Czechoslovak Mathematical Journal

Eduard Čech

Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 2, 91–107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100038

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Центральный математический институт
Т. 2 (77) ПРАГА 16. VII. 1952 • № 2

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВАМИ I

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 2/I 1952 г.)

Пусть C — соответствие между проективными пространствами S_n, S'_n. Пусть K — его касательная коллинеация, присвоенная паре точек A, B взаимно связанных соответствием C. В связке прямых A определено квадратичное K-линеаризирующее преобразование, характеризующее разницу между C и K вблизи точки A. Это преобразование переводит прямую $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ в прямую $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$, где Ω_r — квадратичные формы. Дано геометрическое описание K-линеаризирующего преобразования.

1. Соответствие между двумя линейными n-мерными пространствами S_n и S'_n вполне определено, если нам известны выражения для однородных координат точки A пространства S_n, равно как и выражения для однородных координат соответствующей точки B пространства S'_n, в виде функций (которые мы будем считать аналитическими) от n параметров $(u_1, \ldots, u_n) = (u)$ (криволинейных координат); эти параметры мы назовем *главными параметрами*, в отличие от вторичных, о которых будет итти речь в дальнейшем (см. § 5). Мы будем предполагать, что для всех рассматриваемых значений (u) имеет место

$$\left[A\,\frac{\partial A}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial A}{\partial u_n}\right] \neq 0, \tag{1,1}$$

$$\left[B\,\frac{\partial B}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial B}{\partial u_n}\right] \neq 0. \tag{1,2}$$

Нас будут интересовать только локальные свойства соответствий.

Пусть K — коллинеация между S_n и S'_n для данных значений (u) такая, что

$$KA = B. \tag{1,3}$$

Мы назовем K *касательной коллинеацией* данного соответствия (отвечающей определенному выбору значений (u)) в том случае, если для каждой регулярной кривой Γ пространства S_n, выходящей из A, две кривые Γ' и $K\Gamma$ будут иметь в точке B аналитическое касание хотя бы первого порядка, причем Γ' и $K\Gamma$ являются образами кривой Γ при рассматриваемом соответствии с одной стороны и при коллинеации K с другой. Чтобы найти выражение для какой либо касательной коллинеации, выберем индекс i $(1 \leqq i \leqq n)$ и будем изменять параметр u_i при фиксированных значениях всех остальных параметров u_r $(1 \leqq r \leqq n,$ $r \neq i)$. Тогда точка A опишет кривую Γ_i пространства S_n, а соответствующая ей точка B опишет кривую Γ'_i пространства S'_n. Кроме Γ'_i мы получим в пространстве S'_n еще образ $K\Gamma_i$ кривой Γ_i посредством коллинеации K. Необходимым и достаточным условием наличия аналитического касания кривых Γ'_i и $K\Gamma_i$ в точке B является существование числа λ_i такого, что для всех данных значений (u) имеет место

$$K\frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial B}{\partial u_i} + \lambda_i B. \tag{1,4}$$

Наоборот, зададим теперь произвольно n чисел λ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ и рассмотрим коллинеацию K, определенную уравнениями (1,3) и (1,4); в силу (1,1) и (1,2) коллинеация K не будет вырожденной. Легко видеть, что K является касательной коллинеацией. В самом деле, любую кривую Γ пространства S_n можно задать с помощью выражений, определяющих главные параметры как функции вспомогательного переменного t так, чтобы (u) приняли для $t = t_0$ данные исходные значения. Две кривые Γ' и $K\Gamma$ имеют, следовательно, в B аналитическое касание, так как для $t = t_0$, в силу (1,3) и (1,4) получим

$$KA = B,\ K\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + \lambda B,\ \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}.$$

Мы видим, что касательная коллинеация не будет однозначно определена фиксированными значениями (u), так как она зависит еще и от n произвольных параметров λ_i $(1 \leqq i \leqq n)$. Среди касательных коллинеаций имеется всегда одна (и только одна) *касательная аффинная коллинеация*. Пользуясь неоднородными координатами, можно очевидно получить касательную аффинную коллинеацию, если выбрать $\lambda_i = 0$ для $1 \leqq i \leqq n$.

2. Для данных значений (u) мы можем внутренним (intrinsèque) путем получить вполне определенную касательную коллинеацию. Согласно (1,1) и (1,2) произвольные множители од-

нородных координат двух точек A и B можно подчинить условию

$$\left[A\,\frac{\partial A}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial A}{\partial u_n}\right]=\left[B\,\frac{\partial B}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial B}{\partial u_n}\right] \tag{2,1}$$

которое является, очевидно, внутренним. Тогда частный вид касательной коллинеации K, данный уравнениями

$$K_0A=B,\ K_0\frac{\partial A}{\partial u_i}=\frac{\partial B}{\partial u_i},\ (1\leqq i\leqq n) \tag{2,2}$$

будет определен однозначно. Ибо, во первых, ясно, что K_0 ни коим образом не зависит от выбора криволинейных координат. Во вторых, вследствие (2,2), мы имеем

$$K_0(\varrho A)=\varrho B,\ K_0\frac{\partial(\varrho A)}{\partial u_i}=\frac{\partial(\varrho B)}{\partial u_i},\ (1\leqq i\leqq n)$$

при любом выборе ϱ, так что K_0 остается без изменения при замене A на ϱA, так как, чтобы не нарушить условия (2,1), следует одновременно заменить и B на ϱB. Более того, условие (2,1) остается в силе и в том случае, когда мы, не меняя A, заменим B через εB, где $\varepsilon^{n+1}=1$, но это не имеет значения, так как ясно, что можно, не меняя геометрически (т. е. вплоть до коэффициента пропорциональности) коллинеацию K_0, заменить условие (2,1) несколько более общим условием

$$\left[A\,\frac{\partial A}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial A}{\partial u_n}\right]=c\left[B\,\frac{\partial B}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial B}{\partial u_n}\right], \tag{2,3}$$

где c — постоянная. Мы назовем только что определенную коллинеацию K_0 *локальной коллинеацией* рассматриваемого соответствия (для определенных значений главных параметров).

