ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MATEMATICKÉ HLAVOLAMY

60

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ TŮMA

MATEMATICKÉ HLAVOLAMY A ZÁKLADY TEORIE GRUP

PRAHA 1988
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali doc. dr. Aleš Pultr, CSc.
a dr. Vladimír Dřízal, CSc.

ÚVOD

Tento svazek Školy mladých matematiků vznikl podstatným rozšířením textu přednášek, které jsem měl na celostátním soustředění úspěšných účastníků matematické olympiády v Praze na Třebešíně v červnu roku 1982. Přestože se módní zájem o Rubikovu kostku od té doby přesunul jinam, zůstává kostka i nadále výbornou pomůckou k objasnění základních pojmů teorie permutací a grup. Podrobný výklad těchto pojmů a jejich využití při sestavení matematických modelů a řešení nejrůznějších hlavolamů podobných Rubikově kostce je hlavním cílem této knížky.

Celý text je rozdělen do tří úrovní. Každá kapitola začíná na základní úrovni rozborem určitých vlastností hlavolamů a postupným zaváděním nejnutnějších matematických pojmů. Na této úrovni se především snažím ukázat metodu, jak najít algoritmy pro řešení hlavolamů a jak vysvětlit, proč jsou určité pozice neřešitelné. Potom následují odstavce označené hvězdičkou. V nich jsou zkoumány vlastnosti hlavolamů, jejichž pochopení není nezbytně nutné pro úspěšné řešení, které ale slouží jako ilustrace ke složitějším matematickým pojmům. V závěru některých kapitol je několik dvouhvězdičkových odstavců. Ty jsou už výrazně matematické. Některé obsahují ukázky abstraktnějších úvah, jiné uvádějí pro úplnost matematickou terminologii. A jiné zase obsahují víceméně osvětové poznámky o určitých aspektech vývoje matematiky. Nic z odstavců označených jednou nebo dvěma hvězdičkami není při čtení základní kostkové úrovně, která tvoří více než dvě třetiny celého textu, potřeba.

Tolik úvodem, a nakonec už jenom poděkování těm, kteří se o napsání knížky také zasloužili. Hodně jsem se naučil od účastníků třebešínského soustředění, zejména od Petra Maršálka. Pátá kapitola o orientacích je výrazně ovlivněna článkem Igora Kříže o Rubikových hlavolamech ve studentském časopisu matematicko-fyzikální fakulty v Praze. Poděkování patří také oběma recenzentům za připomínky a podněty ke zlepšení textu a RNDr. Jiřímu Mikulčákovi, CSc. za pečlivé překreslení obrázků. A velkou zásluhu má také tajemník Ústředního výboru Matematické olympiády RNDr. Karel Horák CSc., který moji práci na knížce trpělivě a se zájmem sledoval.

V Protivíně 17. 8. 1985

Autor

Poznámka pro matematiky o označení. Hodnota zobrazení f v bodě i je důsledně zapisována jako if místo tradičního $f(i)$. Důvod je následující: jestliže nějaký postup P na Rubikově krychli udělá permutaci p a jiný postup Q permutaci q, pak složený postup PQ (napřed P a potom Q) udělá permutaci, která je složením permutací p a q. Při tradičním zápisu by bylo nutné složenou permutaci zapsat jako $q \circ p$, při zápisu používaném v této knížce to vychází logičtěji jako $p \circ q$ (napřed p a potom q).

První kapitola

HRY A POSTUPY

1.1. Rubikova krychle.*) Velkou vlnu zájmu o matematické hry a hlavolamy v nedávné době má na svědomí především maďarský architekt a průmyslový návrhář E. Rubik. Šťastný nápad, jak zkonstruovat hračku, která by poskytovala ohromné množství možností pro vzájemnou polohu jednotlivých prvků a byla přitom kompaktní, zachovávala dobře tvar a „padla do ruky", byl neméně dokonale realizován, a Rubikovy krychle postupně zaplavily řadu zemí po celém světě. Později jsme se mohli také dočíst o podobných hračkách ve tvaru koule, čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu, o krychlích $4 \times 4 \times 4$ nebo $5 \times 5 \times 5$, dokonce o simulacích čtyřdimenzionální Rubikovy krychle na počítačích. Autoři všech dalších hraček se nechali nepochybně inspirovat Rubikovou krychlí. Jejich vynálezy mají jeden společný rys: nepřeberné množství možných pozic, které způsobuje, že řešení je stejně obtížné a komplikované jako u Rubikovy krychle. Jsou to všechno „Rubikovy kostky", přestože E. Rubik sám už s nimi neměl většinou vůbec nic společného.

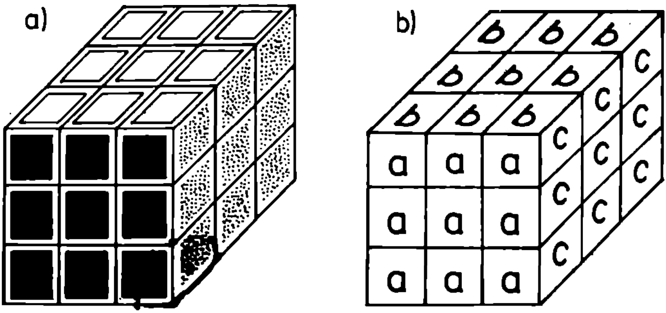
Novináři se obvykle předháněli v superlativech o obtížnosti hlavolamů, vyskytly se i názory, že některé z nich jsou pro člověka zcela nezvládnutelné, že je dokáže zvládnout pouze výkonný počítač. Občas jsme

*) Autor dává přednost tomuto pojmenování před zavedeným názvem Rubikova kostka (pozn. red.).

sice mohli najít zmínky o souvislostech Rubikovy krychle a matematiky, o permutacích a grupách, většinou ale články neobsahovaly nic jiného než nějaký obvykle odněkud opsaný postup, jak krychli složit, a vybízely čtenáře k jeho bezduchému používání. Jak na takový postup přijít, už v článcích nebylo. A nikde jsme se také nedočetli, že pojmy a metody potřebné ke zkrocení Rubikových krychlí znali někteří matematici už na počátku minulého století. Byl to zejména geniální francouzský matematik E. Galois (1811—1832), který teorii grup, tak se oblast matematiky, kterou můžeme při řešení Rubikových krychlí použít, rozvinul a získal pro ni patřičné místo ve struktuře matematiky. Jeho myšlenky byly tehdy tak neobvyklé, že trvalo řadu let, než byly patřičně pochopeny a doceněny. Galois se toho nedočkal, zemřel předčasně na následky zranění utrpěných v souboji.

Dnes už se nám na Galoisových myšlenkách nezdá nic neobvyklého. A Rubikovy krychle jsou přímo ideální pomůckou, na které můžeme některé z těchto myšlenek vysvětlit a demonstrovat jejich účinnost. Vydejme se tedy nyní za jejich tajemstvím. Naučíme se přemýšlet o celé řadě hlavolamů a spolu s tím nahlédneme do světa matematiky, která není právě běžnou součástí školních osnov. Nebudeme příliš počítat, ani nebudeme odvozovat a používat složité vzorce. Ke skládání Rubikových krychlí není nic takového potřeba.

Původní Rubikova krychle bude osou celé knížky. Všechny pojmy a metody budeme demonstrovat především na ní. Budeme se snažit pochopit logiku skládání Rubikovy krychle a získat tak schopnost rychle a samostatně vyhledávat postupy vhodné k řešení nejrůznějších hlavolamů podobného typu, dokonce i těch dosud nevymyšlených. Žádné postupy se nebudeme pouze mechanicky učit, naopak se pokusíme vysvětlit význam každého tahu a ukázat různé jiné možnosti, jak dosáhnout stejného cíle. Proto také nebudeme používat obvyklého označení jednotlivých stěn krychle písmeny P — pravá, L — levá, C — čelní, Z — zadní, H — horní a D — dolní, které bylo vymyšleno pro zapisování postupů, a označíme si jednotlivé stěny prostě písmeny *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* jako na obrázku 1.1.b.



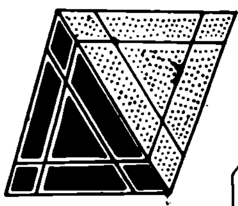
Obr. 1.1

Zadní stěna má písmeno *d*, dolní *e* a levá *f*. Naše označení nemá žádný vztah k tomu, jak krychli držíme, a v konkrétních případech je možné používat barvy jednotlivých stěn. My nebudeme barev používat nejen proto, že různé krychle mohou být různě obarvené, ale také proto, že při jiném obarvení nemusí být stěny jednobarevné, nebo je dokonce správná pozice určena nějakými obrázky, nikoliv barvami. Navíc nemáme barevné obrázky k dispozici.

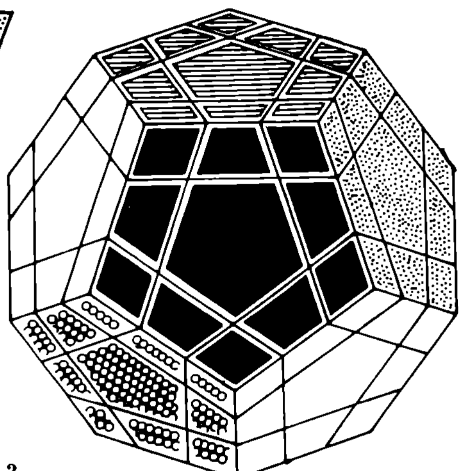
V každé stěně krychle leží vždy devět malých kostiček. Těmto skupinám kostiček budeme říkat *krajní vrstvy*. Každou z krajních vrstev můžeme otočit o 90° vpravo nebo vlevo. Tato otočení budeme považovat za základní tahy. Ostatní možná otočení jsou z nich složena.

Tak například otočit krajní vrstvou o 180° znamená otočit dvakrát po sobě o 90° a otočit střední vrstvou je totéž jako otočit obě s ní rovnoběžné krajní vrstvy v opačném směru. Krajní vrstvy budeme označovat stejnými písmeny jako příslušné stěny — *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Otočení nějakou krajní vrstvou o 90° vpravo pak budeme označovat odpovídajícím velkým písmenem. Otočení vrstvou *c* budeme tedy zapisovat C, vrstvou *a* písmenem A, atd. Otočení doleva budeme zapisovat stejným písmenem a vpravo nahoru připíšeme $^{-1}$: A^{-1}, E^{-1}, F^{-1}, atd. Otočení stěnou *b* vlevo budeme zapisovat B^{-1}.

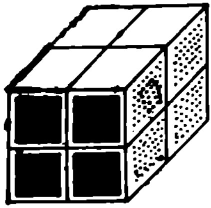
Vtipný Rubikův mechanismus lze různými způsoby modifikovat, měnit vzájemnou polohu a počet os otáčení, případně počet prvků v jednotlivých vrstvách. Dostáváme tak hračky ve tvaru čtyřstěnu — obr. 1.2., dvanáctistěnu — obr. 1.3., krychli 2 × 2 × 2 — obr. 1.4., krychli 4 × 4 × 4 — obr. 1.5.



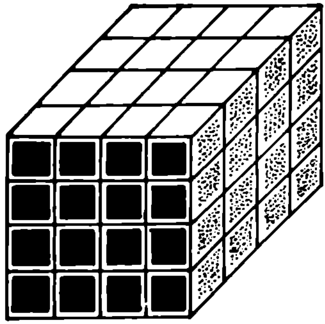
Obr. 1.2



Obr. 1.3

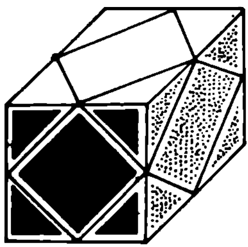


Obr. 1.4

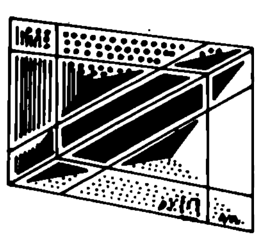


Obr. 1.5

Jiná mechanická konstrukce vede ke kosé krychli. Tato hra má sice tvar krychle, později si ale vysvětlíme, že pokud jde o způsob řešení, je to vlastně jenom čtyřstěn obarvený podle obrázku 1.7.



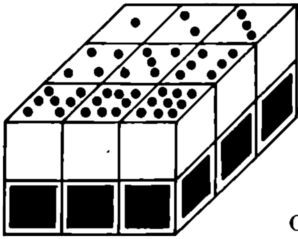
Obr. 1.6



Obr. 1.7

U všech těchto hraček se může stejný prvek objevit na stejném místě různě pootočený, orientovaný. Budeme říkat, že jsou to *hry s orientací*. Další modifikace Rubikova mechanismu vede na *hru bez orientace*.

1.2. Domino. Tato hra je vlastně Rubikova krychle bez jedné střední vrstvy.

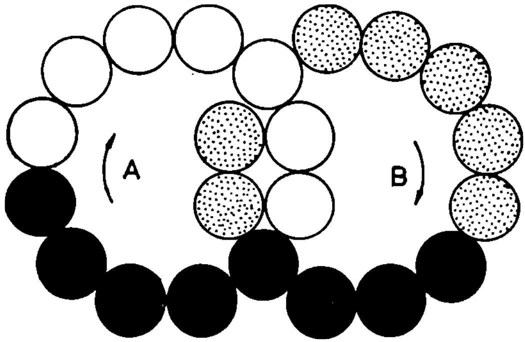


Obr. 1.8

Má dvě čtvercové vrstvy s devíti kostičkami a čtyři krajní vrstvy po šesti kostičkách. Otočíme-li horní vrstvou o 90° vpravo, dostaneme stejnou pozici jako po otočení dolní vrstvou o 90° vpravo. Důležitý je relativní pohyb prvků vůči sobě, nikoliv jejich absolutní pohyb v prostoru. Otočení některou čtvercovou vrstvou o 90° vpravo budeme označovat A, vlevo pak A^{-1}. Obdélníkové vrstvy můžeme pootáčet pouze o 180°, otočíme-li je vpravo nebo vlevo, dostaneme vždy stejnou pozici. Otočení bočními obdélníkovými vrstvami budeme označovat podle obrázku 1.8. — přední vrstvou B, pravou C, zadní D a levou E. A proč je domino hra bez orientace? Každý pohyblivý prvek má jednu dominovou plošku označenou tečkami. Ta se musí v jakékoliv pozici objevit v horní nebo dolní čtvercové stěně, protože boční vrstvy můžeme otáčet pouze o 180°. Stejný prvek se proto nikdy neobjeví na stejném místě různě pootočený, vždycky musí být dominová ploška ve čtvercové stěně. Pokud se nám podaří dostat všechny prvky na správná místa, je hračka složená. O orientace prvků se nemusíme vůbec starat.

Bez orientace je také další hra.

1.3. Uši. Tady není potřeba žádná důmyslná prostorová konstrukce. Uši jsou hra rovinná.



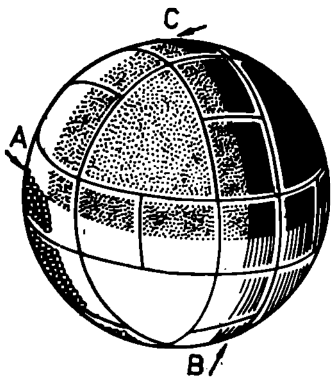
Obr. 1.9

Přesto jde o hru velice zajímavou, a pokud nemáme řešení tolik usnadněné obarvením kuliček jako na obrázku 1.9., také dost obtížnou. Hru tvoří dvaadvacet kuliček ve dvou protínajících se uších po dvanácti kuličkách. Různé varianty se mohou lišit nejen obarvením, ale také počtem kuliček v uších. Nejjednodušší povolené tahy jsou pootočení uchem „o jednu kuličku", tj. o 30°. Uši si označíme písmeny A, B a stejně budeme označovat příslušná pootočení vpravo. Otočení vlevo pak budeme zapisovat A^{-1} a B^{-1}.

Na rozdíl od Rubikovy krychle nebo domina můžeme na uších přesunout kteroukoliv kuličku na místo jakékoliv jiné. Naproti tomu na Rubikově krychli, dominu, čtyřstěnu, dvanáctistěnu a dalších hračkách existují pohyblivé prvky dvou různých typů — rohové a hranové. Žádný prvek jednoho typu nemůžeme nikdy přesunout na místo prvku druhého typu. V každé pozici je rohový prvek na místě jiného rohového prvku a hranový na místě hranového. Budeme říkat, že Rubikova krychle, domino, čtyřstěn, dvanáctistěn aj. jsou *hry nesouvislé*, existují na nich prvky různých typů. Uši jsou *hra souvislá*, každá kulička může být na místě libovolné jiné. Krychle $2 \times 2 \times 2$ je také souvislá hra, navíc s orientací.

Uvedeme si ještě jeden příklad souvislé hry s orientací.

1.4. Koule. Tato hra se prodávala buď s obarvením podle obrázku 1.10., nebo také jako zeměkoule.



Obr. 1.10

Jednotlivé čtverce můžeme posunovat ve třech navzájem kolmých pruzích, které si označíme opět A, B, C. Na obrázku jsou naznačené tahy A, B, C, posunutí v opačném směru pak budeme zapisovat A^{-1}, B^{-1} a C^{-1}. Později si ukážeme, že je výhodné považovat dva protilehlé čtverce za různé plošky jednoho a téhož prvku. Jsou v jakékoliv pozici proti sobě a jejich vzájemnou polohu nemůžeme nijak změnit. Koule poskytuje pro orientaci prvku na stejném místě nejvíce možností — čtyři pootočení a navíc ještě převrácení, záměnu obou čtverců tvořících jeden prvek. Celkem je tedy pro orientaci jednoho prvku osm možností. Z tohoto důvodu je teorie koule složitější než u jiných hraček (nikoliv řešení!), a probereme si ji až v závěru páté kapitoly.

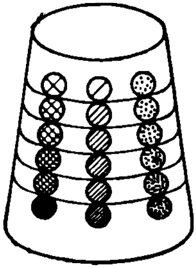
Ve výčtu her nemůžeme zapomenout ani na všeobecně známý hlavolam, který vymyslel někdy kolem roku 1870 slavný americký hádankář Sam Loyd.

1.5. Patnáctka. Patrnáctka vzbudila ve své době stejnou pozornost jako mnohem rafinovanější Rubikova krychle o více než sto let později. Je to hra rovinná podobně jako uši. Srovnat přeházená čísla do správného pořadí na obrázku 1.11. není příliš obtížné, a snad jediný opravdový problém vzniká s pozicí, která je „téměř“ složená, pouze čísla 14 a 15 jsou přehozená.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Obr. 1.11

Podrobnému rozboru této hry se budeme věnovat ve druhé kapitole. Povoleným tahem u patnáctky je posunutí čísla na sousední prázdné místo, tahy je možné provádět pouze na dvojicích sousedních polí, ne však kdykoliv, ale pouze tehdy, je-li jedno z těchto polí prázdné. Tím se patnáctka podstatně liší od všech předchozích hlavolamů, u kterých je možné pootáčet skupiny prvků pouze na základě jejich umístění, nezávisle na tom, jaké prvky to právě jsou. Patnáctka má naproti tomu jeden významný prvek — prázdné místo — který určuje, jaké tahy můžeme v pozici udělat. Podobnou vlastnost má také babylónská věž, prostorové varianty patnáctky.



Obr. 1.12

1.6. Tahy. Úplné a neúplné hry. Uvedený přehled her stačí pro představu, jaké hlavolamy budeme řešit. Nyní si ujasníme společné rysy těchto her a uvědomíme si také některé důležité odlišnosti. Všechny hry se skládají z nějakých prvků, jejichž vzájemnou polohu můžeme podle určitých pravidel měnit. Jsou to kostičky na krychlích a dominu, kuličky na uších a babylónské věži, čísla u patnáctky apod. Nejjednodušší možné změny vzájemné polohy prvků nazýváme *tahy*. Jaké tahy můžeme dělat? Na krychlích, dominu, čtyřstěnu, dvanáctistěnu můžeme otočit libovolnou krajní vrstvou prvků kolem osy této vrstvy. Každý tah lze provést kdykoliv, nezávisle na tom, jaké prvky ve vrstvě leží. Naproti tomu u patnáctky můžeme posunout libovolný prvek na s ním sousední prázdné místo. Tahy děláme na dvojicích sousedních míst, ne však kdykoliv, ale pouze tehdy, je-li jedno z těchto dvou míst prázdné.

Všimněte si zásadní odlišnosti pravidla pro patnáctku od pravidel pro krychle, domino, čtyřstěn, dvanáctistěn a další hry. Zatímco u Rubikovy krychle stačí uvést, kde jsou pohyblivé skupiny prvků — krajní vrstvy — a jak jimi můžeme otáčet, u patnáctky musíme navíc dodat, co tuto skupinu prvků tvoří — jedno z obou sousedních míst musí být prázdné. Podobnou vlastnost má i babylónská věž. Tady existují tahy obou typů. Vrstvami můžeme otáčet kdykoliv, navíc můžeme ještě posunout kuličku na sousední prázdné místo ve stejném sloupci.

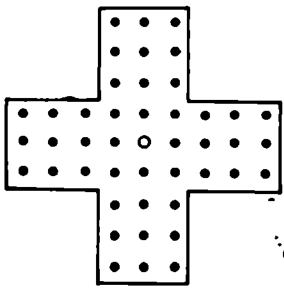
Hry, u kterých je možnost provádět určité tahy nějakým způsobem omezena, budeme nazývat *neúplné hry*. Patnáctka a babylónská věž jsou jediné příklady neúplných her, které budeme v této knize studovat. Jejich neúplnost je způsobena prázdnými místy, dírami, na které můžeme jiné prvky posunovat. Existují také neúplné hry, které žádné díry neobsahují, možnost provádět určité tahy v některých pozicích je omezena jiným způsobem.

Na Rubikově krychli, čtyřstěnu, dominu, dvanáctistěnu, krychlích $2 \times 2 \times 2$, $4 \times 4 \times 4$ a na dalších hrách můžeme v každé pozici udělat libovolný z možných tahů, pro postupné provádění tahů neexistují žádná omezení. Takovým hrám budeme říkat *úplné hry*. S výjimkou druhé kapitoly se budeme zabývat téměř výhradně úplnými hrami. Poznatky z těchto her půjde ale aplikovat i na obě neúplné hry, patnáctku a babylónskou věž.

Ještě na jednu vlastnost tahů upozorníme. Na každé hře můžeme libovolný tah vrátit. Nebo jinak řečeno, ke každému tahu existuje *tah inverzní*. Otočíme-li na Rubikově krychli vrstvou b, tj. uděláme-li tah B, pak zpět do původní pozice se vrátíme tahem B^{-1}, otočením téže vrstvy vlevo. Podobně ke každému jinému otočení vpravo X je inverzní tah X^{-1}. Otočíme-li napřed vlevo, uděláme-li nějaký tah X^{-1}, vrátíme vše zpět tahem X, k tahu X^{-1} je tedy inverzní tah X.

Na každé hračce budeme inverzní tah k tahu X označovat symbolem X^{-1}. To je v souladu s předchozím označením, k otočení vpravo je inverzní otočení vlevo. A protože k otočení vlevo je inverzní otočení vpravo, platí $(X^{-1})^{-1} = X$ pro každý tah na libovolném hlavolamu.

Existenci inverzních tahů na hlavolamech budeme zkráceně nazývat *vlastností inverze*. Je to vlastnost víceméně samozřejmá, všechny uvedené hry ji mají. Existuje ale také poměrně rozšířená hra samotář (později poněkud nadneseně nazývaná hledač géniů), která vlastnost inverze nemá.



Obr. 1.13

Touto hrou se nebudeme vůbec zabývat. Vyžaduje naprosto jiný přístup než hry s vlastností inverze. Z té okamžitě plyne existence inverzních postupů, a inverzní postupy budeme při řešení hlavolamů používat neustále.

1.7. Postupy. Kouzlo Rubikovy krychle a všech dalších úplných her spočívá v ničím neomezené možnosti provádět jednotlivé tahy po sobě v libovolném pořadí, vytvářet z nich postupy. Každou posloupnost tahů budeme nazývat *postup*. Tak například $P = BF^{-1}DAC^{-1}BBE$ je postup na Rubikově krychli. Posloupnost $Q = AC^{-1}BBBCA^{-1}A^{-1}C$ může být postupem na Rubikově krychli, dominu i kouli. Každá posloupnost tahů na úplné hře odpovídá postupu, který můžeme skutečně realizovat.

Hlavním důsledkem úplnosti hry je skutečnost, že můžeme postupy skládat, provádět po sobě. Složením uvedených postupů P a Q je postup $PQ = BF^{-1}DAC^{-1}BBE\,AC^{-1}BBBCA^{-1}A^{-1}C$. Složený postup závisí na pořadí, v němž P a Q provádíme, složíme-li je v opačném pořadí, dostaneme obvykle postup zcela jiný. Tato volnost ve skládání postupů je velice důležitá vlastnost úplných her. U neúplných her ji nemáme. Například u patnáctky můžeme dva postupy P a Q složit, provést po sobě, pouze tehdy, jestliže „navazují", prázdné místo musí být po skončení postupu P na stejném místě, na jakém je při zahájení postupu Q. V jiných případech není možné po skončení postupu P postupem Q pokračovat.

Vlastnost inverze má jiný důležitý důsledek — každý postup lze vrátit, ke každému existuje *postup inverzní*. Postup P vrátíme tak, že provádíme inverzní tahy k tahům postupu P v opačném pořadí. K postupu $P = ABCA^{-1}$ je inverzní postup $AC^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Inverzní postup k P budeme označovat symbolem P^{-1}. A protože platí pro každý tah $(X^{-1})^{-1} = X$, platí také vždy $(P^{-1})^{-1} = P$. Zopakujme si ještě jednou: k postupu P dostaneme inverzní postup P^{-1} tak, že nahradíme každý tah postupu P tahem inverzním a provedeme je v opačném pořadí. Ověřte si to na dalších příkladech postupů na Rubikově krychli.

U inverzních postupů se ještě chvilku zdržíme.

Mohlo by se zdát, že k postupu $P = A$ na Rubikově krychli existuje kromě $P^{-1} = A^{-1}$ ještě další inverzní postup, a to $Q = AAA$. Čtyřnásobným otočením jedné vrstvy ve stejném směru přece také vrátíme krychli zpět do původní pozice. Tady je třeba zdůraznit, že postup $Q = AAA$ není inverzní k postupu $P = A$, je to jenom jeden z mnoha dalších postupů, které dělají totéž, co postup $P^{-1} = A^{-1}$. Na rozdíl od postupu P^{-1} při něm využíváme konkrétní vlastnosti Rubikovy krychle, v tomto případě toho, že stěny na krychli jsou čtvercové. Na čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu nevrátí postup Q po P hru do původní pozice. Zato postupem P^{-1} vrátíme po postupu P do původní pozice jakoukoliv hru. Postup P^{-1} na konkrétních vlastnostech hry vůbec nezávisí.

Všimněme si ještě jednoho důležitého rysu inverzních postupů. Známe-li postup P, nemusíme o inverzním postupu P^{-1} vůbec přemýšlet. Stačí zcela mechanicky nahradit každý tah postupu P tahem inverzním a udělat je v opačném pořadí. Jednoduchost určení inverzního postupu ke známému postupu P je velice užitečná při řešení konkrétních hlavolamů. Nad každým jiným postupem Q, který udělá totéž co P^{-1}, musíme aspoň trochu přemýšlet a využít při něm konkrétních vlastností hry. Je-li možné použít Q na jednom hlavolamu, nemusí být použitelný na jiném.

Závěrem této části o úplných hrách ještě označíme jeden zvláštní postup. Je to postup nulový, neutrální, postup, kterým nic neděláme, ničím jsme neotočili ani nic neposunuli. Takový postup budeme označovat N.

Cvičení 1.1. Najděte inverzní postupy k následujícím postupům: $ABCA^{-1}$, $BD^{-1}B^{-1}D$, N, $ABB^{-1}A^{-1}$, $ABCDEF$.

Speciální postupy u neúplných her. Na neúplných hlavolamech nemůžeme postupy libovolně skládat. Při zkoumání těchto her proto nebudeme používat všechny postupy, ale pouze některé — *speciální*. U patnáctky bude speciální postup takový, který začíná a končí prázdným místem v pravém dolním rohu, tam, kde má být prázdné místo také ve správné pozici 1.11. Každé dva speciální postupy můžeme potom složit a inverzní postup ke speciálnímu postupu je rovněž speciální. Speciální postupy mají tedy, pokud jde o skládání, stejné vlastnosti jako všechny možné postupy na úplných hlavolamech.

Na babylónské věži budeme za speciální považovat postupy, které začínají a končí v pozicích, v nichž jsou obě „díry" ve spodní části věže prázdné, není v nich žádná kulička. Také tady můžeme speciální postupy libovolně skládat a inverzní postupy ke speciálním jsou opět speciální.

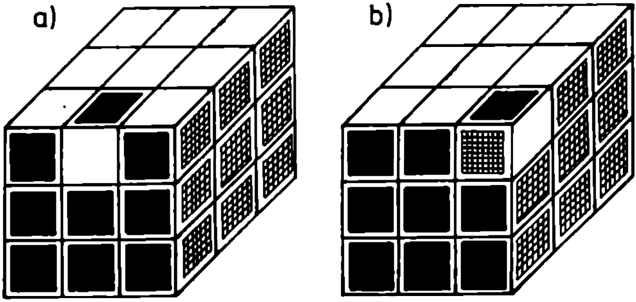
1.8. Vztah mezi postupy a pozicemi. Správnou pozici na Rubikově krychli budeme považovat za základní. Ve správné pozici je pro každou rohovou a hranovou kostičku jednoznačně určeno správné místo (a také správná orientace) — více se tomu budeme věnovat ve třetí kapitole. Také na čtyřstěnu a dvanáctistěnu je při normálním obarvení ve správné pozici jediné správné místo (a orientace) pro každý pohyblivý prvek. Správné pozice budeme opět považovat za základní. Podobnou vlastnost má domino. Jiné je to na uších. Ve správné pozici 1.9. může být každá kulička na místě libovolné jiné kuličky stejné barvy. Žádná nemá pouze jedno správné místo. Je to způsobeno tím, že vždy několik kuliček má stejnou barvu a nemůžeme je nijak rozlišit. To usnadňuje řešení, při teoretickém zkoumání ale budeme dávat přednost situaci, kdy každý pohyblivý prvek má v základní pozici jediné správné místo. Až to bude potřeba, označíme jednotlivé kuličky čísly od 1 do 22 a zvolíme opět jednu pozici, kterou budeme považovat za základní.

Na každém hlavolamu tedy vybereme nějakou základní pozici. Základní pozici budeme vždy označovat symbolem n. Vždy to bude správná, nebo jedna ze správných pozic, do kterých chceme hračku složit. A vždy to uděláme tak, aby měl každý prvek v základní pozici jednoznačně určené správné místo. Každý postup P udělá ze základní pozice nějakou jinou pozici p, budeme to zapisovat $PU = p$. Pozice u jednotlivých hraček mohou být značně složité a různé, a stejně složité je pochopit, jakou pozici nějaký postup udělá. Postupně se naučíme pozice zapisovat a naučíme se také nacházet postupy, které v pozicích udělají určité malé změny.

Pouze s neutrálním postupem N žádné problémy nejsou. Postupem N nic neuděláme, základní pozice se nezmění, platí proto $NU = n$.

1.9. Řešitelné a neřešitelné pozice. Zdaleka ne všechny pozice na Rubikově krychli můžeme nějakým postupem převést do správné základní pozice n. Na obrázku 1.14. jsou dvě typické neřešitelné pozice, v jednom případě jsou všechny kostičky na správných místech, i ty neviditelné, a pouze jedna hranová je špatně orientovaná, ve druhém případě je špatně orientovaná pouze jedna rohová kostička. Zdůvodnit neřešitelnost těchto pozic není zcela jednoduché, uděláme to až v páté kapitole.

Každá pozice p, kterou uděláme ze základní n nějakým postupem P, je řešitelná. Pokračujeme-li po postupu P inverzním postupem P^{-1}, vrátíme krychli z pozice



Obr. 1.14

p zpět do pozice základní. Pozici $p = PU$ tedy složíme, převedeme do základní pozice postupem P^{-1}. Platí také naopak, že každou řešitelnou pozici q můžeme udělat ze základní pozice n nějakým postupem. Složíme-li pozici q postupem Q a pokračujeme-li dále inverzním postupem Q^{-1}, dostaneme zpět původní pozici q. Po postupu Q je krychle v základní pozici n, platí tedy $(Q^{-1})\ U = q$. Zcela stejně můžeme uvažovat také o ostatních hlavolamech. Dostáváme tak následující jednoduché, ale důležité pravidlo.

> Řešitelné jsou přesně ty pozice, které můžeme udělat nějakým postupem z pozice základní.

Neřešitelné pozice takto udělat nemůžeme; abychom je dostali, musíme hračku rozebrat.

Neřešitelnost pozic na obrázku 1.14. má důležité důsledky: v žádné pozici neexistuje postup, kterým by bylo možné pootočit pouze jednu rohovou nebo jednu hranovou kostičku, a ostatní ponechat na původních místech a s původní orientací. Kdyby takové postupy existovaly, mohli bychom je použít také na pozice z obr. 1.14., pootočili bychom právě tu jednu špatně orientovanou kostičku, a pozice by byly rázem složené. Při skládání krychle proto nemůžeme postupovat tak, že správné orientace jednotlivých kostiček děláme „po jedné", musíme vždy měnit orientace aspoň dvou současně. Stejné vlastnosti má i většina ostatních hlavolamů. Pochopit, které pozice jsou řešitelné a které nikoliv, je důležité k tomu, abychom volili správné metody skládání hraček, a nepokoušeli se o nemožné.

Umět řešit hlavolam znamená nejenom umět každou řešitelnou pozici převést nějakým postupem do pozice základní, ale navíc také umět poznat neřešitelné pozice a vysvětlit, proč neřešitelné jsou. Bez této druhé schopnosti bychom mohli bezvýsledně trávit čas v pokusech řešit něco, co se vyřešit nedá.

Pozice budeme zkoumat v dalších kapitolách, nyní se vrátíme zpět k postupům a probereme některé méně zřejmé vlastnosti.

***1.10. Redukované postupy.** Různé postupy mohou vést ke stejným pozicím. Tak například v postupu $P = BAA^{-1}C$ je dvojice tahů AA^{-1} zbytečná, stejnou pozici uděláme také postupem $\overline{P} = BC$. Platí to nejen na krychli, ale i na dvanáctistěnu, kouli, čtyřstěnu, dominu a na všech ostatních hlavolamech s vlastností inverze. Naproti tomu dvojice postupů $R = A$ a $S = AAAAA$ vede k téže pozici pouze na Rubikově krychli, nikoliv však na čtyřstěnu, kouli nebo dvanáctistěnu.

V tomto odstavci budeme zkoumat, které dvojice postupů vedou ke stejné pozici vždy, bez ohledu na konkrétní vlastnosti hry. Výchozím bodem je vlastnost inverze, která zajišťuje možnost vrátit libovolný tah.

Složením XX^{-1} nebo $X^{-1}X$ dvojice inverzních tahů v libovolném pořadí vrátíme vždy hru do předchozí pozice, nezměníme nic. Vynecháme-li tedy v nějakém postupu dvojici sousedních inverzních tahů, změníme sice postup, ale takto změněný postup povede ke stejné pozici jako ten původní. Každý postup můžeme redukovat postupným vynecháváním sousedních dvojic tahů XX^{-1} nebo $X^{-1}X$. Tak například redukcí postupu $P = ABCC^{-1}B^{-1}CA^{-1}ABA^{-1}$ dostáváme postupy $ABB^{-1}CA^{-1}ABA^{-1}$, $ACA^{-1}ABA^{-1}$ a $ACBA^{-1}$. Poslední postup je už redukovaný, žádný tah v něm bezprostředně nevracíme, žádné dva po sobě jdoucí tahy nejsou tvaru XX^{-1} nebo $X^{-1}X$.

Cvičení 1.2. Které z následujících postupů jsou redukované? $BCC^{-1}D$, $ABA^{-1}B^{-1}$, N, $ABCDC^{-1}B^{-1}A^{-1}$, $ABCC^{-1}A^{-1}$.

Cvičení 1.3. Redukujte tyto postupy:
$BD^{-1}DAC^{-1}CA^{-1}$, $AFAA^{-1}F^{-1}B^{-1}BCC^{-1}A^{-1}$, N, ABC, $CE^{-1}EFF^{-1}C^{-1}CA^{-1}AD^{-1}DC^{-1}C$.

Dvojice sousedních inverzních tahů při redukování nějakého postupu vybíráme libovolně, některé takové dvojice vzniknou až po vynechání řady jiných, a není na první pohled zřejmé, že různým výběrem těchto dvojic dostaneme vždy stejný redukovaný postup. Na následujících řádcích dokážeme, že tomu tak opravdu je.

Levá redukce. Nejdříve popíšeme jednu speciální metodu vynechávání dvojic XX^{-1} nebo $X^{-1}X$. V postupu P najdeme první dvojici zleva sousedních inverzních tahů a vynecháme ji. Dostaneme jiný postup, v něm opět najdeme první dvojici zleva sousedních inverzních tahů a vynecháme ji, a to stále opakujeme, až dostaneme redukovaný postup, v němž žádné dva sousední tahy už nejsou navzájem inverzní. Tento postup označíme $\overline{P}$ a budeme mu říkat *levá redukce* postupu P. Například při redukci postupu

$$P = ABC^{-1}DD^{-1}CB^{-1}CA^{-1}ABB^{-1}C^{-1}D^{-1}$$

touto metodou dostáváme postupy

$$ABC^{-1}CB^{-1}CA^{-1}ABB^{-1}C^{-1}D^{-1},$$

$$ABB^{-1}CA^{-1}ABB^{-1}C^{-1}D^{-1},\ ACA^{-1}ABB^{-1}C^{-1}D^{-1},$$

$$ACBB^{-1}C^{-1}D^{-1},\ ACC^{-1}D^{-1},\ AD^{-1}.$$

Platí tedy
$$\overline{P} = AD^{-1}.$$

Tímto způsobem najdeme současně levé redukce všech postupů Q, které dostáváme z P jako částečné mezivýsledky. Pro každý takový postup Q proto platí $\overline{Q} = \overline{P}$.

Odvodíme ještě několik dalších pravidel levé redukce. Předpokládejme, že postup P je složením postupů R a S, tj. $P = RS$. Redukujeme-li popsanou metodou postup P, redukujeme zpočátku postup R a teprve po nalezení jeho levé redukce $\overline{R}$ vynecháváme dvojice, které obsahují aspoň jeden tah patřící do S. Jeden z mezivýsledků se tedy rovná $\overline{R}S$. Z poslední věty předchozího odstavce víme, že levá redukce postupu $\overline{R}S$ se rovná levé redukci celého postupu $P = RS$, platí proto $\overline{\overline{R}S} = \overline{RS}$.

Jak se liší levé redukce postupů P a PXX^{-1}? Jeden z mezivýsledků se rovná $\overline{P}XX^{-1}$. Je-li poslední tah postupu $\overline{P}$ různý od X^{-1}, můžeme už vynechat v $\overline{P}XX^{-1}$ pouze dva poslední tahy, platí proto $\overline{PXX^{-1}} = \overline{\overline{P}XX^{-1}} = \overline{P}$. Je-li poslední tah $\overline{P}$ roven X^{-1}, musíme při redukci $\overline{P}XX^{-1}$ vynechat dvojici $X^{-1}X$. Na konci ale zůstane další X^{-1}, dostaneme tedy opět postup $\overline{P}$. Vždy proto platí $\overline{PXX^{-1}} = \overline{P}$, a podobně také $\overline{PX^{-1}X} = \overline{P}$.

Je-li P redukovaný postup, nejsou žádné dva sousední tahy navzájem inverzní, žádnou dvojici tahů nemůžeme vypustit, proto je $\overline{P} = P$.

Vezměme si nyní libovolný postup P a v něm nějakou dvojici sousedních inverzních tahů XX^{-1}. Postup P rozdělíme na postup Q před dvojicí XX^{-1}, dvojici XX^{-1} a na postup R po XX^{-1}, tj. $P = QXX^{-1}R$. Pomocí už odvozených pravidel levé redukce dostáváme $\overline{P} = \overline{(\overline{QXX^{-1}})\,R} = \overline{(\overline{Q})\,R} = \overline{\overline{Q}R} = \overline{QR}$, což znamená, že levá redukce postupu P se rovná levé redukci postupu QR, který dostaneme z P vynecháním libovolné dvojice sousedních tahů XX^{-1}. Vynecháním jiné dvojice než první zleva jsme tedy nic nezkazili.

Redukujeme-li postup P libovolně, dostáváme postupy $P = Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, a každý postup Q_i vznikne vynecháním nějaké dvojice sousedních inverzních tahů z Q_{i-1}. Podle poslední dokázané vlastnosti levé redukce platí $\overline{Q_i} = \overline{Q_{i-1}}$, levé redukce všech postupů Q_i se proto rovnají. Platí tedy také $\overline{P} = \overline{Q_k}$. Postup Q_k je ale redukovaný, tj. $\overline{P} = \overline{Q_k} = Q_k$. Libovolnou redukcí postupu P dostaneme zase jednom levou redukci $\overline{P}$. Tím jsme dokázali jednoznačnost redukce postupů.

> Postupným vynecháváním sousedních dvojic inverzních tahů z postupu P dostaneme vždy stejný redukovaný postup $\overline{P}$.

Ke každému postupu P nyní umíme najít jeho redukci $\overline{P}$ a tímto redukovaným postupem uděláme vždy stejnou pozici jako postupem P. Platí to pro každou hru. Dva postupy P a Q, jejichž redukce $\overline{P}$ a $\overline{Q}$ se rovnají, proto také udělají stejné pozice.

Inverzní postup P^{-1} k redukovanému postupu P je rovněž redukovaný. Nemůže obsahovat dva sousední inverzní tahy, protože ani P je neobsahuje. Také neutrální postup N je redukovaný. Naproti tomu složení dvou postupů P a Q nemusí být redukovaný postup ani za předpokladu, že P a Q redukované jsou, jak se snadno přesvědčíme na příkladu $P = AB$, $Q = B^{-1}C$. Můžeme ale najít redukci $\overline{PQ}$ jejich složení, která už samozřejmě redukovaná je. Postupu $\overline{PQ}$ budeme říkat *redukované* složení postupů P a Q a budeme jej označovat $P \circ Q$, abychom jej odlišili od obyčejného složení PQ.

Cvičení 1.4. Najděte složení PQ a redukované složení $P \circ Q$ následujících dvojic postupů:

$P = ABC$	$Q = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$
$P = ABC$	$Q = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
$P = ABB^{-1}CF^{-1}$	$Q = FA^{-1}B^{-1}C$
$P = ABB^{-1}A^{-1}$	$Q = N$
$P = CF^{-1}HB^{-1}BAC^{-1}$	$Q = CA^{-1}D^{-1}DH^{-1}F.$

Druhá kapitola

PATNÁCTKA — NEŘEŠITELNÉ POZICE

2.1. Reklamní pozice. V dalších kapitolách budeme studovat pozice na nejrůznějších hlavolamech, naučíme se poznávat neřešitelné pozice, vyhledávat postupy ke skládání řešitelných pozic, chápat souvislosti mezi hračkami a používat podobé triky při řešení různých hlavolamů. Začneme tou nejjednodušší hrou — patnáctkou. To je sice hra neúplná, na rozdíl od většiny ostatních, pokud jde ale o pozice, nejsou rozdíly tak podstatné. Metody, které se naučíme používat v této kapitole, budou jen s drobnými úpravami použitelné i u ostatních hlavolamů. Pozice budeme studovat pomocí grafů, proto je důležité zvládnout dobře úvahy z této kapitoly, zejména odstavce 2.3.—2.11.

Stejně jako na Rubikově krychli, také na patnáctce existují neřešitelné pozice. Jedna z mnoha je na obrázku 2.1.

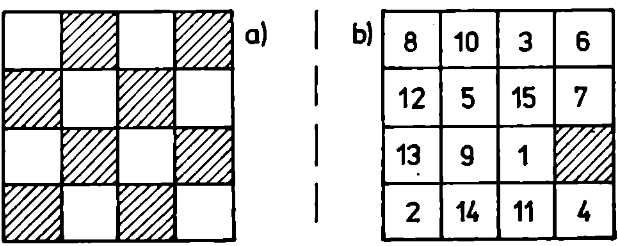
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Obr. 2.1

Neřešitelnost této pozice byla dokonce základem reklamního triku — za její složení byla vypsána odměna 10 000 dolarů. Obchodníci, kteří se snažili zvýšit zájem o hračku tímto způsobem, se nemuseli obávat ani o jediný dolar. Pozice je neřešitelná, žádný postup, který by ji převedl při zachování všech pravidel do pozice základní, neexistuje.

Jak dokážeme neřešitelnost nějaké pozice? Ukážeme, že nemůžeme dostat správnou pozici ani po sudém, ani po lichém počtu tahů.

2.2. **Trik se šachovnicí.** Jednodušší je ukázat neřešitelnost reklamní pozice z obrázku 2.1. lichým počtem tahů. Na dno krabičky namalujeme šachovnici 4 × 4 jako na obrázku 2.2.a.



