Vlastimil Pták

О включении семигрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 247–271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100050

О ВКЛЮЧЕНИИ СЕМИГРУПП

ВЛАСТИМИЛ ПТАК (Vlastimil Pták), Прага.

(Поступило в редакцию 19/III 1952 г.)

§ 1. Введение.

Настоящая статья является пополненным извлечением из работы, опубликованной автором в ,,*Сочинениях, издаваемых естественным факултетом Карлова университета*,,. (См. [5] в списке литературы, помещенном в конце статьи.)

Проблема, разбираемая в настоящей статье, заключается в следующем:

Найти необходимые и достаточные условия существования группы, содержащей данную семигруппу. Работа была написана в июне 1947 г., т. е. в то время, когда наше знакомство с русской литературой, опубликованной в течении войны, было очень неполным. Как раз в это время мы начали получать *Mathematical Reviews*. Поэтому автору не были известны работы [6], [7] Мальцева, содержащие решение указанной проблемы. Однако как метод, которым пользовался Мальцев, так и полученный им ресултат, отличаются от метода и результата, описанных автором, так что — после некоторых колебаний — автор решился опубликовать извлечение из работы [5],-содержащее его собственное решение. Вторая часть работы [5] посвящена обсуждению вопросов, которыми Мальцев не занимается.

Следует краткое содержание работы.

В элементарных учевниках алгебры приводится известная теорема, по которой каждое коммутативное кольцо без делителей нуля может быть включено в тело. В первом издании своей *Современной Алгебры* ван дер Варден поднял следующии вопрос: справедливо ли это утверждение и для некоммутативных колец без делителей нуля? [1]

Эта проблема, очевидно, тесно связана с проблемой существования группы, содержащей данную некоммутативную семигруппу. Последняя проблема была разрешена Мальцевым [2], который доказал, что на оба вопроса следует ответить отрицательно. В [2] Мальцев приводит следующее необходимое условие включимости семигруппы.

(M) Пусть S содержит восемь элементов a, b, c, d, x, y, u, v таких, что имеют место следующие три соотношения:

$$\begin{aligned} ax &= by \\ cx &= dy \\ au &= bv \end{aligned} \tag{1}$$

В таком случае должно иметь место и соотношение

$$cu = dv \tag{2}$$

Доказательство не представляет затруднений. Мальцев построил семигруппу S, содержащую восемь элементов a, b, c, d, x, y, u, v таких, что три соотношения (1) выполнены, но соотношение (2) не выполнено. Очевидно, такую семигруппу нельзя расширить на группу.

Условие автора является обобщением условия (M). Обобщая условие Мальцева, легко видеть, что для включимости семигруппы необходимо следующее условие.

(M') Если S содержит несколько элементов $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющих нескольким соотношениям, то любое соотношение между элементами $a_1, \ldots, a_n$, которое можно вывести из данных соотношений *в группе*, должно быть удовлетворено и в S.

При нарушении этого условия семигруппа S, очевидно, не может быть включена в группу. Целью работы [5] являлось доказательство того, что указанное условие будет и достаточным.

Пусть S — семигруппа, V — система образующих S. Обозначим через $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}$ свободную семигруппу и, соответственно, группу с V в качестве системы свободных образующих. Обозначим через E отношение эквивалентности на $\mathfrak{S}$, соответствующее естественному гомоморфизму $\mathfrak{S}$ на S.

Допустим теперь, что S содержится в группе G_0. Пусть G — пересечение всех подгрупп G_0, содержащих S. Легко доказать, что естественный гомоморфизм $\mathfrak{S}$ на S можно расширить на гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на G и притом вполне понятным способом. Отсюда следует, что отношение эквивалентности — или проще, эквивалентность — на $\mathfrak{S}$, соответствующая естественному гомоморфизму $\mathfrak{S}$ на S, индуцируется на $\mathfrak{S}$ регулярной эквивалентностью $\mathfrak{G}$, т. е. нормальной подгруппой $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$. (Из некоторых исследований Мальцева в [6] и [7] вытекает, что нормальная подгруппа $\mathfrak{N}$ не является однозначно определенной с помощью эквивалентности E.)

С другой стороны, если семигруппа S такова, что эквивалентность E на $\mathfrak{S}$, соответствующая естественному гомоморфизму $\mathfrak{S}$ на S, индуцируется на $\mathfrak{S}$ нормальной подгруппой $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, то S является включимой семигруппой. В самом деле, легко доказать, что подмножество группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, состоящее из всех классов вида $\alpha\mathfrak{N}$, $\alpha \in \mathfrak{S}$ образует семигруппу, изоморфную с S. Эти результаты можно срезюмировать следующим образом:

S вклучима тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $\alpha \in \mathfrak{S}$, $\beta \in \mathfrak{S}$

$$\alpha\, E\, \beta \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{N}$$

где $\mathfrak{N}$ — подходящая нормальная подгруппа в $\mathfrak{G}$.

Если S — произвольная семигруппа, образуем следующее множество:

$$\mathfrak{M}_r = \underset{y}{E}[y \in \mathfrak{G},\, y = \alpha\beta^{-1},\, \alpha \in \mathfrak{S},\, \beta \in \mathfrak{S},\, \alpha\, E\, \beta]$$

Дальнейшие исследования показывают, что следующее условие включаемости является необходимым и достаточным.

$$\alpha\beta^{-1} \in [\mathfrak{M}_r] \Rightarrow \alpha\, E\, \beta.$$

(При этом $[\mathfrak{M}_r]$ означает наименьшую нормальную подгруппу в $\mathfrak{G}$, содержащую $\mathfrak{M}_r$.) Это и есть результат (M'), о котором автор уже упоминал.

Вторая часть работы посвящена подробному обсуждению некоторых свойств множества $\mathfrak{M}_r$. Прежде всего мы доказываем, что для любой семигруппы имеет место следующая импликация:

$$\alpha \in \mathfrak{S},\, \beta \in \mathfrak{S},\, \alpha\beta^{-1} \in \{\mathfrak{M}_r\} \Rightarrow \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$$

(При этом $\{\mathfrak{M}_r\}$ означает наименьшую подгруппу в $\mathfrak{G}$, содержащую $\mathfrak{M}_r$.) Доказательство по методу математической индукции, которым мы пользуемся, является довольно сложным. Из этой импликации вытекают некоторые заметки относительно определения семигруппы при помощи системы образующих и определяющих отношений.

В следующем параграфе исследуется вопрос, при каких условиях подгруппа $\{\mathfrak{M}_r\}$ будет нормальной, т. е. $\{\mathfrak{M}_r\} = [\mathfrak{M}_r]$. Оказывается, что это возможно лишь в исключительных случаях.*) Работа заканчивается обсуждением достаточного условия включимости, найденного О. Ором [3]. Семигруппа является включимой, если для любых двух элементов ее a, b

*) Этот результат и предидущая теорема (4,4) не содержится в [5].

существуют два элемента a', b' таких, что $a'a = b'b$. Это можно доказать непосредственным построением дробей. Используя общие результаты предыдущих исследований, мы даем другое короткое доказательство этой теоремы, которое одновременно проливает новый свет на условие Ора.

§ 2. Определения и символика.

Пусть S — непустое множество, в котором определена единственная алгебраическая операция M; мы пишем $M(a, b) = ab$.

S называется семигруппой, если M обладает следующими свойствами:

2. Для любых трех элементов, принадлежащих к S,

$$a(bc) = (ab)\,c$$

3. $$ax = ax' \Rightarrow x = x'$$

4. $$yb = y'b \Rightarrow y = y'$$

(Символы $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ означают соответственно логическую импликацию и эквивалентность.) Элемент $j \in S$ называется единичным элементом, если для всех $a \in S$

$$aj = ja = a$$

Заметим прежде всего, что:

1. Семигруппа не может содержать более одного единичного элемента.

В самом деле, пусть j_1 и j_2 — единичные элементы из S. Тогда имеем

$$j_1 = j_1 j_2 = j_2$$

2. Пусть $a \in S$, $j \in S$. Если

$$aj = a,$$

то j — единичный элемент.

