Eduard Čech

Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 2, 109–123

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100039

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВАМИ II

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 2/I 1952 г.)

В мемуаре определены для случая $n > 3$ все соответствия между проективными пространствами S_n, S'_n, которые обладают тотально K-линеаризирующей прямой. Существует два типа решений.

14. Если дано соответствие между точкой A, описывающей n-мерное пространство S'_n и точкой B, описывающей такое же пространство S'_n, то, как известно (см. § 1), для каждой пары соответствующих точек A, B существует ∞^n *касательных коллинеаций* K к данному соответствию. В § 9 мы каждому выбору K поставили в соответствие *K-лниеаризирующее преобразование*

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\Omega_1, \ldots, \Omega_n).$$

Соответствия между двумя пространствами можно классифицировать по алгебраическому характеру преобразования (9,3). Вслед за коллинейными соответствиями, простейшим будет без сомнения тот случай, когда все квадратичные формы Ω_i $(1 \leqq i \leqq n)$ пропорциональны одна другой:

$$\Omega_i = a_i \Omega, \ (1 \leqq i \leqq n), \tag{14,1}$$

где квадратичная форма Ω не может тождественно равняться нулю, если мы исключим тривиальный случай коллинейного соответствия (см. § 13). Прямые $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ такие, что $\Omega = 0$, являются K-главными прямыми; они образуют в этом случае конус второго порядка, который мы назовем *K-главным конусом*. Для каждой не K-главной прямой $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ прямая $(a_1, \ldots, a_n)$ будет K-линеаризирующей прямой этой прямой $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$; прямую $(a_1, \ldots, a_n)$ мы будем называть *тотально K-линеаризирующей прямой*. Итак, нашей задачей является отыскание всех соответствий между двумя n-мерными пространствами, таких, чтобы при надлежащем выборе касательной коллинеации K существовала тотально K-линеаризирующая прямая. В этом и в следующем мемуаре дано полное решение этой задачи. В мемуаре IV этой серии мы увидим, что наша задача попускает и другое геометрическое толкование (асимптотическое преобразование конгруэнции).

15. Для $n = 2$ мы получим тот простой результат, что *каждое соответствие между двумя плоскостями принадлежит к только-что описанному типу.* В самом деле, выберем произвольную касательную коллинеацию K и воспользуемся реперами § 5. Наиболее общая касательная коллинеация K^* дана уравнениями (10,1). При переходе от K к K^* следует, согласно (10,2) и (10,3), заменить Ω_1, Ω_2 выражениями

$$\Omega_1 - 2\omega_1(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2), \quad \Omega_2 - 2\omega_2(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2).$$

Поэтому достаточно доказать, что можно выбрать μ_1, μ_2 таким образом, чтобы существовали величины a_1, a_2, удовлетворяющие следующему тождеству при любых ω_1, ω_2

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 - 2\omega_1(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2), & a_1 \\ \Omega_2 - 2\omega_2(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2), & a_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15,1)$$

причем тривиальное решение $a_1 = a_2 = 0$ нужно исключить; для любого решения (15,1) (a_1, a_2) будет тотально K^*-линеаризирующей прямой (соответствующая коллинеация K^* дана уравнениями (10,1)). Полагая

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= c_{10}\omega_1^2 + 2c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{12}\omega_2^2, \\ \Omega_2 &= c_{20}\omega_1^2 + 2c_{21}\omega_1\omega_2 + c_{22}\omega_2^2, \end{aligned} \qquad (15,2)$$

мы придадим условию (15,1) следующий вид

$$\begin{aligned} (c_{10} - 2\mu_1)\, a_2 - c_{20}a_1 = (c_{11} - \mu_2)\, a_2 - (c_{21} - \mu_1)\, a_1 = \\ = c_{12}a_2 - (c_{22} - 2\mu_2)\, a_1 = 0. \end{aligned} \qquad (15,3)$$

Исключая μ_1 и μ_2, мы получим

$$\begin{vmatrix} c_{10}a_1^2 + 2c_{11}a_1a_2 + c_{12}a_2^2, & a_1 \\ c_{20}a_1^2 + 2c_{21}a_1a_2 + c_{22}a_2^2, & a_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15,4)$$

Это уравнение имеет то простое значение, что (a_1, a_2) есть характеристическая прямая рассматриваемого соответствия. Для всякой характеристической прямой (a_1, a_2) существует поэтому касательная коллинеация K^* такая, что (a_1, a_2) будет тотально K^*-линеаризирующей прямой. Итак, вообще говоря, существует *три* касательных коллинеации K^*, имеющих тотально K^*-линеаризирующую прямую; число этих коллинеаций может уменьшиться до *двух* или до *одной*.

Можно отыскать условие существования K_0-линеаризирующей прямой, где K_0 — локальная коллинеация (см. § 2). Для ответа на этот вопрос можно принять, что $K = K_0$. Согласно (5,13), (7,4) и (15,2) это означает, что

$$c_{10} + c_{21} = 0, \; c_{11} + c_{22} = 0. \tag{15,5}$$

Кроме того, должно иметь место (15,3), причем $\mu_1 = \mu_2 = 0$, то есть

$$c_{10} : c_{11} = c_{11} : c_{21} = c_{12} : c_{22}. \tag{15,6}$$

Но уравнения (15,5) и (15,6) выражают то обстоятельство, что уравнение (15,4) имеет тройной корень $a_1 : a_2$. Итак, *если существует тройная характеристическая прямая, то она является тотально K_0-линеаризирующей прямой (K_0 — локальная коллинеация)* и это единственный случай, когда существует тотально K_0-линеаризирующая прямая.