Obr. 2.2

Prázdné místo má nyní v jakékoliv pozici svoji barvu — bílou nebo černou. Barva prázdného pole se po každém tahu změní, každé pole sousedí pouze s políčky opačné barvy. V pozici 2.2.b je prázdné místo černé, po prvním tahu bude bílé, po druhém znovu černé, atd. Odtud ihned plyne *černobílé pravidlo.*

Po sudém počtu tahů bude mít prázdné místo vždy stejnou barvu jako na počátku, po lichém bude mít barvu opačnou.

Prázdné místo v základní pozici má barvu bílou. Má-li nějaká jiná pozice prázdné místo také bílé, můžeme z ní dostat základní pozici jen po sudém počtu tahů, nikdy po lichém. Můžeme také říci, že bílá pole jsou sudá. Naopak černá prázdná políčka jsou lichá, můžeme je přesunout do pravého dolního rohu jenom lichým počtem tahů. Na obrázku 2.2.b je prázdné místo liché.

Reklamní pozice má prázdné místo sudé, nemůžeme ji proto nikdy složit po lichém počtu tahů; pokud to vůbec nějak jde, musí to být sudým počtem tahů.

2.3. Zápis pozice pomocí tabulky. Abychom vyloučili i tuto zbývající možnost, budeme podrobněji zkoumat jednotlivé pozice. Především se je naučíme zapisovat a graficky znázorňovat. Jak se liší například pozice na obrázku 2.2.b od základní pozice 1.11.? Číslo 1 je na místě, na němž má být v základní pozici číslo 11, číslo 2 je na místě čísla 13, číslo 3 je na místě čísla 3, je na správném místě. Číslo 4 je na místě, které má být prázdné. Označíme-li si prázdné místo číslem 16, můžeme zachovat dosavadní styl popisu a napsat, že číslo 4 je na místě čísla 16. Dále pokračujeme: číslo 5 je na místě čísla 6, číslo 6 je na místě čísla 4 atd. Závěrem určíme polohu prázdného místa, číslo 16 je na místě čísla 12.

Tabulka pozice. V uvedeném popisu se mnoho slov zbytečně opakuje, celou pozici můžeme úsporněji zapsat ve tvaru dvouřádkové tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16 \\ 11, & 13, & 3, & 16, & 6, & 4, & 8, & 1, & 10, & 2, & 15, & 5, & 9, & 14, & 7, & 12 \end{pmatrix}.$$

Smysl tabulky je jasný, číslo i je na místě čísla j, právě když je pod i v tabulce ve spodním řádku číslo j.

Všimněte si, že každé z čísel $1, 2, 3, \ldots, 16$ se v tabulce vyskytuje právě jednou v horním řádku a právě jednou v řádku dolním. Důvod je zřejmý: v pozici je každé číslo (a prázdné místo) právě jednou — horní řádek — a na každém místě se vyskytuje právě jedno číslo (prázdné místo má číslo 16) — dolní řádek. Uvedené vlastnosti nejsou žádnou specialitou pozice z obrázku 2.2.b, má je každá pozice u patnáctky.

Máme-li naopak nějakou tabulku s uvedenými vlastnostmi, můžeme podle ní naskládat čísla do krabičky a dostat pozici, jejímž zápisem tato tabulka je. Tak například tabulce

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16 \\ 7, & 10, & 2, & 13, & 8, & 1, & 9, & 15, & 16, & 3, & 5, & 11, & 12, & 14, & 4, & 6 \end{pmatrix}$$

odpovídá pozice na obrázku 2.3. Poloha každého čísla je určena druhým řádkem tabulky, číslo 1 je na místě čísla 7, číslo 2 je na místě čísla 10 atd.

6	3	10	15
11		1	5
7	2	12	13
4	14	8	9

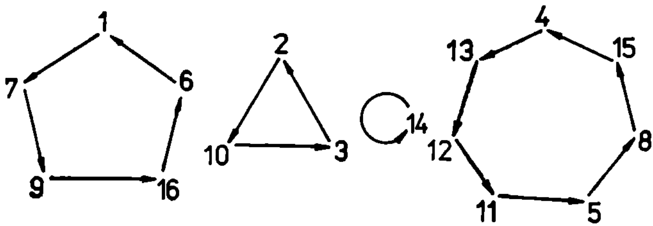
Obr. 2.3

Cvičení 2.1. a) Jak vypadá tabulka reklamní pozice? b) Nakreslete pozici, jejíž tabulka je

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16 \\ 7, & 16, & 2, & 5, & 8, & 11, & 1, & 6, & 15, & 13, & 3, & 10, & 4, & 14, & 12, & 9 \end{pmatrix}.$$

2.4. Graf pozice. Některé pozice jsou hodně, jiné méně rozházené. Například reklamní pozice je málo rozházená, na nesprávných místech jsou pouze čísla 14 a 15. Naproti tomu pozice na obrázku 2.3. je rozházená podstatně více. Jak moc je nějaká pozice vzdálená od pozice základní, můžeme odhadnout přímo nebo pomocí tabulky. Další možností je nakreslit si *graf pozice*. Jak nakreslíme graf pozice na obrázku 2.3.?

Číslo 1 je na místě čísla 7; nakreslíme v rovině bod, který označíme 1, a z něho uděláme šipku do bodu označeného 7. Číslo 7 je na místě čísla 9, pokračujeme proto z bodu 7 další šipkou do nového bodu, který označíme 9. Dále, číslo 9 je na místě 16, nakreslíme tedy šipku z 9 do bodu 16. Další šipka vede z bodu 16 do bodu 6 a z 6 zpět do bodu 1. Z bodu 1 už šipka udávající polohu čísla 1 v pozici 2.3. vede. Zvolíme další číslo, které se zatím v našem grafu nevyskytuje, například 2, a pokračujeme. Z bodu 2 vede šipka do bodu 10, z 10 do 3 a z bodu 3 zpět do bodu 2. Stále jsme ještě neprobrali



Obr. 2.4

všechna čísla. Vezmeme číslo 4, z něho vede šipka do 13, atd. Nakonec zbývá už jenom číslo 14, které je na správném místě, v grafu to vyznačíme šipkou, která vede z bodu 14 zpět do 14. Na obrázku 2.4. je nakreslený celý graf.

Tento graf zcela nahradí tabulku ze závěru předchozího odstavce. Z bodu i vede šipka do bodu j, právě když je v tabulce pod číslem i číslo j. Z grafu nějaké pozice můžeme tedy zrekonstruovat zpět tabulku této pozice a tím i pozici samotnou. Místo pozic můžeme proto zkoumat jejich grafy.

Cvičení 2.2. a) Jak vypadá graf základní a reklamní pozice?
b) Nakreslete graf pozice, jejíž tabulka je ve cvičení 2.1.b.

Jaké grafy odpovídají pozicím? Především musí mít šestnáct bodů. Z každého bodu musí vycházet jedna šipka, neboť každé číslo se ve hře vyskytuje právě jednou. Také do každého bodu vede jedna šipka, na každém místě je právě jedno číslo.

2.5. Cykly. Vztah mezi tabulkou a grafem pozice je bezprostřední, jedno z druhého můžeme snadno odvodit. Přesto má graf oproti tabulce nebo pozici samotné jednu velkou přednost. Na první pohled vidíme, že je tvořen několika *cykly*. To je důsledkem faktu, že z každého bodu a do každého bodu vede právě jedna šipka. Zvolíme-li nějaký bod, můžeme z něho pokračovat ve směru šipek tak dlouho, dokud se nevrátíme zpět. Z grafu také ihned zjistíme, kolik má cyklů a jaké jsou jejich délky. Tak například graf na obrázku 2.4. má čtyři cykly, nejdelší má délku 7, další dva mají délky 5 a 3 a zbývající má délku 1.

Každá pozice je jednoznačně popsána svým grafem, můžeme proto mluvit o počtu a délkách cyklů v pozici podle toho, kolik cyklů a jak dlouhých má její graf. Základní pozice má tedy šestnáct cyklů délky 1, reklamní pozice má čtrnáct cyklů délky 1 a jeden cyklus délky 2 tvořený čísly 14 a 15, atd.

Počet cyklů a jejich délky jsou důležité charakteristiky pozic u všech hraček, a proto ze všech možných popisů pozic (obrázkem, tabulkou, grafem) budeme používat především grafy, které roli cyklů nejvíce zdůrazňují.

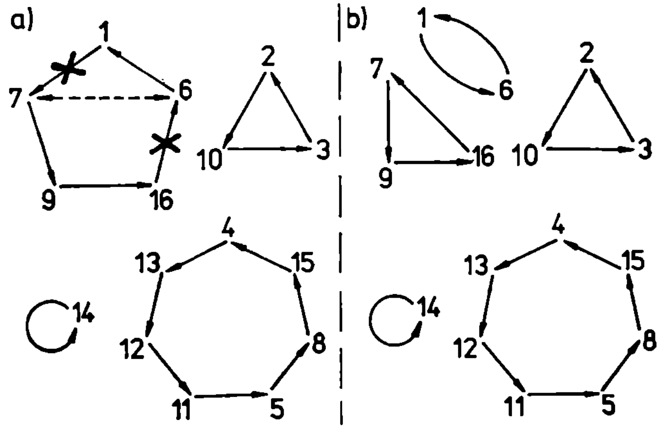
Cvičení 2.3. Vysvětlete, proč je součet délek všech cyklů v každé pozici šestnáct.

Cvičení 2.4. Kolik cyklů má pozice ze cvičení 2.1.b a jaké jsou jejich délky?

2.6. Jak se změní pozice po jednom tahu. Vraťme se opět k pozici na obrázku 2.3., jejíž graf je na obrázku 2.4. V této pozici můžeme udělat čtyři tahy, posunout na prázdné místo jakékoliv z čísel 1, 2, 3 a 11.

Jaký bude graf nové pozice, posuneme-li například číslo 1? Můžeme jej nakreslit podle nové pozice, nás však bude více zajímat, jak jej dostat přímo z grafu pozice původní. Číslo 1 bylo původně na místě 7, nyní bude tam, kde bylo prázdné místo, tedy na místě čísla 6. Prázdné místo se naopak z políčka 6 přesune na místo 7. Všechna ostatní čísla zůstanou na původních místech. Jakkoliv se posunuje číslo 1, podstatné je především to, že se tah odehrává na místech 6 a 7, a nikde jinde. Kde se tah odehrává, můžeme vyznačit v grafu pozice pomocnými čárkovanými šipkami, které jdou mezi místy, na nichž se čísla posunují — obrázek 2.5.a.

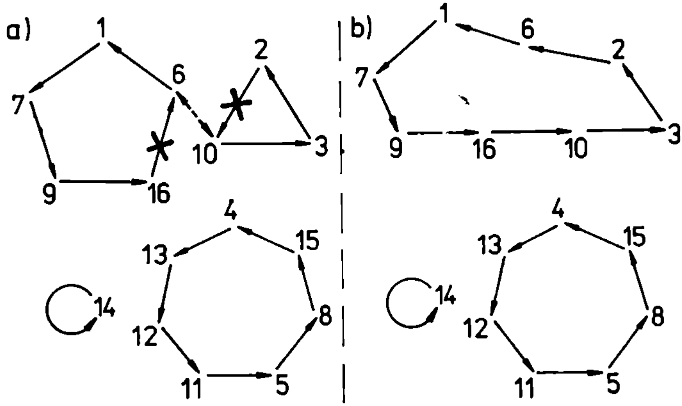
Nyní můžeme stanovit, jak dostat graf nové pozice přímo z grafu původního. Všechna čísla, která nejsou na místech, mezi nimiž vedou čárkované šipky, zůstanou, kde byla. Změní se pouze šipky vedoucí do 7 a 6. Do 7 povede šipka, která původně vedla do 6, a do 6 povede šipka, která původně vedla do 7. Můžeme také říci, že koncové body šipek vedoucích do 6 a 7 se zamění podle čárkovaných šipek. Nový graf je na obrázku 2.5.b.



Obr. 2.5

Podobně najdeme graf nové pozice, posuneme-li na prázdné místo číslo 2, nikoliv 1. Nyní přehazujeme čísla na místech, na nichž má být 6 a 10, čárkované šipky povedou tedy mezi 6 a 10 — obrázek 2.6.a. Graf nové pozice je potom na obrázku 2.6.b.

Obecně můžeme konstrukci nového grafu z grafu pozice původní shrnout takto. Mezi dvěma body odpovídajícími místům, na nichž se tah odehrává, uděláme v původním grafu pomocné čárkované šipky. Graf nové pozice dostaneme tak, že zaměníme koncové body šipek



Obr. 2.6

vedoucích do těchto dvou bodů. Ostatní šipky zůstávají beze změny.

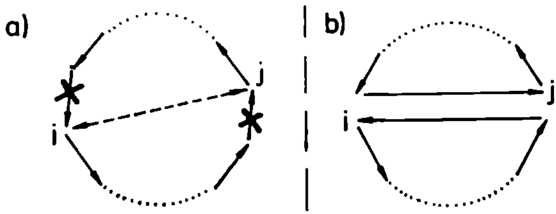
Cvičení 2.5. Nakreslete grafy všech tří možných pozic, které dostaneme po jednom tahu z pozice cvičení 2.1.b.

***Cvičení 2.6.** Jaké podmínky musí splňovat dvojice pomocných čárkovaných šipek v grafu nějaké pozice, aby odpovídala povolenému tahu?

2.7. Jak se změní počet cyklů po jednom tahu. Čárkované šipky v grafu původní pozice jednoznačně určují nový graf. Mohou vést buď mezi dvěma body ve stejném cyklu — jako na obrázku 2.5.a, nebo mezi body v různých cyklech — jako na obrázku 2.6.a.

Oba body ve stejném cyklu. Pozice na obrázku 2.5.a má čtyři cykly, po provedení naznačeného tahu dostaneme pozici 2.5.b, která má pět cyklů. To není náhoda.

Jestliže tah vede mezi dvěma body v témže cyklu, zvětší se celkový počet cyklů vždy o jeden. Dokážeme si to pomocí obrázku 2:7.



Obr. 2.7

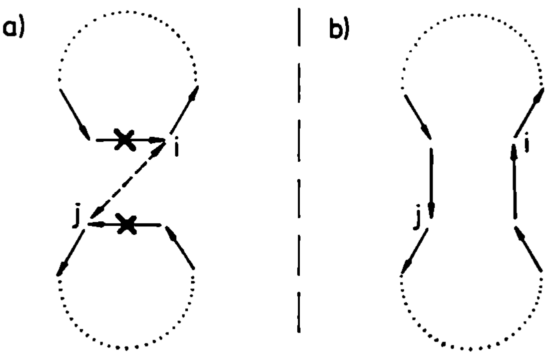
Uvažujme jeden z cyklů v nějaké pozici a v něm dva libovolné body i, j. Čárkované šipky mezi i a j označují, že tah děláme na dvou místech ve stejném cyklu. Jak bude vypadat graf nové pozice? Záměnou koncových bodů šipek do i a j se tento cyklus rozpadne do dvou menších cyklů, v jednom z nich bude i a ve druhém j — obrázek 2.7.b. Ostatní cykly zůstanou beze změny, jejich celkový počet se tedy zvětší o jeden.

Body v různých cyklech. Zcela stejně si ukážeme, že počet cyklů se zmenší o jeden, vedou-li čárkované šipky mezi body v různých cyklech (jako na obrázku 2.6.). Budeme opět předpokládat, že tah vede mezi dvěma body i, j a že tyto body leží tentokrát v různých cyklech.

Na obrázku 2.8.a jsou z celé pozice nakresleny pouze tyto dva cykly. V novém grafu šipka, která původně vedla do i, povede do j, a šipka, která vedla do j, povede do i, Oba cykly se tak propojí do jednoho velkého — obrázek 2.8.b. Ostatní cykly se opět nezmění, nová pozice bude mít o jeden cyklus méně.

Tím jsme si dokázali důležité *pravidlo o počtu cyklů* v pozici.

Celkový počet cyklů v pozici se po jednom tahu změní o jeden. Vede-li tah mezi body v témže cyklu, počet cyklů se zvětší, vede-li mezi body v různých cyklech, počet se zmenší.



Obr. 2.8

2.8. Sudé a liché pozice. Ukážeme si jeden důsledek tohoto pravidla. Každým tahem se počet cyklů v libovolné pozici změní o jeden. Uděláme-li více tahů, po každém z nich se rozdíl mezi počtem cyklů v počáteční a koncové pozici změní o jeden, střídavě se tedy mění ze sudého na lichý a naopak. Po jednom tahu bude tento rozdíl vždy lichý (rovný jedné), po dvou tazích vždy sudý, po třech lichý atd.

Po sudém počtu tahů bude rozdíl mezi počtem cyklů v počáteční a koncové pozici vždy sudý, po lichém počtu tahů vždy lichý.

Odtud ihned vyplývá, že je-li rozdíl mezi počtem cyklů v nějakých dvou pozicích sudý, nemůžeme jednu z druhé nikdy dostat lichým počtem tahů, a je-li tento rozdíl lichý, nemůže to jít po sudém počtu tahů.

Nás především zajímá, kdy můžeme nějakou pozici převést do pozice základní. V případě, že je rozdíl mezi počtem cyklů v pozici a počtem cyklů v pozici základní (ta má šestnáct cyklů) sudý, nemůžeme ji složit lichým počtem tahů, pokud to vůbec nějak půjde, tak jedině po sudém počtu tahů. Takovým pozicím budeme proto říkat *sudé pozice*. Pozice, u nichž je tento rozdíl lichý, můžeme naopak složit jedině lichým počtem tahů, a budeme jim proto říkat *liché pozice*.

V základní pozici je šestnáct cyklů, nějaká pozice u patnáctky je tedy sudá, právě když má sudý počet cyklů. Sudost nebo lichost pozice zjistíme tedy také podle celkového počtu jejích cyklů. Musíme si ale uvědomit, že to tak vychází pouze proto, že základní pozice má sudý počet cyklů. U hraček, které mají základní pozice s lichým počtem cyklů, to vychází přesně naopak, sudé jsou pozice s lichým počtem cyklů. Taková je například varianta 3 × 5 v odstavci 2.12.

Cvičení 2.7. Které z následujících pozic jsou sudé? a) základní, b) reklamní, c) pozice ze cvičení 2.1.b.

Cvičení 2.8. Která z pozic je sudá a která lichá?

a) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13. & 14, & 15, & 16 \\ 16, & 15, & 14, & 13, & 12, & 11, & 10, & 9, & 8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 16, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \end{pmatrix}$.

2.9. Neřešitelnost reklamní pozice. V odstavci 2.2. jsme pomocí triku se šachovnicí vyloučili možnost složení reklamní pozice po lichém počtu tahů. Zbývá dosud možnost dosáhnout cíle sudým počtem tahů. Počet cyklů v reklamní pozici je 15 a liší se od počtu cyklů v základní pozici o jeden. Reklamní pozice je tedy lichá. Nepomůže nám proto ani žádný sudý počet tahů. Pozice je opravu neřešitelná.

2.10. Další neřešitelné pozice. V reklamní pozici je ve sporu lichý počet cyklů a sudé prázdné místo. Protože je pozice lichá, nemůžeme ji složit po sudém počtu tahů, a protože je prázdné místo sudé, nejde to ani po lichém. Kdykoliv jsou v nějaké pozici obě charakteristiky — počet cyklů a poloha prázdného místa — v rozporu, pozice je neřešitelná ze stejného důvodu jako pozice reklamní. Tak například obě pozice na obrázku 2.9. jsou neřešitelné. První z nich je lichá a prázdné místo má sudé, zatímco druhá je sudá, ale zkazí to zase liché prázdné místo.

a)

4	3		15
2	9	1	5
14	10	7	8
13	6	11	12

b)

2	9	7	15
14	4	6	1
8		12	5
11	13	3	6

Obr. 2.9

Našli jsme mnoho neřešitelných pozic.

> Všechny sudé pozice s lichým prázdným místem a všechny liché pozice se sudým prázdným místem jsou neřešitelné.

Zbývá rozhodnout o řešitelnosti ostatních. Ty jsou řešitelné, důkaz ale odložíme do jedné z příštích kapitol, až budeme umět několik nových triků.

> Všechny sudé pozice se sudým prázdným místem a všechny liché pozice s lichým prázdným místem jsou řešitelné.

Cvičení 2.9. Kolik cyklů mají pozice na obrázku 2.9.?

Cvičení 2.10. a) Lze převést pozici ze cvičení 2.8.a do pozice b) z téhož cvičení?
b) Mohou být obě současně řešitelné?
c) Která z nich je neřešitelná?

2.11. Počet sudých cyklů v pozici. Ukážeme si ještě jeden způsob, jak zjistit, je-li pozice sudá nebo lichá. Součet délek všech cyklů v každé pozici je šestnáct (cvičení 2.3.). Těch, které mají lichou délku, musí být proto sudý počet. Počet všech cyklů je potom sudý nebo lichý, podle toho, je-li sudý nebo lichý počet cyklů sudé délky. Z odstavce 2.8. víme, že pozice u patnáctky je sudá, právě když má sudý počet cyklů. Je tedy sudá, právě když má sudý počet cyklů sudé délky. A tak základní pozice je sudá také proto, že nemá žádný sudý cyklus, reklamní je lichá, protože má jeden sudý cyklus, atd.

Cvičení 2.11. Určete počty sudých cyklů v pozicích na obrázku 2.9. a ze cvičení 2.8.

***2.12. Jiné varianty.** Metodu, kterou jsme ukázali neřešitelnost reklamní pozice, můžeme použít u mnoha dalších variant patnáctky. Především nemusíme hrát na ploše 4×4, jde to na jakékoliv obdélníkové ploše $m \times n$. Varianty 2×2, $1 \times n$, $m \times 1$ jsou nezajímavé, nedávají žádnou možnost prohazovat čísla. Popisy všech řešitelných pozic a postupy k jejich řešení jsou snadné.

U ostatních obdélníkových variant můžeme zkoumat stejné otázky jako u patnáctky: které pozice jsou neřešitelné, a jak skládat ty řešitelné. Dosud jsme se naučili dokazovat neřešitelnost některých pozic u patnáctky, podobně ale můžeme postupovat i u dalších variant. Tak například pozici na obrázku 2.10.a — varianta 3×5 — nelze bez porušení pravidel převést do základní pozice 2.10.b.

a)

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	14	13	

b)

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	

Obr. 2.10

Důkaz je zcela stejný jako důkaz neřešitelnosti reklamní pozice.

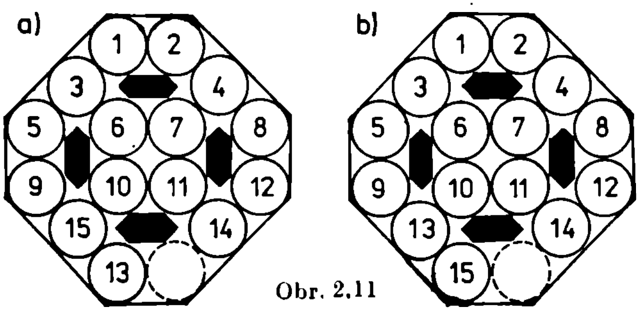
1. Pomocí šachovnicového triku ukážeme, že to nejde lichým počtem tahů — odstavec 2.2.
2. Grafy pozic, počty cyklů a jejich délky najdeme stejně jako u patnáctky — odstavce 2.4. a 2.5.
3. Po jednom tahu se počet cyklů v každé pozici změní vždy o jeden — odstavce 2.6. a 2.7.
4. Pozice na obrázku 2.10.a má čtrnáct cyklů, zatímco pozice na obrázku 2.10.b jich má patnáct. Jednu z druhé proto v důsledku bodu 3. nemůžeme dostat po sudém počtu tahů, pozice 2.10.a je neřešitelná — odstavec 2.8.

V souladu s definicí z odstavce 2.8. můžeme říct, že pozice 2.10.a je lichá — má počet cyklů, který se od počtu cyklů v základní pozici liší o liché číslo 1.

Cvičení 2.12. Dokažte, že počet cyklů v libovolné pozici varianty 3×5 se od počtu cyklů v základní pozici 2.10.a liší o sudé číslo, právě když má tato pozice sudý počet sudých cyklů, což je, právě když má lichý počet všech cyklů.

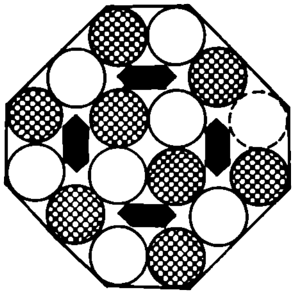
Jiná varianta patnáctky je na obrázku 2.11. Také zde můžeme posunout číslo na sousední prázdné místo.

Zajímá nás, je-li možné převést pozici a) do základní pozice b).



Obr. 2.11

Chceme-li postupovat podle bodů 1.—4., jsme chvíli na rozpacích, jak modifikovat trik se šachovnicí. Hrací plocha přece nemá tvar šachovnice! Chvíle přemýšlení ale ukáže, že prázdné místo v pravém dolním rohu můžeme nějakým postupem dostat zpět zase jenom po sudém počtu tahů. Podstatné totiž je, že také zde lze hrací plochu obarvit bílou a černou barvou tak, že každá dvě sousední pole mají vždy opačné barvy.



Obr. 2.12

Opět vidíme, že každý tah změní barvu prázdného místa, pozici a) tedy nelze převést do pozice b) lichým počtem tahů. Dále už můžeme postupovat podle bodů 2., 3. a 4. prakticky beze změn. Každý tah změní počet cyklů v pozici o jeden, pozice a) jich má patnáct, zatímco základní pozice b) šestnáct. Jednu z druhé proto nemůžeme dostat ani sudým počtem tahů. Pozici a) nelze převést do b) bez porušení pravidel, je neřešitelná.

Třetí kapitola

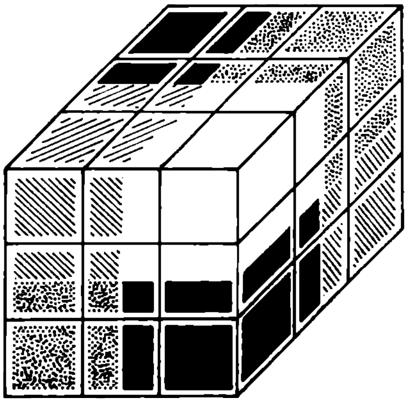
POLOHY PRVKŮ

3.1. Poloha a orientace. Umíme už kreslit grafy pozic u patnáctky, víme, co jsou cykly a jak jejich počet ovlivňuje řešitelnost nebo neřešitelnost pozice. Nyní se vrátíme zpět k Rubikově krychli a dalším hlavolamům. Ty jsou podstatně složitější, než je celkem jednoduchá patnáctka.

Obtížnost Rubikovy krychle má dvě hlavní příčiny. Na krychli jsou složitější tahy. U patnáctky mění každý tah polohu pouhých dvou prvků hry — posunovaného čísla a prázdného místa. Všechno ostatní zůstává na původním místě. Zato u krychle mění každý tah polohu hned osmi prvků — čtyř rohových a čtyř hranových kostiček. Jsou to dvě pětiny všech pohyblivých prvků. Uděláme-li v základní pozici patnáctky čtyři tahy, pozice se příliš nerozhází, a snadno ji zase vrátíme zpět. Po čtyřech tazích na Rubikově krychli obvykle nezůstane nic na původních místech, a vrátit čtyři tahy zpět je dost obtížné. Vrátit sedm nebo osm tahů pak skoro nemožné.

Rubikovu krychli navíc komplikuje skutečnost, že stejná malá kostička může být na jednom místě různě pootočená, s různou orientací. Na obrázku 1.14. jsou špatně orientované kostičky na správných místech. Nic takového se u patnáctky stát nemůže. Hrám, u kterých záleží nejenom na poloze prvků (kostiček, kuliček, čísel, apod.), ale také na jejich orientaci, říkáme *hry s orientací.* U jiných her se o orientaci starat nemusíme, jsou to *hry* *bez orientace*. Mezi ně patří patnáctka, babylónská věž, uši nebo domino.

Význam orientace můžeme ovlivnit obarvením. Na Rubikově krychli s normálním obarvením záleží na orientaci rohových a hranových kostiček, a nezáleží vůbec na orientacích stěnových. Při netradičním obarvení podle obrázku 3.1 naopak nezáleží na orientacích rohových kostiček — všechny tři plošky mají vždy stejnou barvu — zato orientace hranových a stěnových je důležitá.



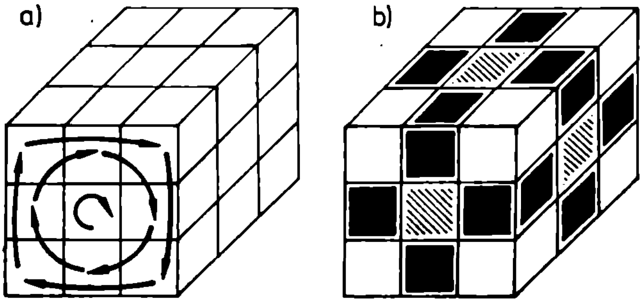
Obr. 3.1

Cvičení 3.1. a) Navrhněte obarvení Rubikovy krychle, při kterém záleží na orientacích rohových a stěnových kostiček, a nezáleží na orientacích hranových.

b) Navrhněte označení, při kterém záleží na orientacích všech kostiček — rohových, hranových i stěnových.

Rubikova krychle je hra s orientací. Při jejím skládání musíme nejenom dostat všechny prvky na správná místa, ale navíc také se správnou orientací. V této a následující kapitole se budeme zabývat pouze polohami prvků, naučíme se, jak dostat všechny na správná místa, případně poznat, kdy to nejde. Orientace si zatím všímat nebudeme, podrobně ji prozkoumáme až v páté kapitole. Znamená to, že ve třetí a čtvrté kapitole se naučíme řešit hry bez orientace, a pouze částečně hry s orientací.

3.2. Orbity. Pouze na první pohled vypadá Rubikova krychle jakoby složená ze samých stejných malých kostiček. Ve skutečnosti jsou mezi nimi rozdíly. Na obrázku 3.2.a vidíme, jak se kostičky přesunou při otočení jednou vrstvou.



Obr. 3.2

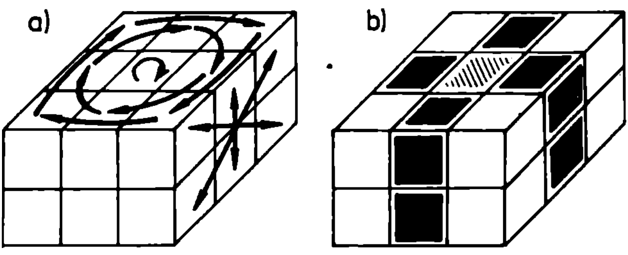
Každý prvek, který byl původně v rohu, je po nějakém tahu opět v rohu. Každý postup proto přemístí *rohové kostičky* na místa jiných rohových kostiček. Mezi těmito kostičkami už žádné rozdíly nejsou, každá z nich může být na místě kterékoliv jiné. Je jich celkem osm a na krychli obíhají z rohu do rohu, budeme říkat, že tvoří *rohovou orbitu*.

Další orbitu tvoří *hranové kostičky*. Ty jsou obarvené černě na obrázku 3.2.b. Každá z nich přejde po libovolném tahu, a tím i postupu, na místo nějaké jiné hranové kostičky. Mezi nimi opět žádné rozdíly nejsou, každá z nich může být na místě libovolné jiné hranové kostičky. Těchto dvanáct prvků obíhá na krychli z hrany na hranu a tvoří tak *hranovou orbitu*.

Stěnové kostičky jsou jiné. Můžeme je pouze pootáčet, nikoliv prohazovat. Každá zůstává při každém tahu na místě, nepřesunuje se na místo jiné (otáčíme pouze krajními vrstvami!). Stěnové kostičky mají vůči sobě stále stejnou polohu a tvoří tak *souřadný systém* na Rubikově krychli, určují jediné správné místo a orientaci pro všechny pohyblivé prvky. Na obrázku 3.2.b jsou rozlišeny všechny tři možné typy kostiček. Rohová orbita je bílá, hranová černá, a pevné stěnové kostičky jsou označené šrafami.

Podobně můžeme rozdělit pohyblivé prvky do orbit i na dalších hračkách.

Domino. Na obrázku 3.3.a jsou vyznačené přesuny prvků při obou možných typech tahů. Také tady pohyblivé prvky z rohů přecházejí při každém tahu do rohů a hranové prvky na místa jiných hranových.



Obr. 3.3

Domino má dvě osmiprvkové orbity — rohovou a hranovou. Dva stěnové prvky můžeme vůči sobě pootáčet, ne však prohazovat.

Uši. Tady je to jednoduché, každou kuličku můžeme přesunout na místo libovolné jiné, uši mají pouze jednu orbitu, kterou tvoří všech dvaadvacet kuliček.

Podobně každý ze šestnácti pohyblivých prvků (patnácti čísel a prázdného místa) u patnáctky můžeme přesunout na místo libovolného jiného, patnáctka má jen jednu orbitu. Jenom jednu orbitu má také babylónská věž.

Obecně můžeme říct, že dva pohyblivé prvky na nějaké hře leží ve stejné orbitě, jestliže existuje postup, který jeden z těchto prvků převede na místo druhého. Udělejte si následující cvičení.

Cvičení 3.2. Rozdělte do orbit pohyblivé prvky na čtyřstěnu a dvanáctistěnu.

Cvičení 3.3. Jaké orbity jsou na krychli $2 \times 2 \times 2$ a $4 \times 4 \times 4$?

Cvičení 3.4. Proč netvoří všechny rohové a hranové kostičky na Rubikově krychli společně jednu orbitu?

Hry, které mají jenom jednu orbitu, jsou *souvislé*, mají-li aspoň dvě orbity, jsou *nesouvislé*. Uši, krychle $2 \times 2 \times 2$, babylónská věž, patnáctka a koule jsou souvislé, Rubikova krychle, čtyřstěn, dvanáctistěn, kosá krychle, domino a krychle $4 \times 4 \times 4$ jsou nesouvislé.

3.3. Základní pozice. V tomto odstavci vhodně označíme pohyblivé prvky na Rubikově krychli, abychom mohli polohu prvků v pozicích zapisovat stejně, jako jsme to dělali u patnáctky. Pokud to bude nutné, upravíme označení prvků na některých dalších hlavolamech tak, aby v základní pozici bylo pro každý pohyblivý prvek jediné správné místo.

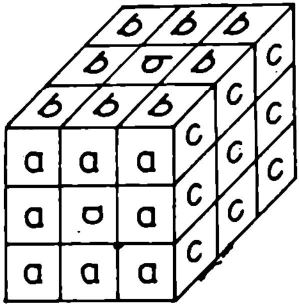
Na obrázku 1.1. jsme si jednotlivé stěny Rubikovy krychle označili písmeny *a*, *b*, *c*, *d*, *e* a *f*. Každou kostičku můžeme nyní popsat seznamem písmen, jimiž je označena. Tak třeba stěnová kostička ve stěně *a* je označena také *a*. Ostatní stěnové kostičky jsou *b*, *c*, *d*, *e* a *f*. Hranový prvek mezi stěnami *a* a *b* má dvě plošky označené stejnými písmeny, budeme jej proto zapisovat jako *ab*. Tady je seznam všech prvků hranové orbity: *ab*, *ac*, *ae*, *af*, *bc*, *bd*, *bf*, *cd*, *ce*, *de*, *df*, *ef*. Ze šesti barev *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* můžeme udělat celkem 15 různých dvojic. Pouze *ad*, *be* a *cf* neodpovídají žádným hranovým kostičkám, protože žádný prvek nemůže ležet současně ve dvou protilehlých stěnách.

Rohová kostička ležící ve stěnách *a*, *b*, *c* má tři plošky označené těmito písmeny, budeme ji proto zapisovat jako *abc*.

Cvičení 3.5. Napište seznam všech prvků patřících do rohové orbity Proč symbol *ade* neoznačuje žádnou rohovou kostičku?

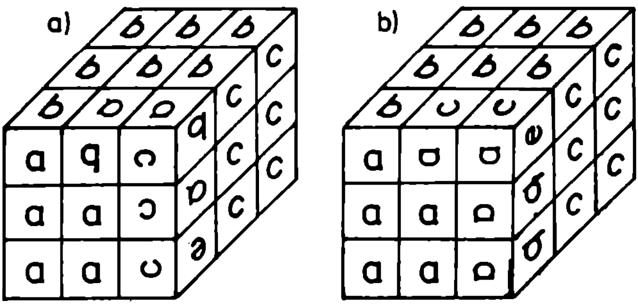
Poznamenejme ještě, že díky označení malých kostiček písmeny máme nyní možnost rozlišit různé orientace stěnových kostiček, což při normálním obarvení nemůžeme. Jedna z mnoha nejrůznějších odpovědí na cvičení 3.1.b je proto už na obrázku 1.1.b. My si různých orientací stěnových prvků nebudeme všímat a pozice jako na obrázku 3.4. budeme považovat také za základní. Liší se od pozice 1.1.b pouze v orientacích některých stěnových prvků.

Souřadný systém stěnových kostiček určuje pro každý pohyblivý prvek jediné správné místo v základní pozici.



Obr. 3.4

Tak třeba hranový prvek *ab* musí ležet ve stěnách *a* a *b*, mezi stěnovými prvky *a*, *b*. Na obrázcích 1.1.b a 3.4. je *ab* na správném místě. Také na obrázku 3.5.a je na správném místě, ale se špatnou orientací.



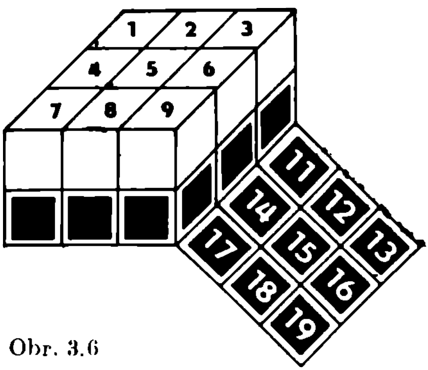
Obr. 3.5

Na obrázku 3.5.b na správném místě není. Je na místě, kde má být v základní pozici prvek *ac*, zatímco kostička *ac* je na místě *ab*.

Podobně je tomu i s rohovými prvky. Kostička *abc* musí být v základní pozici ve stěnách *a*, *b* a *c*, musí proto ležet v jediném společném rohu stěn, v jejichž středech jsou stěnové kostičky *a*, *b*, *c*. Na obrázcích 1.1.b a 3.4. je prvek *abc* na správném místě. Také na obrázku 3.5.a je na správném místě, ale se špatnou orientací. Na obrázku 3.5.b na správném místě není. Je tam, kde má být v základní pozici prvek *ace* — vpravo dole. Prvek *ace* je naopak na místě *abc*.

Také na dalších hračkách můžeme jednoznačně určit správné místo v základní pozici pro každý pohyblivý prvek.

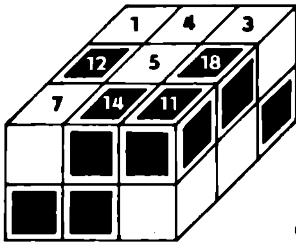
Domino. Změníme označení jednotlivých prvků a místo dominových symbolů budeme používat čísla. V horní bílé stěně čísla 1, 2, 3, ..., 9 a v dolní černé stěně 11, 12, ..., 19. Základní pozice takto očíslovaného domina je na obrázku 3.6. Proti kostičce 1 je v dolní stěně 13, proti 2 pak 12, atd.



Obr. 3.6

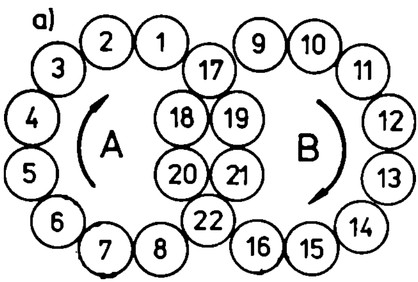
Rohovou orbitu tvoří kostičky 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17 a 19, hranovou 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16 a 18. Dvě stěnové kostičky jsou označené 5 a 15. Oproti původnímu označení máme opět možnost rozlišit různá pootočení dolní černé kostičky 15 vůči horní bílé 5. Tak jako na Rubikově krychli si toho nebudeme všímat.

Každý prvek má nyní jediné správné místo. Vlevo nahoře nad 5 musí být 1, přímo nad 5 pak 2 atd. V pozici na obrázku 3.7. je kostička 4 na místě kostičky 2, kostička 12 na místě 4, 18 na místě 6 atd. Kostičky 1 a 3 jsou na správném místě.

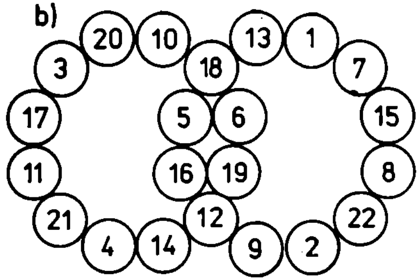


Obr. 3.7

Uši. Na uších označíme kuličky čísly 1, 2, 3, ..., 22 a za základní budeme považovat pozici na obrázku 3.8.a. Tím je opět jednoznačně určené správné místo pro každou kuličku. Na obrázku 3.8.b je rozházená



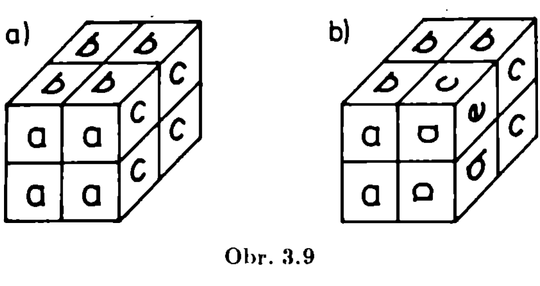
Obr. 3.8



Obr. 3.8

pozice, kulička 1 je na místě, kde má být 10, kulička 2 je na místě 15, atd.

Krychle 2 × 2 × 2. Tato hračka nemá žádné pevné vnější části, při určování správného místa pro malé kostičky musíme proto postupovat trochu rafinovaněji. Správná pozice je většinou určená stejně jako na Rubikově krychli — jednobarevnými stěnami. My opět použijeme písmena *a*, *b*, *c*, *d*, *e* a *f*. Základní pozice je na obrázku 3.9.a.



Obr. 3.9

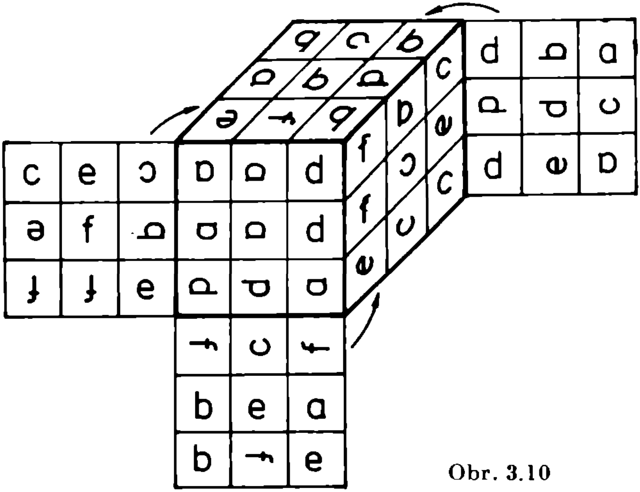
Dvojice protilehlých stěn jsou opět *a*, *d*, další *b*, *e* a poslední *c*, *f*. Každá malá kostička má potom tři písmena a jejich seznam bude označení této kostičky. Tady jsou všechny prvky na krychli $2 \times 2 \times 2$: *abc*, *abf*, *ace*, *aef*, *bcd*, *bdf*, *cde*, *def*.

Libovolně rozházenou krychli $2 \times 2 \times 2$ můžeme vždy uchopit tak, aby prvek *abf* byl v čelní stěně vlevo nahoře, ploškou *b* v horní stěně, stejně jako na obrázku 3.9. Vzhledem k tomuto prvku mají všechny ostatní jednoznačně určené správné místo v základní pozici 3.9.a. Prvek *abc* musí být vpravo od *abf*, pod *abc* musí být *ace*, atd. V pozici 3.9.b je prvek *ace* na místě, kde má být *abc*, zatímco prvek *abc* je na místě *ace*, vpravo dole v čelní stěně.

Prvek *abf* takto určuje souřadný systém na krychli $2 \times 2 \times 2$. Otočení nějakou vrstvou vpravo udělá v pozici stejnou změnu jako otočení rovnoběžnou vrstvou také vpravo. Z každé dvojice rovnoběžných vrstev můžeme vybrat jednu vrstvu a každé otočení považovat za otočení jednou z těchto vybraných vrstev. Vybereme-li *c*, *d*, *e*, pak všechny možné posloupnosti tahů C, D, E, C^{-1}, D^{-1}, E^{-1} odpovídají všem možným postupům na krychli $2 \times 2 \times 2$. Tím jsme získali „pevné místo", vůči kterému posuzujeme polohu všech ostatních pohyblivých prvků.