Для доказательства этого утверждения возьмем какое-нибудь $s \in S$ и положим $js = c$. Отсюда

$$ajs = ac$$

и

$$ajs = as$$

Следовательно, $ac = as$ и $c = s$. В частности

$$ja = a$$

Пусть

$$sj = d.$$

Отсюда мы получаем

$$da = sja = sa$$

и следовательно

$$d = s$$

что и требовалось доказать.

Из предыдущих рассуждений вытекает, что для каждой семигруппы имеются лишь следующие две возможности:

1. Существует $a \in S$ такое, что уравнение $ax = a$ или уравнение $ya = a$ обладает решением.

Тогда в S содержится единичный элемент.

2. Ни одно из уравнений $ax = a$, $ya = a$ не разрешимо ни при каком элементе $a \in S$.

В этом случае мы можем сконструировать множество S_1, прибавляя к S элемент j, для которого умножение определятся следующим образом:

$$jj = j \text{ и } ja = aj = a \text{ для каждого } a \in S.$$

Легко убедиться в том, что S_1 — семигруппа с единичным элементом.

Таким образом между этими двумя случаями не имеется существенных различий и мы можем поэтому ограничиться в наших исследованиях семигруппами с единичным элементом.

В последующем мы будем всегда предполагать, что все семигруппы содержат единичный элемент.

Пусть S — некоторая семигруппа, а $M \subset S$ — непустая ее часть. Пересечение всех под-семигрупп из S, содержащих M, представляет собой, очевидно, снова семигруппу. Мы будем называть ее семигруппой, порожденной в S посредством M. Часть $0 \neq M \subset S$ называется системой образующих для S, если семигруппа, порожденная в S посредством M, совпадает с S. Очевидно, что для каждой семигруппы существует хотя бы одна система образующих.

Пусть V — произвольное множество символов. Пусть $\mathfrak{G}$ — свободная группа, для которой V является системой свободных образующих. Каждый элемент из $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i},$$

где $a_i \in V$, $\varepsilon_i = \pm 1$, причем для $n > 1$ имеет место

$$1 \leq i < n \text{ и } a_i = a_{i+1} \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех таких слов из $\mathfrak{G}$, для которых

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 1.$$

Легко убедиться в том, что $\mathfrak{S}$ — семигруппа. Условимся называть ее свободной семигруппой,-для которой V является системой свободных образующих.

Эквивалентность E, определенная на семигруппе S, называется регулярной, если для каждого $c \in S$

$$a\,E\,b \Rightarrow ac\,E\,bc \text{ и } ca\,E\,cb$$

Эквивалентность E с семигруппе S мы будем называть эквивалентностью с правосторонним сокращением, если

$$ca\,E\,c'a \Rightarrow c\,E\,c'$$

Аналогично, E называется эквивалентностью с левосторонним сокращением, если

$$ac\,E\,ac' \Rightarrow c\,E\,c'$$

Замечание: известно, что каждая регулярная эквивалентность на группе автоматически удовлетворяет обоим свойствам сокращения. Простые примеры показывают что в семигруппе это не имеет места. Везмём свободную сэмигруппу порожденную двумя свободными образующими a_1 и a_2. Разпределим все ее слова в четыри класс:

E ..... пустое слово
A_1 ..... все слова вида a_1^n $(n = 1, 2, \ldots)$
A_2 ..... все слова вида a_2^n $(n = 1, 2, \ldots)$
A_{12} ..... все слова, эффективно содержащие a_1 и a_2.

Легко убедимся что это разложение нашей семигруппы является регулярной эквивалентностью; при этом таблица умножения полугруппы состоящий из этих классов имеет следующий вид:

$$\begin{array}{llll} E, & A_1, & A_2, & A_{12} \\ A_1, & A_1, & A_{12}, & A_{12} \\ A_2, & A_{12}, & A_2, & A_{12} \\ A_{12}, & A_{12}, & A_{12}, & A_{12} \end{array}$$

Для любого x и любого y имеем:

$$xA_{12} = yA_{12} = A_{12}x = A_{12}y$$

так что ни одно из свойств сокращения неудовлетворяется.

Пусть даны два множества $S_2 \subset S_1$. Если E_1 является эквивалентностью, определенной на S_1, то мы можем определить на S_2 бинарное отношение E_2 следующим образом:

$$xE_2y \Leftrightarrow xE_1y$$

Нетрудно доказать, что E_2 — эквивалентность на S_2. Мы назовем ее эквивалентностью, порожденной на S_2 посредством E_1.

Пусть S — произвольная семигруппа, а E — эквивалентность, определенная на S. Каждому $a \in S$ соответсвует множество $B(a)$, определенное следующим образом:

$$B(a) = \underset{x}{E}[x \in S,\ x\ E\ a].$$

Систему всех $B(a)$ обозначим через S/E.

В дальнейшем предполагается, что эквивалентность E регулярна. Теперь мы можем определить умножение в S/E. Пусть $B(a_1)$, $B(a_2)$ — два класса эквивалентности E. Множество $B(a_1) \odot B(a_2)$, элементы которого имеют вид h_1h_2, где $h_1 \in \in B(a_1)$ и $h_2 \in B(a_2)$, целиком содержится в некотором классе $B(a_3)$, что вытекает из регулярности эквивалентности E. Этот класс $B(a_3)$ мы и будем считать произведением классов $B(a_1)$ и $B(a_2)$

$$B(a_1)\ .\ B(a_2) = B(a_3).$$

(2,1) *Пусть E — регулярная эквивалентность на семигруппе S. Пусть E допускает двустороннее сокращение. Тогда S/E образует семигруппу относительно только-что определенного произведения.*

Доказательство можно опустить [4].

(2,2) *Пусть H — гомоморфизм $S \to S'$ двух семигрупп. Тогда существует эквивалентность E семигруппы S со следующими свойствами:*

1. *E — регулярна и допускает двустороннее сокращение,*
2. *$S/E \cong S'$.*

Для доказательства этой теоремы введем определение: если $a \in S$, то

$$B(a) = \underset{x}{E}[x \in S,\ H(x) = H(a)]$$

Легко доказать, что определенные таким образом $B(a)$ представляют собой классы некоторой эквивалентности E в S. Очевидно, E обладает всеми свойствами нашей теоремы.

(2,3) *Пусть S — некоторая семигруппа и V — система образующих для S. Пусть $\mathfrak{S}$ — свободная семигруппа, для которой V является системой свободных образующих. Тогда*

$$\mathfrak{S} \to S$$

Для доказательства поставим слову $\sigma = s_1s_2 \ldots s_n$ в соответствие произведение элементов $s_1s_2 \ldots s_n$, являющееся элементом S. Так как V — система образующих для S, то всякий элемент из S соответствует по меньшей мере одному слову из $\mathfrak{S}$. Отображение H множества $\mathfrak{S}$ на S, определенное этим соответствием, удовлетворяет очевидно условию

$$H(\sigma_1\sigma_2) = H(\sigma_1)\,H(\sigma_2)$$

для любых двух $\sigma_1 \in \mathfrak{S}$, $\sigma_2 \in \mathfrak{S}$.

§ 3. Включимость.

Определение: Условимся называть семигруппу S включимой, если существует группа G', содержащая семигруппу S', для которой

$$S \cong S'$$

Это определение, очевидно, равносильно следующему:

Определение: Семигруппа S называется включимой, если имеется группа $G \supset S$.

(3,1) *Пусть S содержится в группе G_0. Пусть G — пересечение всех подгрупп из G_0, содержащих S. Пусть V — система образующих для S. Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}$ — свободная семигруппа и группа, для которых V является системой свободных образующих. Пусть, наконец, H — гомоморфизм $\mathfrak{S} \to S$, определенный в предыдущей теореме.*

Тогда существует гомоморфизм H^* групп $\mathfrak{G} \to G$, являющийся расширением гомоморфизма H.

