Czechoslovak Mathematical Journal

Eduard Čech

Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. III

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 2, 125–148

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100040`

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВАМИ III

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 2/I 1952 г.)

В мемуаре определены те типы соответствий между проективными пространствами S_n, S'_n с тотально K-линеаризирующей прямой, которые существуют только для $n = 3$. Обнаруживается неожиданная связь этой проблемы с проблемой проективного изгибания поверхностей.

25. В § 14 мы сформулировали проблему определения всех соответствий между двумя пространствами n измерений S_n и S'_n таких, что при надлежащем выборе касательной коллинеации K существует тотально K-линеаризирующая прямая (для каждой пары A, B точек, соответствующих друг другу). В § 15 мы видели, что для $n = 2$ все соответствия принадлежат к этому типу. Для случая $n \geqq 4$ все решения проблемы были указаны в §§ 19 и 24. Решения, данные в этих параграфах остаются в силе и для $n = 3$. Однако, мы уже указали в § 22, что для $n = 3$ имеются другие решения; в настоящем мемуаре мы и поставим себе целью отыскать эти новые решения для случая $n = 3$.

Из § 22 следует, что нужно интегрировать для $n = 3$ систему Пфаффа (17,1) + (17,2) + (17,3) + (17,4) + (22,1) + (22,3), которую мы перепишем снова:

$$\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0, \tag{25,1}$$

$$\tau_{11} - \tau_{00} = \tau_{22} - \tau_{00} = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0, \tag{25,2}$$

$$\tau_{30} = 0, \qquad \omega_{32} = 0. \tag{25,3}$$

Речь идет, впрочем, лишь о тех решениях системы Пфаффа, для которых

$$\omega_{31} \neq 0, \tag{25,4}$$

причем не имеет места одновременно

$$\tau_{10} = \tau_{20} = 0. \tag{25,5}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (25,1) и (25,2) приводит нас к уравнениям (17,6), (17,7), (17,8) и (17,9) с $n = 3$; принимая во внимание (25,3), можно написать их проще

$$[\omega_1\tau_{13}] + [\omega_2\tau_{23}] + [\omega_3\tau_{33} - \tau_{00}] = 0, \tag{25,6}$$

$$[\omega_1\tau_{10}] + 2[\omega_2\tau_{20}] = 0, \tag{25,7}$$

$$2[\omega_1\tau_{10}] + [\omega_2\tau_{20}] = [\tau_{13}\omega_{31}], \tag{25,8}$$

$$[\omega_2\tau_{10}] = 0, \tag{25,9}$$

$$[\omega_1\tau_{20}] = [\tau_{23}\omega_{31}], \tag{25,10}$$

$$[\tau_{33} - \tau_{00}\omega_{31}] = 0. \tag{25,11}$$

Согласно (25,7) и (25,9) можно положить

$$\tau_{10} = 2b\omega_2, \ \tau_{20} = b\omega_1 + a\omega_2; \tag{25,12}$$

Подставляя эти значения в (25,8) и (25,10), получим

$$3b[\omega_1\omega_2] = [\tau_{13}\omega_{31}], \ a[\omega_1\omega_2] = [\tau_{23}\omega_{31}], \tag{25,13}$$

откуда следует

$$b[\omega_1\omega_2\omega_{31}] = a[\omega_1\omega_2\omega_{31}] = 0.$$

Но согласно (25,5) и (25,12) не может быть одновременно $a = b = 0$. Поэтому $[\omega_1\omega_2\omega_{31}] = 0$, так что можно положить

$$\omega_{31} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2. \tag{25,14}$$

Из (25,4), (25,13) и (25,14) вытекает

$$[\tau_{13}\omega_1\omega_2] = [\tau_{23}\omega_1\omega_2] = 0. \tag{25,15}$$

Учитывая (25,15), мы выведем из (25,6), что $[\omega_3, \tau_{33} - \tau_{00}] = 0$. Но из (25,4), (25,11) и (25,14) видно, что $[\omega_1, \omega_2, \tau_{33} - \tau_{00}] = 0$, так что должно иметь место

$$\tau_{33} - \tau_{00} = 0. \tag{25,16}$$

Внешним дифференцированием (25,16) и учитывая (25,2) и (25,3), мы получим $[\omega_1\tau_{10}] + [\omega_2\tau_{20}] + [\tau_{13}\omega_{31}] = 0$; сравнивая это с (25,8), имеем $[\omega_1\tau_{10}] = 0$ и из (25,9) следует

$$\tau_{10} = 0. \tag{25,17}$$

26. Резюмируя, мы должны исследовать систему Пфаффа (25,1) + (25,2) + (25,3) + (25,16) + (25,17). Присоединяя к ней уравнение (6,3), что всегда допустимо, мы получим систему Пфаффа

$$\left.\begin{aligned} \tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} &= 0, \\ \tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} &= 0, \\ \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{32} &= 0, \\ \tau_{30} = \tau_{10} &= 0, \\ \omega_{32} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{26,1}$$

Нас интересуют решения (26,1), для которых имеет место

$$\omega_{31} \neq 0, \tag{26,2}$$

$$\tau_{20} \neq 0. \tag{26,3}$$

Условия интегрируемости системы (26,1) имеют вид

$$[\omega_1\tau_{13}] + [\omega_2\tau_{23}] = 0, \tag{26,4}$$

$$[\omega_2\tau_{20}] = 0, \tag{26,5}$$

$$[\omega_{31}\tau_{13}] = 0, \tag{26,6}$$

$$[\omega_1\tau_{20}] + [\omega_{31}\tau_{23}] = 0, \tag{26,7}$$

$$[\omega_{12}\tau_{20}] - [\omega_{30}\tau_{13}] = 0, \tag{26,8}$$

$$[\omega_2\omega_{30}] + [\omega_{12}\omega_{31}] = 0. \tag{26,9}$$

Что же касается вторичных параметров (см. § 6 и § 8), нетрудно видеть, что все t_{ik} равны нулю (это соответствует тому факту, что коллинеация K постоянна для постоянных значений главных параметров), так что

$$e_{30} = e_{31} = e_{32} = 0 \tag{26,10}$$

(положение A_3 фиксированно для постоянных значений главных параметров), тогда как

$$\left.\begin{array}{c} e_{11} - e_{00},\, e_{22} - e_{00},\, e_{33} - e_{00},\, e_{10},\, e_{20},\, e_{12},\, e_{21},\, e_{13},\, e_{23} \\ \text{пока остаются произвольными.} \end{array}\right\} \tag{26,11}$$

Заметим еще, что имеет место $[\omega_2\omega_{31}\omega_{30}] = 0$ в силу (26,9); если $[\omega_2\omega_{31}] \neq 0$, из этого следует ввиду (25,14), что

$$[\omega_1\omega_2\omega_{30}] = 0; \tag{26,12}$$

однако, если имеет место тождественно $[\omega_2\omega_{31}] = 0$, то внешним дифференцированием этого выражения мы снова получим соотношение (26,12), которое, следовательно, справедливо во всех случаях. С другой стороны, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1A_1 + \omega_2A_2 + \omega_3A_3, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A + \omega_{31}A_1 + \omega_{33}A_3; \end{aligned}$$

поэтому из (25,14) и (26,12) следует

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_3A_3 \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{33}A_3 \end{aligned}\right\} \text{для } \omega_1 = \omega_2 = 0.$$

Таким образом, прямая $[AA_3]$ не меняет своего положения для $\omega_1 = \omega_2 = 0$, так что она может зависеть только от двух параметров (самое большее); но $[AA_3]$ не может зависеть от меньшего числа параметров, чем 2, так как она содержит точку A, зависящую по существу от трех параметров). *Итак, прямая* $[AA_3]$ *описывает конгруэнцию* и, так как $[AA_1A_3\,\mathrm{d}A_3] = 0$, *точка* A_3 *является фокусом этой конгруэнции, причем* $[AA_1A_3]$ *— соответствующая фокальная плоскость*. Так как $\tau_{30} = \tau_{31} = 0$, мы получим

$$dB_3 = \omega_{30}B + \omega_{31}B_1 + (\omega_{33} + \tau_{33})\,B_3.$$

Итак, прямая $[BB_3]$ *также описывает конгруэнцию; ее фокусом является* B_3, *а соответствующей фокальной плоскостью —* $[BB_1B_3]$. Изучаемому соответствию подчиняется соответствие между нашими двумя конгруэнциями, так же как и соответствие между A_3 и B_3 и между $[AA_1A_3]$ и $[BB_1B_3]$.