3.4. Tabulka a graf pozice. Pokud si nevšímáme orientací prvků, jsme s Rubikovou krychlí ve stejné situaci jako s patnáctkou na počátku druhé kapitoly. Umíme pro každou kostičku určit její správné místo v základní pozici a umíme také v rozházené pozici poznat, na místě které kostičky se ta která nachází. Ve druhé kapitole jsme různé pozice u patnáctky zapisovali pomocí tabulek a grafů. Stejným způsobem teď budeme zaznamenávat polohy pohyblivých prvků i na dalších hračkách.

Jak sestavíme tabulku pozice na obrázku 3.10.?



Obr. 3.10

Zcela stejně jako u patnáctky. Pro každý pohyblivý prvek zapíšeme místo, kde se nachází. Začneme třeba hranovými. Kostička *ab* je na místě *af*, kostička *ac* je na místě *ce* atd. Tabulka poloh hranových prvků vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} ab, & ac, & ae, & af, & bc, & bd, & bf, & cd, & ce, & de, & df, & ef \\ af, & ce, & bf, & ab, & bd, & bc, & ef, & ae, & df, & cd, & ac, & de \end{pmatrix}$$

Připomeňme si ještě jednou význam řádek v tabulce: prvek *xy* je na místě prvku *uv*, právě když pod symbolem *xy* v první řádce je symbol *uv* v řádce druhé. Tak kostička *bc* je na místě *bd*, kostička *de* je na místě *cd* atd.

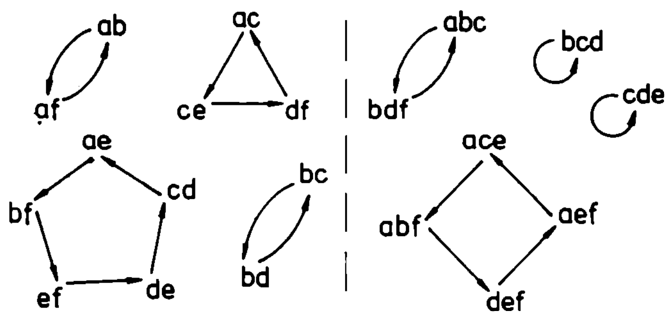
Rohová část tabulky pozice 3.10. vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} abc, & abf, & ace, & aef, & bdf, & bcd, & cde, & def \\ bdf, & def, & abf, & ace, & abc, & bcd, & cde, & aef \end{pmatrix}.$$

Kostička *abc* je na místě *bdf*, kostička *aef* je na místě *ace* atd.

Obě uvedené tabulky — hranová a rohová — tvoří společně celou tabulku pozice 3.10. Sestrojili jsme ji stejně jako tabulky pozic u patnáctky, přesto je mezi nimi podstatný rozdíl. Zatímco pozice u patnáctky zrekonstruujeme zpět z jejich tabulek, pozici 3.10. z její tabulky rekonstruovat nemůžeme. Důvod je zřejmý — *orientace*. Tabulka neobsahuje žádnou informaci o orientacích jednotlivých prvků. Podle tabulky můžeme dát každý prvek zpět na stejné místo, nevíme ale, jak ho orientovat.

Vlastnosti pozic budeme zkoumat opět především pomocí grafů. Na obrázku 3.11. je graf pozice 3.10.



Obr. 3.11

Graf jsme sestrojili z tabulky pozice stejně jako u patnáctky. Pro každý pohyblivý prvek jsme zvolili jeden bod a každému sloupci v tabulce odpovídá jedna šipka. Z bodu *ab* vede šipka do bodu *af*, protože pod *ab* je v tabulce *af*. Ze stejného důvodu vede šipka z *abf* do bodu *def*. Z každého bodu vede právě jedna šipka, která určuje, kde se daný prvek nachází, a do každého bodu vede také jedna šipka, která určuje, jaký prvek je na daném místě.

Cvičení 3.6. Může vést v grafu nějaké pozice šipka z *ab* do bodu *abf*? Nebo z bodu *bcd* do bodu *ae*?

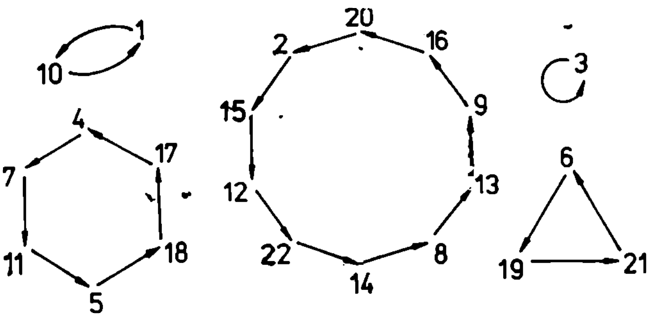
Odpověď na cvičení je jednoznačná — NE. Žádný hranový prvek nemůže být na místě rohového a naopak. Z hranových bodů vedou šipky jen do hranových a z rohových jen do rohových. Každý graf se proto rozpadá na hranovou a rohovou část, obě části jsme oddělili svislou čárkovanou čarou na obrázku 3.11.

Stejně jako tabulka, ani graf pozice neobsahuje žádnou informaci o orientacích prvků. A tak, zatímco z tabulky sestrojíme graf a z grafu zpětně tabulku, ani tabulka, ani graf nestačí k úplné rekonstrukci pozice. Jiná je situace u her bez orientace. Tady tabulka i graf obsahují úplnou informaci o dané pozici.

Uši. Vezměme si pozici na obrázku 3.8.b. Srovnáním se základní pozicí 3.8.a snadno určíme, kde se každá kulička nachází. Tabulka pozice 3.8.b vypadá následovně:

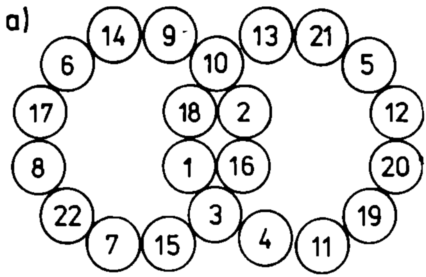
$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, \\ 10, & 15, & 3, & 7, & 18, & 19, & 11, & 13, & 16, & 1, & 5, & 22, & 9, & 8, \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, \; 22 \\ & & & & & & & 12, & 20, & 4, & 17, & 21, & 2, & 6, \; 14 \end{array}\right).$$

Graf pozice je na obrázku 3.12. Z tohoto grafu můžeme zpět zrekonstruovat tabulku a z tabulky pozici 3.8.b. Kuličku 1 dáme na místo, kde je v základní pozici kulička 10, kuličku 2 dáme na místo 15 atd.

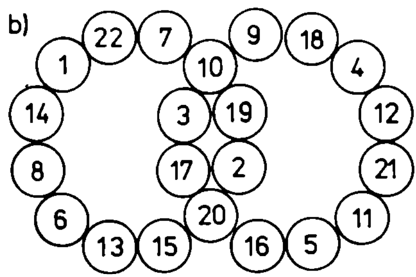


Obr. 3.12

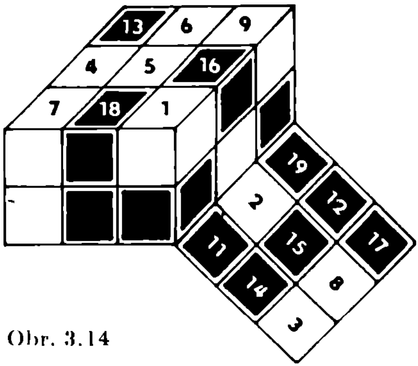
Cvičení 3.7. Napište tabulky a nakreslete grafy pozic na uších, které jsou na obrázku 3.13.



Obr. 3.13



Cvičení 3.8. Napište tabulku a nakreslete graf pozice na dominu na obrázku 3.14.



Obr. 3.14

3.5. Permutace. V předchozích odstavcích jsme stále připomínali podobnost Rubikovy krychle s Loydovou patnáctkou a s dalšími hlavolamy. Ukázali jsme, jak polohu pohyblivých prvků u patnáctky, uší, Rubikovy krychle a dalších her zapisovat pomocí tabulek a grafů. V tomto odstavci shrneme dosavadní poznatky a uvedeme matematický pojem, který zachycuje dosud zjištěné podobnosti mezi jednotlivými hračkami. Pojem *permutace* je klíčový pojem celé teorie hlavolamů uvedené v této knížce a bude v dalším textu stále používán.

Na každém hlavolamu je skupina pohyblivých prvků — osm rohových a dvanáct hranových kostiček na Rubikově krychli, patnáct čtverečků s čísly a prázdné místo u patnáctky, dvaadvacet kuliček u uší, třicet šest kuliček a dvě prázdná místa na babylónské věži apod. Skupinu (nebo, chcete-li, množinu) všech pohyblivých prvků budeme vždy označovat I. Tyto *pohyblivé prvky* mohou měnit polohu vůči pevným částem hlavolamu a také vzájemně mezi sebou. Pro každý pohyblivý prvek existuje přesně jedno správné místo v základní pozici. V jiných pozicích jsou prvky na nesprávných místech. Polohu všech pohyblivých prvků v nějaké pozici p můžeme snadno popsat. Je-li prvek i na místě, kde má být v základní pozici prvek j, řekneme, že prvek i je v pozici p na místě j. Tím jsme každému prvku i přiřadili nějaký prvek j, prvek, na jehož místě se i nachází. Toto přiřazení má dvě důležité vlastnosti:

a) Každému prvku i je přiřazen právě jeden prvek j, protože každý prvek je na jednom místě,

b) každý prvek j je přiřazen přesně jednomu prvku i, protože na každém místě je přesně jeden prvek.

Přiřazení, které má tyto dvě vlastnosti, se nazývá *vzájemně jednoznačné* přiřazení mezi prvky množiny I, a místo slova přiřazení je v matematice více vžitý název *zobrazení*.

Permutace na množině I je vzájemně jednoznačné zobrazení $p : I \to I$, které každému prvku $i \in I$ přiřazuje jednoznačně určený prvek $ip \in I$.

Poloha pohyblivých prvků v nějaké pozici na nějakém hlavolamu je tedy matematicky popsána permutací na množině I všech pohyblivých prvků tohoto hlavolamu. Proto je permutace nejdůležitější pojem celé knížky.

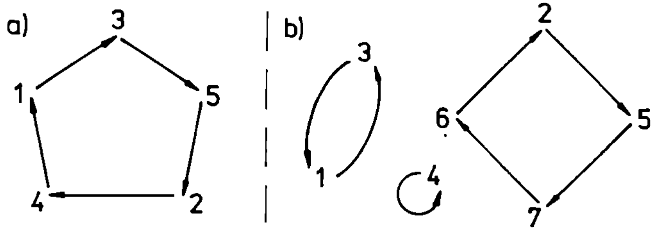
Tabulka permutace. Permutace můžeme zapisovat pomocí tabulek, stejně jako jsme zapisovali polohy pohyblivých prvků na hlavolamech. Vždy můžeme prvky množiny I očíslovat přirozenými čísly $1, 2, 3, \ldots, \ldots, k$. (U Rubikovy krychle to neděláme proto, aby lépe vyniklo, co je správné místo pro každou kostičku.) Tato čísla napíšeme do prvního řádku tabulky a pod každé z nich pak napíšeme jemu přiřazené číslo do druhého řádku. Tak třeba

$$p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 4, 5, 1, 2 \end{pmatrix}$$

je tabulka permutace na množině $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Graf permutace. Pro každý prvek I nakreslíme v rovině jeden bod a z každého bodu i uděláme šipku do bodu ip. Graf permutace p je na obrázku 3.15.a. Na obrázku 3.15.b je graf permutace

$$r = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 3, 5, 1, 4, 7, 2, 6 \end{pmatrix}.$$



Obr. 3.15

Protože permutace je vzájemně jednoznačné zobrazení, z každého bodu vychází právě jedna šipka a do každého bodu vede také právě jedna šipka.

Cykly v permutaci. Z grafu permutace ihned zjistíme, kolik má cyklů a jaké jsou jejich délky. Tak například permutace r, jejíž graf je na obrázku 3.15.b, má tři cykly, jeden má délku 1, druhý 2 a třetí 4. Permutace p má jediný cyklus délky 5.

Cvičení 3.9. Nakreslete grafy následujících permutací, určete, kolik mají cyklů, a jejich délky

$$p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 2, 3, 1, 5, 6, 4 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 1, 3, 2, 4, 6, 7, 8, 5 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, & 5, 6, 7, & 8, 9, 10, 11, 12 \\ 2, 5, 7, 3, & 12, 6, 1, & 10, 8, \ \ 9, \ \ 4, 11 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3.10. Napište tabulky a nakreslete grafy všech šesti možných permutací na množině $I = \{1, 2, 3\}$.

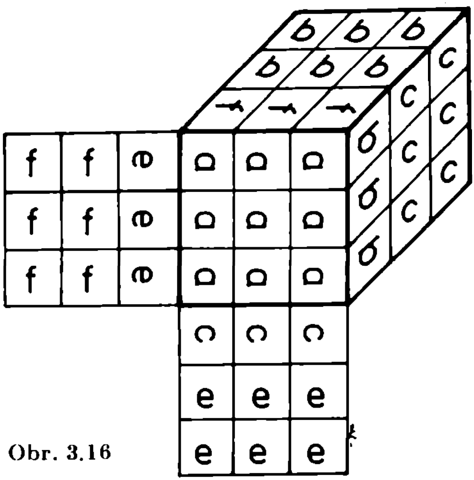
Cvičení 3.11. Kolik různých permutací existuje na množině, která má 4 prvky? Kolik na množině, která má k prvků?

Identická permutace na množině I je permutace n, pro kterou platí $in = i$ pro všechny prvky i množiny I. V základní pozici **n** na každé hračce jsou všechny prvky na správných místech. Poloha prvků v základní pozici je proto vždy popsána identickou permutací n na množině I všech pohyblivých prvků.

3.6. Jaké permutace dělají tahy a postupy. Vzájemnou polohu pohyblivých prvků můžeme měnit pomocí tahů a z nich složených postupů. Vztah mezi postupy a pozicemi jsme si stručně vysvětlili už v první kapitole. Každý postup **P** převede hračku ze základní pozice **n** do nějaké jiné pozice **p**. Zapisujeme to **PU** = **p** — postup **P** udělá pozici **p**. Polohu prvků v pozici **p** zapisujeme permutací p na množině I všech pohyblivých prvků. Zatímco v pozici **p** je důležitá jak poloha, tak orientace všech prvků, permutace p zachycuje pouze jejich polohu. Postup **P** polohu prvků změní, říkáme, že udělá permutaci p. Protože jsme tak zapomněli na orientace, budeme to zapisovat **PV** = p. U her bez orientace není mezi pozicí **p** = **PU** a permutací p = **PV** žádný podstatný rozdíl, pozici **p** můžeme s permutací p ztotožnit. Je-li hra s orientací, permutace p nepopisuje pozici $\mathbf{p}$ úplně, chybí informace o orientacích. V tomto případě nemůžeme pozici $\mathbf{p}$ s permutací p ztotožnit, $\mathbf{PU} \neq \mathbf{PV}$. Budeme říkat, že p je *polohová permutace* pozice $\mathbf{p}$.

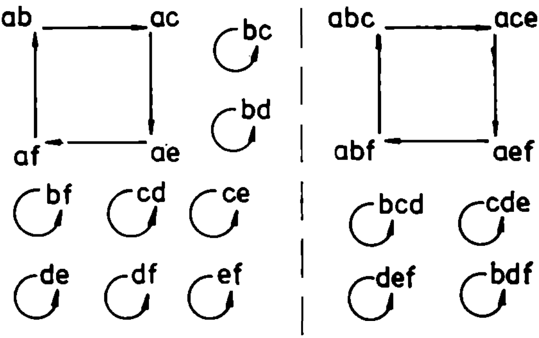
Každý postup $\mathbf{P}$ tedy udělá na množině I všech pohyblivých prvků nějakou permutaci $p = \mathbf{PV}$, polohovou permutaci pozice $\mathbf{p} = \mathbf{PU}$. Teoreticky můžeme napsat tabulku a nakreslit graf této permutace. Hlavolamy jsou ale zajímavé především proto, že vztah mezi postupy a pozicemi je složitý. Pochopit, jak nějaký postup přehazuje a pootáčí jednotlivé prvky, není vůbec snadné. Pouze u těch nejjednodušších postupů je to zcela jasné.

Nejjednodušší postupy, které základní pozici nějak změní, jsou tahy. Jakou permutaci udělá tah A — otočení vrstvou $\mathbf{a}$ o 90° vpravo — na Rubikově krychli? Ze základní pozice $\mathbf{n}$ dostaneme pozici na obrázku 3.16.



Obr. 3.16

Kostička *ab* přejde na místo *ac*, *ac* na místo *ae*, *ae* na místo *af* a *af* na místo *ab*. Ostatní hranové prvky se nepohybují, zůstanou na původních místech. Podobně se posunou rohové kostičky: *abc* přejde na místo *ace*, *ace* na místo *aef*, *aef* na místo *abf* a *abf* na místo *abc*. Zbývající rohové prvky opět zůstávají na původních místech. Tahem A uděláme permutaci $a = A\mathbf{V}$, jejíž graf je na obrázku 3.17.



Obr. 3.17

Graf permutace a má dva cykly délky 4, jeden na rohových a druhý na hranových kostičkách, ostatní cykly mají délku 1. Všechny ostatní tahy na Rubikově krychli udělají permutace, které mají také jeden cyklus délky 4 na rohových prvcích, druhý cyklus délky 4 na hranových kostičkách a ostatní cykly délky 1.

Cvičení 3.12. Nakreslete grafy permutací, které udělají tahy A^{-1}, B, D na Rubikově krychli.

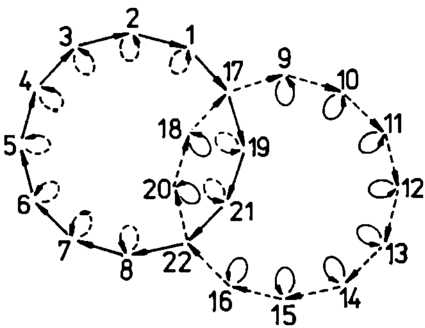
A jaké permutace dělají tahy na jiných hlavolamech?

Uši. Základní pozice je na obrázku 3.8.a. Tahem

A přejde kulička 1 na místo 17, kulička 2 na místo 1, atd. Permutace — pozice $A\boldsymbol{U} = a$ má tabulku

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & \\ 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & \\ & 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 \\ & 15, 16, 19, 18, 21, 20, 22, \ 8 \end{pmatrix}$$

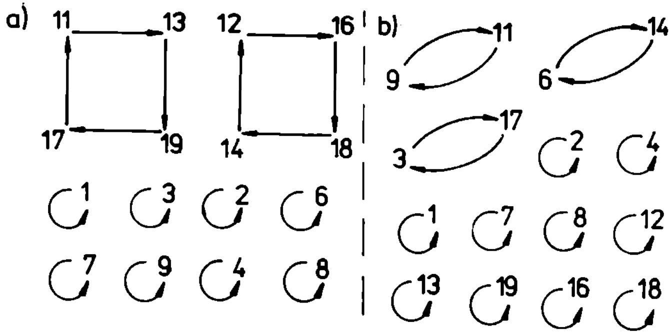
a její graf je na obrázku 3.18. plnými čarami. Čárkovaně je tam graf permutace $b = B\boldsymbol{U}$. Obě permutace mají jeden cyklus délky 12 a ostatní cykly délky 1.



Obr. 3.18

Domino. Tah A otáčí spodní stěnou o 90° vpravo, kostička 11 přejde na místo 13, 13 na místo 19, 12 na místo 16 atd. Graf permutace $a = A\boldsymbol{U}$ je na obrázku 3.19.a. Permutace má dva cykly délky 4, jeden na rohových a druhý na hranových kostičkách, zbývající cykly mají délku 1.

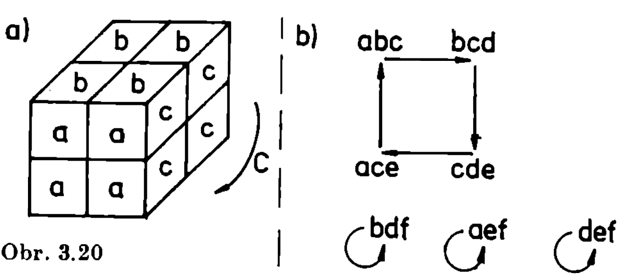
Na obrázku 3.19.b je graf permutace $c = C\boldsymbol{U}$, kterou udělá otočení pravou boční vrstvou. Tato permutace má tři cykly délky 2, jeden na hranových a dva na rohových



Obr. 3.19

prvcích. Ostatní cykly mají opět délku 1. Všechny další tahy B, D, E udělají permutace, které mají rovněž dva cykly délky 2 na rohových kostičkách, jeden cyklus délky 2 na hranových a všechny ostatní cykly délky 1.

Krychle 2 × 2 × 2. Připomeňme si, že polohu prvků posuzujeme vzhledem ke kostičce *abf*, kterou považujeme za pevnou. Množinu I všech pohyblivých prvků tvoří sedm zbývajících kostiček. Na obrázku 3.20.a je naznačený tah C a na obrázku 3.20.b je graf permutace $c = C\boldsymbol{V}$, kterou tah C udělá. Má jeden cyklus délky 4 a tři cykly délky 1.



Obr. 3.20

Všechny ostatní tahy udělají také jeden čtyřcyklus a tři cykly délky 1.

Cvičení 3.13. Napište tabulku a nakreslete graf permutace $e = E$**V**, kterou udělá tah E na krychli $2 \times 2 \times 2$.

3.7. Co udělá složení dvou postupů a inverzní postup?

Nějaký postup *P* udělá na Rubikově krychli permutaci p = ***PV***, třeba tu, jejíž graf je na obrázku 3.11. a tabulka podrobně vysvětlena v odstavci 3.4. Jiný postup *Q* udělá permutaci q = ***QV***. Permutace q je polohová permutace pozice, kterou dostaneme postupem *Q* z pozice základní. Jakou permutaci uděláme složeným postupem *PQ*, jak vypadá permutace (*PQ*) ***V***?

Děláme-li postup *PQ* ze základní pozice, začínáme postupem *P*. Po jeho skončení dostáváme jako částečný mezivýsledek pozici ***p*** = ***PU***. Z této pozice pokračujeme postupem *Q* a chceme určit, na jakých místech budou pohyblivé prvky po skončení celého postupu *PQ*. Na jakém místě bude třeba rohová kostička *bdf*? Po postupu *P* — v pozici ***p*** — bude na místě *abc*, platí (*bdf*) p = = *abc*. Chceme vědět, kam se *bdf* přemístí, pokračujeme-li dále postupem *Q*. Představme si, že máme kromě krychle v pozici ***p*** (obrázek 3.10) ještě jednu krychli v pozici základní, a postup *Q* děláme na obou krychlích současně. Prvek *bdf* je na první krychli na místě *abc* a posunuje se po stejné dráze jako prvek *abc* na druhé krychli — na obou děláme stejné tahy. Po skončení postupu budou oba prvky na stejném místě. Toto místo známe na druhé krychli — prvek *abc* bude na místě (*abc*) q. Prvek *bdf* bude proto na první krychli po skončení celého postupu *PQ* na stejném místě (*abc*) q. A protože *abc* = (*bdf*) p, můžeme toto místo zapsat také jako ((*bdf*) p) q. Stejně určíme polohu všech ostatních prvků po postupu PQ: hranová kostička af bude na místě $((af)\,p)\,q$, rohová abc bude na místě $((abc)\,p)\,q$, atd.

Obecně můžeme polohu pohyblivých prvků na nějakém hlavolamu po postupu PQ ze základní pozice určit následovně. Postupem P jsme udělali permutaci $p = PV$. Prvek i je v pozici $p = PU$ na místě $j = ip$. Pokračujeme-li nyní postupem Q, přejde prvek i na stejné místo, na jaké dostaneme prvek j postupem Q ze základní pozice, tj. na místo jq. Postupem PQ proto přemístíme prvek i ze základní pozice na místo $jq = (ip)\,q$.

Slovní popis permutace, kterou udělá postup PQ, doplníme ještě tabulkou a grafem. Jak najdeme tabulku a graf permutace $(PQ)\,V$, známe-li tabulky a grafy permutací $p = PV$ a $q = QV$, které udělají postupy P a Q? Vrátíme se opět ke konkrétnímu příkladu na Rubikově krychli z počátku odstavce. Tabulka permutace $p = PV$ je v odstavci 3.4., rohová část je

$$\begin{pmatrix} abc, & abf, & ace, & aef, & bdf, & bcd, & cde, & def \\ bdf, & def, & abf, & ace, & abc, & bcd, & cde, & aef \end{pmatrix}.$$

Postupem Q uděláme na rohových prvcích třeba tuto permutaci

$$\begin{pmatrix} abc, & abf, & ace, & aef, & bdf, & bcd, & cde, & def \\ ace, & bdf, & abc, & aef, & bcd, & abf, & def, & cde \end{pmatrix}.$$

Jak dostaneme tabulku permutace, kterou uděláme na rohových kostičkách postupem PQ? Kostička abc bude po postupu P na místě bdf. Postupem Q ji dále posuneme na stejné místo, na jaké přejde prvek bdf, uděláme-li Q ze základní pozice. Toto místo najdeme ve druhé řádce tabulky permutace q pod bdf, je to bcd. Kostička abc přejde postupem PQ na místo bcd. Podobně zjistíme polohu jakékoliv jiné kostičky. Můžeme si to zjednodušit tak, že napíšeme obě tabulky permutací p a q pod sebe, přičemž druhý řádek tabulky p považujeme za první řádek tabulky q:

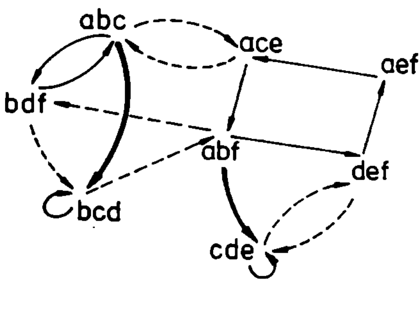
$$\begin{pmatrix} abc, & abf, & ace, & aef, & bdf, & bcd, & cde, & def \\ bdf, & def, & abf, & ace, & abc, & bcd, & cde, & aef \\ bcd, & cde, & bdf, & abc, & ace, & abf, & def, & aef \end{pmatrix},$$

a potom vynecháme „průběžný stav“ po postupu P, zachycený ve druhé řádce. Zůstane tabulka permutace $(PQ)\,V$, kterou udělá postup PQ na rohových prvcích:

$$\begin{pmatrix} abc, & abf, & ace, & aef, & bdf, & bcd, & cde, & def \\ bcd, & cde, & bdf, & abc, & ace, & abf, & def, & aef \end{pmatrix}.$$

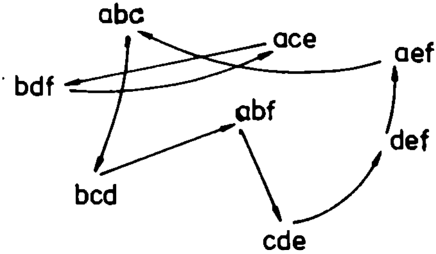
Stejně dostaneme i hranovou část tabulky permutace $(PQ)\,V$.

Vzpomeneme-li si na vztah mezi tabulkou a grafem permutace, snadno sestrojíme také graf permutace $(PQ)\,V$. Nejdříve si nakreslíme graf permutace $p = PV$ — obrázek 3.11. Potom do stejného obrázku přikreslíme čárkovaně graf permutace $q = QV$. Na obrázku 3.21. vidíme rohovou část obou grafů. Kam povede v grafu permutace $(PQ)\,V$ šipka z bodu abc? Kostička abc přejde postupem P na místo bdf — plná šipka —



Obr. 3.21

a z tohoto místa postupem Q na místo bcd — čárkovaná šipka. V grafu (PQ) V tedy povede šipka z abc do bcd — silná šipka. Kostička abf přejde podél plné šipky do bodu def a dále podle čárkované šipky do bodu cde. Celá rohová část grafu permutace (PQ) V je na obrázku 3.22.



Obr. 3.22

Cvičení 3.14. Hranová část tabulky permutace QV je

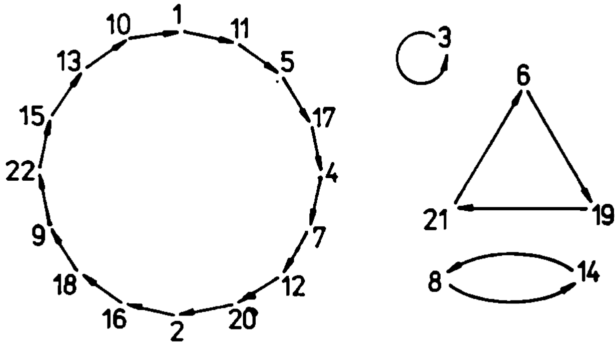
$$\begin{pmatrix} ab, & ac, & ae, & af, & bc, & bd, & bf, & cd, & ce, & de, & df, & ef \\ af, & bf, & ac, & bc, & ce, & ef, & bd, & df, & cd, & ae, & ab, & de \end{pmatrix}.$$

Sestrojte hranovou část tabulky a grafu permutace, kterou udělá postup PQ. Sestrojte tabulku a graf permutace, kterou udělá postup QP — napřed Q, potom P. Sestrojte tabulku a graf permutace (PP) V — postup P opakujeme dvakrát po sobě.

Cvičení 3.15. Nakreslete graf permutace, kterou uděláme, jestliže v pozici na obrázku 3.10. pokračujeme tahem B.

Zcela stejně můžeme uvažovat i o všech ostatních hlavolamech. Ukážeme si to stručně na uších.

Uši. Vezměme si třeba pozici p na obrázku 3.8.b, dostali jsme ji nějakým postupem P. Jak se pozice změní, uděláme-li teď tah B? Graf pozice $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{BU}$ je čárkovaně na obrázku 3.18. Kulička 1 je v pozici $\boldsymbol{p}$ na místě 10, tahem B se posune na místo 11. Kulička 2 přejde z místa 15 na místo 16 atd. Graf nové pozice je na obrázku 3.23.



Obr. 3.23

Cvičení 3.16. a) Použijte obrázek 3.18. a nakreslete grafy permutací, které uděláme na uších postupy AB a BA.

b) Použijte část a) tohoto cvičení a nakreslete graf permutace, kterou dostaneme, jestliže v pozici na obrázku 3.12.b uděláme postup $Q = AB$.

Na závěr skládání postupů ještě důležitá poznámka. Při řešení hlavolamů začínáme v nějaké rozházené pozici $\boldsymbol{p}$, kterou jsme dostali neznámým postupem $\boldsymbol{P}$. Na tento případ se také hodí dosavadní výsledky tohoto odstavce. V pozici $\boldsymbol{p}$, jejíž polohová permutace je p, uděláme nějaký postup Q. Známe-li permutaci $q = Q\boldsymbol{V}$, kterou postup Q udělá, můžeme určit polohy prvků v nové pozici — prvek i bude na místě $(ip)\,q$. Pokud je permutace q dostatečně jednoduchá, umíme si změnu pozice **p** po postupu Q představit. Postupným pozměňováním dostaneme nakonec pozici základní. Naše strategie řešení hlavolamů spočívá proto v hledání postupů, které v pozicích udělají co nejjednodušší změny. Metodám vyhledávání takových postupů bude věnována čtvrtá kapitola.

A jakou permutaci uděláme postupem P^{-1}, inverzním k postupu P? Použijeme už známé výsledky. Složeným postupem PP^{-1} základní pozici nezměníme, na konci bude stejná jako na počátku. Uprostřed tohoto postupu, po P, bude krychle v pozici **p**, její polohová permutace je p. Jestliže nějaký prvek i přejde postupem P na místo $j = ip$, pak postup P^{-1} jej zase vrátí zpět z místa j na místo i. Permutace $(P^{-1})\,\boldsymbol{V}$ proto zobrazuje prvek j do i, právě když permutace $p = P\boldsymbol{V}$ zobrazuje i do j. Graf $(P^{-1})\,\boldsymbol{V}$ dostaneme tak, že v grafu permutace p obrátíme směry všech šipek a její tabulku tak, že v tabulce p prohodíme oba řádky.

3.8. Skládání permutací. V pátém odstavci této kapitoly jsme ukázali, jak matematický pojem permutace popisuje polohy pohyblivých prvků na nejrůznějších hlavolamech. Nyní uvedeme další matematický pojem, který vystihuje, jak se poloha prvků mění, děláme-li nějaké postupy.

Zopakujme si stručně, co jsme zjistili v minulém odstavci. Je-li poloha prvků v nějaké pozici **p** popsána permutací p a uděláme-li postupem Q permutaci $q = Q\boldsymbol{V}$, pak poloha prvků v pozici, kterou dostaneme postupem Q z pozice **p**, je popsána permutací na množině I všech pohyblivých prvků, která každému prvku i přiřazuje prvek $(ip)\,q$. Z permutací p a q jsme tak dostali jakousi novou permutaci. Můžeme to udělat s libovolnými dvěma permutacemi, nejenom s polohovými permutacemi na hlavolamech.

Jsou-li p a q permutace na nějaké množině I, pak *složení permutací* $p \circ q$ je permutace na množině I, která každému prvku i přiřazuje prvek $i(p \circ q) = (ip)\, q$.

Složeným postupem PQ tedy uděláme permutaci, která je složením permutací $p = PV$ a $q = QV$.

Permutaci jsme definovali jako vzájemně jednoznačné zobrazení na množině I. Aby mělo složení permutací smysl, musíme ukázat, že $p \circ q$ je opravdu permutace — vzájemně jednoznačné zobrazení. To je jasné v případě polohových permutací na hlavolamech, a obecný případ není o nic obtížnější. Zobrazení $p \circ q$ přiřazuje každému prvku $i \in I$ jednoznačně určený prvek $(ip)\, q$. A je-li naopak k nějaký prvek I, existuje přesně jeden prvek $j \in I$ takový, že $jq = k$, protože q je permutace. Existuje také přesně jeden prvek $i \in I$ takový, že $ip = j$, protože také p je permutace. Tento prvek i je jediný, pro který platí $(ip)\, q = i(p \circ q) = k$. Zobrazení $p \circ q$ je tedy opravdu vzájemně jednoznačné, je to permutace.

Tabulku a graf složení permutací umíme najít už z minulého odstavce, takže jenom stručné opakování.

Tabulka složené permutace. Napíšeme si napřed tabulku permutace p a pod ní tabulku q, přičemž dolní řádek tabulky p považujeme za horní řádek tabulky q — na pořadí prvků v tabulce nezáleží. Dostaneme tak tabulku o třech řádcích. Vynecháním „průběžného“ druhého řádku dostaneme tabulku permutace $p \circ q$. Pod prvkem i v prvním řádku je ve druhém řádku ip a ve třetím $(ip)\, q = i(p \circ q)$:

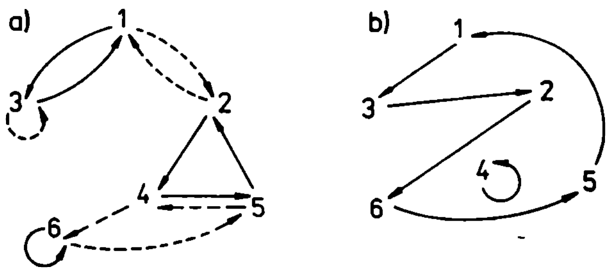
$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots, & i, & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots, & ip, & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots, & (ip)\, q, & \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3.17. Napište tabulky permutací $p \circ q$, $q \circ p$ a $p \circ p$, je-li

$$p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 3, 4, 1, 5, 2, 6 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 2, 1, 3, 6, 4, 5 \end{pmatrix}$$

Důležité upozornění. Výsledek předchozího cvičení ukazuje, že složením dvou permutací v různém pořadí můžeme dostat různé výsledky. Permutace $p \circ q$ a $q \circ p$ mohou být, a většinou také jsou, různé.

Graf složení permutací. Nakreslíme do jednoho obrázku grafy obou permutací p a q. Na obrázku 3.24.a jsou grafy permutací p (plnou čarou) a q (čárkovaně) ze cvičení 3.17. Šipka v grafu $p \circ q$ z bodu i povede do bodu $(ip)\,q$. Tento bod najdeme tak, že se vydáme z bodu i po šipce grafu p do bodu ip, a dále po šipce grafu q dojdeme do bodu $(ip)\,q$. Graf $p \circ q$ je na obrázku 3.24.b.



Obr. 3.24

Cvičení 3.18. Nakreslete grafy permutací $q \circ p$ a $q \circ q$, p, q stejné jako ve cvičení 3.17. — obrázek 3.24.a.

Závěrem ještě několik jednoduchých vlastností skládání permutací.

Asociativita. Máme-li složit tři permutace p, q, r na množině I v tomto pořadí, můžeme to udělat dvěma způsoby. Buď napřed složíme p s q a výsledek $p \circ q$ složíme s r, nebo složíme p s permutací $q \circ r$. Obě možnosti $(p \circ q) \circ r$ a $p \circ (q \circ r)$ vedou ke stejnému výsledku. V prvém případě zobrazíme prvek i napřed do prvku $i(p \circ q) = (ip)\, q$ a tento pak do prvku $((ip)\, q)\, r$. Ve druhém případě zobrazíme napřed i do ip a potom do $(ip)\,(q \circ r) = ((ip)\, q)\, r$. Obě permutace $(p \circ q) \circ r$ a $p \circ$ $\circ\, (q \circ r)$ zobrazují libovolný prvek $i \in I$ do jednoho a téhož prvku $((ip)\, q)\, r$. Znamená to, že se rovnají, $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$ pro každé tři permutace p, q, r na množině I. Říkáme, že *skládání permutací je asociativní.*

Asociativita skládání permutací má jeden důležitý důsledek. Máme-li složit k permutací $p_1, p_2, \ldots, p_k$ v tomto pořadí, můžeme to udělat mnoha způsoby. Vybereme nějakou sousední dvojici p_i a p_{i-1}, složíme ji, a místo obou permutací napíšeme v seznamu jedinou permutaci $p_i \circ p_{i+1}$. V novém seznamu opět vybereme dvě sousední permutace a celý postup opakujeme. Děláme to tak dlouho, až dostaneme jedinou permutaci. Z asociativity skládání permutací plyne, že všechny způsoby vedou ke stejnému výsledku, který označíme $p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_k$. Nebudeme to dokazovat teď, dokážeme to až v hvězdičkovaném odstavci 3.13., používat to ale budeme i dříve.

Identická permutace je neutrální. Pro každou permutaci p platí $p \circ n = n \circ p = p$. Jinými slovy, identická permutace je neutrální vzhledem ke skládání permutací, složíme-li ji s nějakou permutací p, dostaneme opět p.

Cvičení 3.19. Dokažte rovnosti $p \circ n = n \circ p = p$.

Inverzní permutace. Nějakým postupem P uděláme permutaci $p = PV$ a inverzním postupem P^{-1} uděláme permutaci, která zobrazuje prvek j do i, právě když $ip = j$. Permutaci $(P^{-1})\ V$ budeme říkat *inverzní permutace* k $p = PV$ a značit ji p^{-1}. Stejně můžeme definovat inverzní permutaci p^{-1} k libovolné permutaci p na množině I. Pro permutaci p^{-1} platí $jp^{-1} = i$, právě když $ip = j$. Tabulku p^{-1} dostaneme tak, že v tabulce p zaměníme oba řádky. Tak třeba

$$\begin{pmatrix} 2, 1, 3, 6, 4, 5 \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{pmatrix}$$

je tabulka permutace q^{-1} inverzní k permutaci q ze cvičení 3.17. Graf inverzní permutace p^{-1} dostaneme tak, že v grafu p obrátíme směry všech šipek. Snadno se také ověří, že k permutaci p^{-1} je inverzní zase permutace p, tj. platí $(p^{-1})^{-1} = p$.

Z vlastnosti inverze hlavolamů plyne, že umíme-li udělat nějakou permutaci p, pak umíme udělat také permutaci inverzní p^{-1}. Ukázali jsme to na konci minulého odstavce. A nakonec lehká, ale důležitá vlastnost inverzních permutací.

Cvičení 3.20. Dokažte rovnosti $p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = n$.

Tato vlastnost je pro inverzní permutaci p^{-1} charakteristická. Pokud $p \circ q = n$ nebo $q \circ p = n$ pro nějakou permutaci q, pak $q = p^{-1}$. Opravdu, je-li $ip = j$, pak z každé z těchto rovností ihned plyne $jq = i$.

3.9. Matematický model úplných hlavolamů. Víme toho už o hračkách dost, abychom mohli sestavit jejich matematický model. Na každém hlavolamu je nějaká skupina pohyblivých prvků, kterou označujeme I. Polohu těchto prvků popisujeme permutacemi na množině I. Na počátku je hra v základní pozici, poloha prvků je popsána identickou permutací. Polohu prvků měníme pomocí tahů, každý tah udělá nějakou permutaci. Permutace, které uděláme jednotlivými tahy, budeme nazývat *generátory*. Postupným prováděním tahů děláme další pozice. Jejich polohové permutace dostaneme složením odpovídajících generátorů. Známe-li generátory, známe vlastně celou hru. Všechna možná složení generátorů odpovídají polohovým permutacím všech pozic, které můžeme dostat nějakým postupem z pozice základní, a tedy všem řešitelným pozicím. Generátory tak určují všechny vlastnosti polohy prvků na hlavolamu.

Matematický model úplného hlavolamu vypadá takto. Máme nějakou množinu I a několik permutací-generátorů na I. Umět řešit hlavolam znamená umět popsat všechny permutace na I, které jsou složením generátorů, a pro každou takovou permutaci najít nějaké její vyjádření jako složení generátorů.

Množinu I jsme vždy interpretovali jako množinu všech pohyblivých prvků. Náš model tak přesně popisuje hry bez orientace a částečně hry s orientací, ztrácí se v něm právě ta orientace. Pokud nemáme domino nebo uši, můžeme si hrát aspoň na papíře s jejich matematickým modelem. A co víc, můžeme hrát i hry, které neexistují, nebyly vyrobeny. V příštím odstavci tak budeme zkoumat model hry, ve které jsou obzvlášť jednoduché tahy. Tato hra bude velice snadná, a přesto se při ní naučíme mnoho užitečného i pro další hlavolamy. Složitost hlavolamů totiž zcela závisí na složitosti vzájemné polohy generátorů a vlastnosti, které budou očividné v naší jednoduché hře, by bylo mnohem obtížnější odhalit na Rubikově krychli nebo čtyřstěnu.

Poznámka, kterou je možné přeskočit. Při vhodné interpretaci množiny I můžeme náš matematický model použít i ke studiu orientací. Ukážeme si stručně jak na Rubikově krychli. Množinu I budeme tentokrát interpretovat jako množinu malých plošek — čtverečků na krychli, a ne jako množinu pohyblivých prvků. Každý tah udělá dva čtyřcykly na hranových ploškách a tři čtyřcykly na rohových ploškách. Pozice pak chápeme ne jako permutace na kostičkách, ale jako permutace na ploškách. V tomto modelu se dají studovat i orientace, není k tomu ale příliš vhodný. Lepší matematický model her s orientací sestavíme v páté kapitole.

A nakonec ještě pár slov o významu modelů vůbec. Matematické modely jsou běžně používány v nejrůznějších oblastech vědy a techniky. Rozsah jejich aplikací nesmírně vzrostl použitím výkonných počítačů. Ty umožňují zpracovávat složité modely, jejichž studium by jinak bylo zcela nemyslitelné. Nákladné experimentování při stavbě lodí, letadel, automobilů nebo raketoplánů lze nahradit mnohem lacinějším experimentováním na počítači. Místo zkoušení různých profilů křídel v aerodynamických tunelech stačí často sestavit a zpracovat správné rovnice obtékání těles. A v případě stavby přehrady, mostu nebo jaderné elektrárny si ani nějaké experimentování nejde dost dobře představit, všechno musí být propočítané předem. Matematické modely se používají v genetice, v teorii přenosu informace, fyziologii, psychologii nebo ve fyzice elementárních částic. Teoretická práce v mnoha oborech spočívá převážně ve studiu matematických modelů. V tom je zcela určitě nejdále fyzika. První složitější modely přírodních jevů vytvořili patrně astronomové, pravidelný pohyb planet a hvězd na nebeské klenbě je k tomu jako stvořený. Rozvíjení a zkoumání stále složitějších modelů dalo vznik celým matematickým disciplínám. Určitě není náhodou, že zákony klasické mechaniky a objev infinitezimálního počtu jsou spojeny s jedním člověkem, Isaacem Newtonem.

Mnohem častěji je ale při sestavování modelů používána matematika již vytvořená. A tak vlastnosti modelů závisí hodně na matematických znalostech těch, kdo je sestavují. Vždyť ani my nepoužíváme při zkoumání a řešení hlavolamů v této knize pojmy a metody, které by nebyly matematikům známé aspoň sto padesát let.

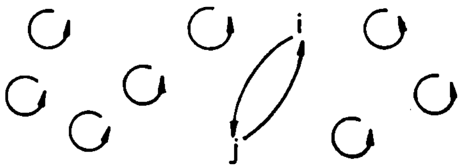
3.10. Nezajímavé hračky. Nezajímavé jsou takové hlavolamy, které každý snadno vyřeší. Nikdo by je nekupoval, a proto je také nikdo nevyrábí. Přesto se jimi budeme trochu zabývat. Nemusíme si ani představovat, jak by asi vypadaly, stačí nám jejich matematický model.