Доказательство не представляет затруднений. Прежде всего очевидно (имея в виду предположение о существовании единичного элемента), что группа G состоит из всех возможных произведений вида

$$h_1h_2^{-1} \dots h_{2r-1}h_{2r}^{-1}$$

где $h_i \in S$. Возьмем теперь слово из группы $\mathfrak{G}$

$$\prod_{i=1}^{n} s_i^{\varepsilon_i}\,, \quad s_i \in V, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Если $n > 1$, то мы ставим требование, чтобы

$$1 \leqq i < n \text{ и } s_i = s_{i+1} \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$$

Определим теперь отображение H^* множества $\mathfrak{G}$ в G:

$$H^*\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{\varepsilon_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} (H(s_i))^{\varepsilon_i}$$

Нетрудно доказать, что уравнение

$$H^*(\mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2) = H^*(\mathfrak{w}_1)\,H^*(\mathfrak{w}_2)$$

справедливо для каждой пары слов $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in \mathfrak{G}$. Но V является системой образующих для G. Отсюда следует, что для каждого элемента $g \in G$ можно подобрать хотя бы одно слово $\mathfrak{w} \in \mathfrak{G}$ такое, что $H^*(\mathfrak{w}) = g$.

Из этого следует, что H^* будет отображением множества $\mathfrak{G}$ на G, и что H^* является гомоморфизмом $\mathfrak{G} \to G$.

Одновременно из определения отображения H^* вытекает, что оно обладает свойствами, упомянутыми в нашей теореме.

(3,2) *Пусть S — включимая семигруппа и V — система ее образующих. Пусть $\mathfrak{S}$ — свободная семигруппа, и $\mathfrak{G}$ — свободная группа, для которых V является системой свободных образующих. Тогда эквивалентность E семигруппы $\mathfrak{S}$, соответствующая гомоморфизму H $\mathfrak{S} \to S$, будет эквивалентностью, порожденной на $\mathfrak{S}$ посредством некоторой регулярной эквивалентности группы $\mathfrak{G}$.*

Пусть $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, соответствующий гомоморфизму $H^*\mathfrak{G} \to G$, построенному в теореме (3,1). Для доказательства нашей теоремы достаточно убедиться в том, что для любого $\alpha \in \mathfrak{S}$

$$B(\alpha) = \alpha\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$$

В самом деле, $h_1 \in B(h) \Rightarrow h_1Eh \Rightarrow H(h_1) = H(h) \Rightarrow H^*(h_1) = H^*(h) \Rightarrow h_1 \equiv h \bmod \mathfrak{N} \Rightarrow h_1 \in h\mathfrak{N}$.

Далее имеем $h_1 \in \mathfrak{S}$ так что $h_1 \in h\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$ и $B(h) \subset h\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$. С другой стороны, пусть $h_1 \in h\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$, где $h \in \mathfrak{S}$. Тогда $h_1 \in h\mathfrak{N} \Rightarrow H^*(h_1) = H^*(h_1) \Rightarrow H(h_1) = H(h) \Rightarrow h_1Eh \Rightarrow h_1 \in B(h)$. Отсюда $h\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} \subset B(h)$, что и доказывает нашу теорему.

Только что высказанное необходимое условие является одновременно и достаточным. Это вытекает из следующей теоремы:

(3,3) *Пусть S — семигруппа и V — система ее образующих. Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}$ — свободная семигруппа и группа, для которых V является системой свободных образующих. Пусть E — эквивалентность семигруппы $\mathfrak{S}$, соответствующая гомоморфизму H $\mathfrak{S} \to S$. Пусть эквивалентность E порождается на $\mathfrak{S}$ некоторой регулярной эквивалентностью группы $\mathfrak{G}$. Тогда семигруппа S включительна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, соответствующий данной регулярной эквивалентности группы $\mathfrak{G}$. Покажем, что группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ содержит семигруппу, изоморфиую S. Если для $\alpha \in \mathfrak{S}$ классу $\alpha\mathfrak{N}$ поставить в соответствие пересечение $\alpha\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$, то мы получим взаимно однозначное соответствие между классами $B(\alpha) = \alpha\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$ из

$\mathfrak{S}/E$ и множеством классов $\alpha\mathfrak{N}$, где $\alpha \in \mathfrak{S}$. Нетрудно доказать, что это соответствие будет изоморфизмом. Между тем

$$\mathfrak{S}/E \cong S$$

и S — включимая семигруппа.

Непосредственное следствие (3,3) и (3,2) выражается слесующей теоремой.

(3,4) *Пусть S — семигруппа и V — система ее образующих. Пусть $\mathfrak{G}$ — свободная группа, для которой V является системой свободных образующих. Для того, чтобы S была включимой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ обладала нормальным делителем $\mathfrak{N}$ со следующим свойством:*

Для каждой пары слов α, $\beta \in \mathfrak{S}$ имеет место

$$\alpha E\beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta \bmod \mathfrak{N}$$

В дальнейшем мы предполагаем, что дана семигруппа S и система V ее образующих. $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}$ имеют то же значение, как и в (3,4). Эквивалентность семигруппы $\mathfrak{S}$, соответствующую гомоморфизму H $\mathfrak{S} \to S$, обозначим через E.

Выберем теперь следующее подмножество из $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{M}_r = \underset{y}{E}[y \in \mathfrak{G},\ y = \alpha\beta^{-1},\ \alpha \in \mathfrak{S},\ \beta \in \mathfrak{S},\ \alpha E\beta]$$

Легко убедиться, что имеет место

$$\alpha E\beta \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$$

Множество $\mathfrak{M}_r$ мы назовем множеством отношений соответствующим эквивалентности E, и элементы эго — отношениями. Обозначим через $\{\mathfrak{M}_r\}$ пересечение всех подгрупп из $\mathfrak{G}$, которые содержат $\mathfrak{M}_r$. Через $[\mathfrak{M}_r]$ обозначим пересечение всех нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$, которые содержат $\mathfrak{M}_r$. Очевидно

$$\{\mathfrak{M}_r\} = \mathfrak{M}_r \cup \mathfrak{M}_r^2 \cup \mathfrak{M}_r^3 \cup \ldots$$

(3,5) *Если S — включимая семигруппа, то*

$$\mathfrak{N} \supset [\mathfrak{M}_r]$$

Доказательство: $\mu \in \mathfrak{M}_r \Rightarrow \mu = \alpha\beta^{-1}$, где $\alpha \in \mathfrak{S}$, $\beta \in \mathfrak{S}$, $\alpha\ E\ \beta$, следовательно $\alpha \equiv \beta \bmod \mathfrak{N}$, откуда $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{N}$. Мы получили $\mathfrak{M}_r \subset \mathfrak{N}$, откуда $[\mathfrak{M}_r] \subset \mathfrak{N}$, что и требовалось доказать.

Теперь мы сформулируем общее условие включимости.

(3,6) *Для того, чтобы семигруппа S была включимой, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары $\alpha \in \mathfrak{S}$, $\beta \in \mathfrak{S}$*

$$\alpha\beta^{-1} \in [\mathfrak{M}_r] \Rightarrow \alpha E\beta$$

Условие необходимо: В самом деле, если S включима, то ввиду (3,4) существует нормальный делитель $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, обладающий следующим свойством:

$$\alpha \equiv \beta \bmod \mathfrak{N} \Leftrightarrow \alpha E \beta$$

Но если $\alpha \equiv \beta \bmod [\mathfrak{M}_r]$, то в силу (3,5) $\alpha \equiv \beta \bmod \mathfrak{N}$, откуда $\alpha\ E\ \beta$.

Условие достаточно: Для доказательства заметим, что всегда

$$\alpha E \beta \Rightarrow \alpha \equiv \beta \bmod [\mathfrak{M}_r]$$

Если теперь выплонено условие (3,6), мы видим, что в $\mathfrak{G}$ содержиться нормальный делитель $[\mathfrak{M}_r]$, обладающий следующим свойством:

$$\alpha \equiv \beta \bmod [\mathfrak{M}_r] \Leftrightarrow \alpha E \beta$$

Из (3,4) следует теперь, что S включимая семигруппа. Это и доказывает теорему.

§ 4. Множество отношений.

В этом параграфе мы будем изучать некоторые свойства множества отношений $\mathfrak{M}_r$ и группы, образованной этим множеством. Во избежание недоразумений введем раз навсегда различные обозначения для свободных образующих и для слов семигруппы $\mathfrak{S}$. Поэтому мы будем пользоваться малыми латинскими буквами для элементов V и малыми греческими буквами для слов из $\mathfrak{S}$.