При любом выборе множителей однородных координат точек A и B мы всегда получим уравнение вида (2,3) с той разницей, что c может изменяться с параметрами (u). Итак, локальная коллинеация K_0 дана уравнениями

$$K_0A=\varrho B,\ K_0\frac{\partial A}{\partial u_i}=\frac{\partial(\varrho B)}{\partial u_i}\ (1\leqq i\leqq n),$$

где значение ϱ дано соотношениями

$$\left[A\,\frac{\partial A}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial A}{\partial u_1}\right]=\left[\varrho B,\frac{\partial(\varrho B)}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial(\varrho B)}{\partial u_n}\right],$$

откуда $\varrho=c^{\frac{1}{n+1}}$. Изменением несущественного числового множителя при K_0 мы получим

$$K_0 A = B,\ K_0 \frac{\partial A}{\partial u_i} = \frac{\partial B}{\partial u_i} + \frac{1}{n+1} \frac{\partial \log c}{\partial u_i} B (1 \leqq i \leqq n), \quad (2,4)$$

причем значение c дано уравнением (2,3).

3. В этом параграфе мы будем предполагать, что $n = 1$, т. е. что речь идет о соответствии между двумя *прямыми*. Выберем такие значения множителей координат точек A и B, чтобы получить (2,1), или

$$\left[A \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\right] = \left[B \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u}\right]. \quad (3,1)$$

Дифференцируя, получим

$$\left[A \frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}u^2}\right] = \left[B \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}u^2}\right]. \quad (3,2)$$

С другой стороны, так как $n = 1$, имеют место соотношения вида

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}u^2} = \lambda A + \mu \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u},\ \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}u^2} = \lambda' A + \mu' \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u} \quad (3,3)$$

и уравнения (3,1) и (3,2) дают

$$\mu = \mu'.$$

Локальная коллинеация K_0 определяется уравнением (2,2), то есть

$$K_0 A = B,\ K_0 \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u}, \quad (3,5)$$

и из (3,3) и (3,4) следует, что

$$K_0 \frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}u^2} + (\lambda - \lambda') B. \quad (3,6)$$

Уравнения (3,5) и (3,6) выражают тот факт, что между геометрическим местом точек B (в которые переходят A при рассматриваемом соответствии) и местом точек $K_0 A$ (соответствующих точкам A при коллинеации K_0) имеет место аналитическое касание второго порядка. Ввиду этого, в случае $n = 1$, мы назовем K_0 *соприкасающейся коллинеацией* рассматриваемого соответствия (для данного значения (u)).

4. Возвратимся к общему случаю, когда $n > 1$. Выше мы дали *аналитическое* определение локальной коллинеации K_0. Геометрическое определение K_0, ограничивающееся случаем $n = 2$, было дано мною в 1931 г. в курсе G. Fubini и E. Čech, „Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces“,

стр. 189. С точки зрения проективной геометрии можно охарактеризовать K_0 при любом n на основании рассуждений § 11. С другой стороны интересно подметить характерное центроаффинное свойство K_0, отличающееся большой простотой. Наши проективные пространства S_n и S'_n можно рассматривать как пространства, „точками" которых являются прямые, выходящие из начала координат в двух аффинных пространствах $n+1$ измерений L_{n+1} и L'_{n+1}. Фиксируя произвольным образом множители однородных координат точек A и B и считая эти координаты неоднородными координатами в L_{n+1} и L'_{n+1}, мы получим соответствие между L_{n+1} и L'_{n+1}, относя точке tA из L_{n+1} точку tB из L'_{n+1}. Это соотношение между двумя аффинными пространствами обладает той особенностью, что образом каждой прямой, выходящей из начала координат, будет прямая, также выходящая из начала, причем соответствие между этими двумя прямыми является аффинным и образом начала координат является начало координат. Дальнейшая специализация соответствия между L_{n+1} и L'_{n+1} выражается условием (2,1). Если оно выплонено, то K_0, определенное в (2,2), будет (в неоднородных координатах) *аффинной коллинеацией*, *касательной* к соотвествию между L_{n+1} и L'_{n+1}. Локальная коллинеация соответствия между S_n и S'_n получается путем проектирования этой касательной аффинной коллинеации из начала координат. Итак, все сводится лишь к центроаффинной интерпретации условия (2,1), что почти очевидно. Условие (2,1) означает, что объем $(n+1)$-симплекса в L_{n+1}, вершинами которого являются начало и $n+1$ бесконечно близких к A точек, равен объему образа симплекса в L'_{n+1}, если пренебречь бесконечно малыми порядка $n+1$.