Tento model spočívá ve výběru nějaké množiny permutací-generátorů na množině $I = \{1, 2, \ldots, k\}$. Nejjednodušší by bylo řešit hlavolam, na kterém bychom mohli prohodit každé dva prvky na libovolných dvou místech, a žádné jiné by polohu nezměnily. Znamená to, že pro každé dva různé prvky $i, j \in I$ bychom měli k dispozici tah, který by udělal permutaci

$$t = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots i, \ldots j, \ldots, k-1, k \\ 1, 2, \ldots j, \ldots i, \ldots, k-1, k \end{pmatrix}.$$

Graf této permutace je na obrázku 3.25., má jeden cyklus délky 2 a ostatní s délkou 1.

Takovým permutacím se v matematice říká *transpozice*. Každá transpozice je jednoznačně popsána dvojicí prvků, které tvoří cyklus délky 2. Právě uvedená transpozice t je popsána dvojicí (i, j). Pro snazší orientaci budeme transpozice označovat dvojicemi prohazovaných prvků, (i, j) je tedy nové označení pro transpozici t na obrázku 3.25.



Obr. 3.25

Cvičení 3.21. Nechť i, j, k, l jsou čtyři různé prvky množiny I. Nakreslete grafy složení transpozic $(i, j) \circ \circ (i, j), (i, j) \circ (j, k), (i, j) \circ (k, l), (i, j) \circ (j, k) \circ (i, j)$.

Naše snadná hra má pro každou dvojici různých prvků $i, j \in I$ jeden tah, který udělá transpozici (i, j). Velká zásoba jednoduchých tahů umožňuje snadno složit každou pozici-permutaci. Začneme konkrétním příkladem. Množina I má osm prvků 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a jejich poloha je popsána permutací

$$p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 2, 5, 3, 6, 7, 8, 1, 4 \end{pmatrix}.$$

Permutace p není identická, až na jeden jsou všechny prvky na nesprávných místech. Vezmeme si jeden z nich, třeba 1. Ten je na místě 2, abychom ho dostali na správné místo, uděláme transpozici (1, 2). Dostaneme novou permutaci

$$p \circ (1, 2) = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 1, 5, 3, 6, 7, 8, 2, 4 \end{pmatrix}.$$

Dále dáme na správné místo prvek 2. Ten je na místě 5, uděláme proto transpozici (2, 5). Dostaneme permutaci

$$p \circ (1, 2) \circ (2,5) = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 5, 4 \end{pmatrix}.$$

Stále ještě není všechno na správném místě, třeba 6 je na místě 8, uděláme tedy transpozici (6, 8). Každý snadno ověří, že složením transpozic $(1, 2) \circ (2, 5) \circ (6, 8) \circ (5, 7) \circ (4, 8)$ dostaneme hru z pozice p do pozice základní, tj. že platí $p \circ (1, 2) \circ (2, 5) \circ (6, 8) \circ (5, 7) \circ (4, 8) = n$. Permutaci p jsme složili z transpozic.

Zcela stejně se přesvědčíme, že každou permutaci q na množině $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ lze složit z transpozic. Pokud je q identická permutace, není třeba dělat nic. Pokud není, existuje prvek i takový, že $iq \neq i$, tj. i není na správném místě. Složíme q s transpozicí (i, iq). Protože $iq \neq i$ a q je vzájemně jednoznačné zobrazení, existuje jiný prvek $j \in I$, pro který platí $jq = i$ (na každém místě je nějaký prvek!). Ani prvek j není na správném místě:

$$q = \begin{pmatrix} 1, \ldots, i, \ldots, & j, \ldots, k \\ 1q, \ldots, iq, \ldots, i = & jq, \ldots, kq \end{pmatrix}.$$

V nové pozici $q \circ (i, iq)$ budou s výjimkou prvků i a j všechny ostatní na stejných místech jako v pozici q. Všechny, které byly na správných místech v q, budou proto na správných místech také v $q \circ (i, iq)$. Navíc bude správně také i. Tahem (i, iq) jsme tak zvětšili počet prvků na správných místech aspoň o jeden. Pokud je permutace $q \circ (i, iq)$ identická, jsme u cíle. Pokud není, vybereme nějaký prvek, který ještě na správném místě není, a opakujeme celou úvahu znovu. Tak postupně zvětšujeme počet prvků na správných místech, až po nejvýše $k - 1$ krocích dostaneme identickou permutaci n. Platí proto, že

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{l}\text{ke každé permutaci } q \text{ existují transpozice}\\ t_1, t_2, \ldots, t_l \text{ takové, že } q \circ (t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_l) = n\,.\end{array}$$

Z poslední věty odstavce 3.8. plyne, že $t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ$ $\circ\, t_l$ musí být inverzní permutace q^{-1} k permutaci q, tj. $q^{-1} = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_l$. Každou permutaci inverzní k nějaké permutaci q na množině I tedy můžeme vyjádřit jako složení nějakých transpozic. A protože každá permutace je inverzní k nějaké jiné, q je inverzní ke q^{-1}, dostáváme

$$\text{(II)}\quad \begin{array}{l}\text{pro každou permutaci } q \text{ existují transpozice}\\ u_1, u_2, \ldots, u_m \text{ tak, že } q = u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_m\,.\end{array}$$

Dokázali jsme tak, že z vlastnosti (I) plyne vlastnost (II). Platí to i naopak, z (II) plyne (I). Vyjádříme q^{-1} jako složení transpozic: $q^{-1} = u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_m$. Potom platí $q \circ (u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_m) = q \circ q^{-1} = n$, neboli platí vlastnost (I). Obě vlastnosti (I) a (II) jsou proto ekvivalentní. Budeme říkat, že

každou permutaci lze složit z transpozic.

Formulace (I) je výhodnější při řešení hlavolamů, formulace (II) je zase vhodnější pro teoretické zkoumání permutací. Uvidíme to v příštím odstavci.

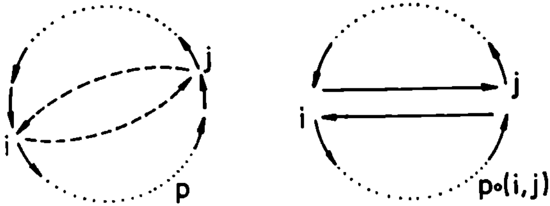
Po těchto poněkud teoretičtějších úvahách se vrátíme zpět k naší nezajímavé hře. Její řešení je opravdu snadné. Každou permutaci lze složit, máme-li k dispozici všechny transpozice. Nalezení posloupnosti transpozic, kterými z nějaké permutace p dostaneme permutaci identickou, také není nijak obtížné. Vezmeme vždy nějaký prvek, který není na správném místě, a uděláme transpozici, která ho na správné místo převede. Tím postupně zvyšujeme počet prvků na správných místech, až dostaneme všechny tam, kde mají být.

Jakkoliv je hra, ve které můžeme dělat všechny transpozice, snadná, můžeme se z ní hodně poučit. Zjistili jsme, že každou permutaci lze složit z transpozic. Kdybychom uměli na každé Rubikově kostce najít postupy, které udělají libovolnou transpozici, bylo by snadné dostat všechny prvky na správná místa. Tím bychom uměli řešit všechny hry bez orientace a také trochu hry s orientací. Brzy si ale ukážeme, že tak jednoduché to zase není. V mnoha případech postupy, které by udělaly nějakou transpozici, vůbec neexistují, zrovna Rubikova krychle je takový případ. Nebo sice existují, jsou ale příliš dlouhé a jejich nalezení obtížné. Tak je tomu třeba na uších.

Přesto se touto myšlenkou budeme ještě zabývat. Její upravená verze nám už umožní vyřešit všechny hlavolamy bez orientace a dostat všechny prvky na správné místo u her s orientací. Napřed ale zopakujeme a zobecníme poznatky druhé kapitoly.

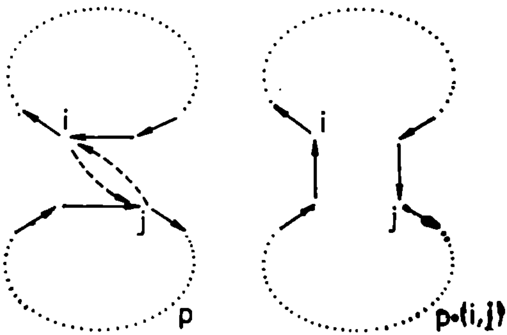
3.11. Sudé a liché permutace. V tomto odstavci ukážeme, že všechny permutace na množině $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ můžeme přirozeným způsobem rozdělit na sudé a liché podobně jako celá čísla. V podstatě jsme to udělali už ve druhé kapitole při zkoumání pozic u patnáctky. Tam měla množina I šestnáct prvků.

Vezmeme nějakou permutaci p na množině I a transpozici (i, j). Jak se liší grafy permutací p a $p \circ (i, j)$? Jsou-li i a j ve stejném cyklu permutace p — obrázek 3.26. — rozpadne se tento cyklus do dvou menších cyklů v grafu $p \circ (i, j)$. Ostatní cykly se nezmění, jejich celkový počet se tak zvětší o jeden.



Obr. 3.26

Jsou-li prvky i, j naopak v různých cyklech v grafu p, propojí se tyto dva cykly do jednoho velkého v grafu $p \circ (i, j)$.



Obr. 3.27

I v tomto případě se tak počet cyklů změní, tentokrát zvětší, o jeden. V každém případě se proto počty cyklů v permutacích p a $p \circ (i, j)$ liší o jeden. Přidáme-li k p sudý počet transpozic, musí se lišit počty cyklů v p a v $p \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{2m}$ o sudé číslo. Přidáme-li lichý počet transpozic, je rozdíl mezi počtem cyklů v p a v $p \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{2m+1}$ vždy lichý.

Rozdíl mezi počtem cyklů v identické permutaci n

a v permutaci $n \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{2m}$ (složení sudého počtu transpozic) je proto vždy sudý, rozdíl mezi počtem cyklů v n a v $n \circ t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{2m+1} = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{2m+1}$ (složení lichého počtu transpozic) je vždycky lichý. Z minulého odstavce víme, že každou permutaci p můžeme složit z transpozic, $p = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_l$. Je-li rozdíl mezi počtem cyklů v identické permutaci (ten se rovná k, každý cyklus má délku 1) a v permutaci p sudý, musíme použít sudý počet transpozic, je-li rozdíl lichý, pak musí být číslo l liché. Tyto úvahy vedou k následující definici.

Permutace p na množině I je *sudá*, je-li rozdíl mezi počtem prvků I a počtem cyklů v p sudý, a je *lichá*, je-li tento rozdíl lichý.

Cvičení 3.22. Které z následujících permutací jsou sudé a které liché?

$$p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 2, 3, 5, 4, 1 \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 3, 1, 2, 5, 6, 4 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, & 8, 9, 10, 11, 12 \\ 7, 4, 6, 1, 9, 2, 8, 10, 3, & 5, 11, 12 \end{pmatrix} n = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3.23. Kterých permutací na množině I je více, sudých, nebo lichých?

Permutace p a inverzní permutace p^{-1} mají stejný počet cyklů stejných délek, jejich grafy se liší jen ve směru šipek. Obě jsou současně buď liché, nebo sudé. Už před definicí sudých a lichých permutací jsme ukázali následující *pravidlo o počtu transpozic.*

Permutace p je sudá, právě když ji lze složit ze sudého počtu transpozic, a je lichá, právě když ji lze složit z lichého počtu transpozic.

S tímto pravidlem snadno zjistíme, kdy je složení dvou permutací sudé a kdy liché. Vezměme si dvě permutace p a q na množině I a jejich libovolná vyjádření $p = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_l$ a $q = u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_m$ jako složení transpozic. Složenou permutaci $p \circ q$ pak můžeme vyjádřit jako $p \circ q = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_l \circ u_1 \circ \ldots \ldots \circ u_m$. K rozhodnutí, je-li $p \circ q$ sudá nebo lichá, stačí zjistit, je-li číslo $l + m$ sudé nebo liché. Je sudé, jestliže jsou obě čísla l a m současně sudá nebo současně lichá, a je liché v opačném případě. Permutace $p \circ q$ je tedy sudá, právě když jsou obě permutace p a q sudé nebo obě liché, a je lichá, právě když je jedna z nich sudá a druhá lichá. Skládání permutací má stejné vlastnosti jako sčítání celých čísel.

Složení dvou sudých nebo dvou lichých permutací je sudá permutace, složení sudé s lichou je permutace lichá.

Toto pravidlo budeme nazývat *pravidlo o paritě složení permutací*. Je to pravidlo velmi důležité, s jeho pomocí už budeme v příštím odstavci schopni dokázat neřešitelnost nejrůznějších pozic na mnoha hlavolamech. Všimněte si ještě, jak byl při jeho odvození užitečný ekvivalentní popis sudých a lichých permutací pomocí počtu transpozic potřebných k jejich složení. Kdybychom měli používat pouze definici, museli bychom počítat počet cyklů v $p \circ q$ v závislosti na počtech cyklů v permutacích p a q, což by bylo podstatně složitější. Různé pohledy na stejnou věc jsou vždy užitečné. Ukážeme si ještě jeden pohled na sudé a liché permutace.

Tentokrát budeme počítat počet sudých cyklů v permutacích p a $p \circ (i, j)$. Jsou-li prvky i, j v témže cyklu permutace p, rozpadne se tento cyklus na dva menší v $p \circ (i, j)$. Má-li původní cyklus lichou délku, musí být jeden z menších cyklů sudý a druhý lichý, sudých cyklů v permutaci $p \circ (i, j)$ je tedy o jeden více než v permutaci p. Je-li původní velký cyklus sudý, musí být oba menší buď sudé, nebo liché. Ve všech třech případech se tak počet sudých cyklů v p a $p \circ (i, j)$ liší o jeden.

Zcela stejně se ukáže, že také v případě, kdy jsou i, j v různých cyklech grafu p, je rozdíl mezi počtem sudých cyklů v p a $p \circ (i, j)$ rovný jedné (v absolutní hodnotě).

Identická permutace n má pouze liché cykly délky 1, žádný sudý. Jestliže tedy nějakou permutaci p složíme ze sudého počtu transpozic, musí mít sudý počet sudých cyklů, a složíme-li ji z lichého počtu transpozic, musí mít lichý počet sudých cyklů. Tím jsme ukázali *pravidlo o počtu sudých cyklů.*

Permutace je sudá, právě když má sudý počet cyklů sudé délky, a je lichá, právě když má lichý počet cyklů sudé délky.

Cvičení 3.24. Každá transpozice je lichá permutace.

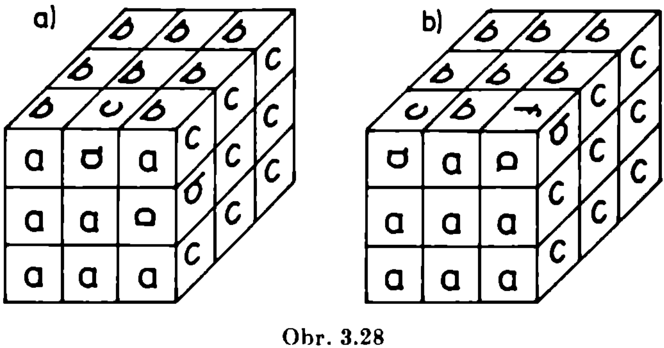
V odstavcích 3.4. a 3.5. jsme se naučili zaznamenávat polohu pohyblivých prvků v pozicích na hlavolamech pomocí permutací. Nyní už umíme mezi permutacemi rozlišovat sudé a liché, můžeme tedy rozlišovat také mezi pozicemi.

Pozice na nějakém hlavolamu je *sudá*, je-li její polohová permutace sudá, a je *lichá*, je-li její polohová permutace lichá.

Cvičení 3.25. Které z následujících pozic na uších jsou sudé a které liché: pozice na obrázku 3.8.b, 3.13.a, 3.13.b.

Cvičení 3.26. Je pozice na Rubikově krychli na obrázku 3.10. sudá, nebo lichá? Její graf je na obrázku 3.11.

3.12. Některé neřešitelné pozice. Konečně se můžeme přesvědčit o neřešitelnosti mnoha pozic na hlavolamech. Začneme opět Rubikovou krychlí. Na obrázku 3.28. jsou dvě pozice. Všechny kostičky s výjimkou dvou jsou vždy na správných místech.



Obr. 3.28

V pozici a) jsou přehozené pouze hranové kostičky *ab* a *ac*, v pozici b) jsou špatně jenom rohové kostičky *abc* a *abf*. Polohové permutace obou pozic jsou transpozice, mají jeden cyklus délky 2 a ostatní s délkou 1. Obě pozice jsou proto liché.

Dříve než dokážeme neřešitelnost těchto pozic, naučíme se ještě rozlišovat sudé a liché tahy na hračkách. Každému tahu jsme přiřadili nějakou permutaci — polohovou permutaci pozice, kterou tímto tahem dostaneme z pozice základní.

Budeme říkat, že nějaký *tah* je *sudý*, jestliže tímto tahem uděláme sudou permutaci, a že je *lichý*, jestliže jím uděláme permutaci lichou.

Každý tah na Rubikově krychli udělá permutaci, která má dva cykly délky 4 a ostatní cykly délky 1. Tato permutace je sudá, má dva sudé cykly.

Každý tah na Rubikově krychli je sudý.

Z tahů skládáme postupy. Jakou permutaci uděláme nějakým postupem $\mathbf{P} = X_1X_2 \ldots X_m$? V odstavci 3.7. jsme si vysvětlili, že permutaci, kterou udělá postup $\mathbf{P}$, dostaneme složením permutací, které udělají jednotlivé tahy. Symbolicky to zapisujeme $\mathbf{PV} = (X_1\mathbf{V}) \circ (X_2\mathbf{V}) \circ \circ \ldots \circ (X_m\mathbf{V})$. Právě jsme si ukázali, že každý tah na Rubikově krychli je sudý, udělá sudou permutaci. Všechny permutace $X_i\mathbf{V}$ jsou proto sudé. Podle pravidla o paritě složení permutací musí být sudé i jejich složení, permutace $\mathbf{PV}$.

Každý postup na Rubikově krychli udělá sudou permutaci.

Už z první kapitoly, z odstavce 1.9., víme, že řešitelné jsou jenom ty pozice, které můžeme dostat ze základní nějakým postupem. Každý postup ale udělá sudou permutaci, nikdy lichou. Liché pozice jsou proto neřešitelné.

> Všechny liché pozice na Rubikově krychli jsou neřešitelné.

A tak obě liché pozice na obrázku 3.28. jsou neřešitelné. Na Rubikově krychli neexistuje žádný postup, který by prohodil pouze dva prvky, a ostatní nechal na původních místech. Transpozice nejdou udělat.

Jiná varianta důkazu neřešitelnosti lichých pozic je v následujícím cvičení.

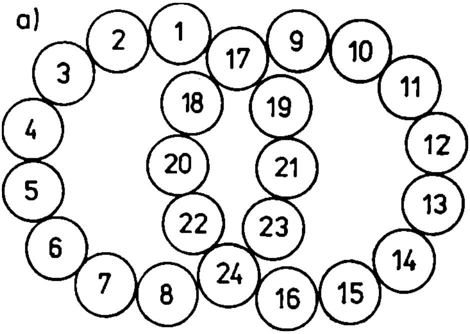
Cvičení 3.27. Jaká je polohová permutace pozice, kterou dostaneme z liché pozice nějakým postupem? Můžeme někdy dostat pozici, ve které jsou všechny prvky na správných místech?

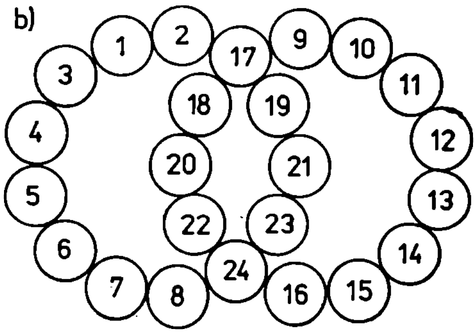
V příští kapitole ukážeme, jak každou sudou pozici srovnat do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Každá sudá pozice je srovnatelná. Neznamená to ještě, že je řešitelná. I mezi sudými pozicemi je mnoho neřešitelných. Příčina jejich neřešitelnosti je ale v orientacích, nikoliv už v polohách jednotlivých prvků.

A teď na další hračky!

Uši. Každý tah udělá jeden cyklus délky 12 a zbývající cykly jsou jednoprvkové. Na uších jsou tahy liché, mají jeden sudý cyklus. Pomocí pravidla o paritě složení permutací zjistíme, že sudým počtem tahů uděláme sudou pozici a lichým počtem lichou. Řešitelné pozice na uších mohou být proto jak sudé, tak liché. V příští kapitole ukážeme, že ve skutečnosti jsou všechny pozice řešitelné.

Jiné je to u varianty s lichým počtem kuliček v jednom uchu. Na obrázku 3.29. je jich třináct.

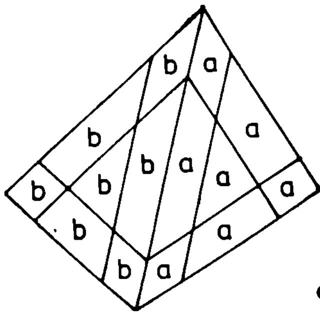




Obr. 3.29

Na obrázku a) je základní pozice, pozice na obrázku b) je lichá, její polohová permutace je transpozice. Každý tah udělá jeden cyklus délky 13 a ostatní cykly jsou délky 1. Tentokrát je každý tah sudý a pravidlo o paritě složení permutací pak dává, že každý postup udělá sudou permutaci. Liché pozice jsou proto neřešitelné. Sudé řešitelné jsou, jak uvidíme v příští kapitole.

Čtyřstěn. Touto hrou jsme se dosud příliš nezabývali, a tak ji nyní probereme podrobněji. Čtyřstěn má čtyři pohyblivé vrstvy, tvoří je vždy sedm prvků ležících v jedné stěně. Každou vrstvou lze otočit o 120° vpravo nebo vlevo. Stěny a vrstvy v základní pozici označíme podle obrázku 3.30. písmeny *a*, *b*, *c*, *d*, zadní stěna je *c* a dolní *d*. Příslušná otočení vpravo pak budeme značit A, B, C, D.



Obr. 3.30

Poloha a orientace prvků v základní pozici je jednoznačně určená čtyřmi stěnovými trojúhelníky, které tvoří souřadný systém na čtyřstěnu. Můžeme jimi pootáčet, nelze je ale prohazovat. Jednotlivé prvky budeme označovat tak jako na Rubikově krychli, seznamem písmen, kterými jsou označené. Stěnové trojúhelníky budou *a*, *b*, *c*, *d*, hranové prvky *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd* a *cd* a rohové *abc*, *abd*, *acd* a *bcd*. Čtyřstěn je hra nesouvislá, má dvě orbity, šestiprvkovou hranovou a čtyřprvkovou rohovou. Je to hra úplná, každý tah lze udělat kdykoliv, a s orientací.

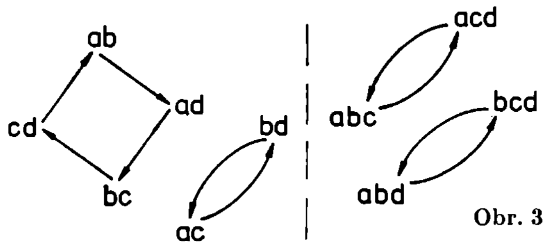
Souřadný systém stěnových trojúhelníků určuje jediné správné místo v základní pozici pro každý pohyblivý prvek. Hranový prvek *ab* musí ležet mezi trojúhelníky

a a b, rohový abc pak ve společném vrcholu stěn, v jejichž středech jsou trojúhelníky a, b a c.

Polohu pohyblivých prvků zapisujeme pomocí tabulek a grafu. Tak třeba

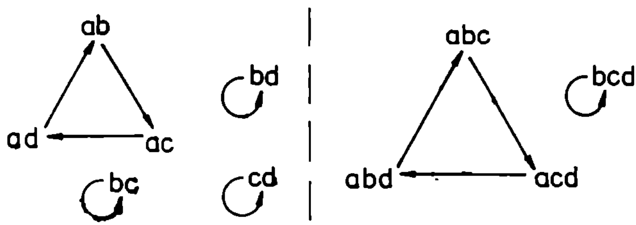
$$p = \begin{pmatrix} ab, & ac, & ad, & bc, & bd, & cd, & abc, & abd, & acd, & bcd \\ ad, & bd, & bc, & cd, & ac, & ab, & acd, & bcd, & abc, & abd \end{pmatrix}$$

je tabulka polohové permutace nějaké pozice na čtyřstěnu, její graf je na obrázku 3.31.



Obr. 3.31

Jaké permutace udělají jednotlivé tahy? Třeba tah A? Prvek ab přejde na místo ac, ac na místo ad a ad zpět na místo ab. Jiné hranové prvky se nepohybují. Z rohových přejde abc na místo acd, acd na místo abd a abd zpět na místo abc. Prvek bcd se nepohybuje. Graf permutace, kterou udělá tah A, je na obrázku 3.32.



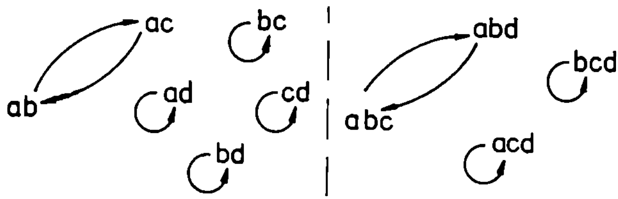
Obr. 3.32

Má dva cykly délky 3 a čtyři cykly délky 1. Tah A je sudý, nemá žádný cyklus sudé délky. Také všechny ostatní tahy jsou sudé.

Každý tah na čtyřstěnu je sudý.

Složením sudých permutací dostaneme jenom sudé permutace, každý postup na čtyřstěnu proto udělá sudou permutaci. Liché pozice jsou neřešitelné.

O Rubikově krychli jsme si řekli, a v příští kapitole to dokážeme, že všechny sudé pozice jsou srovnatelné, lze je převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Na čtyřstěnu to ale neplatí. Na obrázku 3.33. je graf pozice, kterou nejde srovnat. Je neřešitelná, protože ji nikdy nedostaneme do pozice, ve které by byly všechny prvky na správných místech.



Obr. 3.33

Proč to nejde? Podívejme se ještě jednou na obrázek 3.32., na graf permutace, kterou udělá tah A. Soustředíme-li se jenom na hranovou část, vidíme, že na hranových prvcích udělá tah A také sudou permutaci, má jeden trojcyklus a tři cykly délky 1. A protože to platí pro každý tah, jsou všechny tahy sudé na hranových prvcích. Každý postup proto udělá na hranových kostičkách sudou permutaci, nikdy lichou. Všechny pozice, jejichž polohové permutace jsou liché na hranových prvcích, jsou proto neřešitelné.

Také na rohových prvcích dělají všechny tahy, a tedy také všechny postupy, sudé permutace. Tím jsme podstatně zvětšili počet pozic, o kterých umíme dokázat, že jsou neřešitelné.

Každá pozice na čtyřstěnu, jejíž polohová permutace na hranových nebo na rohových prvcích je lichá, je neřešitelná.

Polohová permutace žádné řešitelné pozice proto nemůže mít graf jako na obrázku 3.33.

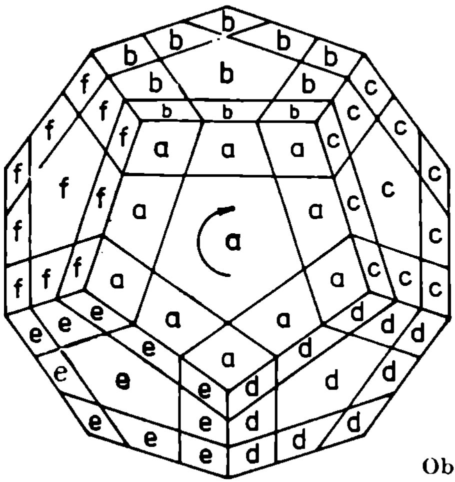
Jako obvykle slíbíme, že v příští kapitole najdeme postupy, které všechny ostatní pozice srovnají, převedou do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech.

Dvanáctistěn. Tato hračka má, aspoň pokud jde o polohy prvků, podobné vlastnosti jako čtyřstěn. Na obrázku 3.34. vidíme dvanáctistěn v základní pozici a s naznačeným tahem A. Libovolnou z dvanácti vrstev můžeme otáčet vpravo nebo vlevo o 72°. Také tady tvoří prvky ve středech stěn souřadný systém, určující správné místo a orientaci pro každý pohyblivý prvek. Dvanáctistěn je hra nesouvislá, jednu orbitu tvoří třicet hranových prvků, druhou dvacet rohových. Je to hra úplná a s orientací.

Tahem A uděláme permutaci, která má jeden cyklus délky 5 na hranových kostičkách, druhý cyklus délky 5 na rohových kostičkách, a zbývající cykly mají délku 1. Stejné délky cyklů mají také všechny ostatní permutace, které uděláme všemi možnými tahy. Každý tah, a tedy také každý postup, udělá jak na hranových, tak na rohových prvcích pouze sudé permutace.

> Každá pozice na dvanáctistěnu, jejíž polohová permutace na hranových nebo na rohových prvcích je lichá, je neřešitelná.

Všechny ostatní pozice jsou srovnatelné, lze je dostat do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Kvůli orientacím je mezi nimi stále ještě dost neřešitelných.



Obr. 3.34

Domino. Na dominu jsou dva různé typy tahů — otočení čtvercovou vrstvou a otočení některou ze čtyř obdélníkových vrstev. Grafy permutací, které tyto tahy udělají, jsou na obrázku 3.19. Otočení čtvercovou vrstvou, část a), udělá sudou permutaci, která má dva cykly délky 4 a ostatní jednoprvkové. Otočení boční obdélníkovou vrstvou, část b), udělá permutaci lichou — má tři cykly délky 2. Na dominu tedy existují jak sudé, tak liché tahy, řešitelné pozice mohou být proto sudé i liché. Ve skutečnosti jsou řešitelné všechny pozice, ukážeme to rovněž v příští kapitole.

Krychle 2 × 2 × 2. Na této krychli jsou liché tahy, každý udělá jeden čtyřcyklus — obrázek 3.20. Různými postupy můžeme proto udělat sudé i liché permutace a v příští kapitole ukážeme, že každá pozice na krychli 2 × 2 × 2 je srovnatelná. Neřešitelné pozice ale existují, je to kvůli orientacím.

A nakonec ještě naposledy o neřešitelných pozicích na patnáctce.

Patnáctka. Na patnáctce jsou všechny tahy liché. Mění polohu pouhých dvou prvků, dělají transpozice. Chceme-li převést reklamní pozici 2.1. do základní pozice 1.11., musíme udělat nějaký speciální postup — začínáme a končíme prázdným místem v pravém dolním rohu. Trik se šachovnicí ukazuje, že každý speciální postup musí mít sudý počet tahů, začíná a končí prázdným místem stejné barvy. Každý speciální postup tak udělá permutaci, která je složením sudého počtu transpozic, a tedy sudá.

Uděláme-li nějaký speciální postup v liché reklamní pozici, dostaneme pozici, jejíž polohová permutace je složením liché (reklamní) a sudé (speciálním postupem udělané) permutace. Výsledek je proto zase lichá pozice, nikdy sudá základní. Reklamní pozice 2.1. je opravdu neřešitelná.

3.13. Pojem grupy. Symetrická a alternativní grupa. Zopakujme si vlastnosti skládání permutací na množině I, které jsme zjistili v odstavci 3.8.

a) **Asociativita.** Pro každé tři permutace p, q, r na množině I platí $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$.

b) **Existence neutrálního prvku.** Identická permutace n je neutrální vzhledem ke skládání permutací, složíme-li ji s nějakou permutací, tato permutace se nezmění. Platí $p \circ n = n \circ p = p$ pro každou permutaci p na I.

c) **Existence inverzního prvku.** Pro každou permutaci p existuje permutace p^{-1} taková, že $p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ$ $\circ\, p = n$. Permutace p^{-1} se nazývá *inverzní permutace* k permutaci p.

Podobné vlastnosti má operace sčítání na množině všech celých čísel.

a) **Asociativita.** Pro každá tři celá čísla platí $(x + y) +$ $+ z = x + (y + z)$.

b) **Existence neutrálního prvku.** Pro každé celé číslo x platí $x + 0 = 0 + x = x$, 0 je neutrální vzhledem ke sčítání.

c) **Existence inverzního prvku.** Pro každé celé číslo x platí $x + (-x) = (-x) + x = 0$, $-x$ je inverzní číslo k x.

Snadno ověříme, že také operace násobení na množině nenulových racionálních čísel má vlastnosti a), b) a c). Asociativita je známá, neutrální prvek je 1 a inverzní prvek k x je x^{-1}.

Jak vidět, operace, které každé dvojici prvků x, y nějaké množiny G přiřazují jednoznačně určený prvek

$x \circ y \in G$ a které mají vlastnosti a), b) a c), jsou v matematice časté a důležité. Byly proto pojmenovány zvláštním jménem.

Operaci, která každým dvěma prvkům nějaké množiny G přiřazuje jiný prvek této množiny, budeme obecně říkat *skládání* na množině G a její výsledek $x \circ y$ bude *složení* prvků x, $y \in G$. V konkrétním případě může být operací sčítání, násobení, nebo třeba skládání permutací.

Množina G spolu s operací skládání na G se nazývá *grupa*, jestliže splňuje tyto podmínky:

a) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pro každé tři prvky x, y, $z \in G$,

b) existuje prvek $n \in G$ takový, že $x \circ n = n \circ x = x$ pro každý prvek $x \in G$, prvek n se nazývá *neutrální prvek* grupy G,

c) ke každému prvku $x \in G$ existuje prvek $x^{-1} \in G$ takový, že $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = n$, prvek x^{-1} se nazývá *inverzní prvek* k x.

Jinak řečeno, operace je asociativní, existuje neutrální prvek a ke každému prvku existuje prvek inverzní. Podmínkám a), b), c) se také říká *axiómy grupy*.

Známe už tři příklady grup. Množina S_I všech permutací na I spolu s operací skládání permutací je grupa. Budeme ji značit $\mathbf{S}_I$ a nazývat *symetrická grupa* na množině I. Také množina všech celých čísel spolu s operací sčítání je grupa — *aditivní grupa celých čísel*. Značit ji budeme $\mathbf{Z}$. Také množina nenulových racionálních čísel spolu s operací násobení je grupa. Je to *multiplikativní grupa racionálních čísel* a obvykle se označuje $\mathbf{Q}_0$.

Musíme zdůraznit, že grupa je vždy množina spolu s nějakou operací, není to ani jenom množina, ani jenom operace. Zatímco množina celých čísel s operací sčítání je grupa, stejná množina s operací násobení grupa není. Násobení je sice asociativní, neexistuje ale neutrální prvek, kazí to 0. Množina nenulových celých čísel s operací násobení také není grupa. Násobení je asociativní a existuje i neutrální prvek 1, k číslu 2 však neexistuje prvek inverzní (1/2 není celé číslo, a nepatří tedy do Z). Jiné příklady jsou ve cvičení.

Cvičení 3.28. Které z následujících množin s příslušnými operacemi jsou grupy?

a) množina racionálních čísel s operací sčítání,

b) množina nenulových racionálních čísel s operací sčítání,

c) množina reálných čísel s operací násobení,

d) množina nenulových reálných čísel s operací násobení,

e) množina celých čísel s operací násobení,

f) množina komplexních čísel s operací násobení,

g) množina nenulových komplexních čísel s operací násobení,

h) množina komplexních čísel s operací sčítání.

Další příklad vysvětlíme podrobněji. Podle pravidla o paritě složení permutací je složení libovolných dvou sudých permutací zase sudá permutace. Pro každé tři sudé permutace p, q, r platí $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$, protože to platí pro libovolné tři permutace. Skládání permutací je proto asociativní operace na množině všech sudých permutací na I. Tuto množinu budeme značit A_I. Neutrální prvek také existuje, identická permutace je sudá, nemá žádný sudý cyklus. A protože inverzní permutace k sudé je také sudá — má cykly stejných délek — existuje ke každé permutaci z A_I inverzní prvek v A_I. Množina A_I všech sudých permutací spolu s operací skládání permutací tedy tvoří grupu. Tato grupa se nazývá *alternativní grupa* na množině I. Označovat ji budeme $\boldsymbol{A}_I$.

Význam asociativity. Skládání v grupě je definováno pouze pro dvojice prvků. Máme-li složit tři prvky x, y, z v tomto pořadí, musíme pomocí závorek určit, jaké dvojice postupně skládat. Můžeme to udělat dvěma způsoby: $(x \circ y) \circ z$ a $x \circ (y \circ z)$. Asociativita říká, že oba způsoby vedou ke stejnému výsledku, který označíme $x \circ y \circ z$. V případě čtyř prvků už je možností více.

Cvičení 3.29. Pomocí závorek určete všechny možné způsoby, jak složit v nějaké grupě čtyři prvky u, v, x, y v tomto pořadí. Vede to vždy ke stejnému výsledku?

Máme-li složit v nějaké grupě G m prvků $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_m$ v tomto pořadí, je možností ještě více. Z asociativity ale plyne, že všechny vedou ke stejnému výsledku. Dokážeme to teď indukcí podle počtu prvků, tj. podle m.

*Je-li $m = 3$, skládáme tři prvky, a rovnost $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_2 \circ a_3)$ plyne přímo z definice grupy, skládání je asociativní.

Předpokládejme nyní, že $m > 3$ a že všechny způsoby, jak spočítat složení méně než m prvků v daném pořadí, vedou ke stejnému výsledku. Znamená to, že každý výpočet složení libovolných prvků $b_1, b_2, \ldots, b_l$ v tomto pořadí dává stejný výsledek, který označíme $b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_l$. Počítáme-li nějak složení $a_1, a_2, \ldots, a_m$, v posledním kroku děláme výpočet $(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_l) \circ (a_{l+1} \circ \ldots \circ a_m)$. V obou závorkách je složení méně než m prvků, můžeme proto použít indukční předpoklad, všechny možné výpočty vedou ke stejnému výsledku. Při jiném výpočtu složení všech m prvků počítáme v posledním kroku $(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ \ldots \circ a_m)$. Pro výpočty v závorkách opět používáme indukční předpoklad. Pokud je $k = l$, oba výpočty vedou samozřejmě ke stejnému výsledku. Budeme předpokládat, že třeba $k < l$. První závorku v prvním výpočtu ještě rozdělíme na $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_l = (a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k) \circ$ $\circ (a_{k+1} \circ \ldots \circ a_l)$.

Prvním způsobem tak dostáváme výsledek

$$(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_l) \circ (a_{l+1} \circ \ldots \circ a_m) =$$
$$= ((a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ \ldots \circ a_l)) \circ$$
$$\circ (a_{l+1} \circ \ldots \circ a_m).$$

Nyní použijeme-li asociativitu, rovná se to dále

$$(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k) \circ ((a_{k+1} \circ \ldots \circ a_l) \circ (a_{l+1} \circ$$
$$\circ \ldots \circ a_m)) = (a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ \ldots \circ$$
$$\circ a_m).$$

Na poslední řádce je ale poslední krok při výpočtu druhým způsobem. Oba výsledky se tak rovnají. Všechny možné způsoby výpočtu složení $a_1, a_2, \ldots a_m$ proto vedou ke stejnému výsledku, který označíme $a_1 \circ a_2 \circ$ $\circ \ldots \circ a_m$.

Matematickou indukcí jsme tak dokázali, že při výpočtu složení libovolně mnoha prvků nějaké grupy v daném pořadí dostaneme všemi možnými způsoby vždy jeden a tentýž výsledek.

Zpětně jsme tím dokázali také vlastnost skládání permutací, kterou jsme uvedli v odstavci 3.8. a používali v odstavcích 3.10., 3.11. a 3.12. Nic než jednoduché vlastnosti skládání, dokázané už v odstavci 3.8., jsme k tomu nepotřebovali.

Vrátíme se ještě jednou k základním příkladům grup z počátku tohoto odstavce. Symetrická a alternativní grupa se od číselných grup $\boldsymbol{Z}$ a $\mathbf{Q}_0$ liší v jednom podstatném rysu. Existují dvojice sudých permutací p, q takové, že $p \circ q \neq q \circ p$. Každý snadno najde dvě takové permutace, pokud má I aspoň čtyři prvky. Naproti tomu $x + y = y + x$ pro libovolná dvě celá čísla a $xy = yx$ pro každá dvě nenulová racionální čísla. Budeme říkat, že grupa $\mathbf{G}$ na množině G je *komutativní*, jestliže $g \circ h = h \circ g$ pro každé dva prvky $g, h \in G$. Grupy $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}_0$ jsou komutativní, symetrická a alternativní grupa komutativní nejsou, pokud má množina I aspoň čtyři prvky.

A kolik je vlastně sudých permutací? Pro ty, kdo nezvládli cvičení 3.22., a zajímá je výsledek, teď dokážeme, že na každé množině I, která je konečná a má aspoň dva prvky, je sudých permutací přesně tolik, kolik je lichých.

Vybereme libovolné dva různé prvky $i, j \in I$ a transpozici $t = (i, j)$. Je-li p nějaká sudá permutace na I, pak $p \circ t$ je podle pravidla o paritě složení permutací lichá. Každé sudé permutaci p jsme tak přiřadili lichou permutaci $p \circ t$. Jsou-li p, q sudé permutace a $p \circ t = q \circ t$, pak také

$$(p \circ t) \circ t = (q \circ t) \circ t,$$

a tedy také

$$p \circ (t \circ t) = q \circ (t \circ t),$$

tj.

$$p = q.$$

Různým sudým permutacím proto odpovídají různé liché. Lichých permutací je tedy aspoň tolik, kolik je sudých. Abychom dokázali, že je jich stejně, musíme se přesvědčit o tom, že každá lichá permutace je přiřazena nějaké sudé. To je ale snadné. Je-li r lichá, pak $p = r \circ t$ je sudá, a této permutaci je přiřazena lichá permutace $p \circ t = (r \circ t) \circ t = r \circ (t \circ t) = r$. Sudých permutací je proto přesně tolik co lichých. A protože všech permutací na k-prvkové množině je $k!$ (cvičení 3.11.), je sudých permutací na k-prvkové množině $(1/2)\, k!$.

***3.14. Podgrupy. Lagrangeova věta.** Stejnou metodou teď dokážeme Lagrangeovu větu. Jako jeden z prvních výsledků rodící se teorie grup ji dokázal ještě v 18. století francouzský matematik J. L. Lagrange (1736 až 1813).

Dříve než ji zformulujeme a dokážeme, vysvětlíme si pořádně, co je to podgrupa. Každá grupa **G** je určena nějakou množinou G a operací, která každým dvěma prvkům $x, y \in G$ přiřazuje jejich složení $x \circ y \in G$. Je-li nyní H nějaká podmnožina G, je pro každé dva prvky $x, y \in H$ definované jejich složení (v grupě **G**) $x \circ y$. Toto složení nemusí být samozřejmě prvkem H. Pokud ale je $x \circ y \in H$ pro libovolné dva prvky $x, y \in H$, můžeme se ptát, je-li H spolu s operací skládání indukovanou takto z grupy **G** také grupa. Jaké podmínky musí množina H splňovat? Jednu jsme si už řekli. Je-li $x, y \in H$, musí být také $x \circ y \in H$. Operace skládání na množině H je potom asociativní, rovnost $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ platí pro každé tři prvky $x, y, z \in H$, protože platí také v grupě **G**. Je-li navíc neutrální prvek n grupy **G** v množině H a pro každý prvek $x \in H$ je také inverzní prvek x^{-1} v H, splňuje množina H spolu s operací skládání indukovanou z grupy **G** všechny axiómy grupy, a je to tedy také grupa. Říkáme, že je to *podgrupa* grupy G.

Několik příkladů. Aditivní grupa celých čísel **Z** je podgrupou aditivní grupy racionálních čísel (tj. grupy všech racionálních čísel s operací sčítání).

Množina $\{1, -1\}$ spolu s operací násobení je grupa (ověřte to!) a je to podgrupa multiplikativní grupy nenulových racionálních čísel $\mathbf{Q}_0$.

Multiplikativní grupa racionálních čísel $\mathbf{Q}_0$ je grupa, není to ale podgrupa aditivní grupy racionálních čísel. Nenulová racionální čísla sice tvoří podmnožinu množiny všech racionálních čísel, operace jsou ale definovány různě; 2.3 (v grupě $\mathbf{Q}_0$) se nerovná $2 + 3$ (v aditivní grupě racionálních čísel).

Alternativní grupa $\mathbf{A}_I$ je podgrupou symetrické grupy $\mathbf{S}_I$.

A teď k Langrangeově větě.

Lagrangeova věta. *Je-li* $\mathbf{G}$ *konečná grupa a* $\mathbf{H}$ *její podgrupa, pak počet prvků grupy* $\mathbf{H}$ *je dělitelem počtu prvků grupy* $\mathbf{G}$.

