, that the well-known theorem on integration by parts and the second mean value theorem remain true for the Perron-Stieltjes integrals of the type $\int\limits_a^b f \, \mathrm{d}G$.

Under certain restrictions, the validity of the formula (the "substitution theorem")

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \, \mathrm{d}G = \int\limits_a^b f(\varphi) \, . \, k \, . \, \mathrm{d}H,$$

where $G(\varphi)$ is the indefinite integral $\int k \, \mathrm{d}H$, is proved.

The method is completely elementaiy; e. g. the knowledge of the theory of measure is not supposed.