В дальнейшем мы будем упоминать о локальных коллинеациях лишь вскользь, при случае. Поэтому мы не будем, вообще говоря, считать условие (2,1) выполненным. В настоящем и в последующих мемуарах мы будем подробно изучать свойства произвольной касательной коллинеации K, заданной уравнениями (1,3) и (1,4), в которых λ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ являются произвольно выбранными функциями главных параметров.

5. В дальнейшем мы будем пользоваться мощными методами, созданными выдающимся геометром Э. Картаном. В пространстве S_n мы выберем репер $A, A_1, \ldots, A_n$, в пространстве S'_n репер $B, B_1, \ldots, B_n$. Первые вершины A и B этих двух реперов всегда образуют пару точек, связанных рассматриваемым соответствием между S_n и S'_n таким образом, что *отношения* однородных координат точек A и B будут вполне определенными функциями главных параметров (u), причем множители этих

координат остаются произвольными. Что касается остальных вершин $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$, то кроме очевидных условий

$$[AA_1, \ldots, A_n] \neq 0 \neq [BB_1, \ldots, B_n] \tag{5,1}$$

мы их подчиним еще тому условию, чтобы коллинеация K, заданная соотношениями

$$KA = B,\ KA_1 = B_1, \ldots, KA_n = B_n \tag{5,2}$$

была коллинеацией, касательной к рассматриваемому соответствию. Однородные координаты вершин $A, A_1, \ldots, A_n, B, B_1, \ldots, \ldots, B_n$ зависят следовательно от n главных параметров и кроме того от некоторого числа *вторичных параметров*. Без условия, наложенного на коллинеацию K, число вторичных параметров было бы $2 + 2n(n + 1)$: два множителя вершин A и B и все координаты вершин $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$. Если бы касательная коллинеация была (для данных значений (u)) однозначно определена, то условие, наложенное на K, понизило бы число вторичных параметров на $n(n + 1)$ единиц (при фиксированных $A, A_1, \ldots, A_n, B$, координаты вершин $B_1, \ldots, B_n$ были бы вполне определенными). В действительности, однако, для данных значений (u) касательная коллинеация зависит еще от n произвольных постоянных, что повышает число вторичных параметров на n единиц. Окончательно получаем

$$2 + 2n(n + 1) - n(n + 1) + n = 2 + n(n + 2)$$

вторичных параметров, а число всех параметров (главных и вторичных) будет $n + 2 + n(n + 2) = (n + 1)(n + 2)$.

Основные уравнения имеют вид

$$\mathrm{d}A = \omega_{00}A + \omega_{01}A_1 + \ldots + \omega_{0n}A_n, \tag{5,3}$$

$$\mathrm{d}A_i = \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \ldots + \omega_{in}A_n \quad (1 \leqq i \leqq n), \tag{5,4}$$

$$\mathrm{d}B = \overline{\omega}_{00}B + \overline{\omega}_{01}B_1 + \ldots + \overline{\omega}_{0n}B_n, \tag{5,5}$$

$$\mathrm{d}B_i = \overline{\omega}_{i0}B + \overline{\omega}_{i1}B_1 + \ldots + \overline{\omega}_{in}B_n \quad (1 \leqq i \leqq n), \tag{5,6}$$

где $\omega_{ik}, \overline{\omega}_{ik}$ $(0 \leqq i, k \leqq n)$ — формы Пфаффа от всех $(n + 1) \cdot$ $\cdot (n + 2)$ параметров. Внешним дифференцированием мы получаем из них уравнения структуры

$$[\mathrm{d}\omega_{ik}] = [\omega_{i0}\omega_{0k}] + [\omega_{i1}\omega_{1k}] + \ldots + [\omega_{in}\omega_{nk}], \tag{5,7}$$

$$[\mathrm{d}\overline{\omega}_{ik}] = [\overline{\omega}_{i0}\overline{\omega}_{0k}] + [\overline{\omega}_{i1}\overline{\omega}_{1k}] + \ldots + [\overline{\omega}_{in}\overline{\omega}_{nk}], \tag{5,8}$$

$$(0 \leqq i,\ k \leqq n).$$

Среди $2(n + 1)^2$ форм Пфаффа $\omega_{ik}, \overline{\omega}_{ik}$ должно иметься как раз $(n + 1)(n + 2)$ линейно независимых форм, так что существует $n(n + 1)$ линейных соотношений, которые можно получить, выражая условие, чтобы K было касательной коллинеацией. Согласно (5,2), (5,3) и (5,5) мы получим

$$KA = B, \quad K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B + (\omega_{00} - \overline{\omega}_{00})\,B + (\omega_{01} - \overline{\omega}_{01})\,B_1 + \ldots + (\omega_{0n} - \overline{\omega}_{0n})\,B_n.$$

Для того, чтобы K была касательной коллинеацией, необходимо и достаточно, чтобы $K\,\mathrm{d}A - \mathrm{d}B$ было пропорционально B, что дает первую группу n линейных соотношений

$$\overline{\omega}_{01} = \omega_{01}, \ldots, \overline{\omega}_{0n} = \omega_{0n} \tag{5,9}$$

Остальных n^2 линейных соотношений можно получить внешним дифференцированием уравнений (5,9). Однако, предварительно мы введем новые формы Пфаффа, полагая

$$\overline{\omega}_{ik} = \omega_{ik} + \tau_{ik} \ \ (0 \leqq i\,,\ k \leqq n) \tag{5,10}$$