Důkaz. Označíme G množinu, na které je definována grupa $\mathbf{G}$, a H množinu, na které je definována grupa $\mathbf{H}$. Protože je $\mathbf{H}$ podgrupa $\mathbf{G}$, platí $H \subseteq G$. Můžeme předpokládat, že množina H má k prvků, a označíme je $h_1, h_2, \ldots, h_k$.

Je-li $H = G$, mají obě grupy stejný počet prvků. Jestliže $H \neq G$, existuje nějaký prvek $x_2 \in G$, který neleží v podmnožině H. Symbolem Hx_2 označíme množinu všech prvků tvaru $h \circ x_2$, kde $h \in H$. Všechny prvky $h \circ x_2$ leží v G. Ukážeme, že množiny H a Hx_2 mají stejný počet prvků.

Jsou-li h_i a h_j dva prvky H a $h_i \circ x_2 = h_j \circ x_2$, pak také $(h_i \circ x_2) \circ x_2^{-1} = (h_j \circ x_2) \circ x_2^{-1}$. Z asociativity pak plyne $h_i \circ (x_2 \circ x_2^{-1}) = h_j \circ (x_2 \circ x_2^{-1})$. Protože $x_2 \circ x_2^{-1} = n$, platí $h_i \circ n = h_j \circ n$, tj. $h_i = h_j$.

Všechny prvky $h_1 \circ x_2, h_2 \circ x_2, \ldots, h_k \circ x_2$ množiny Hx_2 jsou proto různé. A protože žádný jiný prvek v Hx_2 ležet nemůže, má Hx_2 stejný počet prvků jako H, tj. k.

Množiny H a Hx_2 jsou navíc disjunktní. Kdyby totiž existoval prvek $g \in H \cap Hx_2$, bylo by $g \in H$ a současně $g = h \circ x_2$ pro nějaký prvek $h \in H$. Potom ale $h^{-1} \circ g = x_2$. Protože $g, h \in H$, je také $h^{-1} \in H$ a $h^{-1} \circ g \in H$. Prvek $x_2 = h^{-1} \circ g$ by musel ležet v množině H, což je ve sporu s tím, jak jsme ho vybrali.

Množiny H a Hx_2 jsou proto opravdu disjunktní. Obě obsahují k prvků a jsou podmnožinami G. Množina G tak obsahuje aspoň $2k$ různých prvků:

$$\begin{aligned} H&: \; h_1, h_2, h_3, \ldots, h_k, \\ Hx_2&: h_1 \circ x_2, h_2 \circ x_2, \ldots, h_k \circ x_2. \end{aligned}$$

Je-li $G = H \cup Hx_2$, obsahuje G přesně $2k$ prvků. Je-li $G \neq H \cup Hx_2$, existuje prvek $x_3 \in G$, který v $H \cup Hx_2$ neleží. Symbolem Hx_3 označíme množinu všech prvků tvaru $h \circ x_3$, kde $h \in H$. Všechny tyto prvky opět leží v G. Stejně jako v případě množiny Hx_2 ukážeme, že Hx_3 obsahuje přesně k prvků a je disjunktní s H. Navíc je Hx_3 také disjunktní s Hx_2. Kdyby totiž existoval prvek $g \in Hx_3 \cap Hx_2$, platilo by $g = h_i \circ x_3$ a $g = h_j \circ x_2$ pro nějaké prvky $h_i, h_j \in H$. Z rovnosti $h_i \circ x_3 = h_j \circ x_2$ plyne $x_3 = h_i^{-1} \circ (h_j \circ x_2) = (h_i^{-1} \circ h_j) \circ x_2$. $\mathbf{H}$ je ale podgrupa $\mathbf{G}$, proto $h_i^{-1} \circ h_j \in H$, a tedy $x_3 \in Hx_2$, což je opět ve sporu s naším výběrem $x_3 \notin H \cup Hx_2$. Proto je Hx_2 disjunktní s Hx_3. Grupa $\mathbf{G}$ tak obsahuje aspoň $3k$ různých prvků

$$\begin{aligned} H&: \; h_1, h_2, h_3, \ldots, h_k, \\ Hx_2&: h_1 \circ x_2, h_2 \circ x_2, \ldots, h_k \circ x_2, \\ Hx_3&: h_1 \circ x_3, h_2 \circ x_3, \ldots, h_k \circ x_3. \end{aligned}$$

Jestliže je nyní $G = H \cup Hx_2 \cup Hx_3$, má $\mathbf{G}$ přesně $3k$ prvků. Je-li $G \neq H \cup Hx_2 \cup Hx_3$, vybereme libovolný prvek x_4, který v $H \cup Hx_2 \cup Hx_3$ neleží, a celý postup znovu opakujeme. Označíme Hx_4 množinu všech prvků tvaru $h \circ x_4$, kde $h \in H$. Množina Hx_4 obsahuje přesně k prvků a je disjunktní s $H \cup Hx_2 \cup Hx_3$. Množina G tak má aspoň $4k$ prvků. Takto pokračujeme dále, až nakonec po nějakých l krocích dostaneme úplný seznam všech prvků grupy $\mathbf{G}$:

$$
\begin{aligned}
&H\colon\; h_1, h_2, h_3, \ldots, h_k,\\
&Hx_2\colon h_1 \circ x_2, h_2 \circ x_2. \ldots, h_k \circ x_2,\\
&Hx_3\colon h_1 \circ x_3, h_2 \circ x_3, \ldots, h_k \circ x_3,\\
&\vdots\\
&Hx_l\colon h_1 \circ x_l, h_2 \circ x_l, \ldots, h_k \circ x_l.
\end{aligned}
$$

Celkový počet prvků množiny G je tedy kl. Lagrangeova věta je tím dokázána.

Počet prvků grupy G se nazývá *řád grupy* G a značí se $|\mathsf{G}|$. Řád symetrické grupy na k-prvkové množině je tedy $k!$, alternativní grupy na stejné množině pak $(1/2)k!$. Lagrangeovu větu můžeme formulovat také takto:

Je-li G *konečná grupa a* H *její podgrupa, pak číslo* $|\mathsf{G}|/|\mathsf{H}|$ *je celé.*

Toto číslo se nazývá index podgrupy H v grupě G. Index alternativní grupy A_I v symetrické grupě S_I je tedy 2.

***3.15. Grupy na hračkách.** Na každém úplném hlavolamu můžeme objevit řadu různých grup. V tomto odstavci si ukážeme dvě, grupu polohových permutací a grupu redukovaných postupů. V páté kapitole ukážeme další dvě, grupu řešitelných pozic a grupu všech možných pozic.

Grupa polohových permutací. Přesněji bychom ji měli nazývat grupa všech permutací, které můžeme udělat nějakými postupy. V této grupě leží všechny permutace p na množině I pohyblivých prvků, které můžeme vyjádřit ve tvaru $p = \mathsf{PV}$. Operací bude opět skládání permutací. Grupa polohových permutací na nějakém hlavolamu je proto podgrupa grupy všech permutací na množině I všech pohyblivých prvků.

Musíme ověřit, že to opravdu podgrupa symetrické grupy je. Jestliže permutaci p uděláme postupem P a permutaci q postupem Q, pak jejich složení $p \circ q$ uděláme složeným postupem PQ — odstavec 3.7. Inverzní permutaci p^{-1} uděláme inverzním postupem P^{-1}, také podle výsledků z odstavce 3.7. Zbývá nějak udělat identickou permutaci n. To je ale jednoduché, nemusíme dělat vůbec nic, stačí na to neutrální postup N.

Grupa redukovaných postupů. Redukované postupy a jejich skládání jsme definovali už v první kapitole. Nyní dokážeme, že množina všech redukovaných postupů spolu s operací redukovaného skládání tvoří grupu — grupu redukovaných postupů na nějakém úplném hlavolamu. Musíme ověřit axiómy grupy.

a) Jsou-li P, Q, R tři redukované postupy, pak oba postupy $(P \circ Q) \circ R$ a $P \circ (Q \circ R)$ dostaneme redukováním téhož postupu PQR. V prvém případě redukujeme napřed začátek PQ a potom připojíme R, ve druhém případě naopak začínáme od konce redukcí QR a pak přidáme P. Z jednoznačnosti redukce postupů dokázané v odstavci 1.10. plyne, že oběma způsoby dostaneme stejný výsledek, $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$.

b) Neutrální prvek existuje, je jím neutrální postup N, $P \circ N = N \circ P = P$ pro každý redukovaný postup P.

c) Inverzní postup P^{-1} k redukovanému postupu P je rovněž redukovaný. Je-li $P = X_1X_2 \dots X_k$, pak $P^{-1} = X_k^{-1}X_{k-1}^{-1} \dots X_1^{-1}$. Při redukci postupu $PP^{-1} = X_1X_2 \dots X_kX_k^{-1}X_{k-1}^{-1} \dots X_1^{-1}$ můžeme vynechávat dva prostřední tahy tak dlouho, až nic nezbyde, tj. až zbyde neutrální postup N. Proto $P \circ P^{-1} = N$. Ze stejného důvodu také platí $P^{-1} \circ P = N$.

Našli jsme tak dvě různé grupy na každém hlavolamu. První z nich je konečná grupa permutací, druhá pak nekonečná grupa postupů. Mezi oběma je úzký vztah, který si vysvětlíme v příštím odstavci.

***3.16. Homomorfismus a izomorfismus grup.** V odstavci 3.11. jsme dokázali pravidlo o paritě složení permutací. Toto pravidlo lze také vyjádřit způsobem na první pohled zcela odlišným.

Setkali jsme se už s grupou $\boldsymbol{T}$, kterou tvoří množina $\{1, -1\}$ spolu s operací násobení. Každé permutaci na množině I teď přiřadíme jedno z čísel 1 a -1:

je-li p sudá permutace, pak $p\boldsymbol{W} = 1$,
je-li p lichá permutace, pak $p\boldsymbol{W} = -1$.

Definovali jsme tak jakési zobrazení z množiny S_I všech permutací na I do množiny $\{1, -1\}$. Zobrazení $\boldsymbol{W}$ vystihuje jistou souvislost mezi symetrickou grupou $\boldsymbol{S}_I$ a grupou $\boldsymbol{T}$. Má následující vlastnosti:

a) $(p \circ q)\, \boldsymbol{W} = (p\boldsymbol{W})\, (q\boldsymbol{W})$,

to je vlastně pravidlo o paritě složení permutací. Složení dvou sudých nebo dvou lichých permutací je permutace sudá, složení sudé s lichou je permutace lichá.

b) $n\boldsymbol{W} = 1$,

identická permutace je sudá.

c) Inverzní permutace k sudé je sudá a k liché lichá, platí proto

$$(p\boldsymbol{W})\, (p^{-1}\boldsymbol{W}) = 1 .$$

Můžeme to vyjádřit také jinak, inverzní prvek k $p\boldsymbol{W}$

v grupě $\boldsymbol{T}$, to je $(p\boldsymbol{W})^{-1}$, se rovná $(p^{-1})\ \boldsymbol{W}$, neboli

$$(p\boldsymbol{W})^{-1} = (p^{-1})\ \boldsymbol{W}$$

pro každou permutaci p.

Podmínky a), b) a c) ukazují, že zobrazení $\boldsymbol{W}$ těsně souvisí se strukturou grup $\boldsymbol{S}_I$ a $\boldsymbol{T}$. Podmínka a) říká, že $\boldsymbol{W}$ zachovává operace skládání. Součin $p\boldsymbol{W}.q\boldsymbol{W}$ můžeme spočítat také tak, že napřed složíme p s q v grupě $\boldsymbol{S}_I$, a výsledek $p \circ q$ pak zobrazíme do grupy $\boldsymbol{T}$, $(p \circ q)\ \boldsymbol{W} = p\boldsymbol{W}.q\boldsymbol{W}$. Podmínka b) říká, že $\boldsymbol{W}$ zachovává také neutrální prvek, obraz $n\boldsymbol{W}$ neutrálního prvku grupy $\boldsymbol{S}_I$ je neutrální prvek grupy $\boldsymbol{T}$. A podmínka c) je o zachovávání inverzního prvku, obraz $p^{-1}\boldsymbol{W}$ inverzního prvku k p je inverzní k prvku $p\boldsymbol{W}$ v grupě $\boldsymbol{T}$, $p^{-1}\boldsymbol{W} = (p\boldsymbol{W})^{-1}$.

Struktura dvouprvkové grupy $\boldsymbol{T}$ se prostřednictvím zobrazení $\boldsymbol{W}$ odráží v symetrické grupě $\boldsymbol{S}_I$, a proto platí pravidlo o paritě složení permutací.

Zobrazení mezi grupami s vlastnostmi a), b) a c) tak umožňují porovnávat různé grupy, nakolik jsou podobné nebo odlišné.

Jsou-li $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{H}$ dvě grupy definované na množinách G a H, pak zobrazení $\boldsymbol{W}: G \to H$ se nazývá *homomorfismus grup* $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{H}$, jestliže splňuje podmínky

a) $(g \circ h)\ \boldsymbol{W} = (g\boldsymbol{W}) \circ (h\boldsymbol{W})$ pro každé dva prvky $g, h \in G$,

b) je-li n neutrální prvek grupy $\boldsymbol{G}$, pak $n\boldsymbol{W}$ je neutrální prvek grupy $\boldsymbol{H}$,

c) $g^{-1}\boldsymbol{W} = (g\boldsymbol{W})^{-1}$ pro všechny prvky g grupy $\boldsymbol{G}$.

To, že $\boldsymbol{W}$ je homomorfismus grup $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{H}$, zapisujeme $\boldsymbol{W} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$. Je-li zobrazení $\boldsymbol{W}$ navíc vzájemně jednoznačné, říkáme, že $\boldsymbol{W}$ je *izomorfismus grup* $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{H}$, a zapisujeme to $\boldsymbol{W} : \boldsymbol{G} \longleftrightarrow \boldsymbol{H}$. Grupy $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{H}$ jsou v tom případě *izomorfní*.

Izomorfní grupy jsou v podstatě stejné, liší se pouze ve jménech prvků množin G a H. V odstavci 3.18. ukázujeme žeme, že každá grupa je izomorfní nějaké grupě permutací, každou grupu si můžeme představit jako grupu permutací.

Nyní jeden příklad homomorfismu na hlavolamech. V minulém odstavci jsme si ukázali dvě grupy na každém úplném hlavolamu, grupu redukovaných postupů a grupu polohových permutací. V předchozím textu jsme často používali zobrazení V, jež každému redukovanému postupu P přiřazuje permutaci $p = PV$, kterou postup P udělá na množině I pohyblivých prvků. Ukážeme, že zobrazení V je homomorfismus grup. Musíme ověřit, že má vlastnosti a), b) a c).

a) V odstavci 3.7. jsme ukázali, že složeným postupem PQ uděláme permutaci, která je složením permutací PV a QV, tj. $(PQ)\,V = PV \circ QV$. Postup PQ ale nemusí být redukovaný, nerovná se vždy redukovanému složení $P \circ Q$. Jestliže ale v nějakém postupu vynecháme dvojici sousedních inverzních tahů, výsledná pozice se nezmění. Nezmění se proto ani její polohová permutace. Redukcí $P \circ Q$ postupu PQ proto udělám stejnou permutaci jako postupem PQ. A tak $(P \circ Q)\,V = (PQ)\,V = (PV) \circ (QV)$.

b) Neutrálním postupem N nic nezměníme, hračka zůstane v základní pozici n, proto $NV = n$.

c) Inverzním postupem P^{-1} uděláme permutaci inverzní k $p = PV$, dokázali jsme to také v odstavci 3.7. Platí proto

$$P^{-1}V = (PV)^{-1}.$$

Zobrazení V je tedy homomorfismus grup, který ukazuje, jak spolu souvisí postupy na hlavolamu a permutace, které jimi uděláme.

****3.17. Sylowovy věty.** Každá grupa G má určitě aspoň dvě podgrupy. Jednu tvoří grupa G samotná a druhou jednoprvková množina $\{n\}$, obsahující neutrální prvek G spolu s operací $n \circ n = n$. Tyto podgrupy nejsou příliš zajímavé, říká se jim *nevlastní podgrupy grupy* G. Všem ostatním podgrupám říkáme *vlastní*. Jaké další podgrupy G obsahuje? Část odpovědi známe už z odstavce 3.14. Lagrangeova věta říká, že řád každé podgrupy H grupy G musí dělit řád grupy G. Pokud je řád $|G|$ prvočíslo, nemůže G žádné další podgrupy kromě nevlastních obsahovat. Pokud ale řád G není prvočíslo, Lagrangeova věta o existenci dalších podgrup nic neříká, a vyvolává tak řadu dalších otázek:

1. Existuje pro každého dělitele k řádu grupy G podgrupa, která má přesně k prvků?
2. Pokud ne, pro které dělitele k čísla $|G|$ určitě existují podgrupy řádu k?
3. Pokud existují podgrupy řádu k, kolik takových podgrup G obsahuje?

Tyto otázky byly podrobně zkoumány v 19. století a výzkum vyvrcholil v práci německého matematika L. Sylowa v roce 1872. Sylow dokázal řadu hlubokých tvrzení o existenci, počtu a vzájemné poloze podgrup v konečných grupách. Tyto výsledky patří v současné době mezi základní poznatky teorie konečných grup a jsou shrnovány pod společný název Sylowovy věty. Pro zajímavost uvedeme nejjednodušší z nich.

Sylowova věta. *Je-li G konečná grupa, p prvočíslo a i přirozené číslo takové, že p^i dělí řád grupy G, pak existuje podgrupa H grupy G, která obsahuje přesně p^i prvků.*

Z této věty plyne, že každá konečná grupa G, jejíž řád není prvočíslo, obsahuje vlastní podgrupu. Existuje totiž prvočíslo p, které dělí $|G|$, a G musí obsahovat podgrupu řádu p.

3.18. Cayleyho reprezentace. Jako poněkud pokročilejší ukázku práce s axiómy grupy teď dokážeme, že každá grupa je izomorfní nějaké grupě permutací. Nebo jinak řečeno, každou grupu si lze představit (reprezentovat) jako nějakou grupu permutací. Autorem tohoto klasického výsledku teorie grup je anglický matematik A. C. Cayley (1821—1895), a reprezentace grupy jako grupy permutací, kterou ukážeme, se nazývá *Cayleyho reprezentace*.

Vezmeme si tedy nějakou grupu G. Množinu jejích prvků budeme označovat jako vždy G a operaci skládání $\circ$. Na množině G sestrojíme jakousi permutační grupu a ukážeme, že je izomorfní grupě G.

Každému prvku $a \in G$ musíme přiřadit nějakou permutaci p_a. Tuto permutaci definujeme na množině G předpisem

$$xp_a = x \circ a \text{ pro každý prvek } x \in G.$$

Nejdříve musíme dokázat, že zobrazení p_a je skutečně permutace, vzájemně jednoznačné zobrazení, na množině G. Každému prvku $x \in G$ je přiřazený přesně jeden prvek $xp_a = x \circ a$. Jsou-li x, y dva prvky G a $xp_a = yp_a$, pak podle definice zobrazení p_a platí $x \circ a = y \circ a$. Poslední rovnost složíme s prvkem a^{-1} zprava a použijeme asociativitu. Dostáváme tak postupně

$$\begin{aligned} (x \circ a) \circ a^{-1} &= (y \circ a) \circ a^{-1}, \\ x \circ (a \circ a^{-1}) &= y \circ (a \circ a^{-1}), \\ x \circ n &= y \circ n, \\ x &= y. \end{aligned}$$

Různé prvky G se proto zobrazují do různých prvků. Je-li $z \in G$ libovolný prvek, pak $(z \circ a^{-1})\, p_a = (z \circ a^{-1}) \circ a = z \circ (a^{-1} \circ a) = z$. Tím je dokázáno, že každý prvek $z \in G$ je přiřazen právě jednomu prvku G, p_a je opravdu permutace.

Teď dokážeme několik vlastností permutací p_a.

a) Jsou-li a, b prvky G, pak složení permutací $p_a \circ p_b$ má tuto vlastnost: pro každé $x \in G$ platí

$$x(p_a \circ p_b) = (xp_a)\, p_b = (x \circ a)\, p_b = (x \circ a) \circ b = \\ = x \circ (a \circ b) = xp_{a \circ b}.$$

To znamená, že $p_a \circ p_b = p_{a \circ b}$. Označíme-li symbolem H množinu všech permutací tvaru p_a pro nějaké $a \in G$, pak složení $p_a \circ p_b$ libovolných dvou permutací p_a, $p_b \in H$ patří také do H, rovná se $p_{a \circ b}$. Můžeme se proto ptát, tvoří-li H spolu s operací skládání permutací grupu, podgrupu symetrické grupy $\mathbf{S}_G$. K tomu potřebujeme zjistit, zda H obsahuje identickou permutaci na G a inverzní permutace.

Jak vypadá permutace p_n, určená neutrálním prvkem n grupy $\mathbf{G}$? Pro každé $x \in G$ platí $xp_n = x \circ n = x$. To znamená, že p_n je identická permutace na G.

A je-li $p_a \in H$, pak pro permutaci $p_{a^{-1}}$ platí $x(p_a \circ \circ p_{a^{-1}}) = xp_{a \circ a^{-1}} = xp_n = x$ a také $x(p_{a^{-1}} \circ p_a) = = xp_{a^{-1} \circ a} = xp_n = x$ pro každé $x \in G$. Permutace $p_{a^{-1}}$ je proto inverzní k p_a. Množina H spolu s operací skládání permutací je tedy grupa, budeme ji dále označovat $\mathbf{H}$.

Grupa permutací $\mathbf{H}$ je těsně spjata s grupou $\mathbf{G}$, a dokážeme teď, že je s ní izomorfní. Definujeme zobrazení $\mathbf{W} : G \to H$ předpisem

$$a\mathbf{W} = p_a.$$

Víme, že

a) $(a \circ b)\, \mathbf{W} = p_{a \circ b} = p_a \circ p_b = (a\mathbf{W}) \circ (b\mathbf{W})$,

b) $n\mathbf{W} = p_n$ — identická permutace na G a neutrální prvek grupy $\mathbf{H}$,

c) $a^{-1}\mathbf{W} = p_{a^{-1}} = (p_a)^{-1} = (a\mathbf{W})^{-1}$.

Ověřili jsme tak vlastnosti z definice homomorfismu grup, grupy G a H jsou homomorfní. Abychom ukázali, že jsou izomorfní, musíme ověřit, že zobrazení W je vzájemně jednoznačné. Každá permutace $p_a \in H$ je přiřazena prvku $a \in G$, zbývá dokázat, že různým prvkům b, c nemůže být přiřazena stejná permutace z H. Platí ale $np_b = b \neq c = np_c$, permutace p_b a p_c jsou tedy různé. Zobrazení $W : G \to H$ je proto opravdu izomorfismus grup.

****3.19. Volné grupy.** V první kapitole jsme se podrobně zabývali postupy a skládáním postupů na úplných hrách s vlastností inverze. Názvy tah, postup, složení postupů jsme volili tak, aby bezprostředně souvisely s řešením hlavolamů. V odstavci 3.15. jsme ukázali, že množina všech redukovaných postupů spolu s operací redukovaného skládání tvoří grupu — grupu redukovaných postupů. Tato grupa je speciální případ důležité teoretické konstrukce používané v teorii grup. Pro úplnost nyní uvedeme tuto konstrukci s matematickou terminologií. Následující úvahy jsou analogické úvahám, které jsme dělali o postupech a redukovaných postupech v první kapitole a v odstavci 3.15, a jejich důkazy jsou proto ponechány jako poslední cvičení ke třetí kapitole.

a) Uvažujme nějakou množinu A, její prvky jsou $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Budeme si představovat, že A je jakási abeceda a že z jejích prvků můžeme sestavovat nějaká slova. První pravidlo říká, že ke každému prvku a_i můžeme udělat inverzní prvek a_i^{-1} a že všechny prvky $a_1, a_2, \ldots, a_k$ a prvky inverzní $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_k^{-1}$ jsou navzájem různé.

b) Libovolná posloupnost z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1^{-1}, \ldots, a_k^{-1}$ se nazývá *slovo nad abecedou* A. Tak třeba

$a_2a_ka_3a_1^{-1}a_2a_2$ je slovo nad A. Speciální slovo je posloupnost neobsahující žádný prvek, ta se nazývá *prázdné slovo*.

c) Slovo, ve kterém se nevyskytuje žádná dvojice sousedních inverzních prvků $a_ia_i^{-1}$ nebo $a_i^{-1}a_i$, se nazývá *redukované slovo*. Každé slovo můžeme redukovat postupným vynecháváním sousedních dvojic tvaru $a_ia_i^{-1}$ nebo $a_i^{-1}a_i$, až dostaneme redukované slovo. Stejně jako v odstavci 1.10. můžeme dokázat, že libovolnou redukcí nějakého slova dostaneme vždy stejné redukované slovo.

d) Z každých dvou slov můžeme vytvořit slovo nové tak, že příslušné posloupnosti napíšeme po sobě. Takto vytvořené slovo se nazývá *složení* původních slov. Redukce složení dvou slov se nazývá *redukované složení*, nebo také *součin* těchto slov.

e) Množina všech redukovaných slov s operací redukovaného složení (součinu) slov je grupa. Tato grupa se nazývá *volná grupa* nad abecedou A.

f) Vrátíme-li se zpět ke grupám redukovaných postupů na úplných hlavolamech s vlastností inverze, vidíme, že jde vždy o volné grupy nad nějakou abecedou. Touto abecedou je vždy nějaká množina tahů. Tak třeba u Rubikovy krychle je to množina všech otočení krajními vrstvami *vpravo* o 90°. Tato otočení jsme označovali stejným písmenem jako příslušnou stěnu, můžeme proto také říct, že grupa redukovaných postupů na Rubikově krychli je volná grupa nad abecedou stěn. Abeceda má v tomto případě šest prvků. Podobně grupa redukovaných postupů na dvanáctistěnu je volná grupa nad dvanáctiprvkovou abecedou všech stěn, na čtyřstěnu má abeceda čtyři prvky. Také na kosé krychli je grupa redukovaných postupů volná grupa nad čtyřprvkovou abecedou, na ušich má abeceda dva prvky.

Čtvrtá kapitola

VŠECHNO NA SPRÁVNÉ MÍSTO!

4.1. Strategie řešení hlavolamů. Konečně se dostáváme k praktickému skládání hlavolamů. V předchozích kapitolách jsme dokázali neřešitelnost řady pozic na nejrůznějších hračkách. Stačilo k tomu dobře rozlišovat sudé a liché permutace na množinách pohyblivých prvků. Neřešitelnost pozic potom vyplynula z faktu, že žádným postupem nešlo převést všechny pohyblivé prvky současně na správná místa. Klíčovou roli přitom hrálo pravidlo o paritě složení permutací. Nyní nás čeká opačný úkol, najít postupy, kterými srovnáme zbývající pozice do pozic, ve kterých jsou všechny prvky na správných místech. Tím se naučíme řešit hlavolamy bez orientace a částečně budeme také umět řešit hlavolamy s orientací.

Na většině hlavolamů existuje nesmírně mnoho řešitelných pozic, nemůžeme proto pro každou pozici zvlášť uvést potřebný postup. Musíme zvolit jiný přístup. Naučíme se nacházet postupy, které na jednotlivých hračkách dělají co možná nejjednodušší permutace, a ukážeme, že každou řešitelnou pozici jde složit pomocí těchto jednoduchých permutací. K tomu především potřebujeme vytipovat vhodné jednoduché permutace, které jde udělat nějakým postupem a kterými je možné složit každou pozici. V odstavci 3.10. jsme zjistili, že každou permutaci můžeme složit z transpozic. Transpozice ale nejsou vhodný kandidát, protože na mnoha hlavolamech, třeba právě na Rubikově krychli, čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu je možné nějakým postupem udělat pouze sudou permutaci, nikdy lichou transpozici.

Jiné jednoduché permutace jsou trojcykly, permutace, které mají pouze jeden cyklus délky 3 a ostatní cykly délky 1. Každý trojcyklus je sudá permutace, neobsahuje žádný cyklus sudé délky. Dokážeme teď, že

každou sudou permutaci lze složit z trojcyklů.

Vezmeme si nějakou sudou permutaci p. Tu lze složit z transpozic a počet transpozic musí být sudý: $p = t_1 \circ \circ t_2 \circ \ldots \circ t_{2m}$. Protože je skládání permutací asociativní, můžeme psát také $p = (t_1 \circ t_2) \circ (t_3 \circ t_4) \circ \ldots \ldots \circ (t_{2m-1} \circ t_{2m})$. Jak vypadají složení dvojic transpozic v jednotlivých závorkách — cvičení 3.21? Pokud jsou dvojcykly v obou transpozicích t_{2i-1}, t_{2i} na dvojicích prvků, které se protínají, je složení $t_{2i-1} \circ t_{2i}$ trojcyklus — cvičení 3.21. Jsou-li dvojcykly v transpozicích t_{2j-1}, t_{2j} na disjunktních dvojicích prvků, má permutace $t_{2j-1} \circ t_{2j}$ dva cykly délky 2 a ostatní jednoprvkové. Vezmeme v tomto případě libovolný prvek k, který leží v dvojcyklu transpozice t_{2j-1}, a libovolný prvek l, který leží v dvojcyklu permutace t_{2j}. Protože pro transpozici (k, l) platí $(k, l) \circ (k, l) = n$, platí také

$$t_{2j-1} \circ t_{2j} = t_{2j-1} \circ n \circ t_{2j} = t_{2j-1} \circ \\ \circ (k, l)) \circ (k, l)) \circ t_{2j} = (t_{2j-1} \circ (k, l)) \circ ((k, l) \circ t_{2j}) .$$

V posledních dvou závorkách jsou vždy složení dvou transpozic, dvojcykly u transpozic v první závorce mají společný prvek k, jejich složení je tedy trojcyklus. Stejně tak je $(k, l) \circ t_{2j}$ trojcyklus, příslušné dvojcykly se protínají v l. V tomto případě je proto $t_{2j-1} \circ t_{2j}$ složení dvou trojcyklů. Je-li $t_{2i-1} = t_{2i}$, pak, protože jde o transpozice, $t_{2i-1} \circ t_{2i} = n$, a permutaci $t_{2i-1} \circ t_{2i}$ můžeme ve vyjádření p jako složení transpozic vynechat. Ve vyjádření $p = (t_1 \circ t_2) \circ (t_3 \circ t_4) \circ \ldots \circ (t_{2m-1} \circ t_{2m})$ je proto každé složení transpozic v závorce buď trojcyklus, nebo složení dvou trojcyklů. Libovolnou sudou permutaci p jsme tak vyjádřili jako složení nějakých trojcyklů.

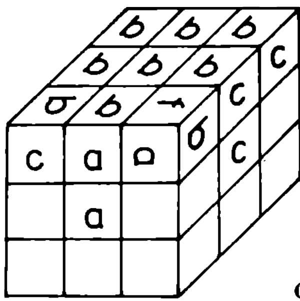
Proč je výhodnější pokoušet se dělat trojcykly? Skutečnost, že z nich lze složit pouze sudé permutace, není na závadu — každou hračku lze nejvýše jedním tahem převést do pozice, která má polohovou permutaci sudou. Pokud jsou u hračky pouze sudé tahy, každá řešitelná pozice je sudá. Pokud je nějaká hračka v liché řešitelné pozici, musí existovat nějaký tah A, který udělá lichou permutaci $a = A\mathbf{V}$. Uděláme-li v liché pozici q tah A, dostaneme pozici, jejíž polohová permutace je $q \circ a$, a ta je sudá podle pravidla o paritě složení permutací. Můžeme se tak snadno omezit pouze na skládání sudých pozic. Pro trojcykly navíc mluví především to, že můžeme poměrně snadno nacházet postupy, které trojcykly udělají.

Po tomto více teoretickém úvodu zdůvodňujícím použití trojcyklů jako jednoduchých operací na hlavolamech si ukážeme, jak najít postupy, které udělají trojcykly na Rubikově krychli.

4.2. Jak udělat trojcykly? V předchozím odstavci jsme zjistili, že každou sudou permutaci lze složit z trojcyklů a že každou řešitelnou pozici na libovolném hlavolamu dostaneme nejvýše jedním tahem do pozice, která má polohovou permutaci sudou. Teď se tedy potřebujeme naučit dělat trojcykly.

Začneme opět Rubikovou krychlí. Ukážeme si docela jednoduchý trik, jak najít postupy, které udělají trojcykly. Tento trik budeme v různě modifikovaných verzích používat v dalším textu mnohokrát. Mimo jiné nám umožní dokázat, že všechny sudé pozice na Rubikově krychli jde vhodným postupem převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech, nebo že všechny pozice na uších jsou řešitelné, atd.

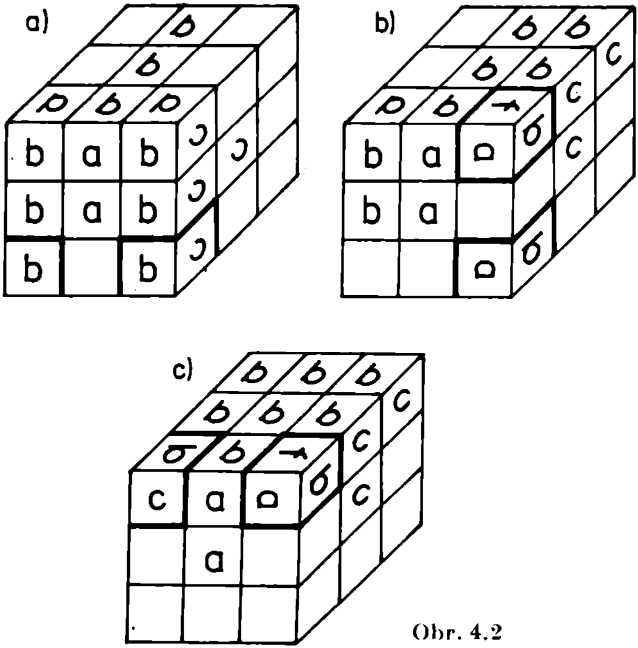
Dříve než najdeme postup, který udělá trojcyklus na rohových kostičkách tak, aby všechny zbývající rohové i hranové zůstaly na původních místech, vysvětlíme si postup, který udělá na první pohled podstatně méně. Základní pozici převede do pozice schematicky znázorněné na obrázku 4.1.



Obr. 4.1

V horní vrstvě *b* jsou prohozené pouze rohové prvky *abc* a *abf* a všechny ostatní kostičky v této vrstvě jsou na původních místech. Na poloze zbývajících kostiček, které neleží ve vrstvě *b*, vůbec nezáleží, mohou být libovolně přeházené. Najít nějaký takový postup je docela snadné. Jedna z mnoha možných cest je podrobně vysvětlena na obrázku 4.2.

Nejdříve pomocí tahů $C^{-1}F$ přesuneme obě rohové kostičky *abc* a *abf* do dolní vrstvy, obrázek 4.2.a. Další dva tahy E (spodní vrstva) a C dostanou kostičku *abf*



Obr. 4.2

na místo *abc* a vrátí *bc* a *bcd* zpět na původní správná místa — obrázek 4.2.b. Postup dokončíme tahy $E^{-1}F^{-1}$, kterými dostaneme kostičku *abc* na místo *abf* a vrátíme *bf* a *bdf* zpátky na správné místa — obrázek 4.2.c. Celý postup $C^{-1}FECE^{-1}F^{-1}$ tak udělá přesně to, co jsme chtěli. Prohodí v horní vrstvě *b* kostičky *abc* a *abf* a zbývající prvky v této vrstvě nechá na původních místech. Tento postup označíme *P*. Je to jednoduchý a srozumitelný postup a není obtížné ho objevit. A každý může snadno přijít na nějaký jiný, který udělá ve vrstvě *b* stejnou změnu. Jedním z nich je například P^{-1}.

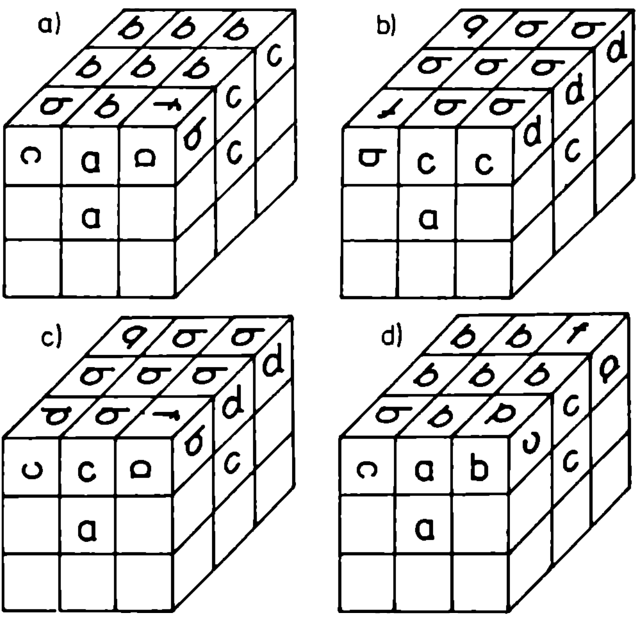
Cvičení 4.1. Ověřte, že následující postupy prohodí ve vrstvě b rohové kostičky abc a abf a ostatní prvky ve vrstvě b ponechají na původních místech. Zdůvodněte každý tah!

a) $P^{-1} = FEC^{-1}E^{-1}F^{-1}C$, b) $FC^{-1}E^{-1}F^{-1}EC$,

c) $C^{-1}E^{-1}FECF^{-1}$.

Postup P rozháže zbytek krychle mimo vrstvu b a není nijak vidět, co má vlastně společného s nějakým trojcyklem na rohových kostičkách.

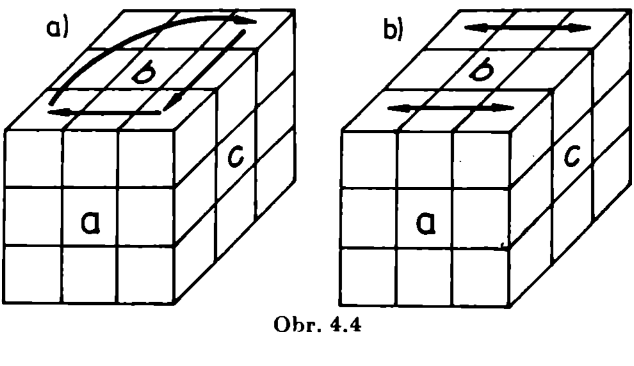
Teď přijde ke slovu nejdůležitější trik. Vysvětlíme si ho pomocí obrázku 4.3.



Obr. 4.3

V základní pozici jsme udělali postup P a dostali pozici 4.3.a. Pak uděláme tah B, kterým dostaneme kostičky *abf* a *bcd* na místa *abf* a *abc* — obrázek 4.3.b. A nyní je klíčový moment. Chceme prohodit kostičky *abf* a *bcd*, které jsou na místech *abf* a *abc*, a jinak v horní vrstvě *b* nic nezměnit. To už umíme udělat několika způsoby, a my si vybereme postup P^{-1} inverzní k P. Ten totiž navíc vrátí všechny zbývající kostičky, které neleží v *b*, na původní místa — obrázek 4.3.c. Důvod je v tom, že permutace $b = BV$ s prvky mimo stěnu *b* nehýbá, a postup P^{-1} na nich udělá permutaci inverzní k permutaci $p = PV$. Proto se všechny vrátí zpět na správná místa. Nakonec zbývá tahem B^{-1} vrátit všechny hranové prvky a také rohovou kostičku *bdf* ve vrstvě *b* na původní místa — obrázek 4.3.d. V horní vrstvě *b* jsme udělali dvě transpozice — postupem P jsme prohodili *abc* a *abf* a postupem P^{-1} *abf* a *bcd*. Celkově jsme tak udělali trojcyklus, který prvek *abc* přesunuje na místo prvku *abf*, prvek *abf* posílá na místo *bcd* a prvek *bcd* zpět na místo *abc*. Schematicky je to vyznačeno na obrázku 4.4.a. Použili jsme na to postup

$$(C^{-1}FECE^{-1}F^{-1})B(FEC^{-1}E^{-1}F^{-1}C)B^{-1} = PBP^{-1}B^{-1}.$$



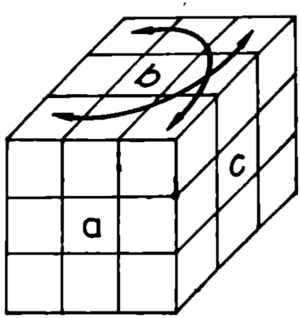
Obr. 4.4

Místo postupu P a k němu inverzního P^{-1} jsme mohli použít také jakýkoliv jiný postup, který udělá v horní vrstvě b stejnou permutaci jako P, a postup k němu inverzní. Například můžeme P nahradit každým z postupů uvedených ve cvičení 4.1. Není proto vůbec nutné naučit se celý postup zpaměti, stačí si pamatovat jeho strukturu $PBP^{-1}B^{-1}$ a vědět, co má postup P ve vrstvě b udělat.

Nepatrnou úpravou najdeme také postup, který udělá permutaci schematicky znázorněnou na obrázku 4.4.b. Pokud uděláme po postupu P tah B dvakrát, tj. BB, prohodí postup P^{-1} v horní vrstvě prvky bcd a bdf, a po zpětném vrácení hranových kostiček na původní místa dvojicí tahů $B^{-1}B^{-1}$ dostaneme permutaci, která má pouze dva dvojcykly, jeden prohazuje abc a abf a druhý bcd a bdf.

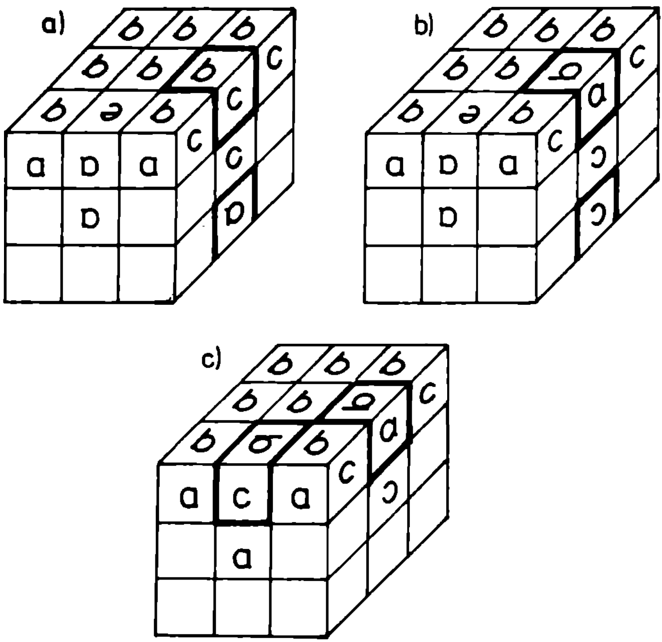
Cvičení 4.2. Najděte postup, který udělá permutaci na obrázku 4.5. Všechny prvky zůstanou na původních místech až na dvě dvojice rohových kostiček ve vrstvě b.

Návod. Najděte napřed postup, který ve vrstvě b prohodí pouze dva rohové prvky v protilehlých vrcholech, a ostatní prvky v b nechá na původních místech.



Obr. 4.5

Nyní si, už poněkud stručněji, vysvětlíme, jak najít postup, který udělá trojcyklus na hranových kostičkách, a všechno ostatní ponechá na původních místech. Můžeme to udělat v podstatě zcela stejně jako trojcyklus na rohových kostičkách. Nejdříve najdeme nějaký postup Q, který prohodí ve vrstvě b pouze dva hranové prvky, a ty, které v $b$neleží, může zpřeházet libovolně. Jeden z mnoha takových postupů je vysvětlen na obrázku 4.6.



Obr. 4.6

Nejdříve pomocí tahů CF^{-1} uvolníme kostičku *ab*, abychom ji mohli posunovat ve vrstvě *a*, a neměnili přitom polohu jiných prvků, které patří do *b*. Potom tahy AA přemístíme *ab* do spodní vrstvy *e*, tahy $C^{-1}F$ vrátíme zbývající prvky z *b* na původní místa a tahem E posuneme *ab* ve spodní vrstvě pod prvek *bc* — obrázek 4.6.a. Nyní tahy $A^{-1}D$ uvolníme vrstvu *c*, tahy CC přesuneme *ab* na místo *bc* a tahy $D^{-1}A$ vrátíme zbylé prvky *b* zpět na původní místa. Zbývá přemístit prvek *bc* z dolní vrstvy na místo *ab*. To uděláme tahy $E^{-1}F^{-1}CA^{-1}A^{-1}$ $C^{-1}F$ — obrázek 4.6.c. Je to vlastně inverze první části postupu. Celý postup Q má potom tvar

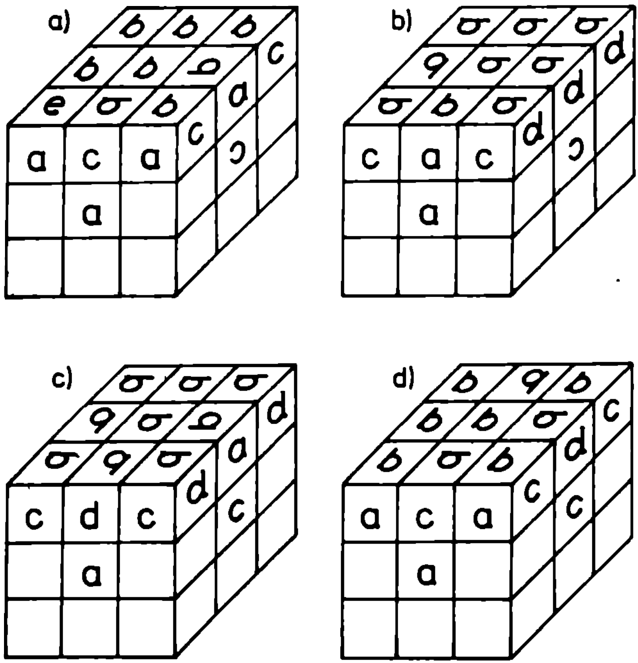
$$Q =$$
$$= F^{-1}CAAC^{-1}FE|A^{-1}DCCD^{-1}A|E^{-1}F^{-1}CA^{-1}A^{-1}C^{-1}F\,.$$

Rozdělili jsme jej do tří snadno pochopitelných částí.

