Czechoslovak Mathematical Journal

Eduard Čech

Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространтсвами. V

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 2, 167–188

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100042

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНТСВАМИ V

Эдуард Чех (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 15/I 1952 г.)

В настоящем мемуаре определяются с одной стороны все огибающие ∞^1 коллинеаций в S_n, с другой стороны все огибающие ∞^2 коллинеаций в S_3.

Мемуары I—IV этой серии были опубликованы в этом журнале. Мы будем ссылаться на них просто римскими цифрами.

1. Если S_n, S'_n — два n-мерных пространства, то $S_n \times S'_n$ будет $2n$-мерным пространством, ,,точками'' которого будут пары (X, Y), где X означает произвольную точку пространства S_n, Y — произвольную точку пространства S'_n. Каждому соответствию между S_n и S'_n можно присвоить n-мерное многообразие в пространстве $S_n \times S'_n$, состоящее из тех (X, Y), для которых Y является образом X при данном соответствии. Если даны два соответствия между S_n и S'_n, из которых каждое относит определенной точке A пространства S_n ту же самую точку B пространства S'_n, то оба присвоенных многообразия в $S_n \times S'_n$ проходят через точку (A, B). Может случиться, что эти многообразия имеют в точке (A, B) касание k-го порядка; в таком случае мы говорим, что данные соответствия имеют в точке A *аналитическое касание* k-го порядка. Легко доказать, что это будет иметь место тогда и только тогда, когда для каждой кривой пространства S_n, выходящей из точки A, ее образы при обоих данных соответствиях будут иметь в точке B аналитическое касание k-го порядка.

Если дано произвольное соответствие C между S_n и S'_n и если выбрать точку A пространства S_n, то существует ∞^n коллинеаций, имеющих с данным соответствием в точке A аналитическое касание первого порядка. Это будут *касательные коллинеации* данного соответствия в точке A, определенные в I, § 1. Выберем для каждой точки A пространства S_n определенную касательную коллинеацию K соответствия C. Тогда мы получим в $S_n \times S'_n$ систему ∞^n n-мерных многообразий, присвоенных коллинеациям K; каждая из них в некоторой точке (A, B) касается того n-мерного многообразия, которое присвоено соответствию C; поэтому мы говорим, что соответствие C является *огибающей* n-параметрической системы коллинеаций K. Может однако случиться, что соответствие C имеет то свойство, что в отдельных точках A пространства S_n можно выбрать касательные коллинеации K такие, что K останется без изменения, если A пробегает определенное $(n - s)$-мерное многообразие в пространстве S_n. Тогда система наших касательных коллинеаций зависит только от s $(1 \leqq s < n)$ параметров и соответствие C является огибающей s-параметрической системы коллинеаций.

Как и в I, § 5, выберем реперы $A, A_1, \ldots, A_n$; $B, B_1, \ldots, B_n$ таким образом, чтобы точка B была образом точки A при рассматриваемом соответствии и чтобы рассматриваемая касательная коллинеация в точке A имела вид

$$KA = B,\ KA_1 = B_1, \ldots, KA_n = B_n. \tag{1,1}$$

Дифференцируя уравнения (1,1), мы получим с учетом основных уравнений I, (5,3)—(5,6) при обозначениях I, (5,10):

$$\begin{gathered} \mathrm{d}K \,.\, A = \tau_{00} B, \\ \mathrm{d}K \,.\, A_i = \tau_{i0} B + \tau_{i1} B_1 + \ldots + \tau_{in} B_n, \\ 1 \leqq i \leqq n. \end{gathered} \tag{1,2}$$

Для того, чтобы коллинеация K зависела только от s параметров $(1 \leqq s < n)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало s линейно независимых линейных форм

$$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s \tag{1,3}$$

от $\omega_1, \ldots, \omega_n$ таких, что коллинеация K будет геометрически неизменной для

$$\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_s = 0.$$

Но это значит, что формы Пфаффа

$$\tau_{ii} - \tau_{00}\ (1 \leqq i \leqq n);\ \tau_{ri}\ (1 \leqq r, i \leqq n;\ r \neq i), \tag{1,4}$$

$$\tau_{i0}\ \ (1 \leqq i \leqq n) \tag{1,5}$$

являются линейно зависимыми от форм (1,3). Вместо линейных форм (1,4) можно ввести квадратичные формы $\Omega_i (1 \leqq i \leqq n)$, определенные в I, (5,13), частными производными которых являются формы (1,4). Тогда наше условие примет вид: должно быть возможным, выразить квадратичные формы Ω_i $(1 \leqq i \leqq n)$, а также и линейные формы (1,5) в виде квадратичных или линейных форм в (1,3).

Что касается форм (1,3), то они зависят, конечно, от выбора репера $A, A_1, \ldots, A_n$ и подходящим выбором этого репера можно достигнуть того, что

$$\vartheta_1 = \omega_1, \ldots, \vartheta_s = \omega_s.$$

2. Обратимся теперь к более подробному изучению случая $s = 1$, т. е. к отысканию тех соответствий, которые являются огибающими *однопараметрической* системы коллинеаций. Условием в этом случае будет, согласно предыдущему, существование линейной формы

$$\vartheta = c_1\omega_1 + \ldots + c_n\omega_n,$$

так что

$$\Omega_i = a_i\vartheta^2, \ \tau_{i0} = b_i\vartheta \ (1 \leqq i \leqq n).$$

Из II, (14,1) видно, что искомые соответствия входят в число соответствий с тотально K-линеаризирующей прямой, которые мы полностью исследовали в мемуарах II и III. Нужно только выяснить, которые из соответствий с тотально K-линеаризирующей прямой удовлетворяют новым условиям. Мы увидим, что все огибающие однопараметрического семейства коллинеаций нами уже определены. Это — соответствия, описанные в II, § 24. Уже там мы констатировали, что эти соответствия, названные нами в конце мемуара II *развертывающимися соответствиями*, являются, действительно, огибающими однопараметрического семейства коллинеаций. Итак, остается только установить, что не существует никаких других огибающих однопараметрического семейства коллинеаций.

Для $n \geqq 4$ ими могли бы быть только соответствия, исследованные в II, § 19; для $n = 3$ — еще и соответствия, исследованные в III. Обратимся поэтому прежде всего к соответствиям, данным уравнениями II, (19,5) и (19,6) и найдем вообще число параметров, от которых зависят в этом случае коллинеации K. Согласно II, (19,2) и (19,3) имеем прежде всего $\tau_{i0} = 0$ для $1 \leqq i \leqq n$. Далее будет $\Omega_i = 0$ для $1 \leqq i \leqq n - 1$. Поэтому наименьшее количество h параметров, от которых зависит коллинеация K, равно рангу формы Ω_n. В II, § 19 мы дали геометрическое построение соответствия рассматриваемого типа с помощью проектирования из двух различных центров C_n, C_{n+1} произвольной гиперповерхности (C) пространства S_{n+1} $n + 1$ измерений. Там же мы обратили внимание на то, что $\Omega_n = 0$ представляет уравнение асимптотических касательных гиперповерхности (C). Следовательно, число h вообще равно числу параметров, от которых зависит касательная гиперплоскость гиперповерхности (C) и в частности будет $h = 1$ тогда и только тогда, когда (C) будет огибающей однопараметрического семейства гиперплоскостей в пространстве S_{n+1}. Легко однако установить, что этот случай входит в число соответствий, описанных в II, § 19. В самом деле, мы имеем $\Omega_n = \vartheta^2$, где $\vartheta = \sum_1^n \alpha_i \omega_i$, так что по I, (5,15) и по II, (19,4) будет $\tau_{in} = \alpha_i \vartheta$ для $1 \leqq i \leqq n$. Кроме того, согласно II, (19,5) и (19,6) будет $\tau_{ri} = 0$ для $1 \leqq r \leqq n$, $0 \leqq i \leqq n - 1$. Отсюда в силу (1,2) получим

$$\mathrm{d}K \,.\, A = 0, \ \mathrm{d}K \,.\, A_i = \alpha_i \vartheta B_n \text{ для } 1 \leqq i \leqq n,$$

так что коллинеация K будет постоянной, если A меняется в пределах гиперплоскости H, являющейся геометрическим местом точек $X = A + \sum_1^n x_i A_i$ для $\sum_1^n \alpha_i x_i = 0$ и кроме того $\mathrm{d}K \,.\, X = 0$ для каждой точки X гиперплоскости H. Согласно рассуждениям в конце II, § 23 из этого вытекает, что наше соответствие принадлежит к исследованным в II, § 24. Заметим без доказательства, что соответствие типа II, § 24 принадлежит к соответствиям типа II, § 19 тогда и только тогда, когда точка II, (24,20) постоянна в пространстве S_n и одновременно точка II, (24,19) постоянна в пространстве S'_n.