В случае, когда $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0$, точка A_3 описывает поверхность (A_3); если $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0$, точка A_3 описывает кривую (ввиду неравенства (26,2) точка A_3 не будет постоянной); точно так же (B_3) будет поверхностью, если $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0$ и кривой, если $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0$.

Из основных уравнений следует далее

$$d[AA_1A_3] = (\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{33})\,[AA_1A_3] - \omega_2[A_1A_2A_3] + \\ + \omega_{12}[AA_2A_3].$$

Мы видим, что плоскость $[AA_1A_3]$ зависит от двух параметров, если $[\omega_2\omega_{12}] \neq 0$ и от одного — если $[\omega_2\omega_{12}] = 0$. Для плоскости $[BB_1B_3]$ получается тот же результат, так как $\tau_{12} = 0$.

Выяснив это, мы будем различать четыре случая:

I. $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0 \neq [\omega_2\omega_{12}]$ (будет разобран в § 27),
II. $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0 = [\omega_2\omega_{12}]$ (будет разобран в § 28),
III. $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0 \neq [\omega_2\omega_{12}]$ (будет разобран в § 29),
IV. $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0 = [\omega_2\omega_{12}]$.

Во всех этих случаях из (7,3), (25,2) и (25,16) видно, что K *является локальной коллинеацией*.

27. **Случай I.** Так как $[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0$, точка A_3 описывает поверхность (A_3), которая не развертывается, так как ее касательная плоскость $[AA_1A_3]$ зависит от двух параметров, потому что $[\omega_2\omega_{12}] \neq 0$. Подобно этому, точка B_3 описывает неразвертывающуюся поверхность (B_3). Рассматриваемому соответствию подчиняется соответствие между двумя неразвертывающимися поверхностями (A_3) и (B_3). Мы докажем, что это соответствие является *проективным изгибанием*, в смысле моего безвременно скончавшегося друга Г. Фубини.

В самом деле, основные уравнения (5,3)—(5,6) принимают в силу (26,1) следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}A\; &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,\\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3,\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A + \omega_{31}A_1 + \omega_{33}A_3;\\
\mathrm{d}B\; &= \omega_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3,\\
\mathrm{d}B_1 &= \omega_{10}B + \omega_{11}B_1 + \omega_{12}B_2 + (\omega_{13} + \tau_{13})\, B_3,\\
\mathrm{d}B_2 &= \omega_{20}B + \omega_{21}B_1 + \omega_{22}B_2 + (\omega_{23} + \tau_{23})\, B_3,\\
\mathrm{d}B_3 &= \omega_{30}B + \omega_{31}B_1 + \omega_{33}B_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (27{,}1)$$

Отсюда можно вывести, вспомнив (5,2),

$$KA_3 = B_3,\ K\,\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}B_3,\ K\,\mathrm{d}^2A_3 = \mathrm{d}^2B_3 - \omega_{31}\tau_{13}B_3, \qquad (27{,}2)$$

что свидетельствует об аналитическом касании второго порядка между двумя поверхностями (B_3) и (KA_3) в исходной точке B_3, так что мы, действительно, имеем дело с проективным изгибанием. Кроме того, из (27,1) получаем

$$\begin{gathered}\mathrm{d}K\,.\,A = 0,\ \mathrm{d}K\,.\,A_1 = \tau_{13}B_3,\ \mathrm{d}K\,.\,A_2 = \tau_{23}B_3,\\ \mathrm{d}K\,.\,A_3 = B_3. \end{gathered} \qquad (27{,}3)$$

Но из (25,15) и (27,3) следует, что для $\omega_1 = \omega_2 = 0$, т. е. для каждого фиксированного положения A_3, коллинеация K остается неизменной. В частности, для каждого положения A_3 мы получаем вполне определенную коллинеацию k (подчиненную коллинеации K), переводящую прямую $[AA_3]$ в прямую $[BB_3]$. Соответствие между S_3 и S_3' является совокупностью этих ∞^2 коллинейных преобразований k между прямыми $[AA_3]$ и $[BB_3]$.

Из теории проективного изгибания поверхностей известно, что для каждого положения A_3 существует ∞^1 коллинеаций K^* таких, что имеет место аналитическое касание второго порядка между двумя поверхностями B_3 и $K^*(A_3)$ в исходной точке B_3. Имеем

$$K^*A = B,\ K^*A_1 = B_1,\ K^*A_2 = B_2 + \lambda B,\ K^*A_3 = B_3, \qquad (27{,}4)$$

причем наша партикулярная коллинеация K соответствует случаю $\lambda = 0$.

Все коллинеации K^* порождают одно и то же коллинейное преобразование k прямой $[AA_3]$ в $[BB_3]$. Чтобы охарактеризовать K среди всех K^*, рассмотрим уравнения

$$KA^* = B,\ K^*A_3 = B_3,\ K^*\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - \lambda\omega_2 B_3,\ K^*\,\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}B_3,$$

откуда видно, что

$$\begin{gathered} K^*(xA + yA_3) = xB + yB_3,\\ K^*\,\mathrm{d}(xA + yA_3) = \mathrm{d}(xB + yB_3) - \lambda x\omega_2 B_3. \end{gathered}$$

Итак, мы видим, что среди различных K^* коллинеация K характерна тем свойством, что она является *касательной коллинеацией к соотношению между* S_3 *и* S'_3 *вдоль прямой* $[AA_3]$.

Обратно, будем исходить из данного проективного изгибания между двумя неразвертывающимися поверхностями, которые, как мы теперь предполагаем, описываются точками A и соответственно B. Согласно классическому мемуару Э. Картана ,,Sur la déformation projective des surfaces (Annales de l'Ecole Normale (3), XXXVII, 1920) можно специализировать реперы таким образом, чтобы получить (цит. соч. ур. (12), стр. 274 и (17), стр. 282):

$$\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = \omega_3 = \tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{12} = \\ = \tau_{21} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0, \tag{27,5}$$

$$\omega_{13} = \omega_2,\ \omega_{23} = \omega_1; \tag{27,6}$$

асимптотические кривые на (A) и на (B) даны уравнениями $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$. Наиболее общая коллинеация, обладающая тем свойством, что (B) и $K(A)$ имеют аналитическое касание второго порядка в исходной точке B, дана уравнениями

$$K^*A = B,\ K^*A_1 = B_1,\ K^*A_2 = B_2,\ K^*A_3 = B_3 + \lambda B. \tag{27,7}$$

Проведем через каждую точку A поверхности (A) касательную вида

$$t = [A, \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2]. \tag{27,8}$$

Все коллинеации K^* содержат одно и то же коллинейное преобразование k касательной t в касательную

$$t' = [B, \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2] \tag{27,9}$$

к поверхности (B) в точке B. При изменении A семейство ∞^2 коллинеаций k порождает соответствие между S_3 и S'_3. Отыщем условие (для α_1, α_2 и λ) того, чтобы K^* была касательной коллинеацией этого соответствия вдоль прямой t. Так как имеет место

$$K^*A = B,\ K^*(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2,\ K^*\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B,$$
$$K^*\,\mathrm{d}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) =$$
$$= \mathrm{d}(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) - (\alpha_1 . \tau_{10} - \lambda\omega_2 + \alpha_2 . \tau_{20} - \lambda\omega_1)\, B,$$

искомое условие будет иметь вид

$$\alpha_1 \tau_{10} + \alpha_2 \tau_{20} = \lambda(\alpha_1 \omega_2 + \alpha_2 \omega_1). \tag{27,10}$$

Но внешним дифференцированием (27,5) и (27,6) мы получаем

$$\left.\begin{array}{ll} \tau_{10} = a_0\omega_1 + a_1\omega_2, & \tau_{20} = a_1\omega_1 + a_2\omega_2, \\ \tau_{31} = -a_1\omega_1 + a_2\omega_2, & \tau_{32} = a_0\omega_1 - a_1\omega_2, \\ \multicolumn{2}{c}{\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} = 2(c_1\omega_1 + c_2\omega_2),} \\ \multicolumn{2}{c}{\omega_{12} = c_0\omega_1 - c_1\omega_2,\ \omega_{21} = -c_2\omega_1 + c_3\omega_2.} \end{array}\right\} \tag{27,11}$$

Отсюда условие (27,10) принимает вид

$$\alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 = \lambda \alpha_2, \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \lambda \alpha_1. \tag{27,12}$$

Впрочем, легко видеть, что если $a_0 = a_2 = 0$, то соответствие между двумя поверхностями (A) и (B) будет коллинеацией. Исключая этот случай, мы найдем, что возможны два значения отношения $\alpha_1 : \alpha_2$, которые могут и совпадать. Исключением λ мы получим из (27,12) уравнение

$$a_0 \alpha_1^2 - a_2 \alpha_2^2 = 0 \tag{27,13}$$

определяющее два возможных значения касательной t. Другими словами, обе эти касательные t будут $[A\ \mathrm{d}A]$, где

$$a_0 \omega_1^2 - a_2 \omega_2^2 = 0 \text{ или } \omega_1 \tau_{10} - \omega_2 \tau_{20} = 0. \tag{27,14}$$

(27,14) есть ни что иное, как то, что Э. Картан называет ,,сопряженной сетью проективного изгибания''. Мы случайно получили новое определение этой сети.