Cvičení 4.3. Ověřte, že následující dva postupy prohodí ve vrstvě *b* pouze dva prvky *ab* a *bc*, a ostatní prvky *b* nechají na původních místech. Zdůvodněte každý tah!

a) Q^{-1}, b) $CF^{-1}AFC^{-1}|A^{-1}DCCD^{-1}A|CF^{-1}A^{-1}FC^{-1}$.

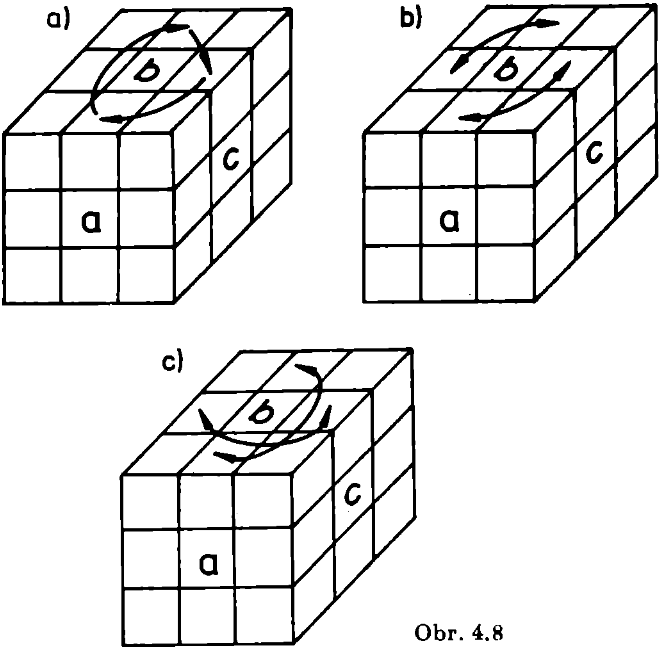
S postupem Q nyní uděláme trojcyklus na hranových kostičkách stejně snadno, jako jsme ho udělali na rohových s postupem P. Nejdříve tahem B přesuneme kostičky *ab* a *bd* na místa *ab* a *bc* — obrázek 4.7.b. Potom postupem Q^{-1} prohodíme kostičky *ab* a *bd* na místech *ab* a *bc* a vrátíme všechny prvky, které neleží ve vrstvě *b* na původní správná místa — obrázek 4.7.c. Nakonec tahem B^{-1} vrátíme na původní místa také všechny kostičky ve vrstvě *b*, s výjimkou tří hranových *ab*, *bc* a *bd* — obrázek 4.7.d.
Postupem $QBQ^{-1}B^{-1}$ jsme tak udělali trojcyklus, který posílá *ab* na místo *bd*, *bd* na místo *bc* a *bc* zpět na místo



Obr. 4.7

ab. Všechny ostatní prvky zůstaly na místě, dokonce i s původní orientací. Udělali jsme tak permutaci, která je schematicky znázorněná na obrázku 4.8.a.

Stejně jako v případě rohových prvků můžeme stejného triku použít k nalezení postupů, které udělají jiné jednoduché permutace na hranových kostičkách. Tak například postupem $QBBQ^{-1}B^{-1}B^{-1}$ uděláme permutaci na obrázku 4.8.b.



Obr. 4.8

Cvičení 4.4. Najděte postup, který udělá permutaci na obrázku 4.8.c. Napřed najděte postup, který prohodí hranové kostičky *ab* a *bd*, a všechny ostatní prvky ve vrstvě *b* zůstanou na původních místech.

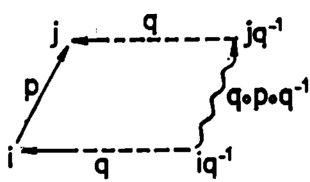
Podívejme se ještě jednou na postupy, které jsme našli v tomto odstavci. Vždy jsme začínali nějakým postupem P nebo Q. Kdybychom udělali ihned postup inverzní, P^{-1} nebo Q^{-1}, vrátili bychom krychli zpět do původní pozice. My jsme ale postup P^{-1} nebo Q^{-1} nevrátili přímo. Mírně jsme ho pozměnili na $BP^{-1}B^{-1}$ nebo

$BQ^{-1}B^{-1}$ (případně $BBP^{-1}B^{-1}B^{-1}$ nebo $BBQ^{-1}B^{-1}B^{-1}$). Tím jsme dosáhli toho, že se značná část prvků vrátila zpět na původní místa, ale ne všechny. V horní vrstvě *b* jsme postupem $BP^{-1}B^{-1}$ nebo $BQ^{-1}B^{-1}$ udělali jinou transpozici než postupem P nebo Q, a tyto dvě transpozice dohromady udělaly hledaný trojcyklus.

Tento trik má svůj původ v matematickém pojmu konjugovaných permutací a vysvětlíme ho v příštím odstavci. Budeme zkoumat, jak se změní permutace, kterou udělá nějaký postup P, jestliže před P vložíme nějaký jiný postup Q a po postupu P uděláme inverzní postup Q^{-1}. Jinými slovy, jak se liší permutace, které udělají postupy P a QPQ^{-1}.

4.3. Konjugované postupy a permutace. Postupům P a QPQ^{-1} budeme říkat *konjugované postupy*, budeme také říkat, že postup QPQ^{-1} je *konjugovaný* k postupu P. Postupem P uděláme permutaci $p = PV$ a postupem Q permutaci $q = QV$. Víme také, jakou permutaci uděláme konjugovaným postupem QPQ^{-1} — je to $(QPQ^{-1})V = q \circ p \circ q^{-1}$. Permutacím p a $q \circ p \circ q^{-1}$ budeme také říkat *konjugované permutace.*

Jak se liší permutace p a $q \circ p \circ q^{-1}$? Vysvětlíme si to na obrázku 4.9.



Obr. 4.9

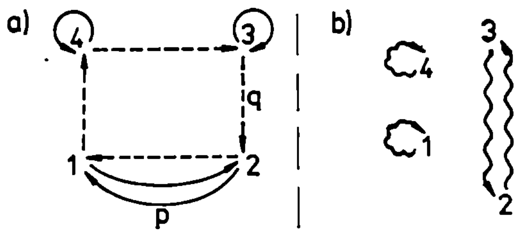
Vezmeme nějaký prvek $i \in I$. Ten se permutací p zobrazí do $j = ip$. V grafu p tomu odpovídá šipka z i

do j. Tato šipka určuje jinou šipku v grafu konjugované permutace $q \circ p \circ q^{-1}$: kam se zobrazí prvek iq^{-1}? Snadno spočítáme, že $(iq^{-1})q \circ p \circ q^{-1} = (iq^{-1} \circ q)p \circ \circ q^{-1} = i(p \circ q^{-1}) = (ip)q^{-1} = jq^{-1}$. Prvek iq^{-1} se permutací $q \circ p \circ q^{-1}$ zobrazí do jq^{-1}. Nakreslíme ještě šipky permutace q, které vedou do bodů i a j (čárkovaně). Jejich počáteční body jsou právě iq^{-1} a jq^{-1}. V grafu permutace $q \circ p \circ q^{-1}$ vede šipka z bodu iq^{-1} do jq^{-1}. Graf konjugované permutace $q \circ p \circ q^{-1}$ tedy z grafů permutací p a q dostaneme posunutím, přeložením, grafu p proti směru šipek grafu q.

Jeden malý příklad. Na množině $I = \{1, 2, 3, 4\}$ vezmeme dvě permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 1, 3, 4 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 4, 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

Jejich grafy jsou na obrázku 4.10.a. Graf p nyní dosuneme proti směru šipek grafu q a dostaneme tak graf konjugované permutace $q \circ p \circ q^{-1}$ na obrázku 4.10.b.



Obr. 4.10

Cvičení 4.5. Nakreslete grafy permutací p, q a $q \circ p \circ \circ q^{-1}$.

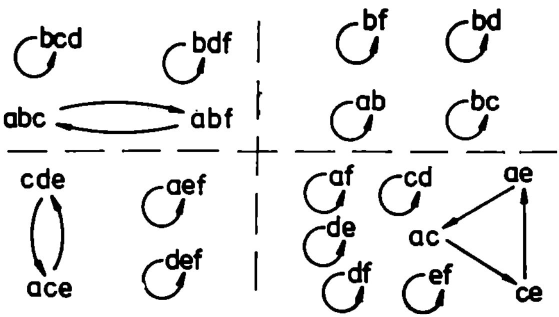
a) $p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 3, 1, 4 \end{pmatrix}$ $\quad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 3, 4, 1 \end{pmatrix}$

b) $p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 2, 3, 4, 1, 5 \end{pmatrix}$ $\quad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5, 2, 3, 4, 1 \end{pmatrix}$

c) $p = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 4, 5, 6, 1, 2, 3 \end{pmatrix}$ $\quad q = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 6, 1, 2, 3, 4, 5 \end{pmatrix}$

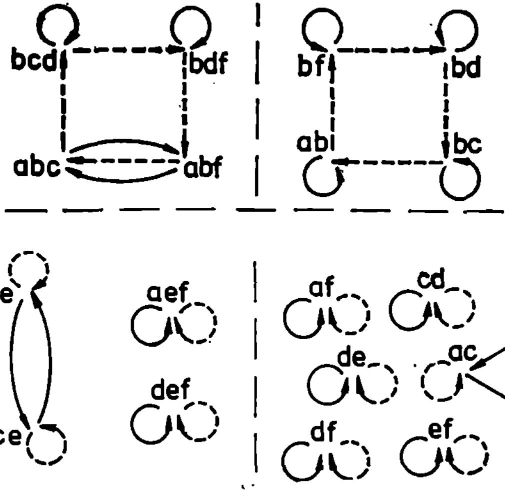
Cvičení 4.6. Jak dostaneme graf permutace $q^{-1} \circ p \circ \circ q$ z grafů permutací p a q?

Zhruba řečeno, permutace $q \circ p \circ q^{-1}$ je „permutace p přeložená na jiné místo permutací q". Jestliže místo nějakého postupu P uděláme postup QPQ^{-1}, znamená to, že jsme permutaci $p = PV$ přesunuli jinam pomocí postupu Q. Právě to jsme udělali při hledání postupů na Rubikově krychli v minulém odstavci. Podívejme se na nalezené postupy ještě jednou. Našli jsme nějaký postup P, který na krychli udělal permutaci na obrázku 4.11.



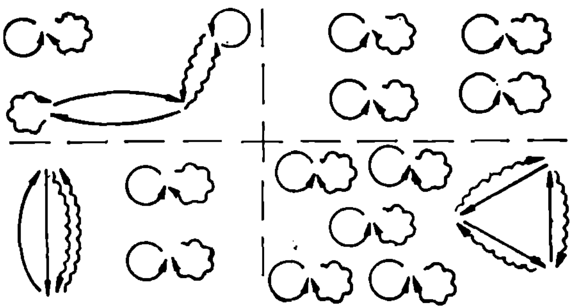
Obr. 4.11

V horní polovině jsou prvky z vrstvy b. Potom jsme inverzní permutaci p^{-1} přeložili postupem B—obrázek 4.13.



Obr. 4.12

Udělali jsme tak permutaci $b \circ p^{-1} \circ b^{-1}$, která je na obrázku 4.13. nakreslena vlnovkovými šipkami.



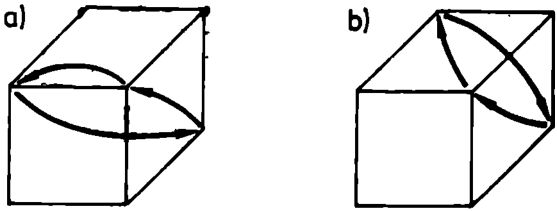
Obr. 4.13

Mimo vrstvu b se permutace $b \circ p^{-1} \circ b^{-1}$ shoduje s p^{-1}, protože b permutaci p^{-1} mimo vrstvu b nepřekládá. Postup $PBP^{-1}B^{-1}$ proto všechny prvky, které neleží v b, nechá na původních místech. Na tom, co přesně postup P udělá mimo vrstvu b, vůbec nezáleží. V samotné vrstvě b jsme postupem P udělali transpozici na prvcích abc, abf. Také postup P^{-1} tyto prvky prohodí a ostatní v b nechá na místě. Postupem $BP^{-1}B^{-1}$ jsme transpozici (abc, abf) přeložili do transpozice na prvcích abf, bcd. Celý postup $PB^{-1}P^{-1}B^{-1}$ pak udělá hledaný trojcyklus na rohových kostičkách.

Překládání permutací pomocí konjugovaných postupů je velmi účinný prostředek pro řešení hlavolamů a všechny postupy, které v dalším textu najdeme, jsou na něm založeny. Místo překládání budeme nyní používat matematický termín *konjugování*.

4.4. Další trojcykly na Rubikově krychli. Ve druhém odstavci jsme našli postupy, které udělají určité trojcykly na rohových nebo hranových kostičkách, a ostatní prvky ponechají na původních místech. Tyto trojcykly jsou schematicky znázorněné na obrázcích 4.4.a. a 4.8.a. Při skládání krychle ale někdy postřebujeme udělat trojcykly také na jiných místech, než jenom v jedné vrstvě. Konjugováním už známých postupů toho snadno dosáhneme.

Rohové trojcykly. Potřebujeme udělat například trojcyklus na obrázku 4.14.a. Postupem $PBP^{-1}B^{-1}$ umíme udělat trojcyklus znázorněný na obrázku 4.4.a. Tento postup nyní musíme konjugovat nějakým dalším postupem, který přemístí kostičky z rohů vyznačených na obrázku 4.14.a do rohů v horní vrstvě, na kterých už trojcyklus udělat umíme. K tomu stačí použít otočení zadní vrstvou d doprava. Postup $D(PBP^{-1}B^{-1})D^{-1}$ pak udělá trojcyklus na obrázku 4.14.a.



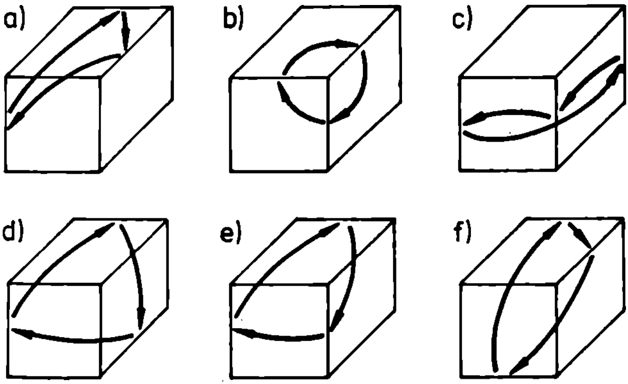
Obr. 4.14

Jak udělat velký trojcyklus na obrázku 4.14.b? Opět stačí najít postup, který přesune tři vyznačené kostičky do jedné stěny, a tímto postupem konjugovat už známý postup $PBP^{-1}B^{-1}$. Takový postup najdeme snadno, stačí třeba FD. Postupem $FD(PBP^{-1}B^{-1})D^{-1}F^{-1}$ pak uděláme trojcyklus na obrázku 4.14.b.

Na obrázcích 4.4.a, 4.14.a a 4.14.b jsou všechny tři možné polohy tří různých vrcholů na krychli. Takže už umíme udělat každý trojcyklus na rohových prvcích tak, aby všechny ostatní prvky zůstaly na původních místech.

Hranové trojcykly. Podobně můžeme pomocí postupu Q z druhého odstavce udělat všechny možné trojcykly na hranových kostičkách. Vždy stačí najít nějaký jednoduchý postup, který tři díly, které chceme prohodit, převede na místa tří vyznačených prvků na obrázku 4.8.a, a tímto postupem konjugovat $QBQ^{-1}B^{-1}$. Tři prvky na obrázku 4.15.a převedeme na místa na obrázku 4.8.a tahem A. Trojcyklus 4.15.a proto uděláme postupem $A(QBQ^{-1}B^{-1})A^{-1}$. Pro trojcyklus na obrázku 4.15.b použijeme tahy CD, hledaný postup je

$CD(QBQ^{-1}B^{-1})D^{-1}C^{-1}$. V případě 4.15.c stačí konjugovat postupem DCA^{-1}, příslušný trojcyklus proto uděláme postupem $DCA^{-1}(QBQ^{-1}B^{-1})AC^{-1}D^{-1}$. V případě 4.15.d stačí $ACC(QBQ^{-1}B^{-1})C^{-1}C^{-1}A^{-1}$.



Obr. 4.15

Cvičení 4.7. Najděte postupy, kterými uděláme trojcykly na obrázcích 4.15.e a 4.15.f.

Tak jako v případě rohových prvků můžeme nyní probírat všechny možné polohy tří hranových kostiček na krychli, pro každou z nich najít jednoduchý postup, který tyto tři kostičky převede do jedné stěny, a tímto postupem konjugovat už známý postup $QBQ^{-1}B^{-1}$. Pro každé tři hranové prvky tak najdeme postup, který na nich udělá trojcyklus, a všechny ostatní prvky nechá na místě.

Ukážeme si ještě jeden způsob, jak dokázat, že existují postupy, které udělají libovolný hranový trojcyklus.

Tento způsob je sice více teoretický, zbaví nás ale povinnosti rozebírat mnoho různých případů. Vybereme tři hranové prvky i, j, k a chceme udělat trojcyklus, který posílá i na místo j, j na místo k a k zpět na místo i. Hranové kostičky tvoří orbitu na krychli, existuje proto postup, který kostičku i převede na místo ab. Nyní si všimněme, že otáčením vrstvami c, d, e a f můžeme stále ještě pohybovat každou hranovou kostičkou, s výjimkou té, která je právě na místě ab, tj. v našem případě i. Existuje proto postup složený z tahů C, D, E, F, který přesune j na místo bd a nechá i na místě ab. A opět si všimneme, že pomocí tahů C, E, F můžeme stále ještě pohybovat všemi hranovými prvky, s výjimkou těch, které jsou na místech ab a bd. Z těchto tahů složíme postup, který přesune k na místo bc a nechá i na místě ab a j na místě bd. Tím jsme si ukázali, že vždy existuje postup R, který libovolné tři hranové prvky i, j, k převede na místa ab, bd a bc. Postupem R nyní konjugujeme náš známý postup $QBQ^{-1}B^{-1}$, který udělá trojcyklus na prvcích ab, bd a bc. Konjugovaný postup $R(QBQ^{-1}B^{-1})R^{-1}$ pak udělá hledaný trojcyklus na kostičkách i, j a k.

Můžeme shrnout:

> Na Rubikově krychli můžeme udělat libovolný rohový a libovolný hranový trojcyklus.

Připomeňme si znovu, že všechny postupy, které trojcykly udělají, najdeme vhodným jednoduchým konjugováním postupů $PBP^{-1}B^{-1}$ a $QBQ^{-1}B^{-1}$ z druhého odstavce.

4.5. Každou sudou pozici na Rubikově krychli můžeme převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. To už nyní snadno dokážeme. Začneme v nějaké sudé pozici. Obě polohové permutace na rohových a hranových kostičkách musí být současně sudé nebo současně liché. Pokud jsou liché, otočíme libovolnou vrstvou o 90° a dostaneme novou pozici, ve které jsou polohové permutace na rohové i hranové orbitě už sudé. V předchozím odstavci jsme našli postupy, které udělají libovolné trojcykly na rohových kostičkách. Z odstavce 4.1. víme, že každou sudou permutaci jde složit z trojcyklů. Pomocí těchto postupů můžeme převést krychli do pozice, ve které jsou všechny rohové prvky na správných místech. Polohová permutace na hranových kostičkách musí být v této nové pozici sudá. Protože jsme se v minulém odstavci naučili dělat také libovolné hranové trojcykly tak, aby všechny ostatní prvky zůstaly na místě, můžeme znovu použít výsledku z prvního odstavce a dokázat, že novou pozici (s rohovými prvky na správných místech) jde převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech.

Tím jsme doplnili naše poznatky o Rubikově krychli z předchozí kapitoly. Žádná lichá pozice nejde převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech (a je proto neřešitelná), sudé pozice takto převést jdou.

Závěrem několik poznámek. Postup, kterým jsme v tomto odstavci dostali všechny prvky na správná místa, je hodně pomalý, a nikomu nedoporučuji skládat Rubikovu krychli právě tímto způsobem. Naším hlavním cílem bylo přesvědčit se o tom, že to opravdu jde, a ukázat metodu, jak najít postupy, které udělají nějaké jednoduché permutace. Mnohem rychlejší způsob skládání kostky spočívá v obyčejném dávání prvků na správná místa a se správnou orientací, „dokud to jde". Tak snad každý složí aspoň jednu vrstvu, a většinou i dvě. Teprve v závěru, kdy už nevystačíme s pouhou prostorovou představivostí, obvykle k tomu dojde při skládání poslední vrstvy, použijeme postupy, které jsme našli v této kapitole, ve druhém odstavci. Ty jsou k tomu už připravené, prohazují kostičky pouze v jedné vrstvě.

Všimněme si také, že v první části důkazu při přemisťování rohových kostiček na správná místa jsme vůbec nepotřebovali postupy, které dělají trojcykly na rohových prvcích, a současně nechávají hranové prvky na místě. Hranové prvky na počátku nebyly v žádné speciální poloze. Ke stejnému účelu by nám posloužily i postupy, které na rohových kostičkách udělají trojcykly, a hranové prvky libovolně přeházejí. Těmito postupy bychom rovněž dostali pozici, ve které jsou všechny rohové prvky na správných místech. Dále bychom pokračovali už stejně. To je důležité si uvědomit zvláště při skládání čtyřstěnu, kdy je velmi snadné dostat všechny čtyři rohové prvky na správná místa, a vlastní skládání čtyřstěnu probíhá pouze na hranových kostičkách.

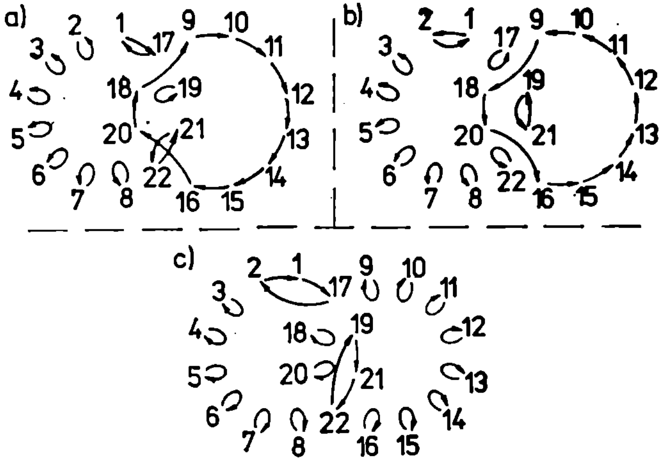
V dalších odstavcích použijeme trik s konjugováním při řešení jiných hlavolamů.

4.6. Uši. Budeme skládat verzi s dvanácti kuličkami v každém uchu — obrázek 3.8. Ukážeme, že každou pozici jde složit. Z předchozí kapitoly víme, že každý tah je lichý. Jsou-li na počátku uši v liché pozici, stačí udělat jeden tah, a dostaneme pozici sudou. Strategie skládání bude potom opět založená na výsledku z odstavce 4.1. — každou sudou permutaci jde složit z trojcyklů. Budeme postupovat stejně jako u Rubikovy krychle. Napřed musíme najít postup, který udělá vůbec nějaký trojcyklus, a potom ukážeme, že vhodným konjugováním tohoto postupu uděláme jakýkoliv trojcyklus.

Začneme tedy hledáním postupu, který udělá trojcyklus. Kdybychom měli použít zcela stejný nápad jako u Rubikovy krychle, museli bychom najít nějaký postup X, který by v jednom z uší — třeba A — udělal jedinou transpozici — třeba (1, 2) — a všechny ostatní kuličky v A nechal na původních místech. Postup $AX^{-1}A^{-1}$, konjugovaný k inverznímu postupu X^{-1}, by potom udělal transpozici (2, 3) v uchu A a vrátil všechny kuličky v B na původní místa. Celý postup $XAX^{-1}A^{-1}$ by tak přesunul 1 na místo 3, 3 na místo 2 a 2 zpět na místo 1. Ostatní kuličky by nechal na původních místech. Problém je v tom, že najít postup X s těmito vlastnostmi je dost obtížné, nemáme k dispozici tolik různých tahů jako na krychli.

Musíme se proto obejít bez postupu X s uvedenými vlastnostmi a udělat trojcyklus poněkud jiným způsobem. Konjugování postupů a permutací bude hrát i nadále klíčovou roli.

Chceme najít jednoduchý postup, který by prohodil nějaké dvě kuličky v uchu A, a přitom A příliš nerozházel. Kuličky můžeme přehazovat pouze v okolí obou průsečíků, zvolíme proto 1 a 17. Pomocí tahů BAB^{-1} přesuneme kuličku 17 na místo 1 a tahy $A^{-1}B$ vrátíme 1 zpět do ucha A na místo 17. Většina kuliček v A se vrátí na původní místa, nevrátí se ale všechny. U dolního průsečíku se prohodí také 21 a 22. Celý postup $P = BAB^{-1}A^{-1}B$ udělá permutaci na obrázku 4.16.a. Důležité je, že všechny kuličky, které byly původně v A, přejdou opět do A. Nyní budeme inverzní postup $P^{-1} = B^{-1}ABA^{-1}B^{-1}$ konjugovat tahem A. Konjugovaným postupem $AP^{-1}A^{-1}$ uděláme permutaci na obrázku 4.16.b. Celý postup $Q = P(AP^{-1}A^{-1})$ potom udělá složení permutací z obrázků a) a b), které je na obrázku 4.16.c.



Obr. 4.16

Místo jednoho trojcyklu se nám podařilo udělat trojcykly dva.

Přesto jsme se k jednomu trojcyklu přiblížili. Zbývající trik by mělo napovědět následující cvičení.

Cvičení 4.8. Na množině $I = \{i, j, k, l\}$ vezmeme dva trojcykly. Trojcyklus s posílá i do j, j do k a k zpět do i, trojcyklus t posílá k do j, j do l a l zpět do k:

$$s = \begin{pmatrix} i, j, k, l \\ j, k, i, l \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} i, j, k, l \\ i, l, j, k \end{pmatrix}.$$

Nakreslete grafy následujících permutací:

a) $s \circ s$, b) $s^{-1} \circ t$, c) $s \circ t$, d) $s \circ t^{-1}$.

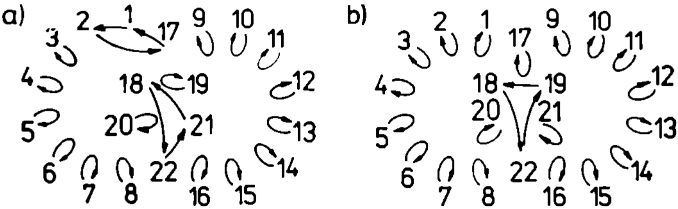
Pro nás je důležitý zvláště případ c), který ukazuje, že složení dvou různých trojcyklů může být opět trojcyklus. Všimněte si, jaká je poloha trojcyklů s, t v tomto případě. Šipky mezi dvojicí prvků j, k, které leží v obou z nich, jdou proti sobě.

Inverzním postupem Q^{-1} bychom vrátili všechno na původní místa. Náš trik vždy spočívá v tom, že místo Q^{-1} uděláme vhodný konjugovaný postup $RQ^{-1}R^{-1}$. V našem případě udělá každý konjugovaný postup $RQ^{-1}R^{-1}$ opět dva trojcykly, protože je udělá Q, a tedy také Q^{-1}. My se chceme jednoho zbavit, třeba trojcyklu, který posílá 17 do 2, 2 do 1 a 1 do 17. K tomu potřebujeme, aby postup R nechal prvky 17, 1, 2 na místě. Abychom se nezbavili současně i druhého trojcyklu, musíme jej postupem R posunout. Chtěli bychom, aby měl posunutý trojcyklus vůči původnímu na kuličkách 19, 21 a 22 stejnou polohu, jakou měly trojcykly s a t ve cvičení. K tomu stačí postupem R zaměnit jeden z prvků 19, 21 a 22 za nějaký jiný a zbývající dva nechat na místě. Teď, když už víme, jaké vlastnosti by měl postup R mít, je jeho nalezení snadné. Napřed tahem A^{-1} posuneme kuličky 17, 1, 2 mimo průsečíky (abychom si je nepřeházeli), pak tahem B posuneme kuličku 18 na místo 19 a nakonec tahem A vrátíme 17, 1, 2, 21 a 22 na původní místa. Můžeme proto zvolit $R = A^{-1}BA$. V odstavci o konjugovaných postupech a permutacích jsme vysvětlili, jakou permutaci postup $RQ^{-1}R^{-1}$ udělá. Její graf je na obrázku 4.17.a. Liší se od grafu permutace q^{-1} inverzní ke $q = QU$ (obrázek 4.16.c) záměnou prvku 19 za prvek 18. Složeným postupem $Q(RQ^{-1}R^{-1})$ pak uděláme hledaný trojcyklus, jeho graf na obrázku 4.17.b je složením grafů permutací, které udělají postupy Q a $RQ^{-1}R^{-1}$, obrázky 4.16.c a 4.17.a. Je to trojcyklus, který posílá 18 na místo 22, 22 na místo 19 a 19 zpět na místo 18. Připomeňme si, že $R = A^{-1}BA$, $P = BAB^{-1}A^{-1}B$ a $Q = PAP^{-1}A^{-1}$. Celý postup je tedy

$$S = \underbrace{\overbrace{BAB^{-1}A^{-1}}^{r}BA\overbrace{B^{-1}ABA^{-1}B^{-1}A^{-1}}^{P^{-1}}}_{Q}\ \underbrace{A^{-1}BA}_{R}$$

$$\underbrace{A\overbrace{BAB^{-1}A^{-1}}^{P}BA^{-1}\overbrace{B^{-1}ABA^{-1}B^{-1}}^{P^{-1}}}_{Q^{-1}}\ \underbrace{A^{-1}B^{-1}A}_{R^{-1}}\ .$$

Je to dlouhý postup, smysl každého tahu by měl být ale jasný.



Obr. 4.17

Zbývá ukázat, že můžeme udělat každý trojcyklus. Tady už můžeme postupovat zcela stejně jako u krychle. Tři prvky, na kterých chceme trojcyklus udělat, musíme posunout na místa 18, 19, 22, na kterých to už umíme. Vhodně konjugovaným postupem S tak uděláme hledaný trojcyklus. Omezíme se jen na několik příkladů. Abychom udělali trojcyklus, který posílá 19 na místo 21, 21 na místo 22 a 22 zpět na místo 19, tj. trojcyklus v jednom uchu, musíme posunout 21 na místo 18 tak, aby 19 a 22 zůstaly na místě. To uděláme třeba postupem $ABBA^{-1}$. Tímto postupem konjugujeme S, hledaný trojcyklus proto uděláme postupem $(ABBA^{-1})S(AB^{-1}B^{-1}A^{-1})$. Trojcyklus, který posílá 1 na místo 3, 3 na místo 2 a 2 na místo 1, pak uděláme konjugováním posledního postupu nějakým postupem, který převede 1, 2, 3 na místa 22, 21, 19. Stačí proto $AAAA(ABBA^{-1}SAB^{-1}B^{-1}A^{-1})A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}$.

Cvičení 4.9. Najděte postupy na uších, které udělají následující trojcykly:

a) 9 na místo 11, 11 na místo 6 a 6 zpět na místo 9,
b) 2 na místo 4, 4 na místo 12 a 12 zpět na místo 4,
c) 2 na místo 7, 7 na místo 14 a 14 zpět na místo 2.

Tak můžeme udělat každý trojcyklus (jak si za chvíli dokážeme). Z nich složíme každou sudou permutaci (odstavec 4.1.). A protože každou lichou pozici převedeme jedním tahem do pozice sudé, umíme složit každou pozici.

Na uších lze složit každou pozici.

Stejně jako u Rubikovy krychle, nikomu nedoporučuji, aby takto postupoval při skládání uší od samého počátku. Opět je mnohem rychlejší dávat kuličky na správná místa, dokud to jde, a teprve potom dělat potřebné trojcykly vhodným konjugováním postupu S, nebo ještě lépe, nějakého vlastního postupu. Varianty uší, které byly v prodeji, obsahovaly vždy několik kuliček stejné barvy. To skládání podstatně ulehčuje, protože přehození kuliček stejné barvy není vidět. Trojcykly můžeme proto dělat také tak, že konjugujeme postup Q nějakým postupem, který na místa kuliček v jednom z trojcyklů převede tři kuličky stejné barvy. S výhodou můžeme takto používat i krátký postup P.

Zbývá ještě pořádně ukázat, že můžeme udělat jakýkoliv trojcyklus. Budeme postupovat stejně jako v případě hranových kostiček na Rubikově krychli. Umíme udělat trojcyklus na místech 1, 2, 3, stačí proto libovolné tři kuličky i, j, k vhodným postupem přemístit na místa 1, 2, 3. Tímto postupem pak konjugujeme postup, který udělá trojcyklus na kuličkách 1, 2, 3.

Napřed posuneme kuličku k na místo 17 a tahem A^{-1} pak na místo 1. Potom najdeme kuličku j. Je-li v uchu B, posuneme ji vhodným opakováním tahu B na místo 17, k zůstává na místě 1. Tahem A^{-1} pak dostaneme k na místo 2 a j na místo 1. Není-li j v uchu B, vhodným opakováním tahu A^{-1} posuneme j do jednoho z průsečíků tak, aby k zůstala na jednom z míst 1—8. Tahem B pak přemístíme j do ucha B a opakováním tahu A vrátíme k zpět na místo 1. Z ucha B už umíme dostat j na místo 1 a k na místo 2. S kuličkou i postupujeme analogicky. Je-li v uchu B, posuneme ji na místo 17, a tahem A^{-1} dostaneme všechny tři kuličky tam, kam chceme: k na místo 3, j na místo 2 a i na místo 1. Pokud i není v uchu B, opakujeme napřed vhodně tah A^{-1}, abychom dostali i do jednoho z průsečíků a j, k zůstaly v oblouku na místech 1—8. Tahem B pak dostaneme i do ucha B a opakováním tahu A vrátíme k na místo 2 a j na místo 1. Z ucha B už i spolu s j a k na místa 1, 2, 3 umíme dostat. Tím jsme ukázali, že na uších jde opravdu udělat každý trojcyklus.

Cvičení 4.10. Dokažte, že libovolných šest různých kuliček můžeme vhodným postupem dostat na místa 1, 2, 3, 4, 5, 6, aniž byste používali toho, že umíme každou pozici složit.

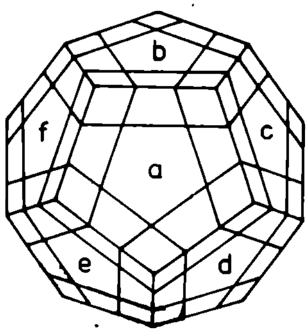
A jak je to s variantou s třinácti kuličkami v jednom uchu? Postup S funguje i na ní. Funguje i na mnoha dalších.

4.7. Dvanáctistěn, čtyřstěn, domino, patnáctka, babylónská věž. U dalších her budeme postupovat rychleji.

Dvanáctistěn. Vzhledem k tomu, že jedna vrstva tvoří jen malou část hračky, je nalezení postupů, které prohodí v jedné vrstvě jen dva rohové nebo dva hranové prvky, jednoduché.

Jak prohodit rohové prvky *acd* a *ade* tak, aby zbývající prvky ve vrstvě *a* zůstaly na původních místech? Tahy $C^{-1}E$ dostaneme obě kostičky mimo vrstvu *a*. Zbývá je nějak zaměnit, a přitom nepohnout ostatními prvky *a*. K tomu máme na dvanáctistěnu velký prostor, můžeme to udělat třeba tahy $G^{-1}HG$ (*ade* je už tam, kde má být), a potom $H^{-1}E^{-1}C$ vrátíme vše zpět do vrstvy *a*. Postupem $P = C^{-1}EG^{-1}HGH^{-1}E^{-1}C$ tedy prohodíme ve vrstvě *a* dva rohové prvky *acd* a *ade*. Postupem $PAP^{-1}A^{-1}$ potom uděláme trojcyklus na rohových kostičkách *ade*, *abc*, *acd* a vhodným konjugováním tohoto postupu uděláme jakýkoliv rohový trojcyklus.

Cvičení 4.11. Stejnou metodou, jakou jsme použili u hranových kostiček na Rubikově krychli, dokažte, že libovolné tři rohové prvky na dvanáctistěnu můžeme převést na místa *ade*, *acd* a *abc*.



Obr. 4.18

Protože každou sudou permutaci lze složit z trojcyklů, umíme libovolnou pozici, která má polohovou permutaci na rohových kostičkách sudou, převést do pozice, ve které jsou všechny rohové prvky na správných místech. Má-li být pozice řešitelná, musí být také její polohová permutace na hranových kostičkách sudá. Zbývá proto najít postup, který udělá nějaký trojcyklus na hranových kostičkách, a ponechá všechny rohové prvky na správných místech.

To je rovněž snadné. Prohodíme nejdříve nějaké dva hranové prvky, třeba ac a ad, ve vrstvě a. Tahy BD^{-1} uvolníme prvek ac a tahem C^{-1} jej přesuneme mimo vrstvu a. Tahy DB^{-1} vrátíme zbývající prvky z a zpět na původní místa. Nyní tahy CE^{-1} uvolníme ad, tahy $D^{-1}D^{-1}$ posuneme ac na jeho místo a opět vrátíme postupem EC^{-1} všechno ostatní zpět do vrstvy a. Nakonec přesuneme ad na místo ac postupem $D^{-1}BGCCB^{-1}D$. Prvky ac a ad jsme pak prohodili postupem

$$Q = BD^{-1}C^{-1}DB^{-1}CE^{-1}D^{-1}D^{-1}EC^{-1}D^{-1}BGCCB^{-1}D.$$

Snadno asi najdete jednodušší postup, který udělá ve vrstvě a totéž, co Q. Postupem $QAQ^{-1}A^{-1}$ uděláme trojcyklus na hranových prvcích ab, ac, ad a všechno ostatní zůstane na původních místech. A nakonec konjugováním tohoto postupu uděláme jakýkoliv trojcyklus.

Cvičení 4.12. Dokažte, že libovolné tři hranové prvky můžeme vhodným postupem převést na místa ad, ab a ac.

Každou pozici, která má polohovou permutaci sudou jak na rohových, tak na hranových prvcích, umíme tedy převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Z minulé kapitoly už víme, že u ostatních pozic to nejde. Objasnili jsme tak zcela, které pozice na dvanáctistěnu jde srovnat.

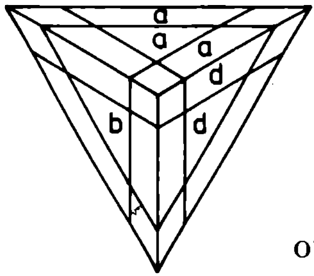
> Každá pozice na dvanáctistěnu se sudou polohovou permutací na rohových i hranových prvcích lze převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech.

Čtyřstěn. Aby mohla být pozice vůbec řešitelná, musí být její polohová permutace sudá jak na rohových, tak na hranových kostičkách. Čtyřstěn má čtyři rohové prvky a každou sudou permutaci na čtyřprvkové množině můžeme složit z nejvýše dvou trojcyklů. Protože každé tři rohové prvky leží v jedné vrstvě, můžeme na čtyřstěnu udělat libovolný trojcyklus na rohových prvcích, hranové přitom ale nezůstanou na místě! V každém případě tak stačí nejvýše dva tahy, abychom dostali všechny rohové prvky na správná místa.

Abychom dostali na správná místa i prvky hranové, najdeme opět postup, který udělá nějaký hranový trojcyklus, a všechno ostatní nechá na místě. Jeho konjugováním pak už uděláme každý hranový trojcyklus. Dosud jsme vždy začínali postupem, který prohodil dva hranové prvky v jedné vrstvě. V případě čtyřstěnu to znamená najít postup, který třeba ve vrstvě *a* prohodí dva hranové prvky, a ostatní kostičky v této vrstvě (tj. jeden hranový a tři rohové) nechá na původních místech. U Rubikovy krychle a dvanáctistěnu se nám podařilo najít dokonce takové postupy, které tyto prvky nechaly nejen na původním místě, ale i s původní orientací. Najít takové postupy na čtyřstěnu se zdá být obtížnější, podstatnou roli zde hraje skutečnost, že v každé vrstvě leží více než polovina všech pohyblivých prvků.

Na rozdíl od krychle a dvanáctistěnu není na čtyřstěnu dost prostoru mimo jednu vrstvu, a to činí jeho skládání obtížnějším. V této chvíli nám jde o to, abychom dostali všechny prvky na správná místa, a tak si orientací nebudeme zatím všímat.

Jak prohodit prvky *ad* a *ac*?



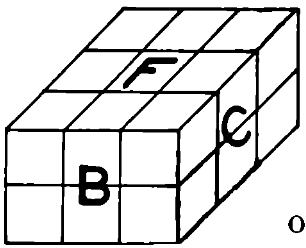
Obr. 4.19

Postupem $D^{-1}ABA^{-1}$ zůstanou ve vrstvě *a* všechny prvky na původních místech s výjimkou *ad*, který si vystřídá místo s protilehlým prvkem *bc*. Nyní použijeme konjugování. Tahem A posuneme prvek *ac* na místo *ad*, pak uděláme stejný postup $D^{-1}ABA^{-1}$, kterým zaměníme *ac* za *ad*, a zakončíme konjugování tahem A^{-1}. Prvek *ad* je už na místě *ac*, a zbývá pouze vyměnit prvek *bc* z vrstvy *a* za *ac*. To už umíme, stačí udělat opět $D^{-1}ABA^{-1}$. Celý postup, který prohodí ve vrstvě *a* prvky *ad* a *ac* tak, že všechny ostatní prvky v *a* zůstanou na místě (některé se změněnou orientací), se proto rovná $Q = (D^{-1}ABA^{-1})A(D^{-1}ABA^{-1})A^{-1}(D^{-1}ABA^{-1})$.

Dále už pokračujeme standardním způsobem. Postupem $QAQ^{-1}A^{-1}$ uděláme trojcyklus prohazující hranové prvky *ab*, *ac* a *ad*, a ponechávající všechny ostatní pohyblivé prvky na původních místech. Jeho dalším konjugováním uděláme libovolný hranový trojcyklus. Každou pozici, která je sudá jak na hranových, tak na rohových kostičkách, umíme tak převést do pozice se všemi prvky na správných místech. Ze třetí kapitoly víme, že u jiných pozic to nejde. Tím jsme zcela vyjasnili, kdy můžeme dostat každý prvek na správné místo, a našli postup, jak to udělat.

> Každou pozici na čtyřstěnu, která má polohovou permutaci sudou na rohových i na hranových prvcích, lze srovnat do pozice se všemi prvky na správných místech.

Domino. Skládání domina je podstatně ulehčené tím, že existuje poměrně jednoduchý postup, který prohodí pouze dva hranové prvky, a všechny ostatní nechá na původních místech. Připomeňme si označení stěn:

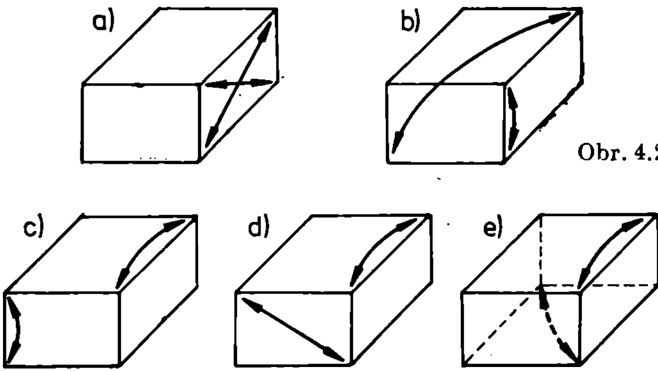


Obr. 4.20

Tímto postupem je $Q = BAABAABAA$ a prohodíme jím prvky 14 a 16 v dolní vrstvě (tah A je otočení dolní vrstvou). Snadno se přesvědčíme, že jeho konjugováním uděláme každou hranovou transpozici, a tedy libovolnou permutaci na hranových kostičkách, která nechává všechny rohové na původních místech.