3. Для $n = 3$ нужно установить, имеются ли между соответствиями, исследованными в III, огибающие однопараметрического семейства коллинеаций. Легко видеть, что это не так. Согласно III, (26,1) имеет место

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = \omega_1 \tau_{13} + \omega_2 \tau_{23}.$$

Согласно III, (26,3) и (26,5) нужно доказать, что не может иметь места

$$[\tau_{13} \omega_2] = 0, \ [\tau_{23} \omega_2] = 0. \tag{3,1}$$

Но если (3,1) имеет место, то по III, (26,4) будет и $[\tau_{13} \omega_1] = 0$, откуда $\tau_{13} = 0$, далее по III, (26,8) будет $[\omega_{12} \tau_{20}] = 0$ и согласно III, (26,3) и (26,5) будет $[\omega_2 \omega_{12}] = 0$, так что должен настать или второй или четвертый из случаев, которые мы различали в конце III, § 26. Первая возможность (III, § 28) отпадает и останется только возможность, рассмотренная в III, § 30; однако, в силу III, (31,15) она противоречит уравнениям (3,1).

Остается показать, что и в случае $n = 2$ не существует дальнейших огибающих однопараметрического семейства коллинеаций. Согласно замечаниям в конце § 1 каждая огибающая однопараметрического семейства коллинеаций для $n = 2$ при подходящем выборе репера AA_1A_2 удовлетворяет уравнениям

$$[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] = 0, \; [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_1] = 0, \; [\tau_{12}\omega_1] = 0,$$
$$[\tau_{21}\omega_1] = 0, \qquad [\tau_{10}\omega_1] = 0, \; [\tau_{20}\omega_1] = 0. \tag{3,2}$$

Согласно I, (5,12) будет тогда иметь место и

$$[\tau_{21}\omega_2] = 0, \; [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_2] = 0,$$

так что по (3,2)

$$\tau_{21} = 0, \; \tau_{22} - \tau_{00} = 0. \tag{3,3}$$

Из (3,3) получаем внешним дифференцированием

$$[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_{21}] = 0, \tag{3,4}$$

$$2[\tau_{20}\omega_2] + [\omega_{21}\tau_{12}] = 0. \tag{3,5}$$

Предположим прежде всего, что

$$[\omega_{21}\omega_1] \neq 0. \tag{3,6}$$

Из (3,4) тогда вытекает с учетом первого уравнения (3,2), что

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0. \tag{3,7}$$

Внешним дифференцированием уравнения (3,7) получим в силу (3,2) и (3,3)

$$[\tau_{20}\omega_2] + [\tau_{12}\omega_{21}] = 0. \tag{3,8}$$

Из (3,5) и (3,8) вытекает

$$[\tau_{20}\omega_2] = 0, \; [\tau_{12}\omega_{21}] = 0. \tag{3,9}$$

Сравнивая (3,2) и (3,9) мы получим, учитывая (3,6),

$$\tau_{20} = 0, \; \tau_{12} = 0. \tag{3,10}$$

Из второго уравнения (3,10) мы получим внешним дифференцированием, что $[\tau_{10}\omega_2] = 0$, так что в силу (3,2) будет

$$\tau_{10} = 0. \tag{3,11}$$

Уравнения (3,3), (3,7), (3,10) и (3,11) показывают, что речь идет о коллинеации. Следовательно, допущение (3,6) можно исключить и мы получаем $[\omega_{21}\omega_1] = 0$. Однако, если вместо A_2 ввести $A_2 + \lambda A$, то при подходящем выборе λ будет

$$\omega_{21} = 0, \tag{3,12}$$

так что согласно (3,5) будет $[\tau_{20}\omega_2] = 0$, откуда в силу (3,2)

$$\tau_{20} = 0. \tag{3,13}$$

Согласно (1,2), (3,3) и (3,13) имеет место

$$\begin{aligned} \mathrm{d}K \,.\, A &= \tau_{00}B, \\ \mathrm{d}K \,.\, A_1 &= \tau_{10}B + \tau_{11}B_1 + \tau_{21}B_2, \\ \mathrm{d}K \,.\, A_2 &= \tau_{00}B_2. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (3,2) коллинеация K будет постоянной, если точка A описывает прямую $[AA_2]$ и кроме того имеет место $[KX,\ \mathrm{d}K\,.\,X] = 0$ для любой точки прямой $[AA_2]$. Итак, для $n = 2$ мы также получаем только тот случай, который мы рассматривали в II, § 24.

4. Общий тип развертывающихся соответствий, т. е. огибающих однопараметрического семейства коллинеаций, был нами выражен (II, § 24) в чисто аналитическом виде. Теперь мы дополним упомянутые формулы их геометрическим истолкованием, которое приведем без доказательства, так как оно почти очевидно. Начнем с определения, которое весьма полезно и с других точек зрения.

Пусть дано соответствие между k-мерным многообразием V_k пространства S_n и k-мерным многообразием V'_k пространства S'_n. Пусть точка $A(u_1, \ldots, u_k)$ описывает многообразие V_k, а точка $B(u_1, \ldots, u_k)$ — многообразие V'_k, причем, конечно, сопоставлены одна с другой точки, соответствующие одинаковым значениям параметров $u_1, \ldots, u_k$. Допустим, что для всех значений параметров выполнены условия регулярности

$$\left[A\,\frac{\partial A}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial u_k}\right] \neq 0, \tag{4,1}$$

$$\left[B\,\frac{\partial B}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial B}{\partial u_k}\right] \neq 0. \tag{4,1'}$$

Левая сторона уравнения (4,1) представляет *касательное пространство* $S_k(u_1, \ldots, u_k)$ многообразия V_k в точке $A(u_1, \ldots, u_k)$; левая сторона (4,1′) представляет касательное пространство $S'_k(u_1, \ldots, u_k)$ многообразия V'_k в точке $B(u_1, \ldots, u_k)$. Назовем *касательной коллинеацией* данного соответствия в точке $A(u_1, \ldots, u_k)$ коллинейное соотношение K между $S_k(u_1, \ldots, u_k)$ и $S'_k(u_1, \ldots, u_k)$, при котором для данных значений $u_1, \ldots, u_k$ имеет место

$$KA = B,\ K\,\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial B}{\partial u_i} + \lambda_i B \quad (1 \leqq i \leqq k).$$