Необходимо проверить, всегда-ли соответствие между S_3 и S_3', полученное указанным способом исходя из произвольного проективного изгибания некоторой неразвертывающейся поверхности, обладает тотально K-линеаризирующей прямой. Это можно доказать с помощью следующих уравнений, в справедливости которых нетрудно убедиться,

$$K(xA + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = xB + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2,$$
$$K\,\mathrm{d}(xA + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \mathrm{d}(xB + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2),$$
$$K\,\mathrm{d}^2(xA + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \mathrm{d}^2(xB + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) -$$
$$- (a_0 \omega_1^2 + a_2 \omega_2^2)(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) - (.)\,B.$$

28. **Случай II**. Мы докажем, что этот случай не приводит к новым решениям. Если преобразовать репер A, A_1, A_2, A_3, заменяя A_1 через $A_1 + \lambda A$, что очевидно допустимо (при условии одновременной замены B_1 на $B_1 + \lambda B$), то ω_{12} перейдет в $\omega_{12} + \lambda \omega_2$, и так как $[\omega_2 \omega_{12}] = 0$, мы можем предположить, что

$$\omega_{12} = 0. \tag{28,1}$$

Итак мы рассмотрим систему Пфаффа (26,1), подчиненную неравенствам

$$[\omega_{30} \omega_{31}] \neq 0, \quad \tau_{20} \neq 0. \tag{28,2}$$

Согласно (28,1), из (26,8) следует

$$[\omega_{30} \tau_{13}] = 0. \tag{28,3}$$

Так как $[\omega_{30} \omega_{31}] \neq 0$, из (26,6) и (28,3) видно, что

$$\tau_{13} = 0. \tag{28,4}$$

Далее (26,4) дает

$$[\omega_2 \tau_{23}] = 0. \tag{28,5}$$

Теперь мы получаем

$$KA = B,\ KA_1 = B_1,\ KA_2 = B_2,\ KA_3 = B_3,\ \mathrm{d}K \,.\, A = 0,$$
$$\mathrm{d}K \,.\, A_1 = 0,\ \mathrm{d}K \,.\, A_2 = \tau_{20} A + \tau_{23} A_3,\ \mathrm{d}K \,.\, A_3 = 0.$$

Соотношения (26,5) и (28,5) показывают, что коллинеация K зависит лишь от одного параметра t такого, что $[\omega_2 \,\mathrm{d}t] = 0$. Для $\omega_2 = 0$ точка A описывает плоскость $[AA_1A_3]$ и имеет место $\mathrm{d}K \,.\, X = 0$ для любой точки X этой плоскости. Этим мы вернулись к партикулярному случаю решения, разобранному в § 24.

Замечание. Может показаться странным, что решение, подчиненное условию (22,4), может получиться в тех случаях, когда это условие не выполнено. Объяснение этого явления содержится в замечании, приведенном в конце § 20. В рассматриваемом нами теперь случае прямая $[AA_3]$ описывает конгруэнцию, имеющую вообще говоря две различные фокальные поверхности. Мы специализировали репер таким образом, чтобы A_3 была одним из двух фокусов нашей конгруэнции, и вполне возможно, что условие (22,4) будет выполнено для одного фокуса, не будучи выполнено для другого.

29. **Случай III.** Мы увидим, что этот случай невозможен. Так как $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0$, точка A_3 описывает кривую (A_3). Можно специализировать репер таким образом, что A_1 будет расположена на касательной к кривой (A_3), откуда получим

$$\omega_{30} = 0. \tag{29,1}$$

Учитывая (29,1), мы найдем из (26,8)

$$[\omega_{12}\tau_{20}] = 0. \tag{29,2}$$

Так как $[\omega_2\omega_{12}] \neq 0$, уравнения (26,5) и (29,5) показывают, что $\tau_{20} = 0$, что противоречит (26,3).

30. **Случай IV.** Так как $[\omega_{30}\omega_{31}] = 0$, точка A_3 описывает кривую (A_3). Специализируя репер так, чтобы A_1 лежала на касательной к кривой (A_3), мы получим

$$\omega_{30} = 0. \tag{30,1}$$

К уравнениям (26,10) нужно теперь присоединить

$$e_{10} = e_{12} = 0 \tag{30,2}$$

(точка A_1 должна лежать на прямой $[A_1A_3]$, постоянной для постоянных значений главных параметров), тогда как

$$e_{11} - e_{00},\ e_{22} - e_{00},\ e_{33} - e_{00},\ e_{20},\ e_{21},\ e_{13},\ e_{23} \tag{30,3}$$

остаются и теперь произвольными.

Докажем, что должно иметь место $\omega_{12} = 0$. Рассуждая от противного, положим

$$\omega_{12} \neq 0. \tag{30,4}$$

Так как $\omega_{32} = 0$, имеет место

$$d[AA_1A_3] = [\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{33}]\,[AA_1A_3] - \omega_2[A_1A_2A_3] + \\ + \omega_{12}[AA_2A_3].$$

Так как $[\omega_2\omega_{12}] = 0$, плоскость $[AA_1A_3]$ зависит только от одного параметра и касается своей огибающей по прямой, проходящей через A_3 и расположенной в $[AA_1A_3]$, которая не совпадает ни с $[AA_3]$ ни с $[A_1A_3]$. При надлежащей специализации репера можно предположить, что это будет прямая $[A - A_1, A_3]$, откуда

$$\omega_{12} = \omega_2. \tag{30,5}$$

Имеем $\delta(A - A_1) = e_{00}A - e_{11}A_1 + e_{13}A_3$, $\delta A_3 = e_{33}A_3$. Прямая $[A - A_1, A_3]$ занимает постоянное положение при постоянных значениях главных параметров и поэтому к (26,10) и (30,2) нужно присоединить новое соотношение

$$e_{11} - e_{00} = 0, \tag{30,6}$$

тогда как

$$e_{22} - e_{00},\ e_{33} - e_{00},\ e_{20},\ e_{21},\ e_{13},\ e_{23} \tag{30,7}$$

остаются произвольными. Мы получаем систему Пфаффа (26,1) + (30,1) + (30,5), подчиненную условию (26,2) и (26,3). Внешним дифференцированием (26,1) мы получили соотношения (26,4) — (26,9), которые примут теперь вид

$$[\omega_1\tau_{13}] + [\omega_2\tau_{23}] = 0, \tag{30,8}$$
$$[\omega_2\tau_{20}] = 0. \tag{30,9}$$
$$[\omega_{31}\tau_{13}] = 0, \tag{30,10}$$
$$[\omega_1\tau_{20}] + [\omega_{31}\tau_{23}] = 0, \tag{30,11}$$
$$[\omega_2\omega_{31}] = 0. \tag{30,12}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (30,1) и (30,5) мы должны присоединить

$$[\omega_{10}\omega_{31}] = 0, \tag{30,13}$$
$$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{10} + \omega_1\omega_2] = 0. \tag{30,14}$$

Ввиду (26,2) мы выводим из (30,10) и (30,12), что

$$[\omega_2\tau_{13}] = 0. \tag{30,15}$$

Согласно (30,9), (30,12), и (30,15) можно положить

$$\tau_{20} = \alpha\omega_2, \ \omega_{31} = \beta\omega_2, \tag{30,16}$$

$$\tau_{13} = \gamma\omega_2, \tag{30,17}$$

где $\alpha\beta \neq 0$ в силу (26,2) и (25,3). Внешним дифференцированием (30,16) получаем

$$\delta\alpha = 2(e_{22} - e_{00})\,\alpha, \ \delta\beta = (2e_{00} - e_{22} - e_{33})\,\beta.$$

Так как $\alpha\beta \neq 0$, то из (30,7) следует, что можно специализировать репер так, чтобы $\alpha = \beta = 1$ или

$$\tau_{20} = \omega_2, \tag{30,18}$$

$$\omega_{31} = \omega_2; \tag{30,19}$$

к соотношениям (26,10), (30,2) и (30,6) нужно еще присоединить

$$e_{22} - e_{00} = e_{33} - e_{00} = 0 \tag{30,20}$$

тогда как

$$e_{20}, \ e_{21}, \ e_{13}, \ e_{23} \tag{30,21}$$

остаются произвольными.