Cvičení 4.13. Stejně jako v případě hranových prvků na Rubikově krychli dokažte, že libovolné dva hranové prvky i, j na dominu můžeme vhodným postupem převést na místa 14 a 16.

Zbývá dopravit nějak všechny rohové prvky na správná místa. Konjugováním postupu Q pak už umíme přemístit na správná místa i hranové prvky, aniž bychom si rohové opět rozházeli. Začneme zase postupem, který prohodí v horní vrstvě dva rohové prvky, a zbývající dva nechá na místě. Hranové prvky nás v této chvíli nezajímají. Prosté otočení boční vrstvou C udělá permutaci na obrázku 4.21.a. Nyní stačí konjugovat tah C nějakým postupem, který přesune tyto dva dvojcykly tak, že jeden bude v horní vrstvě a druhý v dolní. Konjugujeme-li tahem A, uděláme postup ACA^{-1} a permutaci na obrázku 4.21.b.



Obr. 4.21

Dalším konjugováním tahem B uděláme postup $BACA^{-1}B^{-1}$ a permutaci na obrázku 4.21.c. Teď konjugujeme tahem A^{-1}, postupem $A^{-1}BACA^{-1}B^{-1}A$ uděláme permutaci 4.21.d. A nakonec konjugujeme tahem E, celý postup $P = EA^{-1}BACA^{-1}B^{-1}AE^{-1}$ prohodí v horní vrstvě dva hranové prvky 3 a 9 a zbylé dva 1 a 7 nechá na původních místech — obrázek 4.21.e.

Dále pokračujeme obvyklým způsobem. Pro tento jediný okamžik označíme otočení horní vrstvou vpravo písmenem F. Postupem $PFP^{-1}F^{-1}$ uděláme trojcyklus na rohových prvcích v horní vrstvě a jeho konjugováním libovolný trojcyklus na rohových kostičkách, a tím i každou sudou permutaci. Pokud náhodou na počátku není permutace na rohových prvcích sudá, stačí udělat napřed tah A.

Každá pozice na dominu je řešitelná.

Patnáctka. Ve druhé kapitole jsme ukázali, že sudé pozice s lichým prázdným místem a liché se sudým prázdným místem jsou neřešitelné. Nyní ukážeme, že všechny ostatní pozice řešitelné jsou. Především si ujasníme, že každou takovou pozici lze převést do sudé pozice s prázdným místem 16. Každý tah dělá totiž transpozici, a je tedy lichý. Je-li pozice sudá, je prázdné místo také sudé, a sudým počtem tahů ho přesuneme na místo 16. Uděláme tím sudou permutaci, nová pozice proto bude zase sudá. Je-li pozice lichá, je prázdné místo také liché, po lichém počtu tahů ho dostaneme na místo 16. Uděláme tím lichý počet transpozic, lichou permutaci, nová pozice bude proto sudá.

Při praktickém skládání je třeba umět složit pozici na obrázku 4.22.

Cvičení 4.14. Najděte postup, který převede pozici na obrázku 4.22. do pozice základní.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
15	13	14	

Obr. 4.22

Postup P, který jsme našli ve cvičení, je speciální, začíná a končí prázdným místem v pravém dolním rohu. Použijeme ho také při našem důkazu, že zbývající pozice na patnáctce jsou řešitelné. Druhý potřebný krok je obsahem dalšího cvičení.

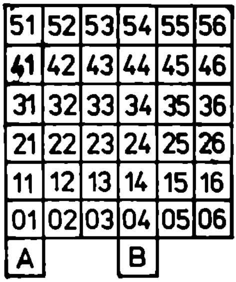
Cvičení 4.15. Vezměte v základní pozici tři libovolné prvky i, j, k (prázdné místo mezi nimi není) a dokažte, že existuje speciální postup, který převede i na místo 13, j na místo 14 a k na místo 15.

Tento postup označíme Q. Postup P ze cvičení 4.14. udělal trojcyklus na místech 13, 14 a 15. Protože jsou P i Q speciální, můžeme je skládat. Konjugovaný postup QPQ^{-1} pak udělá trojcyklus na prvcích i, j a k. Tím jsme ukázali, že existují speciální postupy, které udělají libovolné trojcykly. Každou sudou permutaci lze složit z trojcyklů, můžeme tedy složit každou sudou pozici s prázdným místem 16. Na počátku jsme ukázali, že do takové pozice můžeme snadno převést každou potenciálně řešitelnou pozici. Dokázali jsme tak pravidlo uvedené už ve druhé kapitole.

> Každá sudá pozice se sudým prázdným místem a každá lichá pozice s lichým prázdným místem je řešitelná.

Babylónská věž. Tato u nás hodně rozšířená hra je prostorovou variantou patnáctky. Její řešení je v podstatě stejně jednoduché, až na jedno obtížnější místo — prohození dvou kuliček. Ukážeme si, jak pomocí vhodné modifikace triku se šachovnicí a rozlišení sudých a lichých permutací toto místo snadno překonat.

Začneme podrobnějším popisem hry. Na obrázku 4.23. vidíme rozvinutou základní pozici, místo barevných kuliček používáme opět čísla.



Obr. 4.23

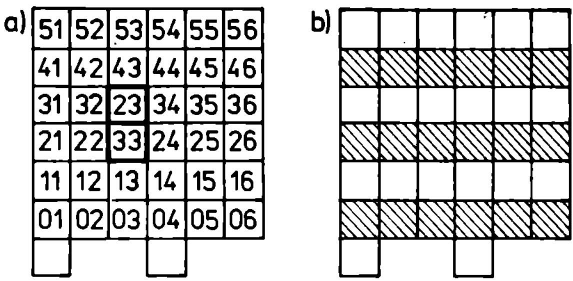
Jednotlivé vrstvy budeme označovat symboly (0), (1), (2), (3), (4), a (5). Ve vrstvě (5) leží čísla 51, 52, 53, 54, 55, 56. Každou vrstvou můžeme otáčet vůči zbývajícím vrstvám, na obrázku se to projeví jako posunutí příslušného řádku vpravo nebo vlevo. Posunutí vpravo budeme označovat symbolem příslušné vrstvy — (2), (5), atd., pro označení posunutí vlevo přidáme opět $^{-1}$: $(2)^{-1}$, $(0)^{-1}$ a $(5)^{-1}$. Tak třeba po tahu (3) bude číslo 31 na místě čísla 32, 32 na místě 33 atd. Číslo 36 bude na místě 31. Tah $(2)^{-1}$ přesune 21 na místo 26, 26 na místo 25 atd. Kromě těchto tahů můžeme ještě posunovat kuličky vertikálně ve sloupci obsahujícím prázdné místo. Prázdné místo se objeví, pokud do jednoho ze dvou míst označených A, B (nikoliv do obou současně) posuneme kuličku ze sousedního pole 01 nebo 04. Při těchto tazích můžeme posunout kuličku na s ní sousední prázdné místo. Nemůžeme je proto dělat kdykoliv, nezávisle na tom, jaké prvky se na sousedních místech nacházejí — babylónská věž je hra neúplná.

Jestliže žádná kulička není na některém ze dvou míst A, B, budeme říkat, že věž je ve speciální pozici. Postupům, které začínají a končí ve speciální pozici, říkáme také speciální. Speciální postupy můžeme libovolně skládat.

Posunutí kuličky na sousední prázdné místo ve stejném sloupci udělá transpozici. Jaké další transpozice můžeme snadno udělat? Budeme předpokládat, že pozice, ve které se věž nachází, není speciální — na jednom z míst A, B je nějaká kulička. Potom můžeme jednoduše udělat řadu dalších transpozic. Ukážeme si jak na konkrétním případě. Nechť je prázdné třeba místo 23. Vhodným opakováním tahu (3) dostaneme nad prázdné místo 23 libovolnou z kuliček na místech 31—36, pak ji transpozicí (23, 33) přesuneme na místo 23 a opakováním tahu $(3)^{-1}$ vrátíme zbývající kuličky ve vrstvě (3) na původní místa. Uděláme tak transpozici, která na prázdné místo 23 přesune libovolnou z kuliček v sousední vrstvě (3). Naprosto stejně najdeme také postup, který na místo 23 přesune libovolnou z kuliček v druhé sousední vrstvě (1), a všechny ostatní ponechá na původních místech .Umíme tedy jednoduše udělat ty transpozice, které na prázdné místo posunou kteroukoliv z kuliček v sousední vrstvě.

Skládáme-li věž, jsme obvykle v pokušení používat pouze tyto transpozice. To však ke složení všech pozic nestačí. Speciálně tímto způsobem nedokážeme prohodit dvě kuličky tak, aby všechny ostatní zůstaly na původních místech. Dokážeme to vhodnou aplikací metody, kterou jsme použili už u patnáctky.

Každé posunutí kuličky na prázdné místo v sousední vrstvě budeme považovat za jeden tah. Těmito tahy děláme různé transpozice. Proč nestačí ke složení pozice na obrázku 4.24.a se dvěma přehozenými kuličkami 23 a 33? Tato pozice je lichá, má jediný sudý cyklus. Základní pozice 4.23. je sudá. Každým tahem uděláme nějakou transpozici, lichou pozici 4.24.a proto můžeme složit, pokud to vůbec nějak jde, pouze lichým počtem tahů-transpozic. A to vyloučíme správným použitím triku se šachovnicí. Jednotlivá místa na věži obarvíme podle obrázku 4.24.b.



Obr. 4.24

Každý tah-transpozice změní barvu prázdného místa, z jedné speciální pozice do druhé — třeba z pozice 4.24.a do základní — se proto můžeme dostat jen sudým počtem tahů-transpozic, nikdy lichým. Pozici 4.24.a tedy použitím pouhých tahů-transpozic nikdy nesložíme. Naprosto stejně se ukáže, že tahy-transpozice nestačí ke složení žádné speciální pozice, která má polohovou permutaci lichou. Stačí pouze na sudé speciální pozice. To už dokážeme běžným způsobem. Nejprve najdeme speciální postup, který udělá nějaký trojcyklus, potom konjugováním uděláme všechny trojcykly a nakonec použijeme výsledku z odstavce 4.1.

Cvičení 4.16. a) Najděte speciální postup z tahů transpozic, který udělá trojcyklus na místech 31, 41, 51.

b) Dokažte, že pro libovolné tři kuličky i, j, k existuje speciální postup z tahů-transpozic, který přemístí i na místo 31, j na místo 41 a k na místo 51.

c) Dokažte, že libovolný trojcyklus se dá udělat vhodným speciálním postupem složeným jen z tahů-transpozic.

d) Dokažte, že pomocí tahů-transpozic lze složit každou sudou speciální pozici.

A jak tedy složíme pozici 4.24.a? Odpověď je jednoduchá. Musíme ji napřed nějak dostat do sudé speciální pozice. Ve cvičení jsme právě dokázali, že takové pozice složit jdou. Tahem-transpozicí to neuděláme, zbývá jenom otočení nějakou vrstvou. Jakou pozici tak dostaneme? Otočením uděláme permutaci, která má jeden cyklus délky 6 a zbývající jednoprvkové. Otočení je lichý tah. Z liché pozice 4.24.a tak dostaneme pozici sudou. Protože je to navíc pozice speciální, stačí k jejímu složení dále používat už jenom tahy-transpozice. Otočením nějakou vrstvou tak dostaneme z každé liché speciální pozice sudou speciální pozici, kterou už umíme složit. Všechny speciální pozice proto složit jdou. A jelikož z každé pozice se snadno dostaneme do speciální, jsou všechny pozice řešitelné.

Na babylónské věži jsou všechny pozice řešitelné.

Cvičení 4.17. a) Dokažte, že pozice se dvěma přehozenými kuličkami na babylónské věži, která má lichý počet sloupců, je neřešitelná.
b) Popište řešitelné pozice na takových věžích.

***4.8. k-tranzitivní grupy permutací.** Mnohokrát jsme už používali postupy, které nějakou trojici prvků přemístily na místo jiné trojice. Dařilo se nám to díky tomu, že grupy polohových permutací na jednotlivých hlavolamech byly „dostatečně bohaté". Ukážeme si nyní matematický pojem, který tuto bohatost zachycuje. V souvislosti s tím také zopakujeme souvislé a nesouvislé hry.

Říkáme, že nějaká grupa $\mathbf{G}$ permutací na množině I je *tranzitivní*, jestliže pro každé dva prvky $i, j \in I$ existuje permutace $p \in \mathbf{G}$ taková, že $ip = j$.

Je-li $\mathbf{G}$ grupa všech polohových permutací na nějaké hře, pak tranzitivita $\mathbf{G}$ znamená, že každý pohyblivý prvek i lze nějakým postupem převést na místo libovolného jiného pohyblivého prvku j. Nějaká hra je proto souvislá, právě když grupa polohových permutací na této hře je tranzitivní.

U nesouvislých hlavolamů jsme rozlišovali orbity. Totéž můžeme udělat u libovolné permutační grupy. Je-li $\mathbf{G}$ grupa permutací na I a $i, j \in I$ libovolné dva prvky, pak říkáme, že i je *ekvivalentní* s j, jestliže existuje permutace $p \in \mathbf{G}$ taková, že $ip = j$.

Axiómy grupy mají následující tři důsledky.

a) Je-li i ekvivalentní s j a j ekvivalentní s k, pak také i je ekvivalentní s k. Podle předpokladů existují permutace $p, q \in G$ takové, že $ip = j$ a $jq = k$. Potom $i(p \circ q) = (ip)q = k$, tj., opravdu i je ekvivalentní s k.

b) Každý prvek $i \in I$ je ekvivalentní sám se sebou, neboť identická permutace na I zobrazuje i do i.

c) Je-li i ekvivalentní s j, pak také j je ekvivalentní s i.

Existuje totiž permutace $p \in G$ taková, že $ip = j$. Potom ale $jp^{-1} = i$, tj., j je ekvivalentní s i.

Maximálním množinám vzájemně ekvivalentních prvků budeme říkat *orbity* grupy **G**. Podle bodu b) každý prvek $i \in I$ leží v nějaké orbitě. Ukážeme, že různé orbity jsou disjunktní, nemají žádný společný prvek. Jsou-li K, L dvě orbity, které se protínají, j nějaký jejich společný prvek, potom každý prvek $k \in K$ je ekvivalentní s j a prvek j je ekvivalentní s každým prvkem $l \in L$. Podle vlastnosti a) je také k ekvivalentní s l. V množině $K \cup L$ jsou proto každé dva prvky ekvivaletnní. Vzhledem k tomu, že K i L jsou maximální množiny vzájemně ekvivalentních prvků, platí $K, L \supseteq K \cup L$. Protože je také $K \cup L \supseteq K, L$, dostáváme tak $K = L = K \cup L$. Tím jsme dokázali, že různé orbity permutační grupy **G** jsou disjunktní.

Orbity na nějakém hlavolamu tak, jak jsme je používali, odpovídají orbitám grupy polohových permutací tohoto hlavolamu.

Grupa permutací **G** na množině I je tranzitivní, právě když jsou každé dva prvky I ekvivalentní, a to je, právě když má pouze jednu orbitu. Jestliže **G** není tranzitivní a J je nějaká orbita, potom každá permutace $p \in G$ zobrazuje každý prvek $j \in J$ do jednoznačně určeného prvku $jp \in J$. Zobrazení p_J, které každému prvku $j \in J$ přiřazuje prvek $jp_J = jp \in J$, je, jak snadno ověříme, vzájemně jednoznačné zobrazení, tj. permutace na množině J. Říkáme mu *restrikce* p na J. Připomeňme si, že v případě polohové permutace p nějaké pozice na Rubikově krychli, čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu, jsme restrikci p na rohovou (hranovou) orbitu říkali rohová (hranová) část p.

Cvičení 4.18. Předpokládejme, že **G** je nějaká grupa permutací na množině I a J orbita **G**. Dokažte, že množina všech restrikcí p_J permutací $p \in G$ na J spolu s operací skládání tvoří grupu. Této grupě budeme říkat *restrikce* G na J a označovat ji G_J.

Návod. Ověřte axiómy grupy.

Samotná tranzitivita grup polohových permutací, případně jejich restrikcí na orbity, nám při skládání her nestačila, potřebovali jsme více. Každou trojici různých prvků z jedné orbity přemístit vhodným postupem na místa nějaké jiné trojice. Odpovídající vlastnost grupy polohových permutací popisuje následující důležitý pojem.

Říkáme, že grupa G permutací na množině I je *k-tranzitivní* (k je nenulové přirozené číslo menší nebo rovné počtu prvků I), jestliže pro každé dvě posloupnosti $i_1, i_2, \ldots, i_k$ a $j_1, j_2, \ldots, j_k$ různých prvků I existuje permutace $p \in G$ taková, že $i_l p = j_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, \ldots, k$. Jinak řečeno, grupa G je k-tranzitivní, jestliže každou tabulku permutace na I, ve které je už napsáno libovolně k sloupců, můžeme doplnit do tabulky permutace patřící do G. Nebo ještě jinak, libovolných k šipek mezi prvky množiny I (z každého a do každého nejvýše jedna) můžeme vždy doplnit do grafu nějaké permutace z G.

Grupa permutací je tedy 1-tranzitivní, právě když je tranzitivní. Je-li $k \geq 2$, pak každá k-tranzitivní grupa je samozřejmě $(k - 1)$-tranzitivní. Následující jednoduché tvrzení nám poněkud usnadní zjišťování, kdy je nějaká grupa k-tranzitivní.

Kdy je grupa tranzitivní? *Grupa* G *permutací na množině* $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ *je k-tranzitivní, právě když splňuje jednu z následujících dvou podmínek.*

1. *Pro každou posloupnost* $i_1, \ldots, i_k$ *různých prvků* I

existuje permutace $p \in G$ taková, že $lp = i_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, k$.

2. *Pro každou posloupnost $i_1, \ldots, i_k$ různých prvků I existuje permutace $r \in G$ taková, že $i_l r = l$ pro všechna $l = 1, 2, \ldots, k$.*

Důkaz. Je-li $\boldsymbol{G}$ k-tranzitivní, pak permutace p taková, že $lp = i_l$ pro všechna l existuje podle definice k-tranzitivních grup.

Nechť naopak $\boldsymbol{G}$ splňuje podmínku 1., $i_1, i_2, \ldots, i_k$ a $j_1, j_2, \ldots, j_k$ jsou dvě posloupnosti různých prvků I. Potom existují permutace $p, q \in G$ takové, že $lp = i_l$ a $lq = j_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, k$. Pak ale platí $i_l(p^{-1} \circ q) = j_l$ pro všechna $l = 1, 2, \ldots, k$, $\boldsymbol{G}$ je tudíž k-tranzitivní.

Dokázat, že také podmínky 1. a 2. jsou ekvivalentní, je snadné. Platí $lp = i_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, k$, právě když $i_l p^{-1} = l$ pro všechna l.

Ve cvičení 4.10. jsme ukázali, že libovolných šest kuliček na uších můžeme vhodným postupem převést na místa 1, 2, ..., 6. Grupa všech řešitelných pozic na uších je tedy podle podmínky 2. 6-tranzitivní. Ukážeme ještě, jak moc tranzitivní jsou symetrická a alternativní grupa.

Symetrická grupa $\boldsymbol{S}_I$ na množině $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, která má m prvků, je m-tranzitivní, alternativní grupa $\boldsymbol{A}_I$ je $(m - 2)$-tranzitivní.

Dokážeme to pomocí podmínky 1. Je-li $i_1, i_2, \ldots, i_m$ posloupnost různých prvků I, pak

$$p = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_m \end{pmatrix}$$

je tabulka permutace $p \in \boldsymbol{S}_I$, která zobrazuje každý prvek $l = 1, 2, \ldots, m$ do i_l. Symetrická grupa $\boldsymbol{S}_I$ je tudíž m-tranzitivní.

Je-li $i_1, i_2, \ldots, i_{m-2}$ posloupnost různých prvků I, pak pouze dva prvky I v ní neleží. Označíme je i a j. Nyní uvažujeme dvě různé permutace na množině I:

$$p = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m-2, & m-1, & m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_{m-2}, & i, & j \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m-2, & m-1, & m \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_{m-2}, & j, & i \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že $q = p \circ (i, j)$. Právě jedna z permutací p, q je tedy lichá a druhá sudá. Vždy proto existuje sudá permutace, která zobrazuje každý prvek $l = 1, 2, \ldots, m-2$, do i_l. Podle podmínky 1. je alternativní grupa $\boldsymbol{A}_I$ $(m-2)$-tranzitivní.

Grupa všech řešitelných pozic na uších je proto ve skutečnosti 22-tranzitivní, každá pozice je řešitelná.

Závěrem tohoto odstavce ještě krátká poznámka. 4-tranzitivních grup je velice málo. Pokud množina I nemá právě 11, 12, 23 nebo 24 prvků, pak jediné 4-tranzitivní grupy, které na I existují, jsou symetrická a alternativní grupa. Na množinách s 11, 12, 23 a 24 prvky existuje vždy ještě jedna další 4-tranzitivní grupa, a žádné jiné 4-tranzitivní grupy neexistují. To je matematikům známo pouze několik let a je to důsledkem jednoho z nejobtížnějších tvrzení, které kdy bylo v matematice dokázáno. Více si o tom povíme v posledním dvouhvězdičkovém odstavci této kapitoly.

***4.9. Součin grup.** Tentokrát zahájíme zcela mimořádně čtyřstěnem. Na čtyřstěnu jsou dvě orbity, jednu tvoří čtyři rohové prvky, druhou šest hranových. Polohová permutace p libovolné pozice $\boldsymbol{p}$ určuje dvě různé restrikce — restrikci na rohovou orbitu, kterou označíme p_1, a restrikci na hranovou orbitu, kterou označíme p_2. Polohu všech pohyblivých prvků v pozici $\mathbf{p}$ můžeme popsat nejenom permutací p, ale také dvojicí restrikcí (p_1, p_2). Permutace p_1 je permutace na čtyřprvkové množině $\{abc, abd, acd, bcd\}$ rohových kostiček, p_2 je permutace na šestiprvkové množině $\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$ hranových kostiček.

Které dvojice (p_1, p_2) permutací odpovídají polohové permutaci nějaké srovnatelné pozice? V minulé kapitole jsme dokázali, že polohová permutace p každé srovnatelné pozice je sudá jak na rohových, tak na hranových prvcích, tj. p_1 a p_2 jsou v tomto případě sudé. V této kapitole jsme naopak dokázali, že každou pozici, jejíž polohová permutace má obě restrikce sudé, lze srovnat. Polohovým permutacím srovnatelných pozic proto odpovídají dvojice (p_1, p_2), kde p_1 a p_2 jsou sudé permutace na množinách rohových a hranových prvků. Každá polohová permutace p je jednoznačně určená svými restrikcemi p_1 a p_2. Jsou-li p a q dvě různé polohové permutace na čtyřstěnu, pak platí aspoň jedna z nerovností $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$. Různým polohovým permutacím proto odpovídají různé dvojice restrikcí. To znamená, že mezi polohovými permutacemi srovnatelných pozic na čtyřstěnu a dvojicemi (p_1, p_2) sudých permutací na čtyřprvkové, resp. šestiprvkové množině existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, které označíme $\mathbf{W}$. Platí

$$p\mathbf{W} = (p_1, p_2).$$

Polohové permutace tvoří grupu — grupu polohových permutací čtyřstěnu. Skládání mezi prvky této grupy můžeme pomocí zobrazení $\mathbf{W}$ přenést na množinu dvojic (p_1, p_2). Vezmeme dvě polohové permutace p, q. Platí $p\mathbf{W} = (p_1, p_2)$ a $q\mathbf{W} = (q_1, q_2)$. Čemu se rovná $(p \circ q)\mathbf{W}$? Musíme najít restrikce složené permutace $p \circ q$ na rohovou a hranovou orbitu. Libovolný rohový prvek i se permutací $p \circ q$ zobrazí do prvku $i(p \circ q) = (ip)q = = (ip_1)q_1 = i(p_1 \circ q_1)$. Restrikce $p \circ q$ na rohovou orbitu se tedy rovná $p_1 \circ q_1$. Zcela stejně snadno se ověří, že restrikce $p \circ q$ na hranovou orbitu se rovná $p_2 \circ q_2$. Platí proto $(p \circ q)\mathbf{W} = (p_1 \circ q_1, p_2 \circ q_2)$. Mezi dvojicemi restrikcí můžeme tak přirozeným způsobem definovat operaci skládání, která dvojicím (p_1, p_2) a (q_1, q_2) přiřadí dvojici $(p_1, p_2) \circ (q_1, q_2) = (p_1 \circ q_1, p_2 \circ q_2)$. Dokážeme nyní v mnohem obecnějším tvaru, že takto definovaná operace skládání má vlastnosti grupy. Nejdříve ale jednu definici.

Vezmeme dvě grupy $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ definované na množinách G_1 a G_2. Operaci skládání budeme v obou případech označovat stejným symbolem $\circ$. Dále označíme $G_1 \times G_2$ kartézský součin množin G_1 a G_2, tj. množinu všech uspořádaných dvojic (g_1, g_2), kde $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$. Na množině $G_1 \times G_2$ definujeme operaci skládání takto: $(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ h_1, g_2 \circ h_2)$. Ukážeme, že množina $G_1 \times G_2$ s takto definovaným skládáním tvoří grupu. Budeme ji nazývat *součinem grup* $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ a označovat $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$.

Musíme ověřit, že množina $G_1 \times G_2$ s operací skládání splňuje aiómy grupy. Pokud jde o asociativu, platí

$$\begin{aligned}
((g_1, g_2) \circ (h_1, h_2)) \circ (i_1, i_2) &= \\
= (g_1 \circ h_1, g_2 \circ h_2) \circ (i_1, i_2) &= \\
= ((g_1 \circ h_1) \circ i_1, (g_2 \circ h_2) \circ i_2) &= \\
= (g_1 \circ (h_1 \circ i_1), g_2 \circ (h_2 \circ i_2)) &= \\
= (g_1, g_2) \circ (h_1 \circ i_1, h_2 \circ i_2) &= \\
= (g_1, g_2) \circ ((h_1, h_2) \circ (i_1, i_2)).&
\end{aligned}$$

Asociativita tedy plyne z toho, že operace v obou grupách $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$ jsou asociativní. Jsou-li n_1 a n_2 neutrální prvky v grupách $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$, pak pro každý prvek $(g_1, g_2) \in G_1 \times$

$\times G_2$ platí $(g_1, g_2) \circ (n_1, n_2) = (g_1 \circ n_1, g_2 \circ n_2) = (g_1, g_2)$, a také $(n_1, n_2) \circ (g_1, g_2) = (g_1, g_2)$. Dvojice (n_1, n_2) je proto neutrální prvek. A nakonec, jsou-li $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$ libovolné prvky, existují k nim inverzní prvky g_1^{-1} a g_2^{-1}. Potom platí $(g_1, g_2) \circ (g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 \circ g_1^{-1}, g_2 \circ g_2^{-1}) = (n_1, n_2)$, a také $(g_1^{-1}, g_2^{-1}) \circ (g_1, g_2) = (n_1, n_2)$. Prvek (g_1^{-1}, g_2^{-1}) je tedy inverzní k prvku (g_1, g_2). Množina $G_1 \times G_2$ spolu s operací skládání je tedy opravdu grupa.

Teď už není těžké dokázat, že zobrazení $\boldsymbol{W}$, které jsme definovali na počátku odstavce, je izomorfismus grupy polohových permutací na čtyřstěnu a součinu alternativních grup $\boldsymbol{A}_4 \times \boldsymbol{A}_6$.

Grupa polohových permutací na čtyřstěnu je izomorfní součinu alternativních grup $\boldsymbol{A}_4 \times \boldsymbol{A}_6$.

Cvičení 4.19. Dokažte následující vlastnost grupy polohových permutací na dvanáctistěnu:

Grupa polohových permutací na dvanáctistěnu je izomorfní součinu alternativních grup $\boldsymbol{A}_{20} \times \boldsymbol{A}_{30}$.

Stejně můžeme dokázat o dominu:

Grupa řešitelných pozic na dominu je izomorfní součinu symetrických grup $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_8$.

Cvičení 4.20. Dokažte právě uvedenou vlastnost grupy řešitelných pozic na dominu.

A jak je to s Rubikovou krychlí? Také tady určuje každá polohová permutace p nějaké srovnatelné pozice $\boldsymbol{p}$ dvě restrikce p_1 a p_2 na rohovou a hranovou orbitu. Z minulé kapitoly víme, že obě restrikce musí být současně sudé nebo současně liché. V této kapitole jsme dokázali, že každou pozici $\boldsymbol{p}$, jejíž polohová permutace p má tuto vlastnost, lze srovnat. Grupa polohových permutací na Rubikově krychli je proto izomorfní s podgrupou součinu symetrických grup $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$, kterou tvoří takové dvojice (p_1, p_2), ve kterých mají obě permutace p_1 a p_2 stejnou paritu. Jsou buď obě sudé, nebo obě liché. Této podgrupě můžeme říkat *paritní podgrupa* $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$ a označíme ji $\boldsymbol{R}$.

Ukážeme, že index paritní podgrupy v grupě $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$ se rovná 2. K tomu stačí najít nějaký prvek x grupy $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$, který neleží v $\boldsymbol{R}$ a pro který platí $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12} = R \cup Rx$. V grupě $\boldsymbol{R}$ leží všechny dvojice (p_1, p_2), kde p_1 a p_2 mají stejnou paritu. Zvolíme $x = (n, t)$, n je identická permutace na rohové orbitě a t je libovolná transpozice na hranové orbitě. Permutace n a t mají různou paritu, proto $x \notin R$. Jestliže nyní nějaká dvojice (q_1, q_2) neleží v R, pak q_1, q_2 mají různou paritu. Dvojice $(q_1, q_2) \circ (n, t) = (q_1, q_2 \circ t)$ potom musí ležet v R. Pak platí $(q_1, q_2) = (q_1, q_2) \circ ((n, t) \circ (n, t)) = ((q_1, q_2) \circ (n, t)) \circ (n, t) \in Rx$. Odtud vyplývá, že $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12} = R \cup Rx$, tj. paritní podgrupa $\boldsymbol{R}$ má index 2 v $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$.

> Grupa polohových permutací na Rubikově krychli je izomorfní s paritní podgrupou součinu symetrických grup $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$. Paritní podgrupa má index 2 v $\boldsymbol{S}_8 \times \boldsymbol{S}_{12}$.

****4.10. Mathieuovy grupy a vícetranzitivní permutační grupy.** Dosud se nám u každého hlavolamu podařilo najít postupy, které udělaly transpozici nebo trojcyklus. To řešení velmi usnadňovalo, konjugováním jsme našli postupy, které udělaly libovolnou transpozici nebo trojcyklus. A složit každou permutaci z transpozic nebo každou sudou permutaci z trojcyklů už je snadné. Nejobtížnější je vždy udělat vůbec nějakou transpozici nebo trojcyklus. Také při tom používáme konjugování. Nemůžeme to ale dělat mechanicky, musíme vždy také přemýšlet o konkrétních vlastnostech hračky, abychom mohli konjugování dobře použít.

Existuje vůbec nějaký hlavolam, na kterém by nešlo udělat transpozici nebo trojcyklus? Pokud vím, nikdo takový nevyrobil. Můžeme si ho ale představit. Pro zajímavost teď ukážeme matematické modely dvou takových hlavolamů. Připomeňme si, modelem hry bez orientace je vždy nějaká množina I (odpovídající pohyblivým prvkům) a několik permutací-generátorů na I (které si představujeme jako tahy). „Řešení" takové hry spočívá v popisu grupy všech permutací, které lze z generátorů poskládat, a v nalezení metody, jak každou takovou permutaci z generátorů složit. Grupy permutací, které ukážeme, objevil kolem roku 1860 francouzský matematik E. Mathieu a na jeho počest jsou nyní nazývány *Mathieuovy grupy.*

První z nich budeme označovat $\boldsymbol{M}_{12}$. Je definována na množině $I = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Patří do ní všechny permutace na I, které lze dostat skládáním následujících tří generátorů:

$$a = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 1, & 12 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \\ 1, & 2, & 7, & 10, & 6, & 4, & 11, & 3, & 9, & 5, & 8, & 12 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \\ 12, & 11, & 6, & 8, & 9, & 3, & 10, & 4, & 5, & 7, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Nakreslete si grafy těchto permutací, abyste měli představu, jak složitá je jejich vzájemná poloha, a jak obtížné by asi bylo „řešení" takové hry.

Druhý příklad, který ukážeme, je grupa M_{24}. Je definována na množině $I = \{1, 2, 3, \ldots, 24\}$. Patří do ní všechny permutace na I, které lze dostat skládáním následujících tří generátorů:

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} 15, & 16, & 17, & 18, & 29, & 20, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 16, & 17, & 18, & 19, & 10, & 21, & 22, & 23, & 1, & 24 \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, \\ 1, & 2, & 17, & 13, & 4, & 6, & 9, & 18, & 3, & 7, & 12, & 23, & 14, & 19, \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 20, & 15, & 10, & 11, & 5, & 22, & 16, & 21, & 8, & 24 \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \\ 24, & 23, & 12, & 16, & 18, & 10, & 20, & 14, & 21, & 6, & 17, & 3, \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20, & 21, & 22, & 23, & 24 \\ 22, & 8, & 19, & 4, & 11, & 5, & 15, & 7, & 9, & 13, & 2, & 1 \end{matrix}\right).$$

Nakreslete si opět grafy těchto permutací.

Snadno se ověří, že obě grupy M_{12} a M_{24} jsou tranzitivní. O trochu víc práce dá dokázat, že jsou 2-tranzitivní. Matematiky zaujaly především proto, že jsou obě 5-tranzitivní a nejsou 6-tranzitivní.

Tuto vlastnost dokazovat nebudeme (není to snadné!), pouze s její pomocí ukážeme, že grupy M_{12} a M_{24} neobsahují žádnou transpozici ani trojcyklus. Může grupa

$\mathbf{M}_{12}$ obsahovat nějakou transpozici? Kdyby ji obsahovala, pak by také, protože je 5-tranzitivní (2-tranzitivita by v této chvíli zcela stačila), obsahovala všechny ostatní transpozice (konjugování!). Z transpozic lze ale složit každou permutaci, grupa $\mathbf{M}_{12}$ by tedy musela obsahovat všechny permutace na I a byla by 12-tranzitivní. My ale víme, že není ani 6-tranzitivní. $\mathbf{M}_{12}$ tedy žádnou transpozici neobsahuje. Zcela stejně se ukáže, že neobsahuje ani žádný trojcyklus. Kdyby totiž nějaký měla, pak by opět z 5-tranzitivity plynulo, že obsahuje všechny trojcykly, a tedy všechny sudé permutace na I. Musela by být 10-tranzitivní, což zase není. $\mathbf{M}_{12}$ proto neobsahuje ani žádný trojcyklus.

Cvičení 4.21. Podobně dokažte, že grupa $\mathbf{M}_{24}$ neobsahuje žádnou transpozici ani trojcyklus.

E. Matheiu odvodil z grup $\mathbf{M}_{12}$ a $\mathbf{M}_{24}$ další zajímavé grupy, které se také nazývají Mathieuovy grupy. Způsob, jak to udělal, je důležitou standardní metodou v teorii permutačních grup. Proto si ji nyní podrobněji ukážeme.

Vezmeme si nějakou permutační grupu $\mathbf{G}$ na množině I a libovolný prvek $a \in I$. Symbolem G_a označíme množinu všech permutací z $\mathbf{G}$, které zobrazují prvek a do sebe, tj., $p \in G_a$, právě když $ap = a$. Říkáme také, že p *fixuje* a. Množina G_a spolu s operací skládání permutací je podgrupa grupy $\mathbf{G}$. Jestliže p a q fixují a, pak jejich složení $p \circ q$ také fixuje a. G_a obsahuje také neutrální permutaci n (ta fixuje každý prvek I) a spolu s každou permutací p také permutaci k ní inverzní. Grupu $\mathbf{G}_a$ budeme nazývat *stabilizátor bodu a* v grupě $\mathbf{G}$. Grupa $\mathbf{G}_a$ závisí nejenom na původní grupě $\mathbf{G}$, ale také na volbě prvku $a \in I$. Dokážeme, že v případě tranzitivní grupy $\mathbf{G}$ různé volby dávají izomorfní grupy.

Izomorfismus mezi stabilizátory různých bodů. *Buď* $\mathbf{G}$ *tranzitivní grupa permutací na množině* I *a* a, $b \in I$ *dva prvky. Potom jsou stabilizátory* $\mathbf{G}_a$ *a* $\mathbf{G}_b$ *izomorfní.*

Důkaz. Grupa $\mathbf{G}$ je tranzitivní, existuje proto permutace $s \in G$ taková, že $as = b$. Jestliže permutace p fixuje bod a, pak permutace $s^{-1} \circ p \circ s$ fixuje bod b. Skutečně, platí $b(s^{-1} \circ p \circ s) = (bs^{-1})p \circ s = a(p \circ s) = as = b$. Každé permutaci $p \in G_a$ můžeme proto přiřadit jednoznačně určenou permutaci $p\mathbf{W} = s^{-1} \circ p \circ s \in G_b$. Dokážeme, že takto definované zobrazení $\mathbf{W}$ je izomorfismus stabilizátorů G_a a G_b. Nejdříve ukážeme, že je zobrazení $\mathbf{W}$ vzájemně jednoznačné. Je-li $p\mathbf{W} = q\mathbf{W}$, pak $s^{-1} \circ p \circ s = s^{-1} \circ q \circ s$. Odtud plyne $s \circ (s^{-1} \circ p \circ s) \circ s^{-1} = s \circ (s^{-1} \circ q \circ s) \circ s^{-1}$, tj. $p = q$. Pro každou permutaci $r \in G_b$ existuje $p \in G_a$ takové, že $r = p\mathbf{W}$. Je-li totiž $t \in G_b$, pak $br = b$. Potom $a(s \circ r \circ s^{-1}) = a$, tj. $s \circ r \circ s^{-1} \in G_a$. Pro permutaci $p = s \circ r \circ s^{-1}$ platí $p\mathbf{W} = s^{-1} \circ p \circ s = s^{-1} \circ (s \circ r \circ s^{-1}) \circ s = r$. Zobrazení $\mathbf{W}$ je tedy opravdu vzájemně jednoznačné.

Dále platí $(p \circ q)\mathbf{W} = s^{-1} \circ (p \circ q) \circ s = s^{-1} \circ (p \circ s \circ s^{-1} \circ q) \circ s = (s^{-1} \circ p \circ s) \circ (s^{-1} \circ q \circ s) = p\mathbf{W} \circ q\mathbf{W}$, zobrazení $\mathbf{W}$ proto zachovává operaci skládání. Zachovává také neutrální prvek, $n\mathbf{W} = s^{-1} \circ n \circ s = n$. Nakonec $(p^{-1})\mathbf{W} = s^{-1} \circ p^{-1} \circ s = (s^{-1} \circ p \circ s)^{-1} = (p\mathbf{W})^{-1}$. Tím je dokázáno, že $\mathbf{W}$ je izomorfismus stabilizátorů G_a a G_b.

V případě tranzitní grupy $\mathbf{G}$ tedy vůbec nezáleží na tom, jaký prvek $a \in I$ zvolíme, stabilizátory všech prvků jsou izomorfní. Ukážeme ještě, jak je to s tranzitivitou stabilizátorů.

Tranzitivita stabilizátoru bodu. *Je-li* $\mathbf{G}$ *k-tranzitivní grupa permutací* ($k \geq 2$) *na množině* I, *pak stabilizátor* $\mathbf{G}_a$ *bodu* $a \in I$ *je* $(k - 1)$*-tranzitivní grupa permutací na množině* $I - \{a\}$.

Důkaz je jednoduchý. Jsou-li $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ a $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ dvě posloupnosti různých prvků množiny $I - \{a\}$, doplníme je prvkem a na posloupnosti $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k = a$ a $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}, j_k = a$ různých prvků I. Grupa $\mathbf{G}$ je k-tranzitivní na I, existuje proto permutace $p \in G$ taková, že $i_l p = j_l$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, k$. Speciálně tedy platí $ap = i_k p = j_k = a$, tj., $p \in G_a$. Existuje proto permutace $p \in G_a$, která zobrazuje i_l do j_l pro všechna $l = 1, 2, \ldots, k - 1$, grupa $\mathbf{G}_a$ je opravdu $(k - 1)$-tranzitivní na množině $I - \{a\}$.

E. Mathieu zkoumal stabilizátor prvku 12 v grupě $\mathbf{M}_{12}$. My si tento stabilizátor označíme $\mathbf{M}_{11}$. Protože je $\mathbf{M}_{12}$ 5-tranzitivní na množině $\{1, 2, \ldots, 12\}$, je $\mathbf{M}_{11}$ 4-tranzitivní na množině $\{1, 2, \ldots, 11\}$. Symbolem $\mathbf{M}_{23}$ dále označíme stabilizátor bodu 24 v grupě $\mathbf{M}_{24}$. Grupa $\mathbf{M}_{23}$ je 4-tranzitivní na množině $\{1, 2, 3, \ldots, 23\}$.

Nyní můžeme konečně pořádně zformulovat větu o existenci vícetranzitivních grup, o které jsme se zmínili v odstavci 4.8.

Každá 4-tranzitivní permutační grupa je buď symetrická grupa, nebo alternativní grupa, nebo jedna z Mathieuových grup $\mathbf{M}_{11}$, $\mathbf{M}_{12}$, $\mathbf{M}_{23}$, $\mathbf{M}_{24}$.

Grupy $\mathbf{M}_{11}$ a $\mathbf{M}_{23}$ jsou 4-tranzitivní, a nejsou 5-tranzitivní. Každá 5-tranzitivní grupa permutací je proto buď symetrická, nebo alternativní grupa, anebo jedna ze dvou 5-tranzitivních Mathieuových grup — $\mathbf{M}_{12}$ a $\mathbf{M}_{24}$. A protože žádná z Mathieuových grup není 6-tranzitivní, jediné 6-tranzitivní grupy permutací jsou symetrické a alternativní grupy.

Při řešení hlavolamů jsme hledali postupy, které udělají transpozici nebo trojcyklus, aniž bychom si byli jisti, že takové postupy existují. O jejich existenci se teď můžeme přesvědčit pomocí uvedeného výčtu 4-tranzitivních grup permutací. Ukážeme si to na jediném příkladu — na uších.

Celkem jednoduše se dá ukázat, že grupa všech řešitelných pozic na uších je 6-tranzitivní, udělali jsme to ve cvičení 4.10. Nezbývá tedy jiná možnost, než že grupa všech řešitelných pozic je buď symetrická, nebo alternativní. Každý tah je lichý, nemůže to proto být alternativní grupa, a musí to být grupa symetrická. Každou pozici lze tedy složit, mimo jiné proto existují postupy, které udělají transpozici nebo trojcyklus. Víme tedy, že takové postupy existují, zbývá je nějak najít.

Úplný seznam 4-tranzitivních permutačních grup je důsledkem tzv. *klasifikace konečných jednoduchých grup*, dosažené před několika lety. Nemůžeme se pouštět do vysvětlování, co tato klasifikace říká. Omezíme se pouze na velice hrubou analogii. Každé složené přirozené číslo je součinem menších prvočísel, prvočíslo už jako součin nějakých menších čísel vyjádřit nemůžeme. Prvočísla jsou tedy jakési stavební kameny, ze kterých násobením dostaneme všechna ostatní přirozená čísla. Také konečné grupy můžeme násobit. Násobení grup je ale mnohem složitější záležitost než násobení přirozených čísel. Velice speciální příklad součinu dvou grup jsme si ukázali v minulém odstavci. Konečné jednoduché grupy jsou podobné stavební kameny, ze kterých můžeme dostat každou konečnou grupu násobením, žádná jednoduchá grupa jako součin dvou menších grup už vyjádřit nejde. Podobně jako prvočísel, také konečných jednoduchých grup je nekonečně mnoho. Počátkem osmdesátých let se podařilo dokončit seznam všech těchto grup. U většiny konečných jednoduchých grup je jasné, kde se vzaly. Zbývá ale malá skupina 26 jednoduchých grup, kterým se říká *sporadické*, o nichž se sice ví, že existují, příčina jejich existence ale není jasná. První sporadické grupy objevil právě E. Mathieu. Kromě čtyř už uvedených to byla ještě pátá grupa — stabilizátor bodu 23 v grupě M_{23} — která se označuje M_{22}. Šestá sporadická grupa byla objevena až po více než sto letech, a pak během necelých dvaceti let následovaly další, až se jejich seznam uzavřel na čísle 26. Žádné jiné nikdo nenajde, neexistují.