Прежде всего докажем следующую теорему

(4,1) Если $\alpha\beta^{-1} \in \{\mathfrak{M}_r\}$, то $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$

Доказательство: Мы видели, что

$$\{\mathfrak{M}_r\} = \mathfrak{M}_r \cup \mathfrak{M}_r^2 \cup \mathfrak{M}_r^3 \cup \ldots$$

так что каждый элемент из $\{\mathfrak{M}_r\}$ можно написать в виде

$$m_1 m_2 \ldots m_n, \quad m_i \in \mathfrak{M}_r$$

Докажем нашу теорему методом индукции, а именно по чслиу сомножителей произведения $m_1 m_2 \ldots m_n$.

Случай $n = 1$ тривиален. Предположим поэтому, что $n > 1$ и что теорема доказана для произведений с количеством сомножителей, меньшим чем n. Пусть

$$\alpha\beta^{-1} = m_1 m_2 \ldots m_n, \text{ где } m_i \in \mathfrak{M}_r.$$

Пусть, кроме того,

$$\alpha = a_1 \ldots a_p$$
$$\beta = b_1 \ldots b_q$$
$$m_i = (a_{i1} \ldots a_{ik_i})(b_{i1} \ldots b_{il_i})^{-1}$$

Далее мы предположим, что

$$a_p \neq b_q$$
$$a_{ik_i} \neq b_{il_i} \quad 1 \leqq i \leqq n$$

Легко убедиться, что эти предположения не ограничивают общности. Положим далее

$$\alpha_i = a_{i1} \ldots a_{ik_i}$$
$$\beta_i = b_{i1} \ldots b_{il_i}$$

Для каждого i, $1 \leqq i \leqq n$ пусть $\mathfrak{w}_i$ означает произведение

$$\mathfrak{w}_i = \alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2^{-1} \ldots \alpha_i$$

Пусть j — наибольшее натуральное число, для которого $\mathfrak{w}_j \in \mathfrak{S}$. (Очевидно, всегда существует хоть одно i, для которого $\mathfrak{w}_i \in \mathfrak{S}$.) Мы будем различать три случая.

C1. $j = n$. Произведение $m_1m_2 \ldots m_{n-1} = g$ имеет в этом случае следующее свойство: $g\alpha_n$ является словом $\vartheta \in \mathfrak{S}$. Отсюда

$$m_1m_2 \ldots m_{n-1} = \gamma\delta^{-1}$$

где γ, δ — слова из $\mathfrak{S}$. Отсюда далее следует

$$m_1m_2 \ldots m_{n-1} = m_0 \in \mathfrak{M}_r$$

так что

$$\alpha\beta^{-1} = m_0m_n$$

C2. $1 < j < n$. Произведение $m_1m_2 \ldots m_j$ имеет вид $\gamma\delta^{-1}$, где γ, δ — слова из $\mathfrak{S}$. Теперь $j < n$, откуда

$$m_1m_2 \ldots m_j = m_0 \in \mathfrak{M}_r$$

так что

$$m_1m_2 \ldots m_n = m_0m_{j+1}m_{j+2} \ldots m_n$$

Так как $n - j + 1 < n$, получаем

$$\alpha\beta^{-1} = m_1 \ldots m_n \in \mathfrak{M}_r$$

C3. $j = 1$. Пусть $c_1^{\varepsilon_1}c_2^{\varepsilon_2} \ldots c_k^{\varepsilon_k}$ будет тем элементом свободной группы $\mathfrak{G}$, который получается вычислением произведения

$m_1 m_2 \ldots m_n$. Заметим, что в случае $k > 1$ имеет место импликация

$$1 \leqq i < k, \ c_i = c_{i+1} \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$$

Этот элемент мы будем называть нормальным представлением произведения $m_1 m_2 \ldots m_n$. Нам придется различать два случая:

C31. $$1 \leqq i \leqq k_1 \Rightarrow \varepsilon_i = 1$$

Покажем, что в этом случае

$$1 \leqq i \leqq k_1 \Rightarrow c_i = a_{1i} \tag{1}$$

Предположим наоборот, что импликация (1) не имеет места. Тогда существует натуральное число i такое, что

$$1 \leqq i \leqq k_1 \quad \text{и одновременно} \quad c_i \neq a_{1i} \tag{2}$$

Пусть i означает наименьшее натуральное число со свойством (2). Тогда имеем

$$1 \leqq l \leqq i - 1 \Rightarrow c_l = a_{1l}$$

$$c_i \neq a_{1i}$$

Начало нормального представления произведения $\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2^{-1} \ldots$ $\ldots \alpha_n\beta_n^{-1}$ имеет вид

$$a_{1,k_1}^{-1} a_{1,k_1-1}^{-1} \ldots a_{1,i}^{-1} c_i \ldots$$

Пусть g_s — нормальное представление элемента $\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2^{-1} \ldots \alpha_s$. Пусть r — наименьшее натуральное число, для которого g_r имеет начало вида

$$a_{1,k_1}^{-1} a_{1,k_1-1}^{-1} \ldots a_{1,i}^{-1} c_i \ldots$$

Тогда показатели всех образующих, следующих за c_i в нормальном представлении g_r положительны, ибо в противном случае r не могло бы быть *наименьшим* натуральным числом указанного свойства. Отсюда

$$\alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2^{-1} \ldots \alpha_r \in \mathfrak{S}$$

При этом однако $r > 1$, что противоречит допущению $j = 1$. Итак, согласно (1) имеем

$$a_1 \ldots a_p = \alpha_1\lambda \quad \lambda \in \mathfrak{S}$$

так что

$$\alpha\beta^{-1} = \alpha_1\beta_1^{-1}\, m_2 \ldots m_n$$

$$\alpha_1\lambda\beta^{-1} = \alpha_1\beta_1^{-1}\, m_2 \ldots m_n$$

$$\beta_1\lambda\beta^{-1} = m_2 \ldots m_n = m_0 \in \mathfrak{M}_r$$

и следовательно

$$\alpha\beta^{-1} = m_1 m_0$$

C32. Существует натуральное i такое, что

$$1 \leqq i \leqq k_1 \quad \text{и одновременно} \quad \varepsilon_i = -1 \tag{3}$$

Пусть i — наименьшее натуральное число со свойством (3). Нетрудно доказать, что нормальное представление $m_1 m_2 \ldots m_n$ имеет вид

$$a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1,\,i-1}c_i^{-1} \ldots$$

Все образующие, следующие за c_i, имеют отрицательные показатели. Отсюда

$$\alpha\beta^{-1} = a_{11}a_{12} \ldots a_{1,\,i-1}c_i^{-1} \ldots$$

так что

$$\alpha = a_{11}a_{12} \ldots a_{1,\,i-1}$$

Имеем

$$\alpha\beta^{-1} = (\alpha a_{1,\,i}a_{1,\,i+1} \ldots a_{1,k_1})\, \beta_1^{-1} m_2 m_3 \ldots m_n$$

$$\beta_1(a_{1,\,i}a_{1,\,i+1} \ldots a_{1,\,k_1})^{-1}\beta^{-1} = m_2 \ldots m_n$$

Произведение $m_2 \ldots m_n$ содержит менее чем n сомножителей m_i, так что $m_2 \ldots m_n = m_0 \in \mathfrak{M}_r$, а значит и

$$\alpha\beta^{-1} = m_1 m_0$$

Остается доказать, что

$$\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r^2 \Rightarrow \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$$

Пусть

$$\alpha\beta^{-1} = (c_1 \ldots c_r)\,(d_1 \ldots d_s)^{-1}\,(e_1 \ldots e_t)\,(f_1 \ldots f_u)^{-1}$$

где

$$(c_1 \ldots c_r)\,(d_1 \ldots d_s)^{-1} \in \mathfrak{M}_r$$

$$(e_1 \ldots e_t)\,(f_1 \ldots f_u)^{-1} \in \mathfrak{M}_r$$

Без ограничения общности можно предположить

$$c_r \neq d_s$$

$$e_t \neq f_u$$

Будем различать два случая:

(1) $$d_1 \ldots d_s = e_1 \ldots e_t g_1 \ldots g_k$$

Тогда

$$\alpha\beta^{-1} = (c_1 \ldots c_r)\,(f_1 \ldots f_u g_1 \ldots g_k)^{-1}$$

Однако теперь $g_k = d_s \neq c_r$, откуда

$$\alpha = c_1 \dots c_r$$
$$\beta = f_1 \dots f_u g_1 \dots g_k$$

Теперь $\alpha \; E \; c_1 \dots c_r \; E \; d_1 \dots d_s \; E \; e_1 \dots e_t \, g_1 \dots g_k \; E \; f_1 \dots f_u \cdot$
$\cdot \, g_1 \dots g_k \quad E\beta$ так что $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$

(2) $$e_1 \dots e_t = d_1 \dots d_s h_1 \dots h_k$$

В этом случае

$$\alpha\beta^{-1} = (c_1 \dots c_r h_1 \dots h_k)\,(f_1 \dots f_u)^{-1}$$

однако $f_u \neq e_t = h_k$, так что

$$\alpha = c_1 \dots c_r h_1 \dots h_k$$
$$\beta = f_1 \dots f_u$$

Теперь $\alpha \; E \, c_1 \dots c_r \, h_1 \dots h_k \; E \; d_1 \dots d_s \, h_1 \dots h_k \; E \; e_1 \dots e_t \; E \; f_1 \dots f_u \; E\beta$ так что $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$

Это вполне доказывает теорему.

Приводим краткое доказательство предыдущей теоремы (4,1). Все обозначения остаются в силе.

Пусть $\alpha\beta^{-1} \in \{\mathfrak{M}_r\}$. Тогда будет $\alpha\beta^{-1} = m_1 m_2 \dots m_n$, где $m_i \in \mathfrak{M}_r$.

Если $n = 1$, теорема справедлива; поэтому пусть $n > 1$.

Пусть $m_i = \alpha_i \beta_i^{-1}$ и m_i записаны в приведенном виде, т. е. последний элемент слова α_i отличен от последнего элемента слова β_i.

Допустим, что можно написать для $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\beta_i = \sigma_i \delta_i$$
$$\alpha_{i+1} = \sigma_i \gamma_{i+1}$$

причем возьмем наибольшее σ_i, т. е. первый элемент δ_i отличен от первого элемента слова γ_{i+1}. Положим кроме того $\alpha_1 = \gamma_1$, $\beta_n = \delta_n$. Тогда получим

$$\alpha\beta^{-1} = \gamma_1 \delta_1^{-1} \gamma_2 \delta_2^{-1} \dots \gamma_n \delta_n^{-1} \tag{1}$$

Допустим, что ни одно из слов δ_i, γ_{i+1} $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ не является пустым. Тогда правая часть (1) имеет уже нормальный вид (ввиду допущения, что σ_i максимально). Для пары $\delta_i^{-1}\gamma_{i+1}$ (а такая пара существует, так как $n > 1$) мы получили бы последовательность показателей $-1, \dots, -1, +1, \dots, +1$, что находится в противоречии с левой частью. Итак, одно из слов, напр. δ_i, должно быть хоть для одного i пустым, т. е. $\beta_i = \sigma_i$, $\alpha_{i+1} = \sigma_i \gamma_{i+1}$. Отсюда следует

$$\beta_i \gamma_{i+1} \; E \; \beta_{i+1}$$

откуда

$$\alpha_i \gamma_{i+1} \; E \; \beta_i \gamma_{i+1} \; E \; \beta_{i+1}$$

а значит и

$$m_i m_{i+1} = \alpha_i \gamma_{i+1} \beta_{i+1}^{-1} \in \mathfrak{M}_r.$$

Следовательно, $\alpha\beta^{-1}$ можно записать в виде произведения $n-1$ элементов из $\mathfrak{M}_r$; аналогично в случае, когда γ_{i+1} пусто. Теорема доказана.*)

*) Это доказательство сообщил редакции *Вацлав Альда.*

Простым следствием теоремы (4,1) являестя теорема

(4,2) *Пусть подгруппа* $\{\mathfrak{M}_r\}$ *нормальна. Тогда* S *— включимая семигруппа.*

Доказателство не представляет трудностей.

$$\alpha\beta^{-1} \in [\mathfrak{M}_r] \Rightarrow \alpha\beta^{-1} \in \{\mathfrak{M}_r\} \Rightarrow \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$$

так что условие (3,5) выполнено.

Мы видели, что каждая семигруппа S дана некоторой регулярной эквивалентностью E с двусторонним сокращением на надлежаще выбранной свободной семигруппе $\mathfrak{S}$. В § 3 настоящей работы мы поставили с соответствие этой эквивалентности множество отношений $\mathfrak{M}_r$ так, что имеет место

$$\alpha E\beta \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$$

Предыдущий резултат (4,1) можно дополнить следующим замечанием:

(4,3) *Пусть или* $g \in \mathfrak{S}$ *или* $g \in \mathfrak{S}^{-1}$. *Пусть* $\alpha\beta^{-1} \in g\{\mathfrak{M}_r\}\, g^{-1}$; *тогда* $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$.

Доказательство: Пусть прежде всего $g = \sigma \in \mathfrak{S}$. Тогда $\alpha\beta^{-1} = \sigma(m_1 m_2 \ldots m_n)\,\sigma^{-1}$, где $m_i \in \mathfrak{M}_r$. Теперь $\alpha\beta^{-1} = \sigma m_1\sigma^{-1}\,.\,.\,\sigma m_2\sigma^{-1}\ldots\sigma m_n\sigma^{-1}$, причем для всех i будет $\sigma m_i\sigma^{-1} \in \mathfrak{M}_r$, так что $\alpha\beta^{-1} \in \{\mathfrak{M}_r\}$, и значит, согласно (4,1) получим $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$.

Если же, во вторых, $g = \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}^{-1}$, имеем $\alpha\beta^{-1} \in \sigma^{-1}\{\mathfrak{M}_r\}\,\sigma$ или $\sigma\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1} \in \{\mathfrak{M}_r\}$, откуда согласно (4,1) $\sigma\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1} \in \mathfrak{M}_r$, а следовательно $\sigma\alpha\ E\ \sigma\beta$, так что $\alpha\ E\ \beta$, или $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$.

Подставим теперь следующий вопрос:

Пусть дана система свободных образующих V, соответствующая свободная семигруппа $\mathfrak{S}$ и некоторое множество $\mathfrak{R}$, состоящее из элементов вида $\alpha\beta^{-1}$, где $\alpha \in \mathfrak{S}$ и $\beta \in \mathfrak{S}$. Мы спрашиваем, при каких условиях $\mathfrak{R}$ будет множеством отношений некоторой регулярной эквивалентности E с двусторонным сокращением. Этот вопрос мы сформулируем следующим образом:

Определим на $\mathfrak{S}$ бинарное отношение R таким образом:

$$\alpha R\beta \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{R} \tag{4}$$

Тогда наш вопрос сводится к следуюшему: Какими свойствами должно обладать $\mathfrak{R}$, чтобы отношение R было регулярной эквивалентностью с двусторонным сокращением. Из предыдущего результата следует, что необходимым условием для $\mathfrak{R}$ является выпольнение свойства (4,3). Это условие будет, однако, и достаточным, как вытекает из

(4,4) *Свойство* **(4,3)** *является для множеств отношений характеристическим.*

Доказательство: В самом деле, пусть $\mathfrak{R}$ — множество элементов вида $\alpha\beta^{-1}$, для которого выполняется следующее условие: Если $g \in \mathfrak{S}$ или $g \in \mathfrak{S}^{-1}$ и имеет место $\alpha\beta^{-1} \in g\{\mathfrak{R}\}\, g^{-1}$, то $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{R}$. Нам нужно доказать, что отношение R, определенное соотношением (4), является регулярной эквивалентностью с двусторонним сокращением.