16. Во всем последующем изложении мы можем, следовательно, принимать

$$n \geqq 3. \tag{16,1}$$

Пусть K — касательная коллинеация такая, что существует некоторая тотально K-линеаризирующая прямая. Реперы можно выбрать таким образом, чтобы тотально K-линеаризирующей прямой была прямая $(\omega_1, \ldots, \omega_n) = (0, \ldots, 0, 1)$, т. е. чтобы ею была прямая $[AA_n]$ в пространстве S_n и прямая $[BB_n]$ в пространстве S'_n. Это предположение остается в силе в течение всего последующего изложения. Условие (14,1) примет тогда вид

$$\Omega_1 = \ldots = \Omega_{n-1} = 0, \tag{16,2}$$

в то время как

$$\Omega_n \neq 0, \tag{16,3}$$

так как коллинеации были нами исключены. Заметим, что если K^* — касательная коллинеация, отличная от K, то существование тотально K^*-линеаризирующей прямой не возможно, так как в силу (9,3), (10,2) и (16,2) это повлекло бы за собою, что формы $\omega_i \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \omega_k$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ пропорциональны одна другой, что в случае $n \geqq 3$ возможно лишь при $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$.

Для постоянных значений главных параметров коллинеация K фиксирована (если пренебречь ее произвольным числовым множителем) и если выбрать репер $A, A_1, \ldots, A_n$, то репер $B, B_1, \ldots, B_n$ будет в силу (5,2) вполне определен (вплоть до скалярного множителя, общего для всех $n + 1$ точек $B, B_1, \ldots, \ldots, B_n$. Это выражается уравнениями (8,4). Что касается репера $A, A_1, \ldots, A_n$, то для фиксированных значений главных параметров точка A и тотально K-линеаризирующая прямая $[AA_n]$

занимают постоянное положение и никаких дальнейших ограничений для этого репера не имеется.

Помимо (8,3) и (8,4) должно иметь место и

$$e_{n1} = \ldots = e_{n,n-1} = 0 \tag{16,4}$$

Исходя из предположения (6,1), мы получаем далее

$$e_{00} + e_{11} + \ldots + e_{nn} = t_{00} = 0 \tag{16,5}$$

в то время как

$$\begin{aligned} &e_{i0},\, e_{ii} - e_{00},\ (1 \leqq i \leqq n-1),\\ &e_{ik},\ (1 \leqq i, k \leqq n-1, i \neq k),\\ &e_{n0},\, e_{nn} - e_{00} \end{aligned} \tag{16,6}$$

остаются постоянными.

17. Наша задача выражается аналитически посредством уравнений (5,9), (показывающих, что K — касательная коллинеация), которые мы напишем снова:

$$\tau_{01} = \ldots = \tau_{0n} = 0 \tag{17,1}$$

а также с помощью уравнений (16,2), которые в силу (5,15) могут быть заменены уравнениями Пфаффа

$$\tau_{ii} - \tau_{00} = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1, \tag{17,2}$$

$$\tau_{ik} = 0 \text{ для } 1 \leqq i,\ k \leqq n-1,\ i \neq k, \tag{17,3}$$

$$\tau_{ni} = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{17,4}$$

Теперь нужно найти n-мерные решения системы Пфаффа (17,1) + (17,2) + (17,3) + (17,4), удовлетворяющие двум неравенствам

$$[\omega_1, \ldots, \omega_n] \neq 0 \tag{17,5}$$

и (16,3). Внешним дифференцированием уравнений системы Пфаффа (что производится согласно уравнениям структуры (5,7) и (5,8)) мы выведем из них условия интегрируемости:

$$\sum_{i=1}^{n-1} [\omega_i, \tau_{in}] + [\omega_n, \tau_{nn} - \tau_{00}] = 0 \tag{17,6}$$

$$\sum_{r=1}^{n} [\omega_r \tau_{r0}] + [\omega_i \tau_{i0}] = [\tau_{in}, \omega_{ni}] \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1, \tag{17,7}$$

$$[\omega_i, \tau_{j0}] = [\tau_{jn}, \omega_{ni}] \text{ для } 1 \leqq i, j \leqq n-1, i \neq j, \tag{17,8}$$

$$[\omega_i, \tau_{n0}] = [\tau_{nn} - \tau_{00}, \omega_{ni}] \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{17,9}$$

18. Предположим прежде всего, что существует решение нашей системы Пфаффа с тем свойством, что для каждого выбора

скаляра λ можно найти хотя бы две линейно независимые формы из числа $n - 1$ форм Пфаффа

$$\omega_{ni} + \lambda\omega_i, \quad (1 \leqq i \leqq n - 1), \tag{18,1}$$

для чего необходимо, чтобы $n \geqq 4$. Мы увидим, что это невозможно. Из (17,9) вытекает

$$[\omega_i, \tau_{n0}, \tau_{nn} - \tau_{n0}] = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n - 1.$$