Согласно (30,17), (30,18) и (30,19) из (30,8) и (30,11) следует

$$\gamma[\omega_1\omega_2] + [\omega_2\tau_{23}] = 0, \ [\omega_1\omega_2] + [\omega_2\tau_{23}] = 0,$$

что дает сперва $\gamma = 1$ или

$$\tau_{13} = \omega_2 \tag{30,22}$$

и далее $[\omega_2\tau_{23} - \omega_1] = 0$, так что можно положить

$$\tau_{23} = \omega_1 + \varepsilon\omega_2. \tag{30,23}$$

Внешним дифференцированием (30,23) мы получим $\delta\varepsilon = 2e_{21}$; принимая во внимание (30,21) мы видим, что можно специализировать репер так, чтобы получить $\varepsilon = 0$ или

$$\tau_{23} = \omega_1. \tag{30,24}$$

Внешним дифференцированием мы выводим из (30,18), (30,19) и (30,22) с учетом (30,5) и (30,24)

$$[2(\omega_{00} - \omega_{22}) + \omega_1\omega_2] = 0, \tag{30,25}$$

$$[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_1\omega_2] = 0, \tag{30,26}$$

$$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} + 2\omega_1\omega_2] = 0. \tag{30,27}$$

Умножая (30,25), (30,26), (30,27) соответственно на 1, —1, —1 и складывая, мы получим $[\omega_1\omega_2] = 0$, что невозможно.

31. Из § 30 видно, что все остальные решения нашей проблемы можно получить, интегрируя систему Пфаффа (26,1) + + (31,1), где

$$\omega_{30} = 0, \ \omega_{12} = 0. \tag{31,1}$$

Впрочем нас будут интересовать только решения, удовлетворяющие неравенствам (26,2) и (26,3). Имеем

$$dA_3 = \omega_{31}A_1 + \omega_{33}A_3, \ dA_1 = \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{13}A_3.$$

Если $\omega_{10} \neq 0$, геометрическим местом (A_3) точек A_3 будет пространственная кривая с соприкасающейся плоскостью $[AA_1A_3]$; если $\omega_{10} = 0$, (A_3) будет прямая $[A_1A_3]$. В настоящем параграфе мы будем исследовать случай

$$\omega_{10} \neq 0. \tag{31,2}$$

Уравнения (26,4)—(26,9), полученные внешним дифференцированием (26,1), примут теперь вид

$$[\omega_1\tau_{13}] + [\omega_2\tau_{23}] = 0, \tag{31,3}$$

$$[\omega_2\tau_{20}] = 0, \tag{31,4}$$

$$[\omega_{31}\tau_{13}] = 0, \tag{31,5}$$

$$[\omega_1\tau_{20}] + [\omega_{31}\tau_{23}] = 0. \tag{31,6}$$

К ним нужно присоединить результат внешнего дифференцирования (31,1), то есть

$$[\omega_{31}\omega_{10}] = 0, \tag{31,7}$$

$$[\omega_2\omega_{10}] = 0. \tag{31,8}$$

Согласно (31,2) из (31,7) и (31,8) следует

$$[\omega_{31}\omega_2] = 0. \tag{31,9}$$

Вспомним также соотношения (26,10), (30,2) и (30,3).

Согласно (31,4), (31,8) и (31,9), можно положить

$$\tau_{20} = \alpha\omega_2, \ \omega_{10} = \beta\omega_2, \ \omega_{31} = \gamma\omega_2,$$

где $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ввиду (26,3), (31,2) и (26,2). Отсюда мы получаем внешним дифференцированием

$$\delta\alpha = 2(e_{22} - e_{00})\,\alpha, \ \delta\beta = (e_{11} + e_{22} - 2e_{00})\,\beta,$$
$$\delta\gamma = (e_{22} + e_{33} - e_{00} - e_{11})\,\gamma.$$

Учитывая (30,3), мы видим, что можно специализировать репер так, чтобы было $\alpha = \beta = \gamma = 1$ или

$$\tau_{20} = \omega_2, \ \omega_{10} = \omega_2, \ \omega_{31} = \omega_2. \tag{31,10}$$

К соотношениям (26,10) и (30,2) нужно теперь присоединить

$$e_{11} - e_{00} = e_{22} - e_{00} = e_{33} - e_{00} = 0 \tag{31,11}$$

тогда как

$$e_{20}, \ e_{21}, \ e_{13}, \ e_{23} \tag{31,12}$$

остаются произвольными.

Внешним дифференцированием уравнений (31,10) мы получим

$$[\omega_{11} - \omega_{00}\omega_2] = [\omega_{22} - \omega_{00}\omega_2] = [\omega_{33} - \omega_{00}\omega_2] = 0. \quad (31,13)$$

Учитывая (31,10) мы выводим из (31,3) и (31,6)

$$[\omega_1\tau_{13} - \omega_2] = 0, \ [\omega_2\tau_{23} - \omega_1] = 0;$$

и получаем $[\tau_{13}\omega_2] = 0$ согласно (31,5) и (31,10), так что

$$\tau_{13} = \omega_2, \quad (31,14)$$

$$\tau_{23} = \omega_1 + a\omega_2. \quad (31,15)$$

Из (31,15) мы получим внешним дифференцированием $\delta a = 2e_{21}$. Из (31,12) следует, что можно специализировать репер так, чтобы $a = 0$ или

$$\tau_{23} = \omega_1; \quad (31,16)$$

к соотношениям (26,10), (30,2) и (31,11) нужно теперь присоединить

$$e_{21} = 0 \quad (31,17)$$

тогда как

$$e_{20}, e_{13}, e_{23} \quad (31,18)$$

остаются произвольными.

Внешнее дифференцирование (31,14) не дает ничего нового, но дифференцируя внешним образом (31,16), мы получим

$$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_1] - 2[\omega_{21} - \omega_3\omega_2] = 0. \quad (31,19)$$

Введя допустимое предположение (см. § 6)

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0,$$

мы видим из соотношений (31,13), что можно положить

$$\omega_{00} = \alpha\omega_2, \ \omega_{11} = \alpha_1\omega_2, \ \omega_{22} = \alpha_2\omega_2, \ \omega_{33} = \alpha_3\omega_3,$$
$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Внешнее дифференцирование дает

$$\delta\alpha = -e_{20}, \ \delta\alpha_1 = e_{13}, \ \delta\alpha_2 = e_{20}, \ \delta\alpha_3 = -e_{13}.$$

Согласно (30,18) можно специализировать репер так, чтобы

$$\omega_{00} = \alpha\omega_2, \ \omega_{11} = -\alpha\omega_2, \quad (31,20)$$

$$\omega_{22} = 0, \quad \omega_{33} = 0. \quad (31,21)$$

Из соотношений (31,21) мы получаем внешним дифференцированием $[\omega_{20}\omega_2] = 0$, $[\omega_{31}\omega_2] = 0$, так что можно положить

$$\omega_{20} = \beta\omega_2, \ \omega_{13} = \gamma\omega_2. \quad (31,22)$$

Внешнее дифференцирование (31,20) и (31,22) дает возможность положить

$$\mathrm{d}\alpha = \omega_1 + p\omega_2,\ \mathrm{d}\beta = \omega_{21} + q\omega_2,\ \mathrm{d}\gamma = -\,\omega_3 + r\omega_2. \qquad (31,23)$$

Далее мы продифференцируем внешним образом (31,22) и положим

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}p &= \omega_{21} + 2\alpha\omega_1 + p_1\omega_2 - \omega_3, \\ \mathrm{d}q &= \alpha\omega_{21} - \omega_{23} + \beta\omega_1 + q_1\omega_2, \\ \mathrm{d}r &= -\,\omega_{23} + \gamma\omega_1 + r_1\omega_{12} - \alpha\omega_3. \end{aligned}\right\} \qquad (31,24)$$