Так как $\alpha\alpha^{-1} = 1 \in \{\mathfrak{R}\}$, будет $\alpha\alpha^{-1} \in \mathfrak{R}$ и R, следовательно, рефлексивно. Если далее $\alpha\, R\, \beta$, то $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{R}$, так что $\beta\alpha^{-1} = (\alpha\beta^{-1})^{-1} \in \{\mathfrak{R}\}$, а значит и $\beta\alpha^{-1} \in \mathfrak{R}$, откуда $\beta\, R\, \alpha$, что доказывает свойство симметрии отношения R. Пусть далее

$$\alpha\, R\, \beta,\ \beta\, R\, \gamma$$

Это значит $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{R}$, $\beta\gamma^{-1} \in \mathfrak{R}$. Но тогда $\alpha\gamma^{-1} = (\alpha\beta^{-1})\,(\beta\gamma^{-1}) \in \{\mathfrak{R}\}$, то есть $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{R}$, так что R транзитивно.

Итак, мы видим, что отношение R является эквивалентностью. Пусть теперь $\alpha\, R\, \beta$ и σ — данное слово. Тогда $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{R}$ и $\sigma\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1} \in \sigma\mathfrak{R}\sigma^{-1}$, следовательно, по нашему условию $\sigma\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1} \in \mathfrak{R}$, откуда $\sigma\alpha\, R\, \sigma\beta$.

С другой стороны имеем также $\alpha\sigma\, R\, \beta\sigma$, ибо $\alpha\sigma(\beta\sigma)^{-1} = \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{R}$.

Пусть $\sigma\alpha\, R\, \sigma\beta$. Тогда $\alpha\beta^{-1} = \sigma^{-1}(\sigma\alpha\beta^{-1}\sigma^{-1})\,\sigma \in \sigma^{-1}\mathfrak{R}\sigma$, т. е. снова $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{R}$, так что $\alpha\, R\, \beta$. Если $\alpha\sigma\, R\, \beta\sigma$, то $\alpha\beta^{-1} = \alpha\sigma(\beta\sigma)^{-1} \in \mathfrak{R}$, следовательно $\alpha\, R\, \beta$. Этим доказательство закончено.

В настоящем параграфе мы будем подробно изучать вопрос, при каких условиях подгруппа $\{\mathfrak{M}_r\}$ может быть нормальной; этим мы дополним теорему (4,2). Мы увидим, что $\{\mathfrak{M}_r\}$ может быть нормальной лишь в особых случаях. Действительно, имеет место теорема

(4,5) *Подгруппа $\{\mathfrak{M}_r\}$ нормальна тогда и только тогда, когда настанет один из следующих случаев:*

1. *S — свободная семигруппа,*
2. *S — группа.*

Доказательство: Пусть $\{\mathfrak{M}_r\}$ нормальна. Могут настать два случая:

1. $\{\mathfrak{M}_r\}$ — единичная подгруппа и, следовательно, S — свободная семигруппа.

2. $\{\mathfrak{M}_r\}$ не является единичной. Тогда мы будем различать несколько дальнейших случаев:

21. $\mathfrak{M}_r$ содержит только слова вида α или α^{-1}, где $\alpha \in \mathfrak{S}$. Возьмем произвольное $\alpha \in \mathfrak{M}_r \cap \mathfrak{S}$ такое, что α непусто. Это возможно, так как по предположению $\{\mathfrak{M}_r\}$ не является единичной.

211. Существует α с указанными свойствами, имеющее длину 1. В таком случае возьмем одно из таких α; тогда имеем $\alpha = a \in V$. Пусть $b \in V$. Тогда $bab^{-1} \in [\mathfrak{M}_r] = \{\mathfrak{M}_r\}$ и согласно (4,1) $bab^{-1} \in \mathfrak{M}_r$, значит должно быть $b = a$, ибо в противном случае возникло бы противоречие с допущением (21). Итак, случай (211) означает, что у $\mathfrak{S}$ имеется лишь один образующий элемент и что S — единичная семигруппа, так что S — группа.

212. Длина каждого α, со свойствами, указанными в (21), больше 1.

Пусть $\alpha \in \mathfrak{S}$, $\beta \in \mathfrak{S}$ — два слова, для которых

$$\alpha\, E\, 1, \;\; \beta\, E\, 1.$$

Пусть $\alpha = a_1 \dots a_r$, $\beta = b_1 \dots b_s$, так что будет $r > 1$, $s > 1$. Далее мы предполагаем, что ни один собственный сегмент слова α не лежит в $\mathfrak{M}_r$, то есть, что имеет место импликация

$$1 < i < r \Rightarrow a_1 \dots a_i \operatorname{non} E\, 1$$

Одинаковое предположение сделаем и относительно β.

Докажем теперь, что при этих условиях должно быть $\alpha = \beta$. Так как $\alpha\, E\, 1\, E\, \beta$, будет $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$. Однако, теперь в силу предположения (21) $\alpha\beta^{-1}$ должно дать после сокращения слово или $\in \mathfrak{S}$ или $\in \mathfrak{S}^{-1}$.

В первом случае имеем $\alpha\beta^{-1} = \lambda_1 \in \mathfrak{S}$, тал что $\alpha = \lambda_1\beta$. Но тогда $\lambda_1\, E\, \lambda_1\beta\, E\, \alpha\, E\, 1$, так что должно быть $\lambda_1 = 1$, так как его длина не может быть ни 1 (ввиду предположения (212)), ни > 1, иначе оно было бы собственным сегментом слова α.

Во втором случае имеем $\alpha\beta^{-1} = \lambda^{-1} \in \mathfrak{S}^{-1}$, так что $\lambda_2\alpha = \beta$. Но тогда $\lambda_2\, E\, \lambda_2\alpha\, E\, \beta\, E\, 1$, и по тем же причинам, как и в первом случае, должно быть $\lambda_2 = 1$.

Мы доказали, что при выпольнении высказанных условий должно быть $\alpha = \beta$. Инными словами: существует слово

$$\alpha = a_1 \dots a_r \;\; (r > 1)$$

такое, что для каждого $\beta \in \mathfrak{S}$, $\beta\, E\, 1$, ни один собственный сегмент которого не лежит в $\mathfrak{M}_r$, имеет место

$$\beta = \alpha.$$

Пусть теперь $\sigma \in \mathfrak{S}$, $\sigma\, E\, 1$: мы можем писать

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k,$$

где $\sigma_i \in \mathfrak{S}$, $\sigma_i\, E\, 1$ и при этом ни один собственный сегмент слова σ_i не лежит в $\mathfrak{M}_r$. По только что доказанному должно выть $\sigma_i = \alpha$ для каждого i $(i = 1, 2, \dots, k)$. Это значит что имеет место следующая импликация

$$\sigma \in \mathfrak{S}, \; \sigma\, E\, 1 \Rightarrow \sigma = \alpha^k \qquad k = 1, 2, \dots$$

Докажем теперь что из нормальности $\{\mathfrak{M}_r\}$ вытекает существование такого $a \in V$ что $\alpha = a^r$.

Для каждого i $(1 \leqq i \leqq r)$ обозначим через μ_i произведение $a_i a_{i+1} \dots a_r$. Но из нормальности $\{\mathfrak{M}_r\}$ вытекает

$$\alpha_i = a_i a_{i+1} \dots a_r\, a_1 a_2 \dots a_{i-1} = \mu_i \alpha \mu_i^{-1} \in [\mathfrak{M}_r] = \{\mathfrak{M}_r\},$$

и значит, согласно (4,1) получим

$$\alpha_i = a_i a_{i+1} \dots a_r a_1 a_2 \dots a_{i-1} \in \mathfrak{M}_r$$

Введем обозначение: $\alpha_i = b_1 b_2 \dots b_r$. Пусть j — первое натуральное число, для которого

$$b_1 b_2 \dots b_j\, E\, 1$$

В силу предположения (212) не может быть $j = 1$. По только что доказанному должно быть $b_1 \dots b_j = \alpha$ и значит, ввиду того, что длина слова α равна как раз r, должно быть $j = r$, или $\alpha_i = \alpha$. Это справедливо для любого i $(1 \leqq i \leqq r)$, так что мы получим

$$a_1 = a_2 = \dots = a_r = a$$

это значит, что $\alpha = a^r$, где $a \in V$.