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ произвольны, так что мы получаем ∞^k касательных коллинеаций в каждой точке многообразия V_k. Легко убедиться, что если коллинейное соотношение L между S_n и S'_n является расширением какой либо касательной коллинеации K данного соответствия в точке $A = A(u_1, \ldots, u_k)$, то для каждой кривой Γ многообразия V_k, выходящей из точки A, в соответствующей точке $B = B(u_1, \ldots, u_k)$ многообразия V'_k настанет аналитическое касание первого порядка между образами кривой Γ при данном соответствии между V_k и V'_k, с одной стороны, и при коллинеации L с другой. Наоборот, если коллинеация L между S_n и S'_n имеет указанное свойство, то L является расширением некоторой касательной коллинеации данного соответствия между V_k и V'_k в точке $A(u_1, \ldots, u_k)$. В частности, пусть $k = 1$, т. е. пусть дано соответствие между кривой V_1 пространства S_n и кривой V'_1 пространства S'_n; выберем для каждой точки $A = A(u)$ определенную касательную коллинеацию $K(u)$ между касательными $S_1(u)$ и $S'_1(u)$ кривых V_1 и V'_1. Тогда при любом выборе множителя однородных координат точки $A(u)$ кривой V_1 можно выбрать множитель однородных координат соответствующей точки $B(u)$ кривой V'_1 так, чтобы для любого u имело место

$$K(u) \,.\, A(u) = B(u),\; K(u)\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u}.$$

Коллинеация $K(u)$ останется без изменения тогда и только тогда, когда мы умножим однородные координаты точки $B(u)$ на *постоянный* множитель.

5. После этих подготовительных рассуждений мы можем приступить к обещанному геометрическому описанию развертывающихся соответствий между S_n и S'_n. Для каждого из таких развертывающихся соответствий существует однопараметрическое семейство $\{T_{n-1}(u)\}$ гиперплоскостей пространства S_n такое, что данное развертывающееся соответствие переводит гиперплоскость $T_{n-1}(u)$ в определенную гиперплоскость $T'_{n-1}(u)$ пространства S'_n посредством некоторой коллинеации $K_{n-1}(u)$, зависящей от u. Если мы будем теперь изменять u, то или не существует ни одной точки общей для всех гиперплоскостей $T_{n-1}(u)$ пространства S_n и ни одной точки, общей для всех гиперплоскостей $T'_{n-1}(u)$ пространства S'_n — в таком случае положим $h = 0$ — или общие точки всех гиперплоскостей $T_{n-1}(u)$ образуют в пространстве S_n линейное подпространство N размерности $h - 1$ $(1 \leqq h \leqq n - 1)$ и одновременно общие точки всех гиперплоскостей $T'_{n-1}(u)$ занимают в пространстве S'_n линейное подпространство N' той же размерности $h - 1$.

Положим сначала $h = 0$. Тогда семейство $\{T_{n-1}(u)\}$ будет семейством всех соприкасающихся гиперплоскостей некоторой кривой $\Gamma = \{C(u)\}$ пространства S_n, а семейство $\{T'_{n-1}(u)\}$ будет семейством всех соприкасающихся гиперплоскостей кривой $\Delta = \{D(u)\}$ пространства S'_n, причем между Γ и Δ имеется определенное соответствие. Кривая Γ не содержится ни в одной из гиперплоскостей пространства S_n; кривая Δ не содержится ни в одной из гиперплоскостей пространства S'_n. Точнее, мы предполагаем, что для любого u выполнены условия регулярности

$$\left[C(u)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}u}\ldots\frac{\mathrm{d}^nC}{\mathrm{d}u^n}\right]\neq 0,$$

$$\left[D(u)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}u}\ldots\frac{\mathrm{d}^nD}{\mathrm{d}u^n}\right]\neq 0.$$

Для каждого u данному развертывающемуся соответствию между S_n и S_n' соответствует определенная касательная коллинеация $K_1(u)$ упомянутого соответствия между Γ и Δ. Наоборот, если дано соответствие между $\Gamma = \{C(u)\}$ и $\Delta = \{D(u)\}$ и если для каждого u выбрана определенная касательная коллинеация $K_1(u)$ соответствия между Γ и Δ, то существует соответствующее развертывающееся соответствие между S_n и S_n', определенное однозначно. Для $1 \leqq k \leqq n-1$ и для любого u пусть $T_k(u)$ означает соприкасающееся k-мерное линейное пространство кривой Γ в точке $C(u)$, а $T_k'(u)$ — соприкасающееся k-мерное линейное пространство кривой Δ в соответствующей точке $D(u)$. При изменении u, $T_k(u)$ опишет $(k+1)$-мерное многообразие $\{T_k(u)\} = \Gamma_{k+1}$ в пространстве S_n и одновременно $T_k'(u)$ опишет $(k+1)$-мерное многообразие $\{T_k'(u)\} = \Delta_{k+1}$ в пространстве S_n'; положим далее $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Delta_1 = \Delta$. Для $k = 1$ мы уже определили для каждого u коллинейное соотношение $K_1(u)$ между прямой $T_1(u)$ пространства S_n и прямой $T_1'(u)$ пространства S_n', однозначно определяющее соответствие между Γ_1 и Δ_1. Для $2 \leqq k \leqq n-1$ можно тогда совершенно однозначно определить рекуррентно для каждого u коллинейное соотношение $K_k(u)$ между $T_k(u)$ и $T_k'(u)$, однозначно определяющее соответствие между Γ_{k+1} и Δ_{k+1}, с тем свойством, что соотношение $K_k(u)$ является расширением соотношения $K_{k-1}(u)$ и что для каждой точки P пространства $T_k(u)$, не принадлежащей к $T_{k-1}(u)$, $K_k(u)$ будет касательной коллинеацией данного соответствия между Γ_k и Δ_k в точке P. Развертывающееся соответствие между S_n и S_n' определится тогда тем, что при любом u оно присваивает каждой точке P гиперплоскости $T_{n-1}(u)$ точку $K_{n-1}(u)$. P гиперплоскости $T_{n-1}'(u)$.

Этим закончен случай $h = 0$. Приступим к случаю $1 \leqq h \leqq n-1$, когда в пространстве S_n дано фиксированное линейное подпространство N размерности $h-1$ и одновременно в пространстве S_n' фиксированное линейное подпространство N' той же размерности $h-1$. Для большей краткости выберем еще линейное подпространство M размерности $n-h$ пространства S_n и линейное подпространство M' той же размерности пространства S'_n так, чтобы N и M не имели общих точек, равно как и N' и M'. В пространстве M выберем точку $A(u)$ зависящую от параметра u и в пространстве M' точку $B(u)$, зависящую от того же параметра u, так что получим две кривые $\{A(u)\}$, $\{B(u)\}$ и определенное соответствие между ними, причем предполагается, что для каждого u выполнены условия регулярности

$$\left[A(u)\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\,\cdots\,\frac{\mathrm{d}^{n-h}A}{\mathrm{d}u^{n-h}}\right] \neq 0,$$

$$\left[B(u)\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u}\,\cdots\,\frac{\mathrm{d}^{n-h}B}{\mathrm{d}u^{n-h}}\right] \neq 0,$$