Легко найти, что $[\mathrm{d}\omega_2] = 0$, откуда

$$\omega_2 = \mathrm{d}t \qquad (31,25)$$

Теперь мы вычисляем последовательно

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t} = A_1,\ \frac{\mathrm{d}^2A_3}{\mathrm{d}t^2} = A - \alpha A_1 + \gamma A_3, \\ &\frac{\mathrm{d}^3A_3}{\mathrm{d}t^3} = (-\,p + \alpha^2 + \gamma)\,A_1 + A_2 + (r - \alpha\gamma)\,A_3, \\ &\frac{\mathrm{d}^4A_3}{\mathrm{d}t^4} = (-\,p + \alpha^2 + \beta + \gamma)\,A + (2r - p_1 - 2\alpha\gamma + \\ &\qquad + 3\alpha p - \alpha^3)\,A_1 + (r_1 - \alpha r - 2\gamma p + \gamma^2 + \alpha\gamma)\,A_3 \end{aligned}\right\} \qquad (31,26)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t} = B_1,\ \frac{\mathrm{d}^2B_3}{\mathrm{d}t^2} = B - \alpha B_1 + (\gamma + 1)\,B_3, \\ &\frac{\mathrm{d}^3B_3}{\mathrm{d}t^3} = (-\,p + \alpha^2 + \gamma + 1)\,B_1 + B_2 + \\ &\qquad + (r - \alpha\,.\,\overline{\gamma + 1})\,B_3, \\ &\frac{\mathrm{d}^4B_3}{\mathrm{d}t^4} = (-\,p + \alpha^2 + \beta + 2)\,B + (2r - p_1 - \\ &\qquad - 2\alpha\,.\,\overline{\gamma + 1} + 3\alpha p - \alpha^3)\,B_1 + (r_1 - \alpha r - \\ &\qquad - 2\,.\,\overline{\gamma + 1}\,.\,p + \overline{\gamma + 1}^2 + + \alpha\,.\,\overline{\gamma + 1})\,B_3; \end{aligned}\right\} \qquad (31,27)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t} = -\,[A_1A_2A_3], \\ &\frac{\mathrm{d}^2[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^2} = \alpha[A_1A_2A_3] - [AA_2A_3] + \beta[AA_1A_3], \\ &\frac{\mathrm{d}^3[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^3} = (p - \alpha^2 - \beta)\,[A_1A_2A_3] + \\ &\qquad + (q - \alpha\beta)\,[AA_1A_3] + [AA_1A_2], \\ &\frac{\mathrm{d}^4[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^4} = (p_1 - 3\alpha p - 2q + 2\alpha\beta + \alpha^3)\,[A_1A_2A_3] + \\ &\qquad + (p - \alpha^2 - \beta - \gamma)\,[AA_2A_3] + \\ &\qquad + (q_1 - 2\beta p - \alpha q + \alpha^2\beta + \beta^2)\,[AA_1A_3]; \end{aligned}\right\} \qquad (31,28)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t} = -\,[B_1B_2B_3],\\
&\frac{\mathrm{d}^2[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^2} = \alpha[B_1B_2B_3] - [BB_2B_3] + (\beta+1)\,[BB_1B_3],\\
&\frac{\mathrm{d}^3[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^3} = (p-\alpha^2-\beta-1)\,[B_1B_2B_3] +\\
&\qquad\qquad + (q-\alpha\,.\,\overline{\beta+1})\,[BB_1B_3] + [BB_1B_2],\\
&\frac{\mathrm{d}^4[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^4} = (p-3\alpha p-2q+2\alpha\,.\,\overline{\beta+1}\,+\\
&\qquad\qquad + \alpha^3)\,[B_1B_2B_3] + (p-\alpha^2-\beta-\gamma-\\
&\qquad\qquad - 2)\,[BB_2B_3] + (q_1 - 2\,.\,\overline{\beta+1}\,.\,p-\\
&\qquad\qquad - \alpha q + \alpha^2\,.\,\overline{\beta+1} + \overline{\beta+1}^2)\,[BB_1B_3].
\end{aligned}
\right\}
\qquad (31{,}29)
$$

Но вводя две коллинеации K_1 и K_2 с помощью уравнений

$$
\begin{gathered}
K_1A = B + \tfrac{2}{3}B_3,\ K_1A_1 = B_1,\ K_1A_1 = B_2 - \alpha B_3,\\
K_1A_3 = B_3;
\end{gathered}
\qquad (31{,}30)
$$

$$
\begin{gathered}
K_2A = B,\ K_2A_1 = B_1,\ K_2A_2 = B_2 - \tfrac{2}{3}B_1 - \alpha B_3,\\
K_2A_3 = B_3,
\end{gathered}
\qquad (31{,}31)
$$

мы видим из (31,26)—(31,29), что

$$
\left.
\begin{aligned}
&K_1A_3 = B_3,\ K_1\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t},\ K_1\frac{\mathrm{d}^2A_3}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2B_3}{\mathrm{d}t^2} - \tfrac{1}{3}B_3,\\
&K_1\frac{\mathrm{d}^3A_3}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}^3B_3}{\mathrm{d}t^3} - \frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t},\ K_1\frac{\mathrm{d}^4A_3}{\mathrm{d}t^4} = \frac{\mathrm{d}^4B_3}{\mathrm{d}t^4} - 2\,\frac{\mathrm{d}^2B_3}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_1B_3;
\end{aligned}
\right\}
\qquad (31{,}32)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&K_2[AA_1A_3] = [BB_1B_3],\ K_2\,\frac{\mathrm{d}[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t},\\
&K_2\,\frac{\mathrm{d}^2[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^2} - \tfrac{1}{3}[BB_1B_3],\\
&K_2\,\frac{\mathrm{d}^3[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}^3[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^3} - \frac{\mathrm{d}[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t},\\
&K_2\,\frac{\mathrm{d}^4[AA_1A_3]}{\mathrm{d}t^4} = \frac{\mathrm{d}^4[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^4} - 2\,\frac{\mathrm{d}^2[BB_1B_3]}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_2[BB_1B_3],
\end{aligned}
\right\}
\qquad (31{,}33)
$$

где значения λ_1 и λ_2 нас не интересуют.

Уравнения (31, 32) показывают, что K_1 является *точечной соприкасающейся коллинеацией* соответствия между двумя кривыми (A_3) и (B_3), т. е. что имеет место аналитическое касание четвертого порядка между двумя кривыми $K_1(A_3)$ и (B_3) в исходной точке B_3. Точно так же уравнения (31, 32) показывают, что K_2 является *тангенциальной соприкасающейся коллинеацией* того же соответствия между (A_3) и (B_3), т. е. что имеет место аналитическое касание четвертого порядка между кривыми $K_2(A_3)$ и (B_3), если образующими элементами этих двух кривых считать соприкасающиеся плоскости (а не точки). Уравнения (31,31) показывают, что рассматриваемое соответствие между двумя пространствами S_3 и S_3' можно получить, поставив в соответствие *каждой точке некоторой соприкасающейся плоскости кривой — образ этой точки при коллинеации* K_2.

Однако, для того, чтобы построенное таким образом соответствие между двумя пространствами S_3 и S_3' обладало для каждой пары взаимно соответствующих точек тотально K-линеаризирующей прямой (при надлежащем выборе касательной коллинеации K), необходимо и достаточно, чтобы порождающее соответствие между обеими кривими (A_3) и (B_3) обладало свойством, которое вытекает из следующих уравнений, получающихся из (31,30) и (31,31):

$$\begin{aligned} (K_1 - K_2)\,A &= \tfrac{2}{3}B_3, \quad (K_1 - K_2)\,A_1 = 0, \\ (K_1 - K_2)\,A_2 &= \tfrac{2}{3}B_1, \quad (K_1 - K_2)\,A_3 = 0. \end{aligned} \qquad (31{,}34)$$

Упомянутое свойство состоит в том, что *для каждой точки* X, не лежащей на касательной $[A_1A_3]$ к кривой (A_3) в точке A_3, *прямая* $[K_1X,\ K_2X]$ *пересекает касательную* $[B_1B_3]$ к кривой (B_3) (в точке B_3, соответствующей A_3) *в точке, являющейся образом касательной плоскости к кривой* B_3, *содержащей прямую* $[K_1X,\ K_2X]$, *в нуль-системе ассоциированной с соприкасающимся линейным комплексом кривой* (B_3) в точке B_3. Читатель может без труда верифицировать приведенное выше, так же как и справедливость последующих замечаний. *Если даны две пространственные кривые* (A_3) *и* (B_3) *и если каждая из них принадлежит некоторому фиксированному линейному комплексу, то указанное свойство имеет место всегда, независимо от выбора соответствия между* (A_3) *и* (B_3). *Наоборот, это свойство не может иметь места, если одна и только одна из наших двух кривых* (A_3) *и* (B_3) *принадлежит некоторому фиксированному линейному комплексу. Наконец, если ни одна из кривых* (A_3) *и* (B_3) *не принадлежит фиксированному линейному комплексу, то существуют три семейства* (из которых только одно действительно для действительных кривых) ∞^1 *соответствий между* (A_3) и (B_3), *обладающих указанным свойством.* Если отнести кривую (A_3) к некоторому параметру v, а вторую кривую (B_3) к параметру v', то эти соответствия можно получить интегрируя уравнение

$$\Theta_3(v)\,dv^3 = \Theta_3'(v')\,dv'^3,$$

где Θ_3 — хорошо известный дифференциальный инвариант Э. И. Вильчинского (см. его книгу Projective differential geometry of curves and ruled surfaces стр. 240) относительно кривой (A_3), а Θ_3' — тот же инвариант относительно (B_3).