Так как $n \geqq 4$ и ω_i линейно независимы, то из этого следует

$$[\tau_{n0}, \tau_{nn} - \tau_{00}] = 0.$$

Если бы имело место $\tau_{nn} - \tau_{00} \neq 0$, то можно было бы выбрать λ так, что $\tau_{n0} = \lambda(\tau_{nn} - \tau_{00})$. Тогда из (17,9) вытекало бы

$$[\omega_{ni} + \lambda\omega_i, \tau_{nn} - \tau_{00}] = 0 \text{ гля } 1 \leqq i \leqq n - 1$$

что противоречит нашему предположению относительно форм (18,1). Отсюда имеем

$$\tau_{nn} - \tau_{00} = 0. \tag{18,2}$$

Ввиду (5,15) это означает, что $\dfrac{\partial \Omega_n}{\partial \omega_n} = 0$. Нетрудно видеть, что при надлежащем выборе репера $A, A_1, \ldots, A_n$ мы получим

$$\Omega_n = \varepsilon_1\omega_1^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}^2$$

или вследствие (5,15)

$$\tau_{in} = \varepsilon_i\omega_i \text{ гля } 1 \leqq i \leqq n - 1, \tag{18,3}$$

где

$$\varepsilon_i = 1 \text{ для } 1 \leqq i \leqq h, \ \varepsilon_i = 0 \text{ для } h + 1 \leqq i \leqq n - 1 \tag{18,4}$$

причем

$$1 \leqq h \leqq n - 1. \tag{18,5}$$

(17,9) дает в силу (18,2)

$$[\omega_i\tau_{n0}] = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n - 1,$$

откуда

$$\tau_{n0} = 0. \tag{18,6}$$

(17,8) дает в силу (18,3) и (18,4)

$$[\omega_i, \tau_{j0}] = 0 \text{ для } h + 1 \leqq j \leqq n - 1, 1 \leqq i \leqq n - 1, i \neq j, \tag{18,7}$$

$$[\omega_i, \tau_{j0}] = [\omega_j, \omega_{ni}] \text{ для } 1 \leqq j \leqq h, 1 \leqq i \leqq n - 1, i \neq j. \tag{18,8}$$

Так как $n \geqq 4$, то из (18,7) следует

$$\tau_{j0} = 0 \text{ для } h + 1 \leqq j \leqq n - 1. \tag{18,9}$$

Для каждого индекса j такого, что $1 \leqq j \leqq h$ из (18,8) вытекает (так как $n \geqq 4$), что существуют два индекса i, k таких, что

$$1 \leqq i < k \leqq n-1,\ [\omega_i \omega_j \tau_{j0}] = 0,\ [\omega_k \omega_j \tau_{j0}] = 0,$$

откуда получаем $[\omega_j \tau_{j0}] = 0$. Итак, существуют скаляры λ_j такие, что

$$\tau_{j0} = \lambda_j \omega_j \text{ для } 1 \leqq j \leqq h. \tag{18,10}$$

Из уравнений (17,7) мы выведем, учитывая (18,6), (18,9) и (18,10)

$$[\tau_{in}, \omega_{ni}] = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1,$$

так что из (18,3) и (18,4) вытекает, что можно положить

$$\omega_{nj} = \mu_j \omega_j \text{ для } 1 \leqq j < h. \tag{18,11}$$

Согласно (18,8) и (18,10) имеет место

$$[\omega_j, \omega_{ni} + \lambda_j \omega_i] = 0 \text{ для } 1 \leqq j \leqq h, 1 \leqq i \leqq n-1, i \neq j,$$

в частности

$$[\omega_1, \omega_{ni} + \lambda_1 \omega_i] = 0, \tag{18,12}$$

для $2 \leqq i \leqq n-1$. Согласно (18,11), соотношение (18,12), остается в силе также для $i = 1$. Итак мы получаем (18,12) для $1 \leqq i \leqq n-1$, что противно нашему предположению относительно форм (18,1).

19. Отыщем сначала решения нашей задачи, имеющие то свойство, что для всех положений пары A, B взаимно соответствующих точек *тотально K-линеаризирующие прямые* $[AA_n]$ *в пространстве* S_n *проходят через постоянную точку*. Можно выбрать репер $A, A_1, \ldots, A_n$ таким образом, чтобы этой постоянной точкой была вершина A_n. Согласно (5,4) это можно выразить аналитически с помощью уравнений

$$\omega_{n0} = \omega_{n1} = \ldots = \omega_{n,n-1} = 0. \tag{19,1}$$

С учетом (19,1) из (17,9) видно, что $[\omega_i \tau_{n0}] = 0$ для $1 \leqq i \leqq n - 1$. Так как $n \geqq 3$, должно иметь место

$$\tau_{n0} = 0. \tag{19,2}$$

Подобным же образом получим из (17,7) и (17,8) в силу (19,1) и (19,2) $[\omega_i \tau_{j0}] = 0$ для $1 \leqq i, j \leqq n-1$, откуда

$$\tau_{i0} = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{19,3}$$

Согласно (5,10), (17,4) и (19,2) мы имеем

$$\overline{\omega}_{n0} = \overline{\omega}_{n1} = \ldots = \overline{\omega}_{n,n-1} = 0,$$