из которых вытекает, что ни $\{A(u)\}$ ни $\{B(u)\}$ не лежит в линейном пространстве размерности меньшей, чем $n - h$. Для $1 \leqq k \leqq n - h - 1$ для каждого u обозначим через $A_k(u)$ соприкасающееся линейное подпространство размерности k кривой $\{A(u)\}$ в точке $A(u)$, через $B_k(u)$ — соприкасающееся линейное подпространство размерности k кривой $\{B(u)\}$ в точке $B(u)$. Далее обозначим для $1 \leqq k \leqq n - h - 1$ и для каждого u через $C_{h+k}(u)$ линейное подпространство размерности $h + k$ пространства S_n, которое соединяет N и $A_k(u)$, через $D_{h+k}(u)$—линейное подпространство размерности $h+k$ пространства S'_n, которое соединяет N' и $B_k(u)$. Для $k = 0$ пусть $C_h(u)$ будет линейным подпространством размерности h пространства S_n, соединяющим N с точкой $A(u)$, $D_h(u)$ — линейным подпросранлтвом размерности h пространства S'_n, соединяющим N' с точкой $B(u)$. Тогда при изменении u для $0 \leqq k \leqq n - h - 1$, $C_{h+k}(u)$ опишет многообразие $\{C_{h+k}(u)\}$ размерности $h + k + 1$ в пространстве, S_n $D_{h+k}(u)$—многообразие $\{D_{h+k}(u)\}$ той же размерности в пространстве S'_n. Чтобы определить наше развертывающееся соответствие, нужно для каждого u выбрать коллинейное соотношение $K_0(u)$ между h-пространствами $C_h(u)$ и $D_h(u)$ так, чтобы каждая точка пространства N перешла при $K_0(u)$ *независимым от u способом* в определенную точку пространства N'. При изменении u коллинеация $K_0(u)$ однозначно определяет соответствие между $(h + 1)$-многообразиями $\{C_h(u)\}$ и $\{D_h(u)\}$. Тогда для любого u и для любого k, $1 \leqq k \leqq n - h - 1$ можно вполне однозначно определить коллинейное соотношение $K_k(u)$ между $C_{h+k}(u)$ и $D_{h+k}(u)$, однозначно определяющее соответствие между $\{C_{h+k}(u)\}$ и $\{D_{h+k}(u)\}$, с тем свойством, что соотношение $K_k(u)$ является расширением соотношения $K_{k-1}(u)$ и что для каждой точки P пространства $C_{h+k}(u)$, не принадлежащей к $C_{h+k-1}(u)$, $K_k(u)$ будет касательной коллинеацией данного соответствия между $\{C_{h+k}(u)\}$ и $\{D_{h+k}(u)\}$. Развертывающееся соответствие между S_n и S'_n определяется тогда тем, что при каждом u каждой точке гиперплоскости $C_{n-1}(u)$ присвоена точка $K_{n-h-1}(u)$. P гиперплоскости $D_{n-1}(u)$.

Особенно простым является случай $h = n - 1$. Здесь подпространство N пространства S_n и подпространство N' пространства S'_n имеют размерность $n - 2$. Каждой гиперплоскости ϱ пространства S_n, проходящей через пространство N, по совершенно произвольному закону поставлена в соответствие гиперплоскость ϱ' пространства S'_n, проходящая через пространство N'. Для каждого положения гиперплоскости ϱ дано коллинейное соответствие между ϱ и ϱ', в котором точки пространства N перейдут независимым от положения гиперплоскости ϱ образом в точки пространства N'. Совокупность всех этих, в остальном произвольных, коллинейных соотношений между ϱ и ϱ' образует развертывающееся соответствие между S_n и S'_n.

6. В предыдущем мы занимались подробным исследованием огибающих однопараметрического семейства коллинеаций. Это исследование, однако, ни в коей мере не закончено и в дальнейшем мы к нему еще возвратимся. В этом мемуаре мы еще отыщем все огибающие двухпараметрического семейства коллинеаций в трехмерном пространстве. Уравнения проблемы были сформулированы в конце § 1; теперь мы имеем $n = 3$, $s = 2$. После выбора подходящего репера $AA_1A_2A_3$ нам нужно выяснить, когда квадратичные формы Ω_1, Ω_2, Ω_3, так же как и линейные формы τ_{10}, τ_{20}, τ_{30}, будут независимыми от ω_3. Условия независимости форм Ω_1, Ω_2, Ω_3 от ω_3 даны уравнениями IV, (4,1). В IV мы провели подробное исследование этих уравнений в предположении

$$[\omega_{31}\omega_1\omega_2] = [\omega_{32}\omega_1\omega_2] = 0. \qquad (6,1)$$

В дальнейшем (см. § 11) мы исследуем, имеет ли интересующая нас теперь проблема еще другие решения кроме тех, для которых имеет место (6,1). Между тем, однако, мы воспользуемся результатами IV, касающимися случая (6,1). Согласно IV, § 4 рассматриваемое соответствие переводит некоторую прямолинейную конгруэнцию L пространства S_3 в определенную прямолинейную конгруэнцию L' пространства S'_3 и согласно IV, § 5 развертывающиеся поверхности обеих конгруэнций соответствуют одна другой. Как и в IV, мы различаем три случая, смотря по тому, имеет ли конгруэнция L (а значит и конгруэнция L') два различных семейства развертывающихся, одно семейство развертывающихся или состоит из прямых, проходящих через постоянную точку. В каждом из этих трех случаев нужно к соответствующим уравнениям из IV, выражающим независимость квадратичных форм Ω_1, Ω_2, Ω_3 от ω_3, присоединить уравнения, выражающие также независимость линейных форм τ_{10}, τ_{20}, τ_{30} от ω_3. Теперь из первых двух уравнений IV (4,2) вытекает, что $\tau_{11} - \tau_{00}$, τ_{21}, τ_{12}, $\tau_{22} - \tau_{00}$ независимы от ω_3, а так как ввиду (6,1) это можно утверждать и о ω_{31}, ω_{32}, из четвертого и пятого уравнения IV, (4,2) следует, что τ_{30} наверно не зависит от ω_3. По третьему уравнению IV, (4,2) тем же свойством обладают и τ_{13}, τ_{23}, а чтобы им обладали кроме того и формы τ_{10}, τ_{20}, по последнему уравнению IV, (4,2) необходимо и достаточно, чтобы было

$$\tau_{30} = 0. \tag{6,2}$$

Итак, мы получим двухпараметрические огибающие коллинеаций в S_3, рассматривая те решения системы IV, (4,1), для которых имеет место (6,1) и (6,2).

7. Начнем с того случая, когда конгруэнция L имеет два различных семейства развертывающихся поверхностей. Как и в IV, § 6, наложим на репер условие: развертывающиеся даны уравнениями $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, уравнению $\omega_1 = 0$ соответствует фокус $A + A_3$, а уравнению $\omega_2 = 0$ — фокус $A - A_3$. Это выражается уравнениями IV, (6,1). Итак мы имеем систему Пфаффа

$$\begin{gathered}\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0,\ \tau_{31} = \tau_{32} = \tau_{33} - \tau_{00} = 0,\\ \tau_{30} = 0,\ \omega_{31} = \omega_1,\ \omega_{32} = -\omega_2.\end{gathered} \tag{7,1}$$

Дифференцируя уравнения (7,1) внешним образом, получаем

$$\begin{aligned}&[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] = 0,\ [\tau_{21}\omega_2] = 0,\\ &[\tau_{12}\omega_1] = 0,\ [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_2] = 0,\\ &[\tau_{13}\omega_1] + [\tau_{23}\omega_2] = 0,\\ &[\tau_{10} - \tau_{13}\omega_1] = 0,\ [\tau_{20} + \tau_{23}\omega_2] = 0,\\ &[\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3\omega_1] - 2[\omega_{21}\omega_2] = 0,\\ &2[\omega_{12}\omega_1] - [\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3\omega_2] = 0.\end{aligned} \tag{7,2}$$

Система (7,1) в инволюции и ее решение зависит от трех функций одного переменного. Если конгруэнция L произвольно *задана* в пространстве S_3 (так, чтобы она имела два различных семейства развертывающихся поверхностей), то даны и формы ω_1, ω_2, ω_{31}, ω_{32} и в системе (7,1) отпадут последних два уравнения. Сокращенная таким образом система будет также в инволюции и ее решение зависит от одной функции двух переменных.