32. Остается исследовать систему Пфаффа (26,1) + (32,1), где

$$\omega_{30} = \omega_{12} = \omega_{10} = 0, \tag{32,1}$$

условия интегрируемости которой имеют вид

$$[\omega_1 \tau_{13}] + [\omega_2 \tau_{23}] = 0, \tag{32,1}$$
$$[\omega_2 \tau_{20}] = 0, \tag{32,2}$$
$$[\omega_{31} \tau_{13}] = 0, \tag{32,4}$$
$$[\omega_1 \tau_{20}] + [\omega_{31} \tau_{23}] = 0. \tag{32,5}$$

Нас интересуют решения системы (26,1) + (32,1), удовлетворяющие неравенствам (26,2) и (26,3). Вспомним также соотношения (26,10), (30,2) и (30,3). Из (32,2)—(32,5) следует, что можно положить $\omega_{31} = \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2$. Внешним дифференцированием мы получаем отсюда

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= (e_{33} - e_{00})\,\alpha_1, \\ \delta\alpha_2 &= e_{21}\alpha_1 + (e_{22} + e_{33} - e_{00} - e_{11})\,\alpha_2. \end{aligned} \tag{32,6}$$

Согласно (26,2) и (30,3) мы видим, что можно специализировать репер так, чтобы было или $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, то есть $\omega_{31} = \omega_1$, или $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, то есть $\omega_{31} = \omega_2$. В настоящем параграфе мы будем исследовать предположение

$$\omega_{31} = \omega_1; \tag{32,7}$$

предположение $\omega_{31} = \omega_2$ будет разобрано в § 33. Ввиду (32,6) нужно к соотношениям (26,10) и (30,2) присоединить

$$e_{33} - e_{00} = e_{21} = 0 \tag{32,8}$$

тогда как

$$e_{11} - e_{00},\ e_{22} - e_{00},\ e_{20},\ e_{13},\ e_{23} \tag{32,9}$$

остаются произвольными.

Если бы было $\tau_{13} = 0$, имело бы место

$$KA = B,\ KA_1 = B_1,\ KA_2 = B_2,\ KA_3 = B_3,$$
$$\mathrm{d}K \,.\, A = 0,\ \mathrm{d}K \,.\, A_1 = 0,\ \mathrm{d}K \,.\, A_2 = \tau_{20}A + \tau_{23}A_3,\ \mathrm{d}K \,.\, A_3 = 0.$$

Согласно (32,2) и (32,3) было бы $[\omega_2 \tau_{20}] = [\omega_2 \tau_{23}] = 0$, так что коллинеация K зависела бы лишь от одного параметра t такого, что $[\mathrm{d}t\omega_2] = 0$. Для $\omega_2 = 0$ точка A описала бы плоскость

$[AA_1A_3]$ и имело бы место $dK \,.\, X = 0$ для каждой точки X этой плоскости. Мы вернулись бы к частному случаю решения, разобранного в § 24. Отсюда следует, что мы можем предположить

$$\tau_{13} \neq 0. \tag{32,10}$$

Условия интегрируемости системы Пфаффа (26,1) + (32,1) + + (32,7) имеют очевидно вид

$$\tau_{20} + \tau_{23} = 0, \tag{32,11}$$

$$[\omega_2\tau_{20}] = [\omega_1\tau_{13}] = 0, \tag{32,12}$$

$$[\omega_1\omega_{00} - \omega_{33} + \omega_3] - [\omega_2\omega_{21}] = 0. \tag{32,13}$$

(32,12) позволяет нам положить $\tau_{20} = \beta_1\omega_2$, $\tau_{13} = \beta_2\omega_1$. Внешнее дифференцирование дает нам $\delta\beta_1 = 2(e_{22} - e_{00})\,\beta_1$, $\delta\beta_2 = 2(e_{11} - e_{00})\,\beta_2$. Согласно (26,3), (32,9) и (32,10), можно специализировать репер таким образом, чтобы получить $\beta_1 = \beta_2 = 1$ или

$$\tau_{20} = \omega_2,\ \tau_{23} = -\,\omega_2,\ \tau_{13} = \omega_1. \tag{32,14}$$

К соотношениям (26,10), (30,2) и (30,8) нужно присоединить

$$e_{11} = e_{00} = e_{22} - e_{00} = 0, \tag{32,15}$$

тогда как

$$e_{20},\ e_{13},\ e_{23} \tag{32,16}$$

остаются произвольными.

Внешним дифференцированием (32,14) получаем

$$[\omega_2\omega_{00} - \omega_{22}] = 0,$$
$$[\omega_2\omega_{22} - \omega_{33} + \omega_3] - [\omega_1\omega_{21}] = 0,$$
$$[\omega_1\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33}] - [\omega_2\omega_{21}] = 0.$$

Итак, условия интегрируемости системы Пфаффа (26,1) + + (32,1) + (32,7) + (32,11) + (32,14) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{33} &= a\omega_1, \quad \omega_{22} - \omega_{00} = b\omega_2, \\ \omega_{33} - \omega_{00} &= h\omega_1 + k\omega_2 + \omega_3, \quad \omega_{21} = k\omega_1 + h\omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{32,17}$$

Мы видим, что наша система Пфаффа в инволюции и ее общее решение зависит от четырех произвольных функций одного переменного.

Легко доказать, что случай $h \neq 0$ не приводит к новым решениям. В самом деле, положим

$$A' = A,\ A_1' = -\,A_2,\ A_2' = A_1,\ A_3' = A_3 - A,$$
$$B' = B,\ B_1' = -\,B_2,\ B_2' = B_1,\ B_3' = B_3 - B.$$

Тогда мы найдем

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A' &= (\omega_{00} + \omega_3) A' - \omega_2 A'_1 + \omega_1 A'_2 + \omega_3 A'_3, \\
\mathrm{d}A'_1 &= -(\omega_{20} + \omega_{23}) A' + \omega_{21} A'_1 - (k\omega_1 + h\omega_2) A'_2 - \omega_{23} A'_3, \\
\mathrm{d}A'_2 &= \omega_{13} A' + \omega_{11} A'_2 + \omega_{13} A'_3, \\
\mathrm{d}A'_3 &= (h\omega_1 + k\omega_2) A' + \omega_2 A'_1 + (\omega_{33} - \omega_3) A'_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}B' &= (\omega_{00} + \omega_3) B' - \omega_2 B'_1 + \omega_1 B'_2 + \omega_3 B'_3, \\
\mathrm{d}B'_1 &= -(\omega_{20} + \omega_{23}) B' + \omega_{22} B'_1 - (k\omega_1 + h\omega_2) B'_2 - \\
&\quad - (\omega_{23} - \omega_2) B'_3, \\
\mathrm{d}B'_2 &= (\omega_{13} + \omega_1) B' + \omega_{11} B'_2 + (\omega_{13} + \omega_1) B'_3, \\
\mathrm{d}B'_3 &= (h\omega_1 + k\omega_2) B' + \omega_2 B'_1 + (\omega_{33} - \omega_3) B'_3.
\end{aligned}$$

Действительно, мы видим, что имеем здесь дело для $h \neq 0$ с частным случаем решения (вплоть до обозначений), исследованного в § 27. Это частный случай конгруэнций R, одна фокальная поверхность которых вырождается в прямую.