откуда $\mathrm{d}B_n = \overline{\omega}_{nn} B_n$ ввиду (5,6); точка B_n имеет, следовательно, постоянное положение, другими словами *в пространстве* S'_n, как и в S_n, *все тотально K-линеаризирующие прямые проходят через постоянную точку*. Из (5,7), (5,8), (5,10), (19,2) и (19,3) следует, что $[\mathrm{d}\tau_{00}] = 0$, так что

$$\tau_{00} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$

является полным дифференциалом. Из (6,4) вытекает, что можно всегда предположить

$$\tau_{00} = 0. \tag{19,4}$$

Основные уравнения (5,3)', (5,4), (5,5)' и (5,6) можно написать, учитывая (5,10), (17,2), (17,3), (17,4), (19,1), (19,2) (19,3) и (19,4), в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n, \\ \mathrm{d}A_i &= \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \ldots + \omega_{in}A_n \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1, \\ \mathrm{d}A_n &= \omega_{nn}A_n, \end{aligned}\right\} \tag{19,5}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}B &= \omega_{00}B + \omega_1 B_1 + \ldots + \omega_n B_n, \\ \mathrm{d}B_i &= \omega_{i0}B + \omega_{i1}B_1 + \ldots + \omega_{in-1}B_{n-1} + \\ &\quad + (\omega_{in} + \tau_{in})\, B_n \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1, \\ \mathrm{d}B_n &= (\omega_{nn} + \tau_{nn})\, B_n. \end{aligned}\right\} \tag{19,6}$$

Далее легко убедиться, что система

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}C &= \omega_{00}C + \omega_1 C_1 + \ldots + \omega_{n-1}C_{n-1} + \\ &\quad + \omega_n(C_n + C_{n+1}), \\ \mathrm{d}C_i &= \omega_{i0}C + \omega_{i1}C_1 + \ldots + \omega_{in}C_n + \overline{\omega}_{in}C_{n+1} \\ &\quad (1 \leqq i \leqq n-1), \\ \mathrm{d}C_n &= \omega_{nn}C_n, \\ \mathrm{d}C_{n+1} &= \overline{\omega}_{nn}C_{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{19,7}$$

вполне интегрируема. Интегрируя ее, мы получаем в некотором пространстве S_{n+1}, $n+1$ измерений точку C, описывающую гиперповерхность (C), и две точки C_n и C_{n+1} постоянного положения. Можно выбрать систему отчета в S_{n+1} таким образом, что точки C_n и C_{n+1} совпадут по своему положению с $(0, \ldots, 1, 0)$ и соответственно с $(0, \ldots, 0, 1)$. Для произвольной точки X из S_{n+1} обозначим через $\overline{X}$ проекцию X из точки C_{n+1} на гиперплоскость $x_{n+2} = 0$ и через $\overline{\overline{X}}$ проекцию X из точки C_n на гиперплоскость $x_{n+1} = 0$. Координаты точек $\overline{X}$ и $\overline{\overline{X}}$ мы получим из координат точки X вычеркивая $(n+2)$-ую или $(n+1)$-ую координату соответственно. Далее, сразу видно, что для $\overline{C}$,

$\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_{n-1}, \overline{C}_n$ имеется та же система (19,5), как и для $A, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$, и для $\overline{\overline{C}}, \overline{\overline{C}}_1, \ldots, \overline{\overline{C}}_{n-1}, \overline{\overline{C}}_{n+1}$ та же система (19,6), как и для $B, B_1, \ldots, B_{n-1}, B_n$. Отсюда следует, что существуют две коллинеации H и H' с постоянными коэффициентами такие, что

$$HA = \overline{C},\ H'B = \overline{\overline{C}},$$

для всех значений параметров. Однако, свойство, которому мы подчинили в § 14 соответствие между A и B было таково, что оно сохранялось при любых постоянных коллинеациях, воздействующих на пространства S_n и S'_n. Пренебрегая этими коллинеациями, мы можем просто предположить, что $A = \overline{C}$, $B = \overline{\overline{C}}$ и мы получим следующее решение нашей проблемы отыскания всех соответствий между двумя n-мерными пространствами S_n и S'_n (которые мы предполагаем погруженными в некоторое пространство S_{n+1}, $n+1$ измерений) таких, что для каждой пары A и B соответствующих точек существует касательная коллинеация K, обладающая тотально K-линеаризирующей прямой, предполагая кроме того, что все тотально K-линеаризирующие прямые (в пространстве S_n, а *следовательно* и в S'_n) проходят через постоянную точку: *Выберем в S_{n+1} гиперповерхность C и две различные постоянные точки C_n и C_{n+1}. Точку A, произвольно выбранную в S_n, мы проектируем из точки C_{n+1} на гиперпроверхность C и эту проекцию снова проектируем из точки C_n на гиперплоскость S'_n; эта вторая проекция B и будет искомым образом точки A.* Все тотально K-линеаризирующие прямые пространства S'_n проходят очевидно через точку пересечения прямой $[C_n C_{n+1}]$ с пространством S_n; точно так же тотально K-линеаризирующие прямые пространства S'_n проходят через точку пересечения $[C_n C_{n+1}]$ с пространством S'_n. K-главный конус определяется уравнением $\Omega_n = 0$ или [см. (5,13) и (5,15)]