Так как $\omega_{31} = \omega_1$, $\omega_{32} = -\omega_2$, имеет место

$$\begin{aligned}d(A + A_3) = (\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3)\, A + 2\omega_1 A_1 +\\ + (\omega_3 + \omega_{33})\,(A + A_3),\end{aligned} \tag{7,3}$$

$$\mathrm{d}(A - A_3) = (\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3)\, A + 2\omega_2 A_2 - \\ - (\omega_3 - \omega_{33})\,(A - A_3). \tag{7,4}$$

Согласно (7,1) будет тогда иметь место и

$$\mathrm{d}(B + B_3) = (\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3)\, B + 2\omega_1 B_1 + \\ + (\omega_3 + \omega_{33} + \tau_{00})\,(B + B_3), \tag{7,3'}$$

$$\mathrm{d}(B - B_3) = (\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3)\, B + 2\omega_2 B_2 - \\ - (\omega_3 - \omega_{33} - \tau_{00})\,(B - B_3). \tag{7,4'}$$

Если

$$[\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3\omega_1] \neq 0, \tag{7,5}$$

то фокус $A + A_3$ описывает фокальную *поверхность* конгруэнции L, вырождающуюся в фокальную *линию* в случае, если (7,5) не имеет места. Аналогично, если

$$[\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3\omega_2] \neq 0, \tag{7,6}$$

то фокус $A - A_3$ описывает фокальную *поверхность* конгруэнции L, вырождающуюся в фокальную *линию* в случае, если (7,6) не имеют места. Фокусы $B + B_3$, $B - B_3$ конгруэнции L' ведут себя в этом отношении так же, как и фокусы $A + A_3$, $A - A_3$ конгруэнции L.

Рассмотрим теперь касательную коллинеацию K, для которой

$$KA = B,\ KA_1 = B_1,\ KA_2 = B_2,\ KA_3 = B_3. \tag{7,7}$$

Из (1,2) вытекает в силу (7,1) и (7,2), что коллинеация K геометрически постоянна для $\omega_1 = \omega_2 = 0$, т. е. K не меняется, если точка A описывает прямую конгруэнции L. Согласно (7,7) имеем в частности $K(A + A_3) = B + B_3, K(A - A_3) = B - B_3$, т. е. K переводит каждый фокус конгруэнции L в соответствующий фокус конгруэнции L'. Из (7,3) и (7,3') следует, что в точке $B + B_3$ имеет место аналитическое касание первого порядка между образами поверхности (или линии) $(A + A_3)$ при данном соответствии и при коллинеации K. Аналогично из (7,4) и (7,4') следует, что в точке $B - B_3$ имеет место аналитическое касание первого порядка между образами поверхности (или линии) $(A - A_3)$ при данном соответствии и при коллинеации K.

Если $\omega_1 = 0$, то точка $A + A_3$ описывает кривую, которая при условии (7,5) не вырождается в точку и касательные которой принадлежат конгруэнции L. В точке $B + B_3$ будет аналитическое касание второго порядка между образами этой кривой при данном соответствии и при коллинеации K, ибо в силу (7,1), (7,3) и (7,3') для $\omega_1 = 0$ имеет место

$$K(A + A_3) = B + B_3,\ K\,\mathrm{d}(A + A_3) = \mathrm{d}(B + B_3) - \tau_{00}\,(B + B_3),$$
$$K\,\mathrm{d}^2(A + A_3) = \mathrm{d}^2(B + B_3) - 2\tau_{00}\,\mathrm{d}(B + B_3) + (\,.\,)\,(B + B_3).$$

Аналогично для $\omega_2 = 0$ точка $A - A_3$ описывает кривую, которая при условии (7,6) не вырождается в точку и касательные которой принадлежат конгруэнции L. В точке $B - B_3$ будет аналитическое касание второго порядка между образами этой кривой при данном соответствии и при коллинеации K, ибо в силу (7,1), (7,4) и (7,4′) для $\omega_2 = 0$ имеет место

$$K(A - A_3) = B - B_3,$$
$$K\,.\,\mathrm{d}(A - A_3) = \mathrm{d}(B - B_3) - \tau_{00}(B - B_3)$$
$$K\,.\,\mathrm{d}^2(A - A_3) = \mathrm{d}^2(B - B_3) - 2\tau_{00}\,\mathrm{d}(B - B_3) + (.)\,(B - B_3).$$

8. Предположим, наоборот, что в пространстве S_3 дана прямолинейная конгруэнция L с двумя различными семействами развертывающихся поверхностей, а в пространстве S_3' — прямолинейная конгруэнция L' также с двумя различными семействами развертывающихся, причем пусть ни одна фокальная поверхность обеих конгруэнций не вырождается в линию. Пусть далее дано взаимно однозначное соотношение между прямыми p конгруэнции L и прямыми q конгруэнции L', причем пусть развертывающиеся поверхности обеих конгруэнций соответствуют одна другой. Обозначим через F_1, F_2 оба фокуса на прямой p конгруэнции L, а через F_1', F_2' — соответствующие им фокусы на соответствующей прямой q конгруэнции L'. Пусть, наконец, каждой прямой p конгруэнции L присвоена коллинеация K пространства S_3 в пространство S_3', переводящая лежащие на p фокусы F_1, F_2 в соответствующие им фокусы F_1', F_2'. При этом пусть в точке F_1' настанет аналитическое касание первого порядка между фокальной поверхностью (F_1') конгруэнции L' и образом фокальной поверхности (F_1) конгруэнции L при коллинеации K; пусть далее в точке F_2' настанет аналитическое касание первого порядка между фокальной поверхностью (F_2') конгруэнции L' и образом фокальной поверхности (F_2) конгруэнции L при коллинеации K. Фокальная поверхность (F_1) состоит из ∞^1 кривых Γ_1, касательные которых принадлежат конгруэнции L; аналогично (F_2) состоит из ∞^1 кривых Γ_2 с касательными в конгруэнции L; точно так же в пространстве S_3' поверхность (F_1') состоит из ∞^1 кривых Δ_1, поверхность (F_2') из ∞^1 кривых Δ_2 так, что касательные кривых Δ_1 и Δ_2 принадлежат конгруэнции L'. Взаимно однозначное соотношение между прямыми конгруэнций L и L' проявляется в том, что каждой кривой Γ_1 присвоена определенная кривая Δ_1, каждой кривой Γ_2 — определенная кривая Δ_2, причем возникает некоторое соответствие между отдельными точками взаимно сопоставленных кривых. О каждой коллинеации K мы будем кроме того предполагать, что в точке F_1' настанет аналити-

ческое касание второго порядка между кривой Δ_1 и образом соответствующей кривой Γ_1 при коллинеации K, далее что в точке F_2' настанет аналитическое касание второго порядка между кривой Δ_2 и образом соответствующей кривой Γ_2 при коллинеации K. Если теперь каждой точке каждой прямой p конгруэнции L присвоить ее образ при коллинеации K, соответствующей прямой p, то мы получим соответствие между S_3 и S_3', являющееся, как мы докажем, огибающей ∞^2 коллинеаций K.