Тогда, если $b \in V$, должно быть

$$b a^r b^{-1} \in [\mathfrak{M}_r] = \{\mathfrak{M}_r\},$$

и согласно (4,1) $b a^r b^{-1} \in \mathfrak{M}_r$. Из предположения (21) вытекает однако, что $b = a$, т. е. у $\mathfrak{S}$ имеется единственный образующий элемент, $\{\mathfrak{M}_r\} = [\mathfrak{M}_r]$ является подгруппой, образованной a^r; следовательно, S — конечная циклическая группа порядка r.

Обратим еще внимание на то, что из предположения (21) в обоих случаях вытекало, что у $\mathfrak{S}$ имеется единственный образующий элемент.

22. $\mathfrak{M}_r$ содержит отношения вида $\alpha\beta^{-1}$, не принадлежащие ни $\mathfrak{S}$ ни $\mathfrak{S}^{-1}$. Прежде всего установим, что из нормальности $\{\mathfrak{M}_r\}$ следует

$$\alpha_1\, E\, \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1^{-1}\alpha_2 \in \{\mathfrak{M}_r\}$$

В самом деле,

$$\alpha_1\, E\, \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2\alpha_1^{-1} \in \mathfrak{M}_r \Rightarrow \alpha_1^{-1}\alpha_2 = \alpha_1^{-1}(\alpha_2\alpha_1^{-1})\,\alpha_1 \in [\mathfrak{M}_r] = \{\mathfrak{M}_r\}$$

Возьмем поэтому отношение $\sigma\, E\, \tau$, где

$$\sigma = s_1 \dots s_p$$
$$\tau = t_1 \dots t_q$$

причем

$$p > 0,\ q > 0,\ s_1 \neq t_1.$$

Теперь

$$\sigma^{-1}\tau = m_1 m_2 \dots m_n$$

где $m_i \in \mathfrak{M}_r$ $(1 \leq i \leq n)$. Пусть — для $i = 1, 2, \ldots, n$ — g_i значит нормальное представление элемента $m_1 m_2 \ldots m_i$. В последовательности

$$g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1$$

имеется последний элемент g_i такой, что начинается с σ^{-1}, т. е. $g_i = \sigma^{-1}\mathfrak{w}$. Докажем теперь, что в слове $\mathfrak{w}$ у всех образующих отрицательный показатель, поскольку $\mathfrak{w}$ не является пустым словом. С этой целью мы будем различать два случая:

$i = 1$. В этом случае $\sigma^{-1}\mathfrak{w} = \alpha_1\beta_1^{-1}$, так что должно быть $\alpha_1 = 1$ и поэтому показатели всех образующих слова $\mathfrak{w}$ отрицательны.

$i > 1$. Тогда будет $g_{i-1} = \sigma^{-1}\mathfrak{w}\beta_i\alpha_i^{-1}$, однако, при этом его нормальный вид *не* начинается с σ^{-1}. Это возможно лишь тогда, когда все показатели слова $\mathfrak{w}$ отрицательны.

Итак, $\mathfrak{w} = \pi^{-1}$, где $\pi \in \mathfrak{S}$.

Но теперь $g_i = \sigma^{-1}\pi^{-1} \in \{\mathfrak{M}_r\}$ и следовательно, согласно (4,1) $\sigma^{-1}\pi^{-1} \in \mathfrak{M}_r$, откуда

$$\pi\sigma \; E \; 1$$

Из нормальности $\{\mathfrak{M}_r\}$ далее следует

$$\sigma\pi = \sigma(\pi\sigma)\,\sigma^{-1} \in [\mathfrak{M}_r] = \{\mathfrak{M}_r\}$$

откуда с учетом (4,1) получаем $\sigma\pi \in \mathfrak{M}_r$ или

$$\sigma\pi \; E \; 1.$$

Итак, мы доказали, что:

если $s_1 \ldots s_p \; E \; t_1 \ldots t_q$, причем $p > 0$, $q > 0$, $s_1 \neq t_1$, то существует $\pi \in \mathfrak{S}$ такое, что

$$\sigma\pi \; E \; \pi\sigma \; E \; 1$$

Теперь мы докажем, что для каждого образующего элемента имеется обратный ему элемент. Пусть α, β — два непустых элемента семигруппы $\mathfrak{S}$ такие, что $\alpha \; E \; \beta$ при этом первые образующие элементов α и β различны. Пусть a — произвольный образующий элемент. Для слов αa, βa снова имеет место

$$\alpha a \; E \; \beta a$$

причем первые образующие этих слов различны. По только что показанному существуют $\sigma_1 \in \mathfrak{S}$ и $\sigma_2 \in \mathfrak{S}$ такие, что

$$\alpha a \sigma_1 \; E \; 1$$
$$\sigma_2 \alpha \; E \; 1$$

Но тогда

$$a\sigma_1\alpha \; E \; \sigma_2\alpha(a\sigma_1\alpha) \; E \; \sigma_2(\alpha a\sigma_1)\,\alpha \; E \; \sigma_2\alpha \; E \; 1$$

так что для a имеется обратный элемент.

Итак, S — группа, что доказывает первую часть нашей теоремы.

Вторая часть значительно легче. Если S свободна, то поэтому $\{\mathfrak{M}_r\}$ единичная, а значит и нормальная подгруппа. Далее, пусть S—группа. Нужно доказать, что $\{\mathfrak{M}_r\}$ нормальна. Для этого, очевидно, достаточно доказать следующее:

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{S}, \alpha\, E\, \beta \Rightarrow \gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}\gamma \in \{\mathfrak{M}_r\}$$

Так как S—группа, то существует $\delta \in \mathfrak{S}$ такое, что

$$\gamma\delta\, E\, \delta\gamma\, E\, 1$$

Теперь

$$\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}\gamma = (\gamma^{-1}\delta^{-1})\,(\delta\alpha\beta^{-1}\delta^{-1})\,(\delta\gamma)$$

причем сразу видно, что каждый из выделенных множителей содержится в $\mathfrak{M}_r$. Отсюда

$$\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}\gamma \in \{\mathfrak{M}_r\}$$

что и доказывает теорему.

§ 5. Условие Оре.

Семигруппы мы будем называть семигруппой Оре, если выполнено следующее условие:

Для каждой пары a, b элементов из S существуют два элемента $a_l \in S$, $b_l \in S$ такие, что

$$a_l a = b_l b$$

Докажем теперь, что каждая семигруппа Оре включима. Эту теорему нашел О. Оре, который ее доказал непосредственным построением дробей. Заметим, что это достаточное условие никоим образом не является необходимым, как доказывают простейшие примеры, напр. свободная семигруппа с двумя образующими.

(5,1) *Пусть S — семигруппа Оре. Тогда S включима.*

Доказательство: Пусть $\alpha\beta^{-1} \in [\mathfrak{M}_r]$; покажем, что $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$. Имеем

$$\alpha\beta^{-1} = \prod_{i=1}^{n} g_i m_i g_i^{-1}$$

где $g_i \in \mathfrak{G}$, $m_i \in \mathfrak{M}_r$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно все g_i могут быть написаны в виде

$$g_i = \alpha_{i1}\beta_{i1}^{-1}\alpha_{i2}\beta_{i2}^{-1} \ldots \alpha_{ir}\beta_{ir}^{-1} \tag{1}$$

с одинаковым r для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, причем $\alpha_{ik} \in \mathfrak{S}$, $\beta_{ik} \in \mathfrak{S}$.