$$\sum_{i=1}^{n=1} \tau_{in}\omega_i + (\tau_{nn} - \tau_{00})\,\omega_n = 0.$$

Однако, из (19,7) легко видеть, что плоскость $[C, \mathrm{d}C, \mathrm{d}^2C]$ лежит в гиперплоскости $[CC_1, \ldots C_{n-1}, C_n + C_{n+1}]$ касательной к гиперповерхности (C) тогда и только тогда, когда $\Omega_n = 0$. Итак, *K-линеаризирующие конусы пространств S_n соотв. S'_n можно получить из конуса асимптотических касательных к гиперповерхности (C) проектируя его из точки C_{n+1} в S_n или из точки C_n в S_{n+1}.*

Задача, поставленная в начале настоящего параграфа, вполне разрешена, ибо легко видеть, что гиперповерхность (C)

и обе постоянные точки C_n и C_{n+1} не подлежат никаким ограничениям, кроме того, чтобы (C) не была гиперплоскостью; в этом случае построенное указанным способом соответствие между A и B становится коллинеацией.

Пользуясь неоднородными координатами $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ в пространстве S_{n+1}, можно предположить, что обе точки C_n и C_{n+1} расположены в бесконечности в направлении $(0, \ldots, 0, 1, 0)$ и соответственно $(0, \ldots, 0, 0, 1)$. Если

$$x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{19,8}$$

(где f — произвольная нелинейная функция) является уравнением гиперплоскости (C), то в неоднородных координатах получим

$$A = (x_1, \ldots, x_n),\ B = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f), \tag{19,9}$$

что является простейшим аналитическим выражением рассматриваемого решения.

Посмотрим, при каком условии K будет локальной коллинеацией. Это условие дано уравнением (7,3), которое в силу (17,2) и (19,4) принимает простой вид

$$\tau_{nn} = 0. \tag{19,10}$$

Далее, из (19,7) вытекает

$$\mathrm{d}(C_n + C_{n+1}) = \omega_{nn}(C_n + C_{n+1}) + \tau_{nn}C_{n+1}$$

так что (19,10) означает, что точка $C_n + C_{n+1}$ не меняет своего положения. Но $C_n + C_{n+1}$ является, по первому уравнению (19,7), точкой пересечения прямой $[C_nC_{n+1}]$ с касательной гиперплоскостью гиперповерхности (C). Итак, *K является локальной коллинеацией в том и только в том случае, если (при условии, что гиперповерхность (C) является конусом) постоянная прямая $[C_nC_{n+1}]$ проходит через вершину этого конуса.* Легко видеть, что в решении (19,8) и (19,9) K будет локальной коллинеацией тогда и только тогда, когда функция f имеет вид

$$x_{n+1} = cx_n + \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $c \neq 0$ постоянная и φ произвольная (нелинейная) функция.

20. Заметим прежде всего, что какое либо решение нашей задачи будет принадлежать к типу, рассмотренному в § 19, если имеет место $\omega_{ni} = 0$ для $1 \leqq i \leqq n - 1$. Ибо в таком случае $\mathrm{d}A_n = \omega_{n0}A + \omega_{nn}A_n$; если $\omega_{n0} = 0$, точка A_n постоянна и решение будет рассмотренного типа. Неравенство $\omega_{n0} \neq 0$ не может иметь места, так как тогда точка A_n описывала бы кривую и точка A лежала бы на касательной к этой кривой; положение A ограничилось бы самое большее на многообразие двух измерений, что является противоречием, так как $n \geqq 3$.

Выяснив это обстоятельство, мы видим из § 18, что существует скаляр λ и форма Пфаффа $\Theta \neq 0$ такие, что

$$[\omega_{ni} + \lambda\omega_i, \Theta] = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{20,1}$$

Далее мы можем изменить репер $A, A_1, \ldots, A_n$, заменяя в нем A_n через $A_n + \lambda A$ (с условием, что одновременно заменим B_n через $B_n + \lambda B$); отсюда мы можем предположить, что

$$[\omega_{ni}, \Theta] = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1. \tag{20,2}$$

После нового преобразования реперов (однородная линейная подстановка относительно $A_1, \ldots, A_{n-1}$, сопровождаемая такой же подстановкой относительно $B_1, \ldots, B_{n-1}$) мы можем даже предположить, что

$$\omega_{nj} = 0 \text{ для } 2 \leqq j \leqq n-1. \tag{20,3}$$

Из предыдущего замечания следует, что если мы не хотим снова получить решение § 19, то должно иметь место

$$\omega_{n1} \neq 0. \tag{20,4}$$

Замечание. При переходе от (20,1) к (20,2) мы закрепили положение точки A_n на тотально K-линеаризирующей прямой $[AA_n]$. *Для $n \geqq 4$ такую специализацию можно произвести лишь одним единственным образом.* В самом деле, легко видеть, что в противном случае существуют два числа λ_1 и λ_2 и две формы Пфаффа $\Theta_1 \neq 0$ и $\Theta_2 \neq 0$, так что