Выберем подвижной репер $AA_1A_2A_3$ в пространстве S_3 и подвижной репер $BB_1B_2B_3$ в S_3', так что получим уравнения вида

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,\\
\mathrm{d}A_i &= \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3 \quad (i = 1, 2, 3);\\
\mathrm{d}B &= (\omega_{00} + \tau_{00})\,B + (\omega_1 + \tau_{01})\,B_1 + (\omega_2 + \tau_{02})\,B_2 +\\
&\quad + (\omega_3 + \tau_{03})\,B_3,\\
\mathrm{d}B_i &= (\omega_{i0} + \tau_{i0})\,B + (\omega_{i1} + \tau_{i1})\,B_1 + (\omega_{i2} + \tau_{i2})\,B_2 +\\
&\quad + (\omega_{i3} + \tau_{i3})\,B_3 \quad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Репер $AA_1A_2A_3$ выберем так, чтобы прямая $[AA_3]$ описывала конгруэнцию L и чтобы развертывающие поверхности этой конгруэнции определялись уравнениями $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, причем для $\omega_1 = 0$ получаем фокус $F_1 = A + A_3$, для $\omega_2 = 0$ — фокус $F_2 = A - A_3$. Репер $BB_1B_2B_3$ выберем так, чтобы

$$KA = B,\ KA_1 = B_1,\ KA_2 = B_2,\ KA_3 = B_3,$$

так что прямая $[BB_3]$ описывает конгруэнцию L', а развертывающиеся поверхности этой конгруэнции даны уравнениями $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, для $\omega_1 = 0$ получим фокус $F_1' = B + B_3$, для $\omega_2 = 0$ — фокус $F_2' = B - B_3$. Аналитически этот выбор реперов выражается уравнениями

$$\omega_{31} = \omega_1, \qquad \omega_{32} = -\omega_2, \tag{8,1}$$

$$\tau_{31} = \tau_{01}, \qquad \tau_{32} = -\tau_{02}, \tag{8,2}$$

$$[\tau_{01}\omega_1] = 0, \qquad [\tau_{02}\omega_2] = 0, \tag{8,3}$$

причем уравнения (8,3) вытекают из того, что развертывающиеся обеих конгруэнций соответствуют одна другой. Ввиду (8,1) имеет место

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(A + A_3) &= (\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3)\,A + 2\omega_1 A_1 +\\
&\quad + (\omega_3 + \omega_{33})\,(A + A_3),\\
\mathrm{d}(A - A_3) &= (\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3)\,A + 2\omega_2 A_2 -\\
&\quad - (\omega_3 - \omega_{33})\,(A - A_3)
\end{aligned}$$

и аналогично во втором пространстве будет

$$\mathrm{d}(B + B_3) = (\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3 + \tau_{00} - \tau_{33} + \tau_{30} - \tau_{03}) B + \\ + 2(\omega_1 + \tau_{01}) B_1 + (\omega_3 + \omega_{33} + \tau_{03} + \tau_{33}) (B + B_3),$$

$$\mathrm{d}(B - B_3) = (\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3 + \tau_{00} - \tau_{33} - \tau_{30} + \tau_{03}) B + \\ + 2(\omega_2 + \tau_{02}) B_2 - (\omega_3 - \omega_{33} + \tau_{03} - \tau_{33}) (B - B_3).$$

Так как поверхности $(A + A_3)$, $(A - A_3)$ не вырождаются в кривые, имеет место

$$[\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3 \omega_1] \neq 0, \tag{8,4}$$

$$[\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3 \omega_2] \neq 0. \tag{8,5}$$

Так как в точке $B + B_3$ настанет аналитическое касание первого порядка между поверхностью $(B + B_3)$ и образом поверхности $(A + A_3)$ при коллинеации K, мы получим

$$\tau_{00} - \tau_{33} + \tau_{30} - \tau_{03} = 0,\ \tau_{01} = 0; \tag{8,6}$$

так как в точке $B - B_3$ настанет аналитическое касание первого порядка между поверхностью $(B - B_3)$ и образом поверхности $(A - A_3)$ при коллинеации K, мы получим

$$\tau_{00} - \tau_{33} - \tau_{30} + \tau_{03} = 0,\ \tau_{02} = 0. \tag{8,7}$$

Для $\omega_1 = 0$ мы получаем на поверхности $(A + A_3)$ кривую Γ_1, а на повехности $(B + B_3)$ соответствующую кривую Δ_1. Для $\omega_1 = 0$ имеет место

$$K(A + A_3) = B + B_3,\ K\,\mathrm{d}(A + A_3) = \mathrm{d}(B + B_3) - \\ - (\tau_{03} + \tau_{33}) (B + B_3),$$

$$K\mathrm{d}^2(A + A_3) = \mathrm{d}^2(B + B_3) - 2(\tau_{03} + \tau_{33})\,\mathrm{d}(B + B_3) + \\ + 2(\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3)\,\tau_{03} B + (\,.\,)(B + B_3).$$

Так как в точке $B + B_3$ настанет аналитическое касание второго порядка между кривой Δ_1 и образом кривой Γ_1 при коллинеации K, будет $(\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_{30} - \omega_3)\,\tau_{03} = 0$ для $\omega_1 = 0$, так что в силу (8,4) имеет место

$$[\tau_{03}\omega_1] = 0. \tag{8,8}$$

Для $\omega_2 = 0$ мы получаем на поверхности $(A - A_3)$ кривую Γ_2, а на поверхности $(B - B_3)$ соответствующую кривую Δ_2. Для $\omega_2 = 0$ имеет место

$$K(A - A_3) = B - B_3,$$
$$K\,\mathrm{d}(A - A_3) = \mathrm{d}(B - B_3) + (\tau_{03} - \tau_{33}) (B - B_3),$$
$$K\,\mathrm{d}^2(A - A_3) = \mathrm{d}^2(B - B_3) + 2(\tau_{03} - \tau_{33})\,\mathrm{d}(B - B_3) + \\ + 2(\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3)\,\tau_{03} B + (\,.\,)(B - B_3).$$

Так как в точке $B - B_3$ настанет аналитическое касание второго порядка между кривой Δ_2 и образом кривой Γ_2 при коллинеации K, имеет место $(\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{30} + \omega_3)\tau_{03} = 0$ для $\omega_2 = 0$, так что в силу (8,5) будет

$$[\tau_{03}\omega_2] = 0. \tag{8,9}$$

Согласно (8,8) и (8,9) имеет место

$$\tau_{03} = 0. \tag{8,10}$$

В силу (8,1), (8,2), (8,6), (8,7) и (8,10) уравнения (7,1) удовлетворены и доказательство закончено.

В этом мемуаре мы не будем заниматься случаем, когда одна из фокальных поверхностей конгруэнции L (или обе фокальные поверхности) вырождается в кривую.

9. Приступим к случаю, когда оба семейства развертывающихся поверхностей конгруэнции L совпадают. При этом единственная фокальная поверхность конгруэнции L сводится к кривой в случае $[\omega_{30}\omega_1] = 0$; так как теперь имеет место (6,2), то и фокальная поверхность конгруэнции L' должна свестись к кривой.

Допустим прежде всего, что фокальные поверхности конгруэнций L, L' не сводятся к кривым. Геометрическое описание возникающего в этом случае положения было дано в IV, § 7; нужно, однако, дать геометрическое толкование уравнения (6,2), которое в рассматриваемом теперь случае дополняет систему IV, (7,1). Согласно IV, § 7 поверхности (A_3), (B_3) связаны таким взаимным соответствием, что асимптотическим линиям $\omega_1 = 0$ на поверхности (A_3) соответствуют асимптотические же линии $\omega_1 = 0$ на поверхности (B_3). Касательные этих асимптотических линий образуют конгруэнции L и L'. Соответствие между S_3 и S_3' ввиду IV, § 7 присваивает каждой прямой p конгруэнции L соответствующую прямую q конгруэнции L' с помощью проективного соотношения π, подчиненного условию $\pi A_3 = B_3$ и еще одному условию, выраженному соотношением IV, (7,7), так что π не является вполне определенным при данном соответствии поверхностей (A_3) и (B_3). Для выяснения смысла условия (6,2) заменим его сначала более слабым условием

$$[\tau_{30}\omega_1] = 0, \tag{9,1}$$

которое ввиду IV, (7,3) можно написать $g_2 = 0$, что в силу IV, (7,6) означает

$$i(B_3, \varphi) = 1 \tag{9,2}$$

или согласно IV, (7,7)