Во всех этих случаях внешним дифференцированием последнего (или предпоследнего) соотношения (23,17) мы получаем $\delta h = 0$, $\delta k = -(e_{20} + e_{23})$. Значит можно специализировать репер таким образом, чтобы $k = 0$, для чего необходимо присоединить к (32,15) новое соотношение

$$e_{20} + e_{23} = 0.$$

Если кроме того $h = 0$, то имеет место

$$\omega_{33} - \omega_{00} = \omega_3, \ \omega_{21} = 0. \tag{32,18}$$

Дифференцируя внешним образом (32,18), получим $[\omega_2\omega_{20} + \omega_{23}] = 0$, $[\omega_1\omega_{20} + \omega_{23}] = 0$, так что должно иметь место

$$\omega_{20} + \omega_{23} = 0. \tag{32,19}$$

Внешнее дифференцирование первых двух соотношений (32,17) дает $\delta a = 2e_{13}$, $\delta b = -2e_{20}$. Так как e_{13} и e_{20} еще свободны, можно завершить специализацию репера, полагая $a = b = 0$ или

$$\omega_{11} - \omega_{33} = 0, \ \omega_{22} - \omega_{00} = 0. \tag{32,20}$$

Легко убедиться, что $[\mathrm{d}\omega_1] = [\mathrm{d}\omega_2] = 0$, так что

$$\omega_1 = \mathrm{d}u, \ \omega_2 = \mathrm{d}v. \tag{32,21}$$

Основные уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,\\
\mathrm{d}A_1 &= (\omega_{00} + \omega_3)\, A_1 + \omega_{13}A_3,\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{00}A_2 + \omega_{23}(A_3 - A),\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_1 A_1 + (\omega_{00} + \omega_3)\, A_3;\\
\\
\mathrm{d}B &= \omega_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3,\\
\mathrm{d}B_1 &= (\omega_{00} + \omega_3)\, B_1 + (\omega_{13} + \omega_1)\, B_3,\\
\mathrm{d}B_2 &= \omega_{00}B_2 + (\omega_{23} - \omega_2)\, (B_3 - B),\\
\mathrm{d}B_3 &= \omega_1 B_1 + (\omega_{00} + \omega_3)\, B_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (32{,}22)$$

Итак, мы имеем

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}A_3 &= \omega_1 A_1 + (\omega_{00} + \omega_3)\, A_3,\\
\mathrm{d}A_1 &= (\omega_{00} + \omega_3)\, A_1 + \omega_{13}A_3,\\
\mathrm{d}B_3 &= \omega_1 B_1 + (\omega_{00} + \omega_3)\, B_3,\\
\mathrm{d}B_1 &= (\omega_{00} + \omega_3)\, B_1 + (\omega_{13} + \omega_1)\, B_3,
\end{aligned}\right\} \qquad (32{,}24)$$

откуда видно, что положение обеих точек A_3 и B_3 зависит от единственного параметра u; при изменении u точка A_3 описывает прямую (A_3), точка B_3 — прямую (B_3), и мы имеем дело с *неколлинейным соответствием* между этими двумя прямыми; сверх того это соответствие произвольно.

Кроме того имеет место

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}(A_3 - A) &= -\,\omega_2 A_2 + \omega_{00}(A_3 - A),\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{00}A_2 + \omega_{23}(A_3 - A);\\
\mathrm{d}(B_3 - B) &= -\,\omega_2 B_2 + \omega_{00}(B_3 - B),\\
\mathrm{d}B_2 &= \omega_{00}B_2 + (\omega_{23} - \omega_2)(B_3 - B),
\end{aligned}\right\} \qquad (32{,}24)$$

что показывает, что положение обеих точек $A_3 - A$ в $B_3 - B$ зависит только от одного параметра v; при изменении v точка $A_3 - A$ описывает прямую $(A_3 - A)$, точка $B_3 - B$ описывает прямую $(B_3 - B)$, и мы имеем дело с *неколлинеарным соответствием* (и сверх того, произвольным) между этими двумя прямыми.

Из (32,23) и (32,24) легко вывести (см. § 3, а также (12,2)), что коллинеация K содержит соприкасающуюся коллинеацию соответствия между двумя прямыми (A_3) и (B_3), так же как и соприкасающуюся коллинеацию между двумя прямыми $(A_3 - A)$ и $(B_3 - B)$. Обе фиксированные прямые $(A_3) = [A_1A_3]$ и $(A_3 - A) = [A_2, A_3 - A]$ являются направляющими прямыми некоторой неспециальной линейной конгруэнции, описываемой прямой $[AA_3]$. Через эту фиксированную линейную конгруэнцию проходит пучок линейных комплексов, а именно

$$[A_3A_1] + \lambda[A_3 - A, A_2]. \qquad (32{,}25)$$

Точно так же в пространстве S_3' мы получаем некоторую неспециальную линейную конгруэнцию, содержащуюся в пучке линейных комплексов

$$[B_3 B_1] + \lambda [B_3 - B, B_2]. \tag{32,26}$$

Но из уравнений (32,22) следует, что для любого фиксированного значения λ два линейных комплекса (32,25) и (32,26) также фиксированы; очевидно, что каждая коллинеация K переводит всякий комплекс (32,25) в комплекс (32,26), отвечающий тому же значению λ.

Соответствия рассматриваемого типа между пространствами S_3 и S_3' можно, следовательно, получить следующим образом. Выберем две скрещивающиеся прямые d_1, d_2 в S_3, а также две скрещивающиеся прямые d_1', d_2' в пространстве S_3'. Выберем неколлинейное соответствие φ_1 между двумя прямыми d_1, d_1' и неколлинейное соответствие φ_2 между двумя прямыми d_2, d_2'. Выберем, наконец, фиксированную коллинеацию L между S_3 и S_3' переводящую d_1 в d_1' и d_2 в d_2'. Сделав это, обратимся к искомому соответствию, которое произвольной точке A пространства S_3 (мы предполагаем, что она не лежит ни на одной из прямых d_1 и d_2) относит точку B пространства S_3', построенную следующим образом. Через точку A проходит прямая, пересекающая d_1 в точке C_1, d_2 в точке C_2. Пусть φ_1 — соприкасающаяся коллинеация соответствия φ_1, присвоенная положению C_1 подвижной точки на d_1; пусть φ_2 — соприкасающаяся коллинеация соответствия φ_2, присвоенная положению C_2 подвижной точки на d_2. Существует вполне определенная коллинеация K между S_3 и S_3', содержащая φ_1 и φ_2 и такая, что имеет место $KE = LE$ для всякого линейного комплекса E, содержащего неспециальную линейную конгруенцию с направляющими d_1 и d_2. Тогда будет $B = KA$.

33. Последним случаем подлежащим исследованию является случай системы Пфаффа (26,1) + (23,1), где

$$\omega_{30} = \omega_{12} = \omega_{10} = 0, \ \omega_{31} = \omega_2. \tag{33,1}$$

В уравнениях (32,6) мы положили $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, так что нужно присоединить к (26,10) и (30,2)

$$e_{00} + e_{11} - e_{22} - e_{33} = 0, \tag{33,2}$$

тогда как

$$e_{11} - e_{00}, e_{22} - e_{00}, e_{20}, e_{21}, e_{13}, e_{23} \tag{33,3}$$

остаются произвольными.

Мы ищем решения, удовлетворяющие неравенствам (26,2) и (26,3).

Нетрудно видеть, что условия интегрируемости системы (26,1) + (33,1) имеют вид

$$\tau_{13} = \tau_{20}, \tag{33,4}$$

$$[\omega_2 \tau_{20}] = 0, \tag{33,5}$$

$$[\omega_1 \tau_{20}] + [\omega_2 \tau_{23}] = 0, \tag{33,6}$$

$$[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}\omega_2] = 0. \tag{33,7}$$

Согласно (33,7) можно положить $\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} = a\omega_2$. Внешним дифференцированием мы получим отсюда $\delta a = (e_{22} - e_{00})\, a - 2e_{20} + 2e_{13}$. Вследствие (33,3) можно специализировать репер так, чтобы было $a = 0$ или

$$\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} = 0. \tag{33,8}$$

Тогда мы получим систему Пфаффа (26,1) + (33,1) + (33,4) + + (33,8), условия интегрируемости которой будут, как нетрудно видеть,

$$\tau_{20} = \alpha\omega_2, \tag{33,9}$$

$$\tau_{23} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \tag{33,10}$$

$$\omega_{20} - \omega_{13} = \gamma\omega_2. \tag{33,11}$$

Наша система Пфаффа находится в инволюции и ее общее решение зависит от трех произвольных функций одного переменного. Согласно (26,3) мы можем предположить, что $\alpha \neq 0$. Мы имеем $[\mathrm{d}\omega_2] = [\omega_{00} - \omega_{22}\omega_2]$, откуда $[\omega_2\, \mathrm{d}\omega_2] = 0$; итак уравнение $\omega_2 = 0$ вполне интегрируемо, т. е. эквивалентно уравнению вида $\mathrm{d}t = 0$.