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, [\omega_{ni} + \lambda_1\omega_i\, \Theta_1] = [\omega_{ni} + \lambda_2\omega_i\, \Theta_2] = 0$$
$$(1 \leqq i \leqq n-1).$$

Отсюда ясно, что все формы ω_i $(1 \leqq i \leqq n - 1)$ являются линейными комбинациями Θ_1 и Θ_2, что невозможно для $n \geqq 4$. Напротив, для $n = 3$ могут существовать два различных значения λ таких, что имело бы место (20,1) для подходящей формы Пфаффа. Действительно, (20,1) означает в случае $n = 3$, что

$$[\omega_{31} + \lambda\omega_1, \omega_{32} + \lambda\omega_2] = 0$$

или

$$[\omega_{31}, \omega_{32}] + \lambda([\omega_1, \omega_{32}] + [\omega_{31}, \omega_2]) + \lambda^2[\omega_1, \omega_2] = 0$$

и вполне возможно, что существуют два различных скаляра λ, удовлетворяющих этому уравнению.

21. Из (17,9) и (20,3) вытекает $[\omega_j\tau_{n0}] = 0$ для $2 \leqq j \leqq n-1$. Поскольку $n \geqq 4$, из этого непосредственно следует

$$\tau_{n0} = 0. \tag{21,1}$$

Теперь мы докажем, что (21,1) должно иметь место и для $n = 3$. Пусть наоборот

$$n = 3, \ \tau_{30} \neq 0.$$

Согласно (20,3) и (20,4) имеем

$$\omega_{32} = 0, \ \omega_{31} \neq 0.$$

Итак, уравнения (17,7), (17,8) и (17,9) влекут за собою для $i = 1$

$$\left.\begin{aligned} 2[\omega_1\tau_{10}] + [\omega_2\tau_{20}] + [\omega_3\tau_{30}] &= [\tau_{13}\omega_{31}] \\ [\omega_1\tau_{20}] &= [\tau_{23}\omega_{31}] \\ [\omega_1\tau_{30}] &= [\tau_{33} - \tau_{00}\omega_{31}], \end{aligned}\right\} \tag{21,2}$$

и для $i = 2$

$$\left.\begin{aligned} &[\omega_1\tau_{10}] + 2[\omega_2\tau_{20}] + [\omega_3\tau_{30}] = 0, \\ &[\omega_2\tau_{10}] = 0, \qquad [\omega_2\tau_{30}] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21,3}$$

Согласно (21,3) можно положить

$$\tau_{10} = 2a\omega_2, \tau_{20} = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3, \tau_{30} = 2c\omega_2;$$

подставляя эти значения в (21,2) мы получим

$$[a\omega_1 + c\omega_3, \omega_2] = [\tau_{13}\omega_{31}], [\omega_1, b\omega_2 + c\omega_3] = [\tau_{23}, \omega_{31}],$$
$$2c[\omega_1\omega_2] = [\tau_{33} - \tau_{00}\omega_{31}],$$

откуда следует

$$[a\omega_1 + c\omega_3, \omega_2, \omega_{31}] = 0, [\omega_1, b\omega_2 + c\omega_3, \omega_{31}] = 0,$$
$$c[\omega_1, \omega_2, \omega_{31}] = 0.$$

Так как $\tau_{30} \neq 0$, должно быть $c \neq 0$, откуда

$$[\omega_1\omega_2\omega_{31}] = 0, [\omega_1\omega_3\omega_{31}] = 0, [\omega_1\omega_3\omega_{31}] = 0,$$

что невозможно, ибо $\omega_{31} \neq 0$.

22. Мы только-что видели, что для любого решения нашей задачи, отличного от решения рассмотренного в § 19, можно предположить справедливость соотношений (20,3), (20,4) и (21,1), которые мы напишем снова:

$$\omega_{nj} = 0 \text{ для } 2 \leqq j \leqq n - 1, \tag{22,1}$$

$$\omega_{n1} \neq 0, \tag{22,2}$$

$$\tau_{n0} = 0. \tag{22,3}$$

В силу (17,8) и (22,1) мы имеем

$$[\omega_j\tau_{i0}] = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n - 1, 2 \leqq j \leqq n - 1, i \neq j.$$

В случае $n \geqq 5$ из этого следует непосредственно

$$\tau_{i0} = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n - 1. \tag{22,4}$$

При $n = 4$ мы получаем сначала только

$$\tau_{10} = 0, \ [\omega_2\tau_{30}] = [\omega_3\tau_{20}] = 0.$$

Далее, для $n = 4$ мы получаем из (17,7) с учетом (22,1)

$$[\omega_1\tau_{10}] + 2[\omega_2\tau_{20}] + [\omega_3\tau_{30}] = 0,$$
$$[\omega_1\tau_{10}] + [\omega_2\tau_{20}] + 2[\omega_3\tau_{30}] = 0.$$

Так как $\tau_{10} = 0$, мы получим $[\omega_2\tau_{20}] = [\omega_3\tau_{30}] = 0$, что в сочетании с уже известными соотношениями $[\omega_2\tau_{30}] = [\omega_3\tau_{20}] = 0$ показывает, что (22,4) имеет место и для $n = 4$.