Для доказательства воспользуемся методом индукции по индексу r. Если $r = 0$, получим $\alpha\beta^{-1} \in \{\mathfrak{M}_r\}$, откуда по (4,1) $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$. Предположим, что $r > 0$ и что теорема доказана для $r - 1$. Так как S является семигруппой Оре, существуют слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ семигруппы $\mathfrak{S}$ такие, что

$$\begin{gathered} \alpha_1\alpha_{11} \mathrel{E} \beta_1\beta_{11} \\ \alpha_2\alpha_1\alpha_{21} \mathrel{E} \beta_2\beta_{21} \\ \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_{31} \mathrel{E} \beta_3\beta_{31} \\ \cdots \\ \alpha_i \ldots \alpha_2\alpha_1\alpha_{i1} \mathrel{E} \beta_i\beta_{i1} \\ \cdots \end{gathered}$$

Введем обозначение $\alpha_0 = \alpha_n\alpha_{n-1} \ldots \alpha_2\alpha_1$. Тогда

$$\alpha_0\alpha\beta^{-1}\alpha_0^{-1} = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_n \ldots \alpha_{i+1}\, \alpha_i \ldots \alpha_1\, \alpha_{i1}\beta_{i1}^{-1}\beta_i^{-1}\alpha_{i+1}^{-1} \ldots \alpha_n^{-1})\,(\alpha_n \ldots$$
$$\ldots \alpha_{i+1}\beta_i\alpha_{i2} \ldots \alpha_{i2}^{-1}\beta_i^{-1}\alpha_{i+1}^{-1} \ldots \alpha_n^{-1})(\alpha_n \ldots \alpha_{i+1}\beta_i\beta_{i1}\alpha_{i1}^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots \alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}^{-1} \ldots \alpha_n^{-1})$$

Первая и третья скобка являются элементами $\mathfrak{M}_r$. Средняя скобка имеет снова вид gmg^{-1}; встречающиеся здесь g имеют опять вид (1), но с индексами $r - 1$ вместо r. Следовательно, $\alpha_0\alpha\beta^{-1}\alpha_0^{-1} \in \mathfrak{M}_r$, так что $\alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}_r$, что и доказывает теорему.

Summary.

Immersibility of Semigroups.

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

(Received March 19th, 1952).

This is an extract from a paper published by the author in „*Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou university Karlovy*". (Ref. [5] of the Bibliography at the end of this paper.)

The problem treated is the following one: what are the sufficient and necessary conditions for the existence of a group, containing a given semigroup. The paper in question has been written in June 1947, i. e. at a time when our knowledge of Russian literature published during the war was still a very incomplete one. At the same time the *Mathematical Reviews* were just beginning to come in. Owing to these facts the author did not know of the existence of the papers [6], [7] of Malcev, which contain a solution of the problem mentioned above. Nevertheless both the method used and the result obtained by Malcev are different from those of the author, so that — after some hesitation — the author decided to publish an extract from the paper [5] containing his own solution. Anyhow, the second part of [5] deals with questions which are not discussed by Malcev. A brief account of the paper follows.

In elementary textbooks on algebra a well known theorem is proved, stating that every commutative ring without divisors of zero may be imbedded in a field. In the first edition of his *Moderne Algebra* van der Waerden mentioned the following problem: Is the same possible even for non-commutative rings without divisors of zero? [1]

This problem is evidently closely connected with the question concerning the existence of a group containing a given non-commutative semigroup. This second problem was solved by A. Malcev [2], who has shown that both questions have to be answered in the negative. In [2] Malcev states the following necessary condition that a semigroup might be imbedded in a group:

(M) Let S contain eight elements a, b, c, d, x, y, u, v such that the following three relations hold:

$$\begin{aligned} ax &= by \\ cx &= dy \\ au &= bv. \end{aligned} \tag{1}$$

Then the relation

$$cu = dv \tag{2}$$

holds, too.

We can show by direct calculation that, in a group, the relation (2) is a consequence of the relation (1). Evidently the same must be true in any immersible semigroup, so that condition (M) is necessary for immersibility.

Malcev has constructed a semigroup S containing eight elements a, b, c, d, x, y, u, v such that the three relations (1) are fulfilled, the relation (2) however is not. Evidently such a semigroup cannot be extended to a group. We shall see later, that a similar situation presents itself in every non-immersible semigroup.

The author's condition is a generalization of the condition (M). By generalizing the condition of Malcev it is easy to see, that the following condition is necessary for a semigroup to be immersible.

(M') If S contains several elements $a_1, \ldots, a_n$ which fulfill some relations, then any relation between the elements $a_1, \ldots, a_n$ which may be deduced from the given relations *in a group*, must hold in S, too.

If this condition is violated, the semigroup S evidently cannot be imbedded in a group. The purpose of the paper [5] was to show that this is the only way how that can happen, i. e. to show that the condition mentioned is sufficient as well.

Let S be a semigroup, V a system of generators of S. Let $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{G}$ denote the free semigroup resp. group with V as a system of free generators. By E we shall denote the equivalence on $\mathfrak{S}$ corresponding to the natural homomorphism $\mathfrak{S}$ to S. Suppose now that S is contained in a group G_0. Let G be the intersection of all subgroups of G_0 containing S. It is easy to show that the natural homomorphism of $\mathfrak{S}$ to S is induced on $\mathfrak{S}$ by a regular equivalence of $\mathfrak{G}$, i. e. by a normal subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}$. (It follows from some considerations of Malcev in [6] and [7] that the normal subgroup $\mathfrak{N}$ is not uniquely determined by E.) On the other hand if we have a semigroup S such that the equivalence E on $\mathfrak{S}$, corresponding to the natural homomorphism $\mathfrak{S}$ to S, is induced on $\mathfrak{S}$ by a normal subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}$, then S is immersible. In fact, the subset of $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ consisting of all classes of the form $\alpha\mathfrak{N}$, $\alpha \in \mathfrak{S}$ is easily shown to form a semigroup isomorphic with S. These results may be summarized as follows:

S is immersible if and only if a normal subgroup $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{G}$ can be found such that for any two $\alpha \in \mathfrak{S}$, $\beta \in \mathfrak{S}$

$$\alpha E \beta \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{N}.$$

Supposing S to be an arbitrary semigroup, let us form the following set $\mathfrak{M}_r \subset \mathfrak{G}$

$$\mathfrak{M}_r = \underset{y}{E}[y \in \mathfrak{G},\ y = \alpha\beta^{-1},\ \alpha \in \mathfrak{S},\ \beta \in \mathfrak{S},\ \alpha E \beta].$$

We shall call it the set of relations corresponding to E. Some further considerations show that the following condition is both sufficient and necessary:

$$\alpha\beta^{-1} \in [\mathfrak{M}_r] \Rightarrow \alpha E \beta$$

(Here $[\mathfrak{M}_r]$ is the least normal subgroup of $\mathfrak{G}$ containing $\mathfrak{M}_r$.)

This is clearly an exact formulation of the (rather vaguely formulated) condition (M').

The second part of the paper is devoted to a detailed discussion of some properties of the set of relations. We find a sufficient and necessary condition that a set $\mathfrak{R}$ of elements of the form $\alpha\beta^{-1}$, $\alpha \in \mathfrak{S}$, $\beta \in \mathfrak{S}$ be the set of all relations of a regular equivalence with both cancellations. This condition is an interesting modification of normality, which is to be satisfied by the subgroup generated in $\mathfrak{G}$ by $\mathfrak{R}$. (See condition (4,2) of the present paper.)

The next paragraph contains the investigation under what conditions the subgroup $\{\mathfrak{M}_r\}$ is normal, i. e. $\{\mathfrak{M}_r\} = [\mathfrak{M}_r]$. It turns out that that can happen in special cases only.

The paper is concluded by a discussion of a sufficient condition for immersibility found by O. Ore [3]. A semigroup S is immersible if to every pair a, b of elements of S there exist two elements a', b' of S such, that $a'a = b'b$. This can be proved directly by means of a construction of fractions. Using the general results of the preceding paragraphs, we give another very short proof of this fact, which gives us at the same time a further insight into the matter.

ЛИТЕРАТУРА.

[1] *Van der Waerden:* Moderne Algebra, 1. Aufl. p. 37.

[2] *A. Malcev:* On the Immersion of an Algebraic Ring into a Field, Math. Ann., **113** (1937), 686—691.

[3] *O. Ore:* Linear Equations in noncommutative Fields, Ann. of Math., II., **32** (1931) 463—477.

[4] *P. Dubreil:* Algèbre. Cahiers scientifiques, XX, p. 84.

[5] *V. Pták:* Immersibility of Semigroups, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou university Karlovy (Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Carolinae) **192** (1949).

[6] *А. Мальцев:* О включении ассоциативных систем в группы, Мат. Сб. (Rec. Math.) **6** (48) (1939), 331 до 336.

[7] *А. Мальцев:* О включении ассоциативных систем в группы, Мат. Сб. (Rec. Math.) **8** (50) (1940), 251 до 264.