Кроме того, положим для упрощения

$$\omega_{01} = \omega_1, \ldots, \omega_{0n} = \omega_n, \tag{5,11}$$

так что формулы (5,3) и (5,5) примут вид

$$\mathrm{d}A = \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n, \tag{5,3$'$}$$

$$\mathrm{d}B = \overline{\omega}_{00}B + \omega_1 B_1 + \ldots + \omega_n B_n. \tag{5,5$'$}$$

Заметим, что при фиксированных значениях главных параметров (u) геометрическое положение A вполне определено и наоборот. Отсюда следует в силу (5,3)$'$, что $\omega_1, \ldots, \omega_n$ являются *n независимыми линейными комбинациями дифференциалов n главных параметров.*

После этого внешним дифференцированием (5,9) мы получаем

$$\left.\begin{array}{l} [\omega_1\tau_{11} - \tau_{00}] + [\omega_2\tau_{21}] + \ldots + [\omega_n\tau_{n1}] = 0, \\ [\omega_1\tau_{12}] + [\omega_2\tau_{22} - \tau_{00}] + \ldots + [\omega_n\tau_{n2}] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\omega_1\tau_{1n}] + [\omega_2\tau_{2n}] + \ldots + [\omega_n\tau_{nn} - \tau_{00}] = 0. \end{array}\right\} \tag{5,12}$$

По хорошо известной лемме Э. Картана из (5,12) вытекает существование n квадратичных форм от $\omega_1, \ldots, \omega_n$:

$$\Omega_i = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c^i_{rs}\omega_r\omega_s \ \ (1 \leqq i \leqq n), \tag{5,13}$$

причем, конечно, имеет место

$$c^i_{rs} = c^i_{sr} \ \ (1 \leqq i,\ r,\ s \leqq n),$$

таких, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\omega_r} = \sum_{s=1}^{n} c^i_{sr}\omega_s = \begin{cases}\tau_{ii} - \tau_{00} & \text{для } i = r \\ \tau_{ri} & \text{для } i \neq r\end{cases} \tag{5,15}$$

$$1 \leqq i,\ r \leqq n.$$

(5,15) являются n^2 добавочными линейными соотношениями между формами Пфаффа.

Выражения Ω_i играют фундаментальную роль в проективной дифференциальной геометрии соответствий между двумя пространствами. Их геометрический смысл мы выясним в § 9.

6. Так как мы пользуемся однородными координатами, то умножение всех точек $A, A_1, \ldots, A_n$ на одну и ту же скалярную величину $\varrho \neq 0$, равно как и умножение всех точек $B, B_1, \ldots, B_n$ на один и тот же скаляр $\sigma \neq 0$, не имеет никакого геометрического значения; таким образом можно заменить условие (5,1) более сильным условием

$$[AA_1, \ldots, A_n] = 1 = [BB_1, \ldots, B_n]. \tag{6,1}$$

Это два функциональных соотношения между параметрами, которые понижают число вторичных параметров на два, так что остается $n(n+2)$ вторичных параметров, а всех параметров $n(n+3)$. Соотношения (6,1) приводят к двум линейным соотношениям между нашими формами Пфаффа, которые можно получить дифференцируя (6,1) считаясь с (5,3)—(5,6). Мы получим

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \ldots + \omega_{nn} = \overline{\omega}_{00} + \overline{\omega}_{11} + \ldots + \overline{\omega}_{nn} = 0 \tag{6,2}$$

откуда

$$\tau_{00} + \tau_{11} + \ldots + \tau_{nn} = 0. \tag{6,3}$$

Мы всегда можем предполагать справедливость соотношений (6,1)—(6,3), но мы будем это делать только в том случае, когда это упростит наши формулы.

Если вместо

$$A, A_1, \ldots, A_n, \; B, B_1, \ldots, B_n$$

ввести

$$\varrho A, \varrho A_1, \ldots, \varrho A_n, \; \sigma B, \sigma B_1, \ldots, \sigma B_n,$$

то формы Пфаффа $\omega_{ik}, \overline{\omega}_{ik}, \tau_{ik}$ $(0 \leqq i, k \leqq n;\ i \neq k)$ и в частности $\omega_1, \ldots, \omega_n$ останутся без изменения. Однако, „диагональные формы“ $\omega_{ii}, \overline{\omega}_{ii}, \tau_{ii}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ придется заменить следующими

$$\omega_{ii} + \frac{d\varrho}{\varrho}, \; \overline{\omega}_{ii} + \frac{d\sigma}{\sigma}, \; \tau_{ii} + \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{d\varrho}{\varrho}. \tag{6,4}$$

Разности диагональных форм $\omega_{ii} - \omega_{00}$, $\overline{\omega}_{ii} - \overline{\omega}_{00}$, $\tau_{ii} - \tau_{00}$ не изменятся. Так как множители ϱ, σ не имеют никакого геометрического значения, наши формулы будут содержать, вообще говоря, только разности диагональных форм, так что в общем случае соотношения (6,1)—(6,3) не вводят никакого упрощения.