Напротив, *для* $n = 3$ *соотношения* (22,4) *уже не обязательно будут иметь место*. В дальнейшем мы не исключаем случая $n = 3$, но предполагаем справедливость (22,4) и для $n = 3$. Решения, которые мы получим, вместе с решениями § 19 дадут нам для $n \geqq 4$ совокупность всех решений проблемы, поставленной в § 14. Напротив, для $n = 3$ нужно присовокупить еще решения системы Пфаффа (17,1) + (17,2) + (17,3) + + (17,4) + (22,1) + (22,3), для которых $\omega_{31} \neq 0$ и $\tau_{10} \neq 0$ или $\tau_{20} \neq 0$; эти новые решения будут указаны в следующем мемуаре.

23. В силу (22,3) и (22,4) мы выводим из (17,7), (17,8) и (17,9) для $i = 1$:

$$[\tau_{in}\omega_{n1}] = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1, \; [\tau_{nn} - \tau_{00}\omega_{n1}] = 0.$$

Согласно (22,2) мы можем поэтому положить

$$\tau_{in} = \alpha_i\omega_{n1} \text{ для } 1 \leqq i \leqq n-1, \; \tau_{nn} - \tau_{00} = \alpha_n\omega_{n1}. \tag{23,1}$$

Соотношение (17,6) дает кроме того

$$[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\omega_i\omega_{n1}] = 0. \tag{23,2}$$

Из (5,13), (5,15) и (23,1) следует

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\omega_i \, . \, \omega_{n1}$$

так что ввиду неравенства (16,3) не может иметь места $\alpha_1 = = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Напишем снова определение (5,2) коллинеации K:

$$KA = B, \; KA_1 = B_1, \ldots, KA_n = B_n.$$

Дифференцируя эти равенства и учитывая (5,3)—(5,6), (17,1), (17,4), (22,1)—(22,4), ны получим

$$dK \, . \, A = \tau_{00}B, \; dK \, . \, A_i = \tau_{00}B_i + \alpha_i\omega_{n1}B_n \; (1 \leqq i \leqq n-1),$$
$$dK \, . \, A_n = (\tau_{00} + \alpha_n\omega_{n1}) \, B_n. \tag{23,4}$$

Уравнения (23,3) и (23,4) выражают прежде всего, что коллинеация K зависит лишь от одного параметра t (так как уравнение $\mathrm{d}t = 0$ эквивалентно уравнению $\omega_{n1} = 0$ и уравнению $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega_i = 0$) и что, следовательно, K не изменяется при движении точки A по некоторой гиперплоскости $H(t)$ (это — гиперплоскость $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, где x_i — координаты точки $X = A + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$). Из (23,4) вытекает кроме того

$$[KX,\ dK\,.\,X] = 0, \tag{23,5}$$

для каждой точки X гиперплоскости $H(t)$.

Теперь мы покажем, что только-что перечисленных свойств достаточно для того, чтобы охарактеризовать искомые соответствия.

24. Итак, пусть $\{K(t)\}$ — семейство коллинеаций между S_n и S_n', зависящее от некоторого параметра t, а $\{H(t)\}$ — семейство гиперплоскостей из S_n, зависящее от того же параметра и такое, чтобы было выполнено свойство (23,5). Мы докажем, что относя каждой точке X из $H(t)$ точку KX, мы получим (меняя t) соответствие рассматриваемого типа между S_n и S_n', причем $K(t)$ — касательная коллинеация, соответствующая всем точкам гиперплоскости $H(t)$. В связи с приложениями в дальнейших частях этого мемуара заметим, что этот результат имеет силу для любого $n \geqq 2$. Пусть N будет пересечением всех гиперплоскостей $H(t)$; N является линейным пространством некоторой размерности $h - 1$, где

$$0 \leqq h \leqq n - 1; \tag{24,4}$$

для $h = 0$ пространство N пусто. Если $h > 0$, выберем постоянные точки $C_1, \ldots, C_h$ так, чтобы $N = [C_1, \ldots, C_h]$. Хорошо язвестно, что можно выбрать точку $D = D(t)$ таким образом, что

$$H(t) = [C_1 \ldots C_h D dD d^2 D \ldots d^{n-h-1} D]; \tag{24,2}$$

тогда должно иметь место

$$[C_1 \ldots C_h D dD d^2 D \ldots d^{n-h} D] \neq 0. \tag{24,3}$$

Коллинеация $K(t)$, удовлетворяющая (23,5), определена с точностью до скалярного множителя. Легко видеть, что можно подобрать этот скалярный множитель так, чтобы (23,5) приняло следующий простейший вид

$$\mathrm{d}K\,.\,X = 0 \text{ для любой точки } X \text{ из } H(t). \tag{24,4}$$

Определим: $D_i = D_i(t)$ $(0 \leqq i \leqq n - h)$ с помощью уравнений

$$D = D_0,\ dD_i = D_{i+1}dt \text{ для } 0 \leqq i \leqq n - h - 1 \qquad (24{,}5)$$