$$j(B_3; C', C^*) = 1. \tag{9,3}$$

При этом C' — асимптотическая линия $\omega_1 = 0$ на поверхности (B_3), являющаяся при данном соответствии между поверхностями (A_3) и (B_3) образом асимптотической $\omega_1 = 0$ на поверхности (A_3); если C — эта асимптотическая на (A_3), то C^* будет образом C при коллинеации T, являющейся (по терминологии, введенной в § 4) касательной коллинеацией данного соответствия поверхностей (A_3), (B_3). Коллинеация T дана уравнениями IV, (7,5), содержащими произвольные числа x, y, которые и теперь не имеют значения. Легко видеть, что ввиду произвольности числа x условие (9,2) можно заменить требованием, чтобы φ было тождественным преобразованием прямой $[BB_3]$; другими словами, чтобы проективное соотношение π было частью коллинеации T. Обстоятельство, что при данном соответствии между (A_3) и (B_3) проективное соотношение π не является однозначно определенным, как раз и выражается произвольностью числа x, фигурирующего в уравнениях (7,5), которое в нашем случае, когда $g_2 = 0$, можно проще написать так:

$$\begin{aligned} &TA_3 = B_3, \qquad TA = B + \xi B_3, \\ &TA_2 = B_2 + g_1 B + \eta B_3, \end{aligned} \tag{9,4}$$

причем мы заменили произвольные числа x, y новыми произвольными числами ξ, η.

Из предыдущего ясно, что условие (9,1) означает ограничение характера соответствия между поверхностями (A_3) и (B_3), ибо его смысл согласно (9,3) таков, что для (одной, а потому и для каждой) касательной коллинеации T в точке B_3 получается касание второго порядка между асимптотической линией C' поверхности (B_3) и образом C^* асимптотической C поверхности (A_3) при коллинеации T. Это касание будет в общем случае (при произвольном ξ) только геометрическим и лишь при вполне определенном ξ станет аналитическим. В самом деле, для $\omega_1 = 0$ согласно (9,1) и IV, (7,1) имеет место

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}A_3 = \omega_{30}A + \omega_{33}A_3, \ \mathrm{d}B_3 = \omega_{30}B + (\omega_{33} + \tau_{00})\,B_3, \\ &\mathrm{d}^2A_3 = (\mathrm{d}\omega_{30} + \omega_{30} \cdot \overline{\omega_{00} + \omega_{33}})\,A + \omega_{30}\omega_2 A_2 + (\,.\,)\,B_3, \\ &\mathrm{d}^2B_3 = (\mathrm{d}\omega_{30} + \omega_{30} \cdot \overline{\omega_{00} + \omega_{33} + 2\tau_{00}})\,B + \omega_{30}\omega_2 B_2 + (\,.\,)\,B_3, \end{aligned}$$

следовательно, в силу (9,4)

$$\begin{aligned} &TA_3 = B_3, \ T\,\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}B_3 + (\xi\omega_{30} - \tau_{00})\,B_3, \\ &T\,\mathrm{d}^2A_3 = \mathrm{d}^2B_3 + 2(\xi\omega_{30} - \tau_{00})\,\mathrm{d}B_3 + \omega_{30}(g_1\omega_2 - 2\xi\omega_{30})\,B + \\ &\qquad + (\,.\,)\,B_3. \end{aligned}$$

Так как $\omega_{30}B = \mathrm{d}B_3 + (.)\,B_3$, то мы, действительно, всегда получим аналитическое касание второго порядка между C'

и C^* в точке B_3, причем это касание будет аналитическим тогда и только тогда, когда

$$g_1\omega_2 - 2\xi\omega_{30} = 0. \tag{9,5}$$

Так как $[\omega_{30}\omega_1] \neq 0$, (9,5) имеет место для единственного значения ξ, в частности для $\xi = 0$ тогда и только тогда, когда $g_1 = 0$, т. е. когда условие (9,1) заменено более сильным условием (6,2). Следовательно, усиление соотношения (9,1) соотношением (6,2) не означает дальнейшего ограничения характера соответствия поверхностей (A_3), (B_3), но представляет дальнейшее условие для проективного соотношения π, которое теперь однозначно определено: Проективное соотношение π переводит прямую $[AA_3]$ в прямую $[BB_3]$ таким же образом, как та касательная коллинеация T между поверхностями A_3 и B_3, которая осуществляет в точке B_3 *аналитическое* касание второго порядка между C' и C^*.

Предоставляем читателю доказать, что соответствие между S_3 и S_3' с описанными выше свойствами всегда будет огибающей двухпараметрического семейства коллинеаций.

10. Рассуждения, проведенные в § 9, нужно дополнить обсуждением того случая, когда фокальные поверхности (A_3), (B_3) вырождаются в *кривые*. Если (A_3) — кривая, то можно специализировать репер $AA_1A_2A_3$ так, чтобы касательная кривой (A_3) была $[A_2A_3]$, откуда получим

$$\omega_{30} = 0. \tag{10,1}$$

Кроме (10,1) мы имеем еще (6,2), так что касательная кривой (B_3) будет $[B_2B_3]$. Пусть $\varrho = [AA_2A_3]$, $\sigma = [BB_2B_3]$, так что ϱ будет касательной плоскостью кривой (A_3), σ — касательной плоскостью кривой (B_3).

Согласно (6,2) и IV, (7,2) имеет место

$$[\tau_{21}\omega_1] = 0, \ [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_1] = 0; \tag{10,2}$$

дифференцируя внешним образом уравнения (6,2) и (10,1), мы получим

$$[\tau_{20}\omega_1] = 0, \ [\omega_{20}\omega_1] = 0; \tag{10,3}$$

согласно (10,1) и IV, (7,2) имеем

$$[\omega_{21}\omega_1] = 0. \tag{10,4}$$

Согласно (10,1)—(10,4), (6,2) и IV, (7,1) для $\omega_1 = 0$ получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_2A_2 + \omega_3A_3,\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{33}A_3;\\
\mathrm{d}B &= (\omega_{00} + \tau_{00})\,B + \omega_2B_2 + \omega_3B_3,\\
\mathrm{d}B_2 &= (\omega_{22} + \tau_{00})\,B_2 + (\omega_{23} + \tau_{23})\,B_3,\\
\mathrm{d}B_3 &= (\omega_{33} + \tau_{00})\,B_3.
\end{aligned} \tag{10,5}$$

Прямые $[AA_3]$ конгруэнции L, проходящие через точку A_3, образуют пучок с центром A_3 в плоскости ϱ; соответствующие им прямые $[BB_3]$ конгруэнции L' образуют пучок B_3 в плоскости σ. Из (10,5) видно, что для каждой точки A_3 кривой (A_3) существует такая коллинеация H между плоскостями ϱ и σ, что $HA_3 = B_3$, $H[A_2A_3] = [B_2B_3]$ и что $KA = HA + \lambda \,.\, A_3$, где коэффициент λ зависит от положения прямой $[AA_3]$, но не зависит от положения точки A на прямой $[AA_3]$.