7. Определяя c как в уравнении (2,3), мы получим очевидно

$$[A\, \mathrm{d}_1 A, \ldots, \mathrm{d}_n A] = c[B\, \mathrm{d}_1 B, \ldots, \mathrm{d}_n B],$$

где все символы $\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_n$ обозначают дифференцирование. Отсюда мы получаем, учитывая (5,3), (5,5) и (5,9),

$$[AA_1, \ldots, A_n] = c[BB_1, \ldots, B_n],$$

откуда, дифференцируя

$$\frac{\mathrm{d}c}{c} + \tau_{00} + \tau_{11} + \ldots + \tau_{nn} = 0. \tag{7,1}$$

С другой стороны, согласно (2,4) для локальной коллинеации K_0 имеет место

$$K_0 A = B,\ K_0\, \mathrm{d}A = \mathrm{d}B + \frac{1}{n+1} \frac{\mathrm{d}c}{c} B.$$

Итак, согласно (5,3)′, (5,5)′ и (7,1) мы получаем

$$K_0 A = B,\ K_0(\omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n) = \omega_1 B_1 + \ldots + \omega_n B_n -$$
$$- \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (\tau_{ii} - \tau_{00})\, B,$$

откуда ввиду (5,15) следует

$$K_0 A = B,\ K_0 A_i = B_i - \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} \Sigma c^r_{ri} B. \tag{7,2}$$

В частности будет $K_0 = K$, где K определяется соотношениями (5,2), тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} (\tau_{ii} - \tau_{00}) = 0 \tag{7,3}$$

или

$$\sum_{r=1}^{n} c^r_{ri} = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n. \tag{7,4}$$

Если имеет место (6,3), а в особенности (6,1), то условию (7,3) можно придать очень простой вид

$$\tau_{00} = 0. \tag{7,5}$$

8. Мы будем иногда пользоваться символом дифференцирования δ, по отношению к которому главные параметры считаются постоянными; следовательно, δ является символом дифференцирования только по отношению к вторичным параметрам. Имеем

$$\delta u_1 = \ldots = \delta u_n = 0,$$

откуда

$$\omega_1(\delta) = \ldots = \omega_n(\delta) = 0. \tag{8,1}$$

Положим

$$\omega_{ik}(\delta) = e_{ik}, \ \tau_{ik}(\delta) = t_{ik}, \tag{8,2}$$
$$(0 \leqq i, \ k \leqq n),$$

так что

$$e_{01} = \ldots = e_{0n} = t_{01} = \ldots = t_{0n} = 0. \tag{8,3}$$

Согласно (5,15) мы получим

$$t_{ri} = \begin{cases} t_{00} \text{ для } i = r \\ 0 \text{ для } i \neq r \end{cases} \tag{8,4}$$
$$(1 \leqq i, \ r \leqq n).$$

9. После этих предварительных замечаний мы введем понятие, имеющее кардинальное значение для проективной дифференциальной геометрии соответствий между двумя пространствами. Сохраняя обозначения § 5, мы можем рассматривать каждую систему значений $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ как систему однородных координат некоторой прямой

$$[A, \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n] = [A \, \mathrm{d}A] \tag{9,1}$$

связки A в пространстве S_n и в то же время как систему однородных координат прямой

$$[B, \omega_1 B_1 + \ldots + \omega_n B_n] = [B \, \mathrm{d}B] \tag{9,2}$$

связки B в пространстве S'_n; см. (5,3)′ и (5,5)′. Мы будем говорить просто о прямой $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ в S_n — это прямая (9,1) — и о прямой $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ в S'_n — это прямая (9,2). Очевидно, если (9,1) является касательной в A к некоторой кривой Γ, проведенной в S_n, то (9,2) будет касательной в B к образу Γ' кривой Γ при рассматриваемом соответствии. Две прямые (9,1) и (9,2) также соответствуют друг другу в касательной коллинеации K. Заметим, что хотя (см. (1,4)) касательная коллинеация зависит от n произвольных постоянных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, тем не менне часть касательной коллинеации, относящаяся к связкам A и B, является однозначно определенной.

Имея это в виду, рассмотрим одновременно в связке A пространства S_n и в связке B пространства S'_n квадратичное преобразование (вообще говоря, не бирациональное!), переводящее прямую $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ в прямую $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$, где значения $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ видны из (5,13). Заметим, что для данных значений главных параметров наше квадратичное преобразование еще не будет вполне определенным. Однако, если выбрать касательную коллинеацию K и если взять два репера $A, A_1, \ldots, A_n$ и $B, B_1, \ldots, B_n$ таким образом, чтобы K было дано соотношениями (5,2), то квадратичное преобразование будет вполне определенным. Это следует из геометрического значения преобразования; кроме того, в этом нетрудно убедиться вычислением (см. § 10). Мы будем называть преобразование

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\Omega_1, \ldots, \Omega_n) \tag{9,3}$$

К-линеаризирующим преобразованием рассматриваемого соответствия. Точно так же мы назовем прямую $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$ *К-линеаризирующей прямой* для прямой $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. В частности, каждую прямую $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, для которой $\Omega_1 = \ldots = \Omega_n = 0$, мы назовем *К-главной прямой; характеристической прямой* будет каждая прямая $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ такая, что

$$\Omega_1 : \ldots : \Omega_n = \omega_1 : \ldots : \omega_n.$$

Мы не говорим K-характеристическая, так как понятие характеристической прямой является независимым от выбора K; впрочем, нужно рассматривать каждую K-главную прямую, как частный случай характеристической прямой.

Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла K-линеаризирующего преобразования! Если точка A описывает кривую Γ в пространстве S_n, а соответствующая точка B кривую Γ' в пространстве S'_n, то имеем прежде всего уравнения

$$KA = B, \ K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - \tau_{00}B \tag{9,4}$$

обнаруживающие аналитическое касание первого порядка двух кривых Γ' и $K\Gamma$ в исходной точке B. Дифференцируя уравнения (5,3)' и (5,5)' и учитывая (5,4) и (5,6), мы получаем

$$\mathrm{d}^2A = (\mathrm{d}\omega_{00} + \omega_{00}^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i\omega_{i0})\,A + \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}\omega_i + \omega_i\omega_{00} + \sum_{k=1}^{n} \omega_k\omega_{ki})\,A_i,$$

$$\mathrm{d}^2B = (\mathrm{d}\overline{\omega}_{00} + \overline{\omega}_{00}^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i\overline{\omega}_{i0})\,B + \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}\omega_i + \omega_i\overline{\omega}_{00} + \sum_{k=1}^{n} \omega_k\overline{\omega}_{ki})\,B_i;$$

принимая во внимание (5,2) и (5,10), мы получим

$$K\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B - \sum_{i=1}^{n} (\omega_i\tau_{00} + \sum_{k=1}^{n} \omega_k\tau_{ki})\,B_i - (.)\,B,$$

где коэффициент при B нас не интересует.

Согласно (5,5) можно также написать

$$K\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B - 2\tau_{00}\,\mathrm{d}B + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i\tau_{00} - \sum_{k=1}^{n} \omega_k\tau_{ki})\,B_i - (.)\,B$$

и наконец, с учетом (5,15),

$$K\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B - 2\tau_{00}\,\mathrm{d}B - \sum_{i=1}^{n} \Omega_iB_i - (.)\,B. \tag{9,5}$$

Из уравнений (9,4) и (9,5) мы видим прежде всего, что для того, чтобы две кривые Γ' и $K\Gamma$ имели в исходной точке B *аналитическое касание второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы касательная к* Γ (*или к* Γ') *была K-главной прямой. Кроме того мы видим, что необходимым и достаточным условием геометрического касания второго порядка* двух кривых Γ' и $K\Gamma$ в исходной точке B является: *касательная к* Γ (или к Γ') *должна быть характеристической прямой.* Наконец, предположим, что касательная к Γ (или к Γ') не будет характеристической. Тогда точный порядок касания Γ' и $K\Gamma$ в исходной точке B будет равен единице. Однако, выберем на K-линеаризирующей прямой касательной к Γ' некоторую точку C, отличную от B, так что $[BC]$ будет пропорционально $[B, \sum_{r=1}^{n} \Omega_i B_i]$; выберем кроме того в пространстве S'_n гиперплоскость H, не проходящую через точку C. *Тогда проекции двух кривых Γ' и $K\Gamma$ имеют в исходной точке аналитическое касание второго порядка*, что дает искомый геометрический смысл K-линеаризирующей прямой. Для большей ясности можно выбрать систему отсчета так, чтобы C было точкой $(0, \ldots, 0, 1)$ и чтобы уравнение гиперплоскости H имело вид $x_{n+1} = 0$; тогда проекцией точки $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ будет просто точка $(x_1, \ldots, x_n)$ и, обозначая отсутствие последней координаты чертой сверху, мы получим из (9,4) и (9,5) соотношения

$$\overline{KA} = \overline{B},\ \overline{K}\,\overline{\mathrm{d}A} = \overline{\mathrm{d}B} - \tau_{00}\overline{B},$$
$$\overline{K\,\mathrm{d}^2A} = \mathrm{d}^2\overline{B} - 2\tau_{00}\,\mathrm{d}\overline{B} - (.)\,\overline{B},$$

откуда явствует, что эти две проекции имеют аналитическое касание второго порядка.

Из уравнений (9,4) и (9,5) вытекает

$$K[A\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}^2A] = [B\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}^2B] - [B\,\mathrm{d}B\sum_{i=1}^{n}\Omega_i B_i]. \qquad (9,6)$$

Если $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — характеристическая прямая, то уравнение (9,6) принимает простой вид

$$K[A\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}^2A] = [B\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}^2B]. \qquad (9,6)'$$

Итак, для кривых Γ, касательная которых в точке A является характеристической прямой, образ Γ' кривой Γ будет иметь в B точку перегиба тогда и только тогда, когда Γ имеет точку перегиба в A и, если точки перегиба не имеется, то соприкасающиеся плоскости к Γ в A и к Γ' в B соответствуют друг другу в касательной коллинеации; здесь речь идет лишь о той части касательной коллинеации, которая относится к двум связкам A и B и не зависит от постоянных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, фигурирующих в (1,4). Положение вещей резко меняется, если касательная к Γ в A не является характеристической. Для всякой не характеристической прямой $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ существует плоскость

$$[A, \sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i, \sum_{i=1}^{n} \Omega_i A_i] \tag{9,7}$$