Основные уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_1 A_2 + \omega_3 A_3,\\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{13}A_3,\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_2 A_1 + \omega_{33}A_3;\\
\\
\mathrm{d}B &= \omega_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3,\\
\mathrm{d}B_1 &= \omega_{11}B_1 + (\omega_{13} + \alpha\omega_2)\, B_3,\\
\mathrm{d}B_2 &= (\omega_{20} + \alpha\omega_2)\, B + \omega_{21}B_1 + \omega_{22}B_2 + \\
&\quad + (\omega_{23} + \alpha\omega_1 + \beta\omega_2)\, B_3,\\
\mathrm{d}B_3 &= \omega_2 B_1 + \omega_{33}B_3.
\end{aligned}\right\} \tag{33,12}$$

Из них вытекает, что

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}A_3 = \omega_{33}A_3 + \omega_2 A_1,\ \mathrm{d}B_3 = \omega_{33}B_3 + \omega_2 B_1,\\
&\mathrm{d}A_1 = \omega_{13}A_3 + \omega_{11}A_1;\ \mathrm{d}B_1 = (\omega_{13} + \alpha\omega_2)\, B_3 + \omega_{11}B_1;
\end{aligned}\right\} \tag{33,13}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}[AA_1A_3] &= -\omega_{22}[AA_1A_3] + \omega_2[A_1A_3A_2],\\ \mathrm{d}[A_1A_3A_2] &= \omega_{20}[AA_1A_3] - \omega_{00}[A_1A_3A_2];\\ \mathrm{d}[BB_1B_3] &= -\omega_{22}[BB_1B_3] + \omega_2[B_1B_3B_2],\\ \mathrm{d}[B_1B_3B_2] &= (\omega_{20} + \varkappa\omega_2)\,[BB_1B_3] - \omega_{00}[B_1B_3B_2]. \end{aligned}\right\} \quad (33{,}14)$$

Мы видим, что обе прямые $[A_1A_3] = d$ и $[B_1B_3] = d'$ не меняют своего положения. Точка $A_3(B_3)$ описывает прямую $d(d')$; если положить

$$\Gamma = [AA_1A_3],\ \Delta = [BB_1B_3],$$

то плоскость $\Gamma(\Delta)$ поворачивается вокруг прямой $d(d')$. Положение обеих точек A_3, B_3 и обеих плоскостей Γ, Δ зависит только от одного параметра t.

Из уравнений (33,14) вытекает, согласно (12,2), что соприкасающаяся коллинеация соответствия между A_3 и B_3 подчинена коллинеации K. Из уравнений (33,8), (33,18) и (33,14) мы выводим, вспоминая результат § 12, что *проективный дифференциальный элемент соответствия между точкой A_3 и плоскостью Γ имеет то же значение $\omega_{20} - \omega_{13} = \gamma\omega_2$, как и проективный дифференциальный элемент соответствия между точкой B_3 и плоскостью Δ*. В частности, соответствие между точкой B_3 и плоскостью Δ будет коллинейным в том и только в том случае, если и соответствие между точкой A_3 и плоскостью Γ коллинейно. Для каждого постоянного значения t прямая $[AA_3]$ описывает пучок с центром в A_3 в плоскости Γ, а прямая $[BB_3]$ – пучок в B_3 в плоскости Δ. При изменении t первый пучок порождает конгруэнцию L_1, а второй – конгруэнцию L_2. Для $\gamma = 0$, L_1 и L_2 будут специальными линейными конгруэнциями; для $\gamma \neq 0$ ни одна из этих конгруэнций не будет линейной. Во всяком случае обе фокальные поверхности конгруэнции L_1 (L_2) вырождаются в прямую $d(d')$.

Рассматриваемому соответствию между S_3 и S_3' подчинено соответствие между двумя конгруэнциями L_1 и L_2, обладающее тем свойством, что каждому из пучков, порождающих L_1, отвечает один из пучков, порождающих L_2. Возьмем некоторую линейчатую поверхность R_1 конгруэнции L_1; легко видеть, что можно специализировать реперы таким образом, чтобы, когда точка A описывает R_1, было $\omega_1 = 0$. Соответствующая точка B описывает тогда линейчатую поверхность R_2 конгруэнции L_2. Данному соответствию подчинено соответствие между двумя линейчатыми поверхностями R_1 о R_2, обладающее тем свойством, что прямолинейным образующим R_1 отвечают прямолинейные образующие R_2; далее, легко видеть, что и асимптотическим кривым на R_1 отвечают асимптотические же кривые на R_2 (уравнение этих асимптотических кривых, согласно (33,12) и в силу $\omega_3 = 0$, будет $\omega_{00}\omega_1 + \overline{\omega_{21}} + \omega_3\omega_2 = 0$ для R_1 и для R_2).

Приведенные выше соображения приводят нас к следующему построению искомых соответствий. Мы выбираем некоторую линейчатую поверхность R_1 с прямолинейной направляющей d в пространстве S_3 и такую же поверхность R_2 с прямолинейной направляющей d' в пространстве S'_3. Выбор R_1 и R_2 подчинен лишь одному ограничению, а именно: если одна из этих линейчатых поверхностей R_1 и R_2 принадлежит некоторой постоянной *специальной* линейной конгруэнции, то и другая поверхность должна обладать этим свойством (направляющими обеих конгруэнций являются, конечно, обе наши прямые d и d'). Назовем *специальным случаем* тот, когда R_1 и R_2 принадлежат постоянным специальным линейным конгруэнциям, противный же случай мы назовем *общим случаем*. Введем точечное соответствие φ между двумя прямыми d и d'. В специальном случае это соответствие φ произвольно. С другой стороны, в общем случае соответствие φ должно обладать следующим свойством. Выразим точки прямых d и d' в функциях параметра t таким образом, чтобы φ связывало одну с другой две точки, соответствующие тому же значению t; тогда проективный дифференциальный элемент, определенный в § 12, соответствия между точкой X прямой d и касательной плоскостью к R_1 в точке X (плоскостью, содержащей прямую d) должен равняться проективному дифференциальному элементу соответствия между точкой X' прямой d' и касательной плоскостью к R_2 в точке X' (плоскостью, содержащей прямую d'); мы предполагаем, что оба проективных дифференциальных элемента отнесены к переменному t. Легко видеть, что в общем случае, если выбраны обе линейчатые поверхности R_1 и R_2, то всегда существуют соответствия φ, обладающие указанным свойством и образующие два непрерывных бесконечных (первого порядка) семейства; оба эти семейства могут быть мнимыми сопряженными, однако они становятся действительными, если, не меняя R_1, мы произведем над R_2 преобразование двойственности.

Выберем кроме того неподвижную точку A_0 прямой d так, чтобы $B_0 = \varphi(A_0)$ была неподвижной точкой прямой d'. Пусть $r_0(r'_0)$ будет образующей R_1, проходящей через точку A_0 (точку B_0); выберем коллинейное соответствие h_0 между прямыми r_0 и r'_0 такое, что $h_0(A_0) = B_0$. Тогда для каждой точки A_3 прямой d существует вполне определенное коллинейное соответствие h между образующей r поверхности R_1, проходящей через A_3, и образующей r' поверхности R_2, проходящей через $B_3 = \varphi(A_3)$, такое, что если точка C_0 прямой r_0 и точка C прямой r принадлежат к той же асимптотической кривой поверхности R_1, то точка $h_0(C_0)$ прямой r'_0 и точка $h(C)$ прямой r' принадлежат к той же асимптотической кривой поверхности R_2.

Установивши это, мы определим искомое соответствие между S_3 и S'_3 следующим образом. Пусть A — произвольная точка из S_3. Существует точка A_3 прямой d такая, что A лежит на касательной плоскости Γ к поверхности R_1 в точке A_3. Пусть Δ — касательная плоскость к R_2 в точке $B_3 = \varphi(A_3)$. Тогда $\Gamma(\Delta)$ содержит образующую $r(r')$ поверхности $R_1(R_2)$, проходящую через A_3 (через B_3); пусть h — коллинейное соответствие между r и r', которое мы только-что определили. Далее, пусть k — соприкасающаяся коллинеация соответствия φ между d и d', отвечающая паре A_3, B_3. Существует вполне определенная коллинеация K между двумя плоскостями Γ и Δ такая, что h и k составляют часть K. Образом точки A при искомом соответствии будет тогда точка $B = KA$.

Résumé.

Ce Mémoire a été publié en français dans le Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **75** (1950), 137—157.