и положим

$$KC_j = C'_j(1 \leqq j \leqq h), \qquad KD_i = D'_i(0 \leqq i \leqq n - h) \quad (24{,}6)$$

Из (24,2) и (24,4) следует (ибо $\mathrm{d}C_j = 0$)

$$dC'_j = 0 \text{ для } 1 \leqq j \leqq h, \qquad (24{,}7)$$

$$dD'_i = D'_{i+1}dt \text{ для } 0 \leqq i \leqq h - 1. \qquad (24{,}8)$$

Полагая $D'_0 = D'$, мы получим соотношения, аналогичные к (24,2) и (24,3) [$H'(t)$ означает образ гиперплоскости $H(t)$ при коллинеации $K(t)$]:

$$H'(t) = [C'_1 \ldots C'_h D' dD' d^2 D' \ldots d^{n-h-1}D'] \qquad (24{,}9)$$

$$[C'_1 \ldots C'_h D' dD' \ldots d^{n-h}D'] \neq 0 \qquad (24{,}10)$$

Точки $C'_1, \ldots, C'_h$ неподвижны и коллинеация K определяется выражениями

$$KC_j = C'_j(1 \leqq j \leqq h), \qquad KD = D', \qquad Kd^iD = d^iD'$$
$$(1 \leqq i \leqq n - h) \qquad (24{,}11)$$

Рассматриваемое соответствие переводит точку

$$A = \sum_{j=1}^{h} x_j C_j + \sum_{i=0}^{n-h-1} y_i D_i \qquad (24{,}12)$$

в точку

$$B = KA = \sum_{j=1}^{h} x_j C'_j + \sum_{i=0}^{n-h-1} y_i D'_i. \qquad (24{,}13)$$

Нужно предположить, что $y_{n-h-1} \neq 0$, чтобы не нарушить неравенства (1,1) и (1,2). Дифференцируя, мы получим сначала

$$K \,.\, \mathrm{d}A = \mathrm{d}B \qquad (24{,}14)$$

так что K является, действительно, касательной коллинеацией и далее

$$K \,.\, \mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B + y_{n-h-1} \,.\, \mathrm{d}t^2(KD_{n-h-1} - D'_{n-h-1}), \quad (24{,}15)$$

где

$$D_{n-h+1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}D_{n-h},\ D'_{n-h+1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}D'_{n-h}. \qquad (24{,}16)$$

Очевидно, имеют место уравнения вида

$$D_{n-h+1} = \sum_{j=1}^{h} \alpha_j C_j + \sum_{i=0}^{n-h} \beta_i D_i,\ D'_{n-h+1} = \sum_{j=1}^{h} \alpha'_j C'_j + \sum_{i=0}^{n-h} \beta'_i D'_i, \quad (24{,}17)$$

где α_j, α'_j, β_i, β'_i — функции t. Подставляя значения (24,17) в (24,15), получим

$$K\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B + y_{n-h-1}\,\mathrm{d}t^2 \,.\, E', \qquad (24{,}18)$$

где

$$E' = \sum_{j=1}^{h} (\alpha_j - \alpha'_j)\, C'_j + \sum_{i=0}^{n-h} (\beta_i - \beta'_i)\, D'_i. \qquad (24{,}19)$$

В случае, если

$$\alpha_j = \alpha'_j \text{ для } 1 \leqq j \leqq h,\ \beta_i = \beta'_i \text{ для } 1 \leqq i \leqq n - h,$$

наше соответствие будет коллинейным. За исключением этого случая, соответствие будет принадлежать к изучаемому типу; тотально K-линеаризирующей прямой пространства S_n будет прямая $[AE]$, где

$$E = \sum_{j=1}^{h} (\alpha_j - \alpha'_j)\, C_j + \sum_{i=0}^{n-h} (\beta_i - \beta'_i)\, D_i; \qquad (24{,}20)$$

тотально K-линеаризирующей прямой пространства S'_n является прямая $[BE']$. K-главный конус сводится к гиперплоскости $H(t)$, взятой дважды в пространстве S_n и к гиперплоскости $H'(t)$, взятой дважды в пространстве S'_n.

Можно задать себе вопрос, при каких условиях K будет локальной коллинеацией. Без труда докажем, что это случится тогда и только тогда, когда

$$\beta_{n-h-1} = \beta'_{n-h-1}, \qquad (24{,}21)$$

другими словами, когда отношение

$$[C_1 \ldots C_h D\, \mathrm{d}D \ldots \mathrm{d}^{n-h} D] : [C'_1 \ldots C'_h D'\, \mathrm{d}D' \ldots \mathrm{d}^{n-h} D'] \qquad (24{,}22)$$

будет постоянным.

В этом параграфе мы исследовали определенный тип соответствий, которые можно назвать *развертывающимися соответствиями* (огибающими некоторого семейства ∞^1 коллинеаций), причем мы выбрали аналитический путь. Можно произвести и чисто геометрический анализ этого интересного типа преобразований, но этим мы займемся в другом месте.

Résumé.

Ce Mémoire a été publié en français dans le Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **75** (1950), 123—136.