в пространстве S_n и соответствующая плоскость

$$[B, \sum_{i=1}^{n} \omega_i B_i, \sum_{i=1}^{n} \Omega_i B_i] \tag{9,8}$$

в пространстве S'_n; каждая из этих двух плоскостей соединяет прямую $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ рассматриваемого пространства с ее K-линеаризирующей прямой $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$. Каждая из двух плоскостей (9,7) и (9,8) будет называться *линеаризирующей плоскостью* прямой $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$; мы говорим линеаризирующей вместо K-линеаризирующей, так как это понятие не зависит от выбора касательной коллинеации K. Помня это, мы выведем из (9,6) следующий результат: *Если* (9,1) *и* (9,2) — *пара соответствующих нехарактеристических прямых и если Γ пробегает совокупность кривых пространства S_n, проходящих через A в направлении* (9,1), *то ее образ Γ' пробегает совокупность кривых пространства S'_n, проходящих через B в направлении* (9,2). *Если Γ имеет в A точку перегиба, то соприкасающаяся плоскость кривой Γ' в B будет линеаризирующей плоскостью прямой* (9,2); *обратно, если Γ' имеет в B точку перегиба, то соприкасающаяся плоскость кривой Γ в A будет линеаризирующей плоскостью прямой* (9,1). *Для всех кривых Γ, имеющих в A фиксированную касательную* (9,1) *и соприкасающаяся плоскость которых в точке A является линеаризирующей плоскостью касательной, соответствующие им кривые Γ' будут иметь в B фиксированную касательную и фиксированную соприкасающуюся плоскость, причем эта последняя будет линеаризирующей плоскостью касательной. Однако, если Γ пробегает совокупность кривых, имеющих в A фиксированную касательную* (9,1) *и фиксированную соприкасающуюся плоскость, причем соприкасающаяся плоскость не совпадает с линеаризирующей плоскостью касательной прямой* (*для чего необходимо $n \geqq 3$*), *то хотя совокупность образов Γ' кривых Γ и имеет в B постоянную касательную* (9,2), *ее соприкасающаяся плоскость в B будет переменной в линейном подпространстве трех измерений пространства S'_n. Эта соприкасающая плоскость описывает пучок, осью которого является касательная* (9,2); *линеаризирующая плоскость этой касательной будет элементом пучка*; она соответствует кривой Γ с точкой перегиба в A.

10. Чтобы выяснить характер зависимости K-линеаризирующего преобразования от выбора касательной коллинеации, выберем некоторую фиксированную касательную коллинеацию K и предположим, что реперы $A, A_1, \ldots, A_n$ и $B, B_1, \ldots, B_n$ таковы, что K определяется уравнениями (5,2). Из (1,4), (5,3)' и (5,5)' следует, что наиболее общая касательная коллинеация K^* будет выражена уравнениями

$$K^*A = B, \ K^*A_i = B_i - \mu_i B \text{ для } 1 \leqq i \leqq n \tag{10,1}$$

так что

$$(K^* - K)\, A = 0, \ (K^* - K)\, A_i = -\mu_i B \, (1 \leqq i \leqq n).$$

Отсюда вытекает

$$(K^* - K)\, \mathrm{d}A = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \omega_i \,.\, B,$$

$$(K^* - K)\, \mathrm{d}^2 A = -(.)\, B,$$

где величина (.) нас не интересует. Тогда уравнения, соответствующие уравнениям (9,4) и (9,5) будут иметь вид

$$K^*A = B, \ K^*\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - (\tau_{00} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \omega_i)\, B,$$

$$K^*\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B - 2(\tau_{00} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i\omega_i)\,\mathrm{d}B - \sum_{i=1}^{n} (\Omega_i - 2\omega_i \sum_{k=1}^{n} \mu_k\omega_k)\, B_i - (.)B.$$

Отсюда легко вывести, что K^*-линеаризирующее преобразование выразится следующим образом

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\Omega_1 - 2\omega_1\vartheta, \ldots, \Omega_n - 2\omega_n\vartheta), \tag{10,2}$$

где

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \omega_i. \tag{10,3}$$

11. Из (5,13) и (9,3) вытекает, что K-линеаризирующее преобразование определяется следующим выражением

$$\omega_i \to \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} c^i_{rs}\omega_r\omega_s \ (1 \leqq i \leqq n) \tag{11,1}$$

где $c^i_{rs} = c^i_{sr}$, причем касательная коллинеация K дана уравнениями (5,2). Если считать ω_i контравариантными величинами, то c^i_{rs} будет тензором с двумя ковариантными индексами r, s и с одним контравариантным индексом i. Тензор c^i_{rs}, симметрический относительно двух ковариантных индексов, не является однозначно определенным с помощью соответствия между пространствами S_n и S'_n. Даже при вполне определенном выборе касательной коллинеации K мы можем еще заменить c^i_{rs} на

$$\lambda c^i_{rs} \tag{11,2}$$

а если заменить касательную коллинеацию (5,2) другой касательной коллинеацией (10,1), то из (5,13), (10,2) и (10,3) вытекает, что c^i_{rs} нужно заменить выражениями

$$c^i_{rs} - \delta^i_r \mu_s - \delta^i_s \mu_r \tag{11,3}$$

где δ^i_r — символы Кронекера ($\delta^i_i = 1$, $\delta^i_r = 0$ для $i \neq r$).

Можно освободиться от неопределенности (11,3) тензора c^i_{rs} предположив, что K является локальной коллинеацией. Это выражается условием

$$\sum_{r=1}^{n} c^r_{ri} = 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq n. \tag{7,4}$$

Уравнения (7,4) выражают инвариантное алгебраическое свойство K-линеаризирующего преобразования для случая, когда K является локальной коллинеацией; нетрудно выразить это свойство, пользуясь чисто геометрическим языком и получить таким образом истолкование понятия локальной коллинеации. Случай $n = 2$ приводит нас к классическому понятию. В самом деле, для $n = 2$ выражение (11,1) представляет то, что называется соответствием (1,2) между двумя пучками прямых. Характеристические прямые определяются кубическим уравнением

$$\begin{vmatrix} c^1_{11}\omega_1^2 + 2c^1_{12}\omega_1\omega_2 + c^1_{22}\omega_2^2 & \omega_1 \\ c^2_{11}\omega_1^2 + 2c^2_{12}\omega_1\omega_2 + c^2_{22}\omega_2^2 & \omega_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{11,4}$$

Легко убедиться, что для $n = 2$ уравнения (7,4) имеют то простое значение, что преобразование (11,1) является *поляритетом относительно кубической формы*, фигурирующей в уравнении (11,4). Итак, условия (7,4) являются обобщением понятия поляритета относительно кубической бинарной формы. Мне кажется, что это обобщение до сих пор не изучалось.