Отсюда следует, что рассматриваемое соответствие переводит точку $X = X(t, u, v)$ пространства S_3 в точку $Y = Y(t, u, v)$ пространства S_3', где

$$\begin{aligned} X &= z(t) + ux(t) + v\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\ Y &= \bar{z}(t) + [u + f(t, v)]\,\bar{x}(t) + v\,\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \tag{10,6}$$

причем точки x, z пространства S_3 и точки $\bar{x}$, $\bar{z}$ пространства S_3' зависят только от t; f — скалярная функция двух переменных t, v. Наоборот, читатель легко убедится, что каждое соответствие $X \to Y$ вида (10,6) будет принадлежать к исследуемому типу, если только выполнено условие

$$\left[x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,z\right] \neq 0 \neq \left[\bar{x}\,\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}\,\bar{z}\right].$$

11. Остается тот случай, когда каждая линейчатая поверхность, входящая в конгруэнцию L, является развертывающейся. Этот случай был исследован в IV, § 9; условие (6,2) здесь выполнено автоматически. Этим закончено нахождение тех огибающих двухпараметрического семейства коллинеаций в трехмерном пространстве, для которых справедливо уравнение (6,1). Приступим теперь к изучению того случая, когда уравнение (6,1) не имеет места, и докажем прежде всего, что *искомые соответствия обладают тотально K-линеаризирующей прямой* (см. II, § 14). Так как по предположению (6,1) не имеет места, то в уравнениях IV, (4,3) не будет $\alpha_3 = \beta_3 = 0$ и согласно IV, (4,7) можно специализировать репер так, что

$$\alpha_3 = 1, \ \beta_3 = 0.$$

или

$$\omega_{31} = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \omega_3, \ \omega_{32} = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2. \tag{11,1}$$

Согласно § 6 нас интересуют те решения системы Пфаффа, составленной из уравнений (11,1) и IV, (4,1), у которых формы τ_{10}, τ_{20}, τ_{30} независимы от ω_3. Но по первым трем уравнениям

IV, (4,2) формы $\tau_{11}-\tau_{00}$, τ_{21}, τ_{12}, $\tau_{22}-\tau_{00}$, τ_{13}, τ_{23} также независимы от ω_3, так что в силу (11,1) и по последним трем уравнениям IV, (4,2):

$$\tau_{11}-\tau_{00}=0,\ \tau_{12}=0, \tag{11,2}$$

$$2\tau_{30}-\tau_{13}=0. \tag{11,3}$$

Внешним дифференцированием уравнений (11,2) получим

$$\begin{aligned} 2[\tau_{10}\omega_1]+[\tau_{20}\omega_2]+[\omega_{12}\tau_{21}]+[\tau_{13}\omega_{31}+\tfrac{1}{2}\omega_3]=0,\\ [\tau_{10}\omega_2]+[\tau_{11}-\tau_{22}\omega_{12}]+[\tau_{13}\omega_{32}]=0. \end{aligned} \tag{11,4}$$

Так как мы ищем трехмерные решения, для которых $[\omega_1\omega_2\omega_3]\neq 0$, можно положить

$$\omega_{12}=x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3. \tag{11,5}$$

Так как формы τ_{10}, τ_{20}, τ_{21}, $\tau_{11}-\tau_{22}$, τ_{13} независимы от ω_3, из (11,4) следует согласно (11,1) и (11,5):

$$2y_3\tau_{21}=3\tau_{13}, \tag{11,6}$$

$$y_3(\tau_{11}-\tau_{22})=0. \tag{11,7}$$

Докажем, что

$$\tau_{13}=0. \tag{11,8}$$

Это вытекает из (11,6), если $y_3=0$. Если же $y_3\neq 0$, то ввиду (11,7) имеет место $\tau_{11}-\tau_{22}=0$, откуда внешним дифференцированием получим

$$[\tau_{10}\omega_1]-[\tau_{20}\omega_2]+2[\omega_{12}\tau_{21}]+[\tau_{13}\omega_{31}]+[\tau_{23}\omega_{32}]=0. \tag{11,9}$$

Так как формы τ_{10}, τ_{20}, τ_{21}, τ_{13}, τ_{23} независимы от ω_3, из (11,9) получаем, учитывая (11,1) и (11,5):

$$2y_3\tau_{21}=\tau_{13}. \tag{11,10}$$

Из (11,6) и (11,10) следует (11,8).

Из I, (5,15) вытекает согласно IV, (4,1), что

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\omega_3}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial\omega_3}=\frac{\partial\Omega_3}{\partial\omega_3}=0$$

и согласно (11,2) и (11,8)

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\omega_1}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial\omega_1}=\frac{\partial\Omega_3}{\partial\omega_1}=0.$$

Итак, мы получаем

$$\Omega_1=a_1\omega_2^2,\ \Omega_2=a_2\omega_2^2,\ \Omega_3=a_3\omega_2^2;$$

так что тотально K-линеаризирующая прямая существует, что мы и хотели доказать.

Теперь нам осталось только просмотреть все соответствия между S_3 и S_3' с тотально K-линеаризирующей прямой и выбрать из них те, для которых касательная коллинеация K зависит от двух параметров. При этом можно отбросить соответствия, рассмотренные в II, § 24, о которых мы знаем (см. § 2), что коллинеация K зависит от одного параметра. Что касается соответствий типа, описанного в II, § 19, то мы исследовали соответствующие им коллинеации K в § 2 для произвольных n. Для $n = 3$ мы получим огибающие двухпараметрического семейства коллинеаций, если будем исходить из такой гиперповерхности (C) четырехмерного пространства, касательные гиперплоскости которой зависят от двух параметров, и если спроектируем (C) из двух различных центров C_3 и C_4 в одно и то же S_3. Если A, B — проекции одной и той же точки гиперповерхности (C), то соответствие между A и B в сочетании с произвольной коллинеацией между S_3 и S_3' будет самым общим соответствием рассматриваемого типа. Здесь имеется постоянная точка A_3 в пространстве S_3 и постоянная точка B_3 в пространстве S_3' так, что каждой прямой пространства S_3, выходящей из точки A_3, соответствует прямая пространства S_3', выходящая из точки B_3. Тем же свойством обладают и огибающие ∞^2 коллинеаций, рассмотренные в начале этого параграфа; однако, эти последние существенно отличаются от огибающих, которые мы описали теперь.

Остается выяснить, не имеются ли среди соответствий с тотально K-линеаризирующей прямой, найденных в III, еще и другие огибающие ∞^2 коллинеаций, отличные от тех, которые нами уже были изучены в предыдущем. Легко видеть, что это не так. Из уравнений II, (26,1), (26,4), и (26,5) получим с учетом I, (5,15)

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\omega_3} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial\omega_3} = \frac{\partial\Omega_3}{\partial\omega_3} = 0,$$

$\tau_{10} = \tau_{30} = 0$, $[\tau_{20}\omega_2] = 0$, так что все эти соответствия между S_3 и S_3' являются огибающими ∞^2 коллинеаций. Но из уравнений III, (26,1) вытекают уравнения IV, (4,1) и (4,2) кроме первого уравнения IV, (4,3), которое, однако, является следствием уравнения III, (25,14). Итак, соответствия, рассматренные в III, не дают новых огибающих ∞^2 коллинеаций, отличных от уже ранее нами изученных.

Résumé.

Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces V.

Ce Mémoire commence l'étude de telles correspondances entre deux espaces projectifs S_n et S_n' qui sont des enveloppes d'une famille ∞^s $(s < n)$ d'homographies. On prouve d'abord que le cas $s = 1$ ne donne que les correspondances déjà considérées au Mémoire I de cette série, § 24. Ensuite, on passe à considérer le cas $n = 3$, $s = 2$. On prouve d'abord qu'il existe dans S_3 une congruence de droites L portée par la correspondance dans une congruence de droites L. Pour chaque droite p de L, il existe une homographie $K(p)$ qui est une homographie tangente. La correspondance transforme les foyers et les plans focaux de L dans les foyers et les plans focaux de L'. Trois cas sont à distinguer:

(1) cas où L possède deux familles distinctes de développables,

(2) cas où les deux familles coïncident,

(3) cas où toutes les droites de L passent par un point fixe.

Dans les trois cas on détermine la généralité des correspondances envisagées et l'on donne une déscription des propriétés géométriques caractéristiques de la correspondance ce qui, cependant, n'est pas fait d'une manière complète dans le cas où les deux familles de développables de L' étant distinctes, une nappe focale dégénère dans une courbe.