12. Скажем еще несколько слов по поводу простого случая $n = 1$. Мы уже видели в § 3, что локальная коллинеация является для $n = 1$ соприкасающейся коллинеацией. Предположим, что реперы A, A_1; B, B_1 таковы, что соприкасающаяся коллинеация определяется выражениями

$$KA = B,\ KA_1 = B_1. \tag{12,1}$$

Условием справедливости этих соотношений является уравнение (7,3) при $n = 1$, то есть

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0. \tag{12,2}$$

В этом случае основные уравнения (5,3)—(5,6) примут вид

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1, \quad dB = (\omega_{00} + \tau_{00})\,B + \omega_1 B_1, \\ dA_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1, \quad dB_1 = (\omega_{10} + \tau_{10})\,B + (\omega_{11} + \tau_{00})\,B_1. \end{aligned} \tag{12,3}$$

Внешним дифференцированием условия (12,2) получим $[\omega_1\tau_{10}] = 0$, откуда следует, что $\tau_{10} = \alpha\omega_1$ и $t_{10} = 0$. Кроме того имеем $[\mathrm{d}\tau_1] = [\omega_{00} - \omega_{11}\omega_1]$, $[\mathrm{d}\tau_{10}] = [\tau_{10}\omega_{00} - \omega_{11}]$, откуда вытекает $\delta\omega_1 = -(e_{11} - e_{00})\,\omega_1$, $\delta\tau_{10} = (e_{11} - e_{00})\,\omega_1$ и далее

$$\delta(\tau_{10}\omega_1) = \delta(\alpha\omega_1^2) = 0.$$

Выражение $\tau_{10}\omega_1 = \alpha\omega_1^2$ *принимает, следовательно, одно и то же значение при всяком выборе реперов, удовлетворяющем уравнению* (12,2); это выражение мы назовем *проективным дифференциальным элементом* соответствия между двумя прямыми. Для коллинейного соответствия проективный дифференциальный элемент обращается тождественно в нуль. Наоборот, если $\tau_{10} = 0$, то из (12,1) и (12,3) вытекает, что

$$\mathrm{d}K \,.\, A = \tau_{00}B, \ \mathrm{d}K \,.\, A_1 = \tau_{00}B_1;$$

отсюда мы заключаем, что коллинеация K постоянна, если пренебречь несущественным числовым множителем. Так как $KA = B$, рассматриваемое соответствие совпадает в данном случае с коллинеацией K.

13. Возвратимся к общему случаю $n > 1$. Наиболее простым будет случай, когда каждая прямая, выходящая из A, является характеристической. Если это имеет место для любого положения A, то, так как в характеристических направлениях сохраняются точки перегиба, образом всякой прямой будет снова прямая. Из этого следует (для $n > 1$!), как известно, что соответствие является коллинейным. Подтвердим это вычислением. Наше предположение означает, что все определители матрицы

$$\begin{pmatrix} \Omega_1, \ldots, \Omega_n \\ \omega_1, \ldots, \omega_n \end{pmatrix}$$

равны тождественно нулю. Отсюда следует существование формы Пфаффа

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\omega_i$$

такой, что

$$\Omega_i = 2\omega_i\vartheta \ \text{гля} \ 1 \leqq i \leqq n.$$

Но тогда из (10,2) видно, что существует касательная коллинеация K такая, что каждая прямая, выходящая из A, является K-главной. Если выбрать реперы таким образом, чтобы K имело вид (5,2), то будет $\Omega_i = 0$ для $1 \leqq i \leqq n$. Кроме того, можно предположить, что справедливо (6,3). Далее из (5,15) следует, что $\tau_{ik} = 0$ для $1 \leqq i,\ k \leqq n$, а также $\tau_{00} = 0$. Уравнения структуры (5,7) и (5,8) тогда дают

$$[\tau_{i0}\omega_k] = 0 \text{ для } 1 \leqq i, k \leqq n\,. \tag{13,1}$$

Так как $n > 1$, мы получаем для каждого i ($1 \leqq i \leqq n$) по крайней мере два различных значенийя k таких, что $[\tau_{i0}\omega_k] = 0$. Для этого необходимо, чтобы $\tau_{i0} = 0$ для $1 \leqq i \leqq n$. Резюмируя, имеем $\tau_{ik} = 0$ для $0 \leqq i,\ k \leqq n$. Кроме того, дифференцируя (5,2), мы получим во всех случаях

$$\mathrm{d}K\,.\,A = \tau_{00}A,\ \mathrm{d}K\,.\,A_i = \tau_{i0}A + \sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}A_k$$

так что в нашем случае будет $\mathrm{d}K\,.X = 0$ для любой точки X, другими словами — коллинеация K постоянна.

В дальнейших частях этого мемуара мы будем изучать последовательно различные типы соответствий между двумя пространствами, определенные различными свойствами K-линеаризирующих преобразований.

Résumé.

Ce Mémoire a été publié en français dans le Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **74** (1949), 32—48.