To je ale jenom část pozoruhodné historie Mathieuových grup. Kolem roku 1950 našly zcela nečekanou aplikaci v teorii samoopravných kódů, oblasti matematiky, která tvoří teoretický základ bezchybného přenosu informace, a umožnila současnou revoluci v přenosu informací. Mathieuovy grupy tak dobře ilustrují jednotlivé etapy vývoje matematické teorie. Na počátku byly zajímavé jen jako překvapivé izolované příklady. Po dlouhé době byly logicky zařazeny do rozsáhlé matematické teorie, která vznikla zčásti také ze snahy vysvětlit, kde se tyto příklady vzaly, najít příklady podobné, případně dokázat, že další neexistují. A praktická aplikace, o které první matematik zaujatý zvláštností těchto příkladů vůbec neměl, a ani nemohl mít tušení, se objevila zcela nečekaně. Kdo měl v roce 1860 ponětí o fotografiích Saturnova prstence, přenosu televizního signálu prostřednictvím družic, počítačích provádějících statisíce operací za sekundu nebo sondách odebírajících automaticky vzorky hornin z povrchu Měsíce? Nic z toho by bez samoopravných kódů nebylo možné.

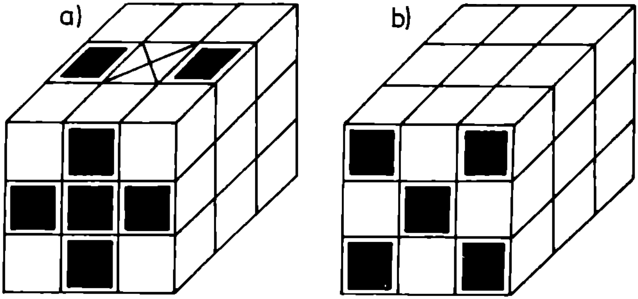
Pátá kapitola

ORIENTACE

5.1. Rubikova krychle, zbývající neřešitelné pozice. Ve třetí kapitole jsme už odhalili řadu neřešitelných pozic na krychli, každá pozice s lichou polohovou permutací je neřešitelná. Mezi pozicemi se sudou polohovou permutací je stále ještě dost neřešitelných. Jejich neřešitelnost je způsobena orientacemi jednotlivých prvků, ne už polohou. V tomto odstavci se naučíme poznávat všechny zbývající neřešitelné pozice.

Tak jako jsme v předchozích dvou kapitolách zcela zanedbávali orientace a zkoumali pouze polohu pohyblivých prvků, budeme nyní studovat jenom orientace a polohy si nebudeme všímat. Pro větší názornost si k tomuto účelu krychli nově obarvíme. A protože budeme zkoumat zvlášť orientace hranových kostiček a zvlášť rohových, budeme používat dvě různá obarvení. Na obrázku 5.1.a je obarvení pro hranové prvky. Každá hranová kostička má jednu plošku bílou a druhou černou. Různé kostičky jsou obarvené stejně, nemůžeme je proto nijak rozlišit. Ať je kterákoliv z nich kdekoliv, je na správném místě. Můžeme rozlišovat pouze jejich orientace. U rohových prvků nemůžeme ani to, všechny jsou celé bílé.

Obarvení 5.1.b budeme používat při studiu orientací rohových prvků. Tady má každý rohový prvek jednu plošku černou a dvě bílé, opět nemůžeme rozlišovat jejich polohy, pouze orientace. Hranové prvky jsou celé bílé, vůbec na nich nezáleží. Obě pozice na obrázku 5.1.



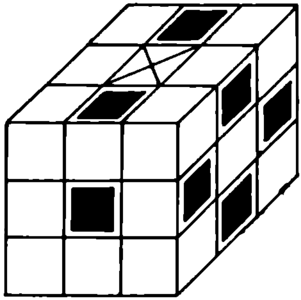
Obr. 5.1

budeme považovat za správné a popíšeme všechny pozice, které z nich můžeme dostat nějakým postupem.

Jednodušší to je u hranových prvků, začneme tedy obrázkem 5.1.a. Takto obarvená krychle má dvě protilehlé vrstvy černé (podle barvy středového prvku), další dvě bílé, a zbývajícím dvěma budeme říkat černobílé. V libovolné pozici můžeme o každém hranovém prvku rozhodnout, má-li správnou orientaci nebo ne: pokud leží v černé vrstvě, musí být v příslušné stěně černá ploška, leží-li v bílé vrstvě, musí tam být bílou ploškou. Na obrázku 5.1.a jsou všechny prvky správně orientované.

Kolik špatně orientovaných prvků můžeme nějakým postupem z pozice 5.1.a dostat? Napřed zjistíme, jak se změní počet špatně orientovaných prvků, uděláme-li v nějaké pozici jeden tah. K obrázku 5.1.a si přibereme ještě obrázek 5.2., na kterém jsou naopak všechny prvky se špatnou orientací.

Otočíme nyní v obou pozicích černou vrstvou. V pozici 5.1.a zůstanou všechny prvky i nadále se správnou orientací, v pozici 5.2. budou mít stále orientaci špatnou. Otočení černou vrstvou tedy nemění orientaci žádného prvku. Otočíme-li černou vrstvou v libovolné pozici,



Obr. 5.2

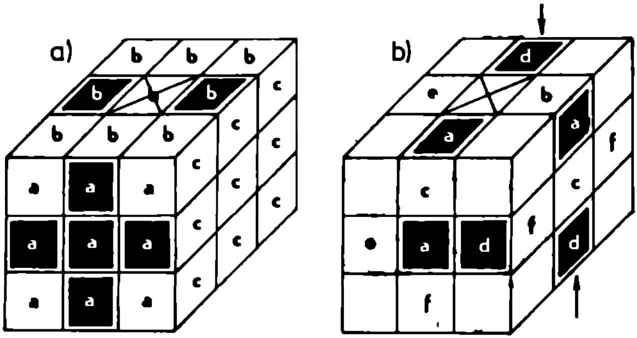
počet špatně orientovaných prvků se nikdy nezmění. Zcela stejně se ukáže, že ani otočení bílou vrstvou nezmění počet špatně orientovaných prvků. Prvky, které jsou dobře orientované, zůstanou se správnou orientací i nadále, prvky se špatnou orientací zůstanou po tomto otočení špatně orientované.

Jiné je to s černobílou vrstvou. Otočíme-li touto vrstvou v pozici 5.1.a, budou mít prvky v černobílé vrstvě v nové pozici stejné orientace, jako mají prvky v horní vrstvě v pozici 5.2. — všechny budou špatně orientované. Otočíme-li naopak černobílou vrstvou v pozici 5.2. (o 90°), budou mít v nové pozici všechny prvky stejnou orientaci jako prvky v horní vrstvě v pozici 5.1.a, tentokrát budou dobře orientované. To znamená, že po otočení černobílou vrstvou se změní orientace každého prvku v této vrstvě. Ty, co byly původně dobře, budou nyní špatně orientované, a ty, co byly špatně, budou naopak orientované dobře.

Pokud jsou tedy všechny prvky v černobílé vrstvě se správnou orientací, po jejím otočení budou špatně orientované. Počet špatně orientovaných prvků se tak zvětší o čtyři. Pokud jsou tři dobře orientované a jeden špatně, budou po otočení tři špatně a jeden dobře orientovaný, počet špatně orientovaných prvků se v tomto případě zvětší o dva. Jsou-li dva dobře a dva špatně orientované, bude tomu tak i po otočení, počet špatně orientovaných se tedy nezmění. V případě tří špatně orientovaných a jednoho dobře se počet špatně orientovaných zmenší o dva, a konečně v případě všech čtyř prvků se špatnou orientací se zmenší dokonce o čtyři. Ve všech případech se tak počet špatně orientovaných prvků změní, zvětší, zůstane stejný nebo zmenší, o sudé číslo.

Otočení libovolnou vrstvou tedy počet špatně orientovaných prvků buď nezmění, nebo změní o sudé číslo. Začínáme-li v pozici 5.1.a, ve které je 0 špatně orientovaných prvků, změní se tento počet každým tahem vždy zase na sudé číslo. V každé pozici, kterou dostaneme nějakým postupem z 5.1.a, musí být počet špatně orientovaných prvků proto sudý, nikdy lichý.

A co to má všechno společného s normální Rubikovou krychlí? Velice mnoho. Pojmenujeme si prostě jednotlivé vrstvy a plošky černá a bílá tak, aby to odpovídalo obrázku 5.1.a. Na normální krychli zvolíme libovolné dvě protilehlé vrstvy — třeba *a* a *d* — a budeme jim říkat černé (nebo ještě raději dominantní, aby se to nepletlo se skutečnými barvami) a jinou dvojici protilehlých vrstev, třeba *c* a *f*, a těm budeme říkat bílé (nebo recesívní). Všem malým ploškám na hranových kostičkách označeným *a* nebo *d* budeme rovněž říkat dominantní a ploškám *c* a *f* pak recesívní. Žádný hranový prvek nemůže mít současně obě malé plošky dominantní nebo současně recesívní, protože žádné dvě sousední vrstvy nejsou dominantní nebo recesívní. Některé prvky — ty, co mají jednu plošku označenou *b* nebo *c* — mají pojmenovanou zatím pouze jednu plošku. Té druhé budeme říkat dominantní nebo recesívní tak, aby každý prvek



Obr. 5.3

měl vždy jednu plošku recesívní a jednu dominantní — obrázek 5.3.a.

Tím jsme si jednotlivé plošky označili stejně jako na obrázku 5.1.a, a můžeme tak o každém hranovém prvku rozhodnout, má-li správnou nebo špatnou orientaci. Na obrázku 5.3.b má např. prvek *ac* špatnou orientaci, protože je recesívní ploškou v dominantní vrstvě. Rovněž prvek *ab* má špatnou orientaci, dominantní ploška je v recesívní vrstvě. Prvek *df* má orientaci správnou. Oba prvky označené šipkami mají orientaci špatnou. Je-li nějaký prvek, dejme tomu *ac*, na správném místě, pak má podle naší definice správnou orientaci, jestliže leží dominantní ploškou, tj. *a*, v dominantní stěně, tj. také *a*. To souhlasí s tím, jak má být orientovaný v základní pozici. Naše definice správné orientace nějakého prvku, který je na správném místě, odpovídá přesně tomu, jak má být orientovaný v základní pozici.

V první části odstavce jsme ukázali, že nějakým postupem můžeme ze základní pozice 5.1.a, a tedy také z 5.3.a, dostat pouze pozice se sudým počtem špatně orientovaných prvků. Tím jsme ukázali následující ***pravidlo o orientacích hranových prvků.***

Všechny pozice na Rubikově krychli, ve kterých je lichý počet špatně orientovaných hranových prvků, jsou neřešitelné.

Pozice na obrázku 1.14.a je tedy opravdu neřešitelná, má pouze jeden špatně orientovaný prvek.

Dokážeme pravidlo o orientacích hranových prvků ještě jednou, poněkud jiným způsobem. Nejprve ohodnotíme obě možné orientace hranového prvku čísly. Budeme říkat, že špatně orientovaný prvek má orientaci 1 a dobře orientovaný prvek orientaci 0. Počet špatně orientovaných hranových prvků se potom rovná součtu orientací všech těchto prvků.

Změníme-li orientaci nějakého hranového prvku ze správné na špatnou, změní se její hodnota z 0 (správná) na 1 (špatná). Znamená to vlastně, že jsme k orientaci tohoto prvku přičetli číslo 1. Rádi bychom si představili také opačnou změnu orientace — ze špatné na správnou — jako přičtení 1. Špatná orientace 1 se tentokrát změní na dobrou 0. Naše přičítání čísla 1 musí mít proto vlastnost $1 + 1 = 0$. Není to obyčejné sčítání čísel, a dříve než budeme pokračovat v jiném důkazu pravidla o orientacích hranových prvků, zastavíme se u tohoto sčítání podrobněji.

Grupa Z_2. Hranový prvek může mít dvě orientace — správnou 0 a špatnou 1. Na množině $\{0, 1\}$ budeme definovat skládání tak, aby mělo stejné vlastnosti jako právě zjištěné vlastnosti orientace hranových prvků. A protože má toto skládání blízko ke sčítání, budeme je místo běžného symbolu $\circ$ označovat $\oplus$. Definujeme $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ a $1 \oplus 1 = 0$.

Dokážeme teď, že množina $\{0, 1\}$ spolu s operací $\oplus$ je komutativní grupa. Budeme ji označovat Z_2.

Abychom ukázali, že $\boldsymbol{Z}_2$ je opravdu grupa, musíme ověřit axiómy grupy. Pvek 0 je zřejmě neutrální prvek. Ten je inverzní sám k sobě. Také prvek 1 je inverzní sám k sobě, neboť $1 \oplus 1 = 0$. Ke každému prvku $\boldsymbol{Z}_2$ tedy existuje inverzní prvek. Dále musíme ukázat rovnost $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ pro libovolnou trojici prvků $x, y, z \in \{0, 1\}$. Každý si snadno ověří sám, že obě strany se rovnají 0, pokud je mezi x, y, z sudý počet prvků 1, a že se obě strany rovnají 1, pokud je mezi x, y, z lichý počet prvků 1. Množina $\boldsymbol{Z}_2$ spolu s operací $\oplus$ je tedy opravdu grupa. Navíc je to grupa komutativní, operace $\oplus$ má vlastnost $x \oplus y = y \oplus x$ pro každé dva prvky x, y.

Cvičení 5.1. Dokažte, že složení sudého počtu prvků 1 v grupě $\boldsymbol{Z}_2$ se rovná 0 a složení lichého počtu prvků 1 se rovná 1.

Cvičení 5.2. a) Dokažte, že grupa $\boldsymbol{Z}_2$ je izomorfní grupě $\boldsymbol{T}$, kterou tvoří prvky $\{1, —1\}$ spolu s operací násobení.

b) Dokažte, že každá grupa, která má dva prvky, je izomorfní grupě $\boldsymbol{Z}_2$.

Vraťme se zpět k Rubikově krychli. Možné orientace 0 a 1 hranových prvků budeme nadále považovat za prvky grupy $\boldsymbol{Z}_2$. Změnit orientaci hranového prvku znamená přičíst k její hodnotě prvek 1 v grupě $\boldsymbol{Z}_2$. Správná orientace 0 se tak změní na špatnou $0 \oplus 1 = 1$, a špatná 1 přejde na správnou $1 \oplus 1 = 0$. Grupa $\boldsymbol{Z}_2$ má tedy přesně ty vlastnosti, které mají možné orientace hranových prvků, a budeme jí proto říkat také *grupa orientací hranových prvků.*

Už dříve jsme ukázali, že jedině otočení černobílou vrstvou mění počet špatně orientovaných prvků. Tento počet se rovná součtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}$, kde x_i jsou orientace jednotlivých hranových prvků. Můžeme předpokládat, že třeba x_1, x_2, x_3 a x_4 jsou orientace prvků ležících v černobílé vrstvě, kterou otáčíme. Protože otočení černobílou vrstvou mění orientaci každého prvku v této vrstvě, bude se počet špatně orientovaných prvků po tomto otočení rovnat součtu $(x_1 \oplus 1) + (x_2 \oplus 1) + (x_3 \oplus 1) + (x_4 \oplus 1) + x_5 + \ldots + x_{12}$. Pokud byl v původní pozici sudý počet špatně orientovaných prvků, byl mezi orientacemi $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ sudý počet jednotek. Ve výrazu $(x_1 \oplus 1) + (x_2 \oplus 1) + (x_3 \oplus 1) + (x_4 \oplus 1) + x_5 + \ldots + x_{12}$ se potom také vyskytuje sudý počet jednotek, přidali jsme čtyři. Abychom dostali skutečný počet špatně orientovaných prvků v nové pozici, musíme provést součty v závorkách (v grupě $\boldsymbol{Z}_2$). Je-li některá z orientací x_1, x_2, x_3 a x_4 rovná 1, dostáváme $x_i \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 0$. Sečtením takové dvojice potom zmizí dvě jednotky v novém výrazu, zůstane jich proto zase sudý počet. A protože v základní pozici mají všechny hranové prvky orientaci 0, můžeme dostat nějakým postupem zase jenom pozice se sudým součtem, tj. se sudým počtem špatně orientovaných hranových prvků. Tím jsme znovu dokázali pravidlo o orientacích hranových prvků.

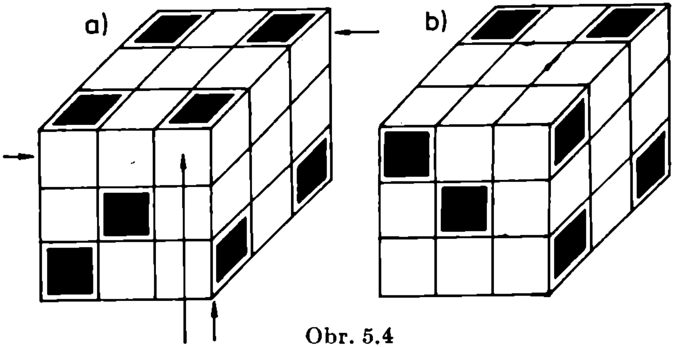
Uděláme ještě jeden malý krůček navíc. Pro řešitelnost pozice není důležitý konkrétní počet špatně orientovaných hranových prvků, ale pouze jeho parita — sudost či lichost. Orientace jednotlivých prvků jsou prvky grupy $\boldsymbol{Z}_2$, zkusme proto ve výrazu $x_1 + x_2 + \ldots + x_{12}$ sčítat nikoliv jako v grupě celých čísel s operací sčítání, jak jsme to dělali dosud, nýbrž opět v grupě $\boldsymbol{Z}_2$. Zajímá nás vlastně složení $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{12}$.

Podle cvičení 5.1. je tento součet rovný 0, je-li mezi orientacemi $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ sudý počet jednotek, a je rovný 1, je-li tento počet lichý. Tím jsme každé pozici na Rubikově krychli přiřadili jeden ze dvou prvků grupy Z_2 — součet orientací všech hranových prvků v Z_2. Pozice se sudým počtem špatně orientovaných hranových prvků mají tento součet rovný 0 a ty s lichým počtem pak 1. Pravidlo o orientacích hranových prvků můžeme vyjádřit také takto:

Je-li součet orientací hranových prvků v nějaké pozici na Rubikově krychli rovný 1 v grupě Z_2, pak je tato pozice neřešitelná.

Druhý a poněkud abstraktnější z obou přístupů k orientacím hranových prvků nyní použijeme také na orientace rohových prvků. Tentokrát budeme používat krychli obarvenou podle obrázku 5.1.b, připomeňme si, že středový prvek a všechny plošky na rohových kostičkách v zadní stěně jsou také černé. Takto obarvená krychle má dvě vrstvy černé a čtyři bílé (podle středových prvků). Každý rohový prvek může být na libovolném místě orientovaný třemi různými způsoby. Na obrázku 5.1.b jsou všechny se správnou orientací — černé plošky jsou v černých vrstvách. Správně orientované prvky budou mít opět orientaci 0. Na obrázku 5.4.a vidíme rohové prvky se špatnou orientací.

Oba prvky označené svislými šipkami jsou oproti správné orientaci pootočené o 120° doprava. Hodnota orientace těchto prvků bude 1. Další dva rohové prvky označené vodorovnými šipkami jsou vůči správné orientaci pootočené o 120° vlevo. Orientace takto pootočených prvků bude mít hodnotu 2. Nyní můžeme o každém rohovém prvku rozhodnout, jakou má orientaci. Například prvek v levém dolním rohu na obrázku 5.4.a je správně, má orientaci 0. Prvek v pravém dolním zadním



Obr. 5.4

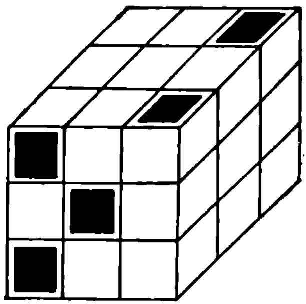
rohu má černou plošku v bílé vrstvě, je orientovaný špatně. Oproti správné orientaci je pootočený o 120° doleva, má proto orientaci 2. Prvek v levém zadním horním rohu je pootočený o 120° doprava, jeho orientace se rovná 1.

V případě hranových prvků tvořily možné orientace grupu $\mathbf{Z}_2$ — grupu orientací hranových prvků. Také u rohových prvků bychom rádi našli grupu, která by odpovídala možným orientacím těchto prvků. Máme tři orientace, 0, 1, 2. Nyní budeme uvažovat nějaký rohový prvek a pootočíme jej v duchu o 120° vpravo na stejném místě. Pokud měl původně správnou orientaci 0, bude potom pootočený o 120° doprava a bude mít orientaci 1. Pokud měl původně orientaci 1, bude pak pootočený o 240° vpravo, tj. o 120° vlevo, bude mít tedy orientaci 2. Prvek s orientací 2 bude mít po otočení orientaci správnou — 0. Chceme-li vyjádřit pootočení vpravo o 120° přičtením čísla 1 k původní orientaci, tak, jak to vychází v prvních dvou případech, musí mít hledaná grupa orientací rohových prvků vlastnost $2 + 1 = 0$. Taková grupa skutečně existuje.

Grupa $\boldsymbol{Z}_3$. Na množině $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ definujeme operaci skládání takto: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 2 = 2 \oplus 0 = 2$ (prvek 0 je tedy neutrální), $1 \oplus 1 = 2$, $1 \oplus 2 = 2 \oplus 1 = 0$, $2 \oplus 2 = 1$. K prvku 1 je inverzní prvek 2, a k 2 je proto inverzní 1. Ke každému prvku Z_3 tak existuje prvek inverzní. Zbývá ověřit asociativitu, rovnost $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ pro každé tři prvky $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$. Můžeme to udělat tak, že probereme postupně všech $3.3.3 = 27$ možných voleb trojice čísel x, y, z. Mnohem jednodušší je ale všimnout si, že číslo $x \oplus y$ je vždy zbytek čísla $x + y$ (normální součet celých čísel) při dělení číslem 3. Oba výrazy $(x \oplus y) \oplus z$ a $x \oplus (y \oplus z)$ se proto rovnají zbytku při dělení součtu $x + y + z$ číslem 3. Rovnost $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ tedy platí a $\boldsymbol{Z}_3$ je opravdu grupa. A protože platí $x \oplus y = y \oplus x$ pro každé dva prvky $\boldsymbol{Z}_3$, je to navíc grupa komutativní.

Pootočíme-li nějaký rohový prvek o 120° vpravo, dostaneme jeho novou orientaci tak, že k původní orientaci přičteme prvek 1 v grupě $\boldsymbol{Z}_3$. Potočit nějaký prvek o 120° vlevo znamená totéž jako pootočit jej dvakrát o 120° vpravo. Prvek s orientací x bude mít tedy po otočení o 120° vlevo orientaci $(x \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus (1 \oplus 1) = x \oplus 2$. Novou orientaci dostaneme tak, že k původní orientaci přičteme prvek 2 v grupě $\boldsymbol{Z}_3$. Grupa $\boldsymbol{Z}_3$ tak dobře vystihuje vlastnosti orientace rohových prvků, budeme jí proto říkat *grupa orientací rohových prvků.*

Každému rohovému prvku v každé pozici nyní umíme přiřadit nějaký prvek grupy $\boldsymbol{Z}_3$. Tak jako v případě hranových prvků budeme zkoumat součet $x_1 \oplus x_2 \oplus \oplus \ldots \oplus x_8$ orientací všech rohových prvků v grupě $\boldsymbol{Z}_3$ Jak se tento součet změní, uděláme-li nějaký tah? Jednoduché to je v případě otočení černou vrstvou. Podívejme se na pozici 5.4.b, kterou dostaneme z 5.4.a otočením přední černé vrstvy o 90° vpravo. Leží-li nějaký prvek v této vrstvě černou ploškou (tj. má orientaci 0 v pozici 5.4.a, jako třeba prvek vlevo dole), bude v ní touto ploškou ležet i po otočení. Prvky se správnou orientací 0 zůstanou správně orientované i nadále. Je-li nějaký prvek v pozici 5.4.a pootočený doprava (tj. má orientaci 1, jako třeba prvky vpravo dole a vpravo nahoře v přední vrstvě), bude pootočený doprava i nadále. Stejně tak prvky s orientací 2 (třeba vlevo nahoře) budou mít orientaci 2 i po uvedeném tahu. Otočení černou vrstvou nezmění orientaci žádného prvku, součet $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8$ se tedy také nezmění, protože se nezmění žádný z prvků x_i grupy $\boldsymbol{Z}_3$.



Obr. 5.5

Složitější je to v případě otočení bílou vrstvou. Na obrázku 5.5. vidíme pozici, kterou dostaneme ze správné pozice 5.1.b po otočení pravou bílou vrstvou. Všechny čtyři rohové prvky v této vrstvě měly původně správnou orientaci 0, nyní je jejich orientace změněná. Prvek, který byl původně dole v přední vrstvě, je v nové pozici v přední vrstvě vpravo nahoře a má orientaci $1 = 0 \oplus 1$. Pokud by měl původně orientaci x_i, bude jeho nová orientace rovná $x_i \oplus 1$. Rovněž prvek, který byl původně vzadu nahoře a v nové pozici je vzadu dole, má novou orientaci 1. Pokud by jeho orientace byla x_j, bude nová orientace $x_j \oplus 1$. Zbylé dva prvky v pravé bílé vrstvě mají novou orientaci 2, k původní orientaci musíme tentokrát přičíst v grupě $\boldsymbol{Z}_3$ prvek 2, abychom dostali orientaci novou. Otáčíme-li pravou bílou vrstvou v libovolné pozici, musíme k původním orientacím dvou prvků v této vrstvě přičíst 1 a kde druhým dvěma 2, abychom dostali orientace v nové pozici. Podobně ověříme, že se stejně změní orientace prvků i po otočení ostatními bílými vrstvami.

A jak se změní součet $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8$ po otočení nějakou bílou vrstvou? Můžeme předpokládat, že orientace prvků v této vrstvě jsou x_1, x_2, x_3 a x_4. V nové pozici se bude součet orientací rohových prvků rovnat $(x_1 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 2) \oplus (x_3 \oplus 1) \oplus (x_4 \oplus 2) \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_8$. Grupa $\boldsymbol{Z}_3$ je komutativní, v uvedeném součtu můžeme jednotlivé prvky libovolně přerovnat, celý součet se proto rovná také $(x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8) \oplus (1 \oplus 2) \oplus (1 \oplus 2)$. V grupě $\boldsymbol{Z}_3$ ale platí $1 \oplus 2 = 0$, součet orientací v nové pozici se proto rovná $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_8$, což je součet orientací v původní pozici. Součet orientací všech rohových prvků zůstává tedy po každém tahu stejný, přestože se orientace jednotlivých prvků mohou měnit. Každou řešitelnou pozici dostaneme nějakým postupem z pozice základní, ve všech řešitelných pozicích je proto součet orientací rohových prvků stejný jako v pozici základní. V té jsou ale všechny prvky orientované správně, mají orientaci 0. Součet orientací všech rohových prvků je tedy v základní pozici rovný 0. Stejný součet 0 musí být proto v každé řešitelné pozici. Pozice se součtem orientací rohových prvků rovným 1 nebo 2 jsou proto neřešitelné.

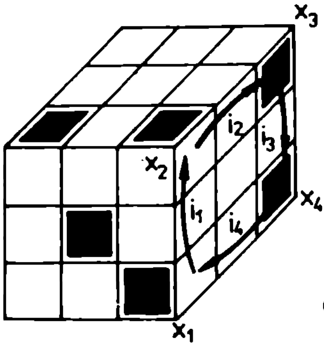
Nyní přeneseme výsledky z pomocné krychle 5.1.b na normální krychli použitím stejné úvahy jako v případě hranových prvků. Zvolíme dvě protilehlé vrstvy, třeba *a* a *d*, a budeme jim říkat černé — dominantní. Zbývající vrstvy jsou bílé — recesívní. Každý rohový prvek má právě jednu plošku označenou *a* nebo *d*, a těmto ploškám budeme rovněž říkat dominantní. Je-li rohový prvek dominantní ploškou v dominantní vrstvě, má správnou orientaci 0, je-li potočený doprava (nebo doleva), má orientaci 1 (nebo 2). Speciálně, je-li nějaký prvek na správném místě, má orientaci 0, právě když je správně orientovaný. Z poznatků o krychli 5.1.b plyne následující pravidlo o orientacích rohových prvků.

> Je-li součet orientací rohových prvků v nějaké pozici na Rubikově krychli různý od 0 (v grupě $\boldsymbol{Z}_3$), je pozice neřešitelná.

Odtud vyplývá neřešitelnost pozice na obrázku 1.14.b. Všechny prvky až na jeden mají správnou orientaci 0, poslední má orientaci 1. Součet orientací je tedy $1 \neq 0$, pozice je opravdu neřešitelná.

Při důkazech pravidel o orientacích hranových a rohových prvků jsme museli vždy probírat řadu případů v závislosti na tom, jak byly jednotlivé prvky orientované. Nyní dokážeme pravidlo o orientacích rohových prvků ještě jednou rafinovanějším způsobem, který budeme v dalším textu používat i u ostatních hraček. Vezměme si krychli 5.1.b v libovolné pozici, třeba v pozici na obrázku 5.6.

Na obrázku je šipkami vyznačený jeden tah — otočení bílou vrstvou. Uděláme-li tento tah čtyřikrát po sobě, vrátí se krychle opět do pozice 5.6., všechny prvky budou zase na původních místech a s původní orientací. Teď budeme předpokládat, že orientace prvku vpravo dole v přední vrstvě je $x_1 \in Z_3$. Po jednom tahu bude orientace tohoto prvku $x_1 \oplus i_1$, kde i_1 je nějaký prvek grupy $\mathbf{Z}_3$. Uděláme-li další tah, bude mít prvek orientaci $(x_1 \oplus i_1) \oplus i_2$, při třetím tahu přičteme i_3 a při čtvrtém i_4. Po čtyřech tazích bude tento prvek zpět



Obr. 5.6

na původním místě a s orientací $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$. Tato orientace se ale musí rovnat orientaci původní, tj., $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = x_1$. Složíme nyní obě strany poslední rovnosti s prvkem $x^{-1} \in Z_3$. Dostaneme $x^{-1} \oplus x_1 \oplus \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = x^{-1} \oplus x_1$, tj., $i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0$. Při jakékoliv definici správných orientací na jednotlivých místech musí platit $i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0$. (To je v souladu s původním přístupem, kdy jsme ukázali $i_1 = i_3 = 1$ a $i_2 = i_4 = 2$.).

Jak se změní součet orientací $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \oplus \ldots \oplus x_8$ po jednom tahu? Bude se rovnat

$$(x_1 \oplus i_1) \oplus (x_2 \oplus i_2) \oplus (x_3 \oplus i_3) \oplus (x_4 \oplus i_4) \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_8 =$$
$$= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_8 \oplus (i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4).$$

Ukázali jsme už, že výraz v závorce se rovná neutrálnímu prvku 0 grupy $\mathbf{Z}_3$. Žádný tah tedy součet orientací nezmění, po libovolném postupu bude stejný jako na počátku, tj. 0. Řešitelné pozice proto musí mít součet orientací rohových prvků rovný 0.

Všimněte si, že při posledním důkazu jsme nepoužívali téměř žádné speciální vlastnosti Rubikovy krychle. Jediné, co jsme použili, byla skutečnost, že při opakování stále jednoho tahu se všechny prvky vrátily poprvé na původní místa také s původní orientací. Jinými slovy, opakováním stále jednoho tahu ze základní pozice nedostaneme nikdy nějaký prvek zpět na původní místo se změněnou orientací, vždy jenom zase s orientací původní. Takovou vlastnost mají téměř všechny ostatní hry s orientací. Proto také všechny hry, aspoň pokud jde o orientaci, mají velmi podobné vlastnosti. Jedinou výjimku tvoří koule.

5.2. Jak složit Rubikovu krychli. Ve třetí kapitole a v prvním odstavci této kapitoly jsme se naučili poznávat mnoho neřešitelných pozic na Rubikově krychli. Každá pozice, jejíž polohová permutace je lichá, je neřešitelná. Také všechny pozice, ve kterých je součet orientací hranových nebo rohových prvků různý od 0, jsou neřešitelné. Nyní ukážeme, že všechny ostatní pozice už řešitelné jsou. Tyto pozice musí mít následující vlastnosti:

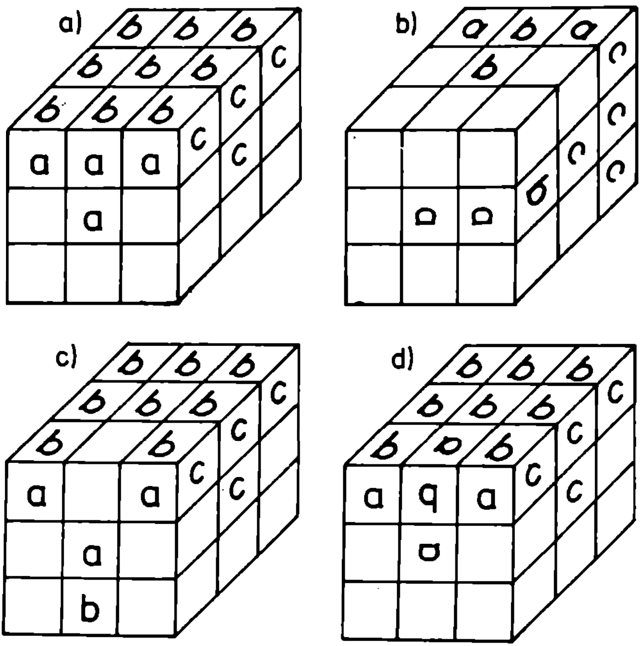
a) polohová permutace je sudá,

b) součet orientací hranových prvků je 0 (v grupě $\mathbf{Z}_2$),

c) součet orientací rohových prvků je také 0 (v grupě $\mathbf{Z}_3$).

Vezměme si tedy nějakou takovou pozici $\boldsymbol{p}$. Ve čtvrté kapitole jsme ukázali, že existuje postup, který tuto pozici převede do pozice $\boldsymbol{q}$, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Součet orientací hranových nebo rohových prvků se žádným postupem nezmění, bude se proto rovnat 0 i v pozici $\boldsymbol{q}$. Znamená to speciálně, že v pozici ***q*** je sudý počet špatně orientovaných hranových prvků.

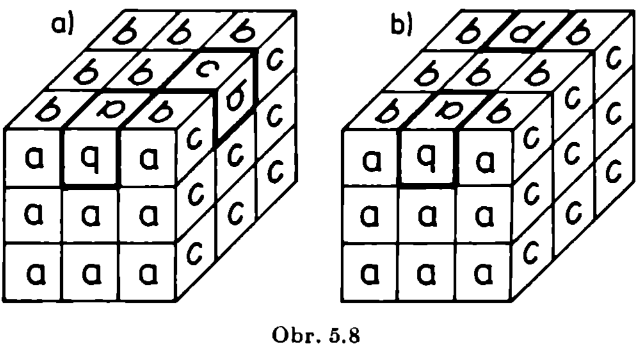
Jak opravit orientace hranových prvků? Použijeme opět známý trik s konjugováním postupů. Nejdříve najdeme nějaký postup, který v jedné vrstvě změní orientaci jediného hranového prvku, a všechny ostatní prvky v této vrstvě ponechá na původních místech a s původní orientací. Budeme měnit orientaci prvku ***ab*** ve vrstvě ***b***, a jako obvykle začneme v základní pozici 5.7.a.



Obr. 5.7

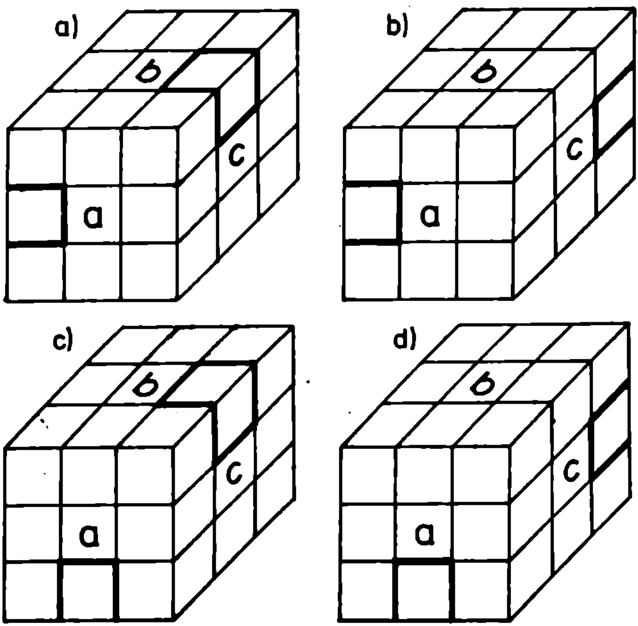
Nejdříve tahy CF^{-1} prvek *ab* uvolníme a tahem A jej odsuneme z vrstvy *b*. Dostaneme pozici 5.7.b. Nyní tahy FC^{-1} přesuneme *ab* do dolní vrstvy a vrátíme zbylé prvky v *b* na původní místa. Pak tahem E^{-1} přesuneme *ab* zpět do vrstvy *a* — pozice 5.7.c. Dále tahy CF^{-1} znovu uvolníme prvek *ab* ve vrstvě *a*, tahy AA ho přesuneme na správné místo se změněnou orientací a tahy FC^{-1} vrátíme ostatní prvky z vrstvy *b* zpět na původní místa. Dostali jsme tak pozici 5.7.d. Celý postup $R =$ $= CF^{-1}AFC^{-1}E^{-1}CF^{-1}AAFC^{-1}$ tedy v horní vrstvě *b* otočí hranový prvek *ab*, a všechny ostatní prvky *b* nechá na původních místech a s původní orientací. Prvky mimo vrstvu *b* se přeházely, to už ale umíme spravit.

Pomocí postupu R najdeme jiný postup, který změní orientaci pouhých dvou hranových prvků. Tahem B přesuneme prvek *bc* na místo *ab*. Nyní inverzní postup R^{-1} vrátí všechno mimo vrstvu *b* zpět na původní místa a změní orientaci prvku na místě *ab*, tj. prvku *bc*. Nakonec tahem B^{-1} vrátíme všechny prvky vrstvy *b* zpátky. Celý postup $RBR^{-1}B^{-1}$ tedy udělá pozici na obrázku 5.8.a. Změní orientaci dvou hranových prvků na místech *ab* a *bc* a všechno ostatní zůstane na původních místech a s původní orientací.



Obr. 5.8

Konjugujeme-li inverzní postup R^{-1} tahy BB, dostaneme postup $RBBR^{-1}B^{-1}B^{-1}$. Tímto postupem uděláme pozici na obrázku 5.8.b, hranové prvky *ab*, *bd* mají změněnou orientaci. Pokud potřebujeme změnit orientaci nějakých dvou prvků, které neleží ve stejné vrstvě, najdeme nějaký pomocný postup, který tyto dva prvky přesune do jedné vrstvy, a tímto postupem konjugujeme $RBR^{-1}B^{-1}$ nebo $RBBR^{-1}B^{-1}B^{-1}$. Tak například prvky vyznačené na obrázku 5.9.a otočíme postupem $A(RBR^{-1}B^{-1})A^{-1}$, prvky vyznačené na obrázku 5.9.b postupem
$AC^{-1}(RBR^{-1}B^{-1})CA^{-1}$ nebo postupem
$AD(RBBR^{-1}B^{-1}B^{-1})D^{-1}A^{-1}$.

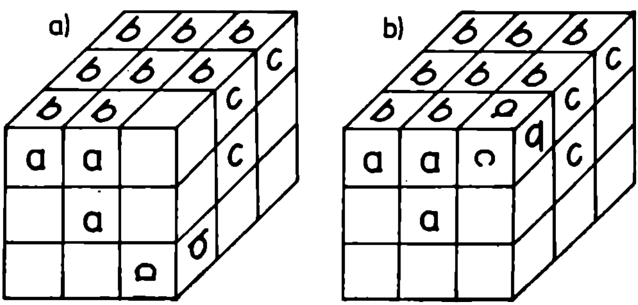


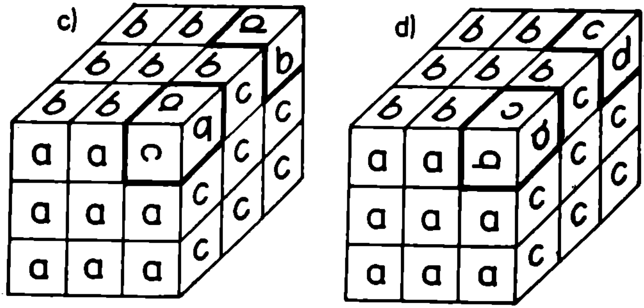
Obr. 5.9

Cvičení 5.3. Najděte postupy, které otočí prvky vyznačené na obrázku 5.9.c a 5.9.d, a všechny ostatní nechají na původních místech a s původní orientací.

Postupem $RBR^{-1}B^{-1}$, případně postupy k němu konjugovanými, umíme změnit orientaci vždy dvou hranových prvků současně. Předpokládali jsme, že v pozici *q* je sudý počet špatně orientovaných hranových prvků (to je důsledkem vlastnosti b) počáteční pozice *p*). Tento počet umíme postupně snižovat vždy o dva prvky. Dostaneme se tak nakonec do nějaké pozice *r*, ve které jsou nejenom všechny prvky na správných místech, ale navíc všechny hranové se správnou orientací.

Abychom dostali z pozice *r* pozici základní, musíme ještě umět měnit orientace rohových prvků. Také tady nás konjugování snadno dovede k cíli. Jako vždy uděláme napřed nejjednodušší možné rohové otočení v horní vrstvě *b* — pootočíme prvek *abc* doprava, a všechno ostatní ve vrstvě *b* zůstane na místě. To je jednoduché, nejdříve tahem C^{-1} dostaneme *abc* do dolní vrstvy, potom tahem E oddělíme *abc* od ostatních prvků vrstvy *b* a tahem C vrátíme zbylé prvky *b* zpět na svá místa — obrázek 5.10.a.





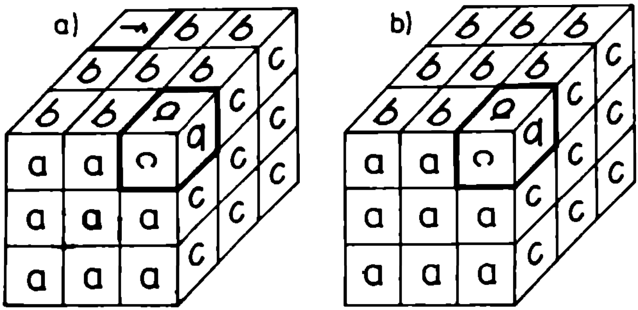
Obr. 5.10

Nyní vrátíme *abc* zpět do vrstvy *b* postupem $E^{-1}C^{-1}EC$ — obrázek 5.10.b. Celý postup $S = C^{-1}ECE^{-1}C^{-1}EC$ pootočí prvek *abc* doprava, a jinak nechá vrstvu *b* beze změny. Zbylá část krychle se rozháže, to už ale umíme napravit. Tahem B přesuneme prvek *bcd* na místo *abc*, pak inverzním postupem S^{-1} vrátíme všechny prvky mimo vrstvu *b* zpět na místa. Postup S^{-1} navíc pootočí prvek na místě *abc* — tj. prvek *bcd* — doleva. Pak tahem B^{-1} umístíme zpět prvky ve vrstvě *b* na původní místa. Postup $SBS^{-1}B^{-1}$ proto udělá pozici na obrázku 5.10.c, pootočí *abc* doprava, *bcd* doleva, a jinak zůstane všechno na původních místech a s původní orientací.

Inverzní postup S^{-1} pootáčí *abc* doleva. Pokud bychom zahájili postupem S^{-1}, tj., udělali $S^{-1}BSB^{-1}$, dostaneme pozici 5.10.d. Prvek *abc* je pootočený doleva a *bcd* doprava.

Cvičení 5.4. Ověřte, že místo postupu S můžeme použít také postup $C^{-1}ECAEA^{-1}$. Vysvětlete každý tah!

Zatím umíme pootáčet pouze dva sousední rohové prvky. Jiné dvojice rohových prvků snadno pootočíme pomocí konjugování. Tak například prvky *abc* a *bdf* pootočíme postupem $SBBS^{-1}B^{-1}B^{-1}$ nebo postupem $D^{-1}(SBS^{-1}B^{-1})D$, viz obrázek 5.11.a. Dva protilehlé prvky *abc* a *def* (neviditelný na obrázku 5.11.b) otočíme třeba postupem $DD(SBS^{-1}B^{-1})D^{-1}D^{-1}$ nebo $D^{-1}(SBBS^{-1}B^{-1}B^{-1})D$.



Obr. 5.11

Naučili jsme se pootočit libovolné dva rohové prvky, jeden doleva a druhý doprava, tak, aby všechno ostatní zůstalo na původních místech a s původní orientací. Nyní už snadno dostaneme krychli z pozice ***r*** do pozice základní. Zbývá opravit orientace rohových prvků. Pokud jsou nějaké špatně, musí být špatně aspoň dva. V opačném případě by totiž sedm rohových prvků mělo orientaci 0, a pouze jeden orientaci nenulovou, 1 nebo 2. V každém případě by byl součet orientací rohových prvků různý od neutrálního prvku $0 \in \mathbf{Z}_3$, a to by bylo ve sporu s vlastností c) pozice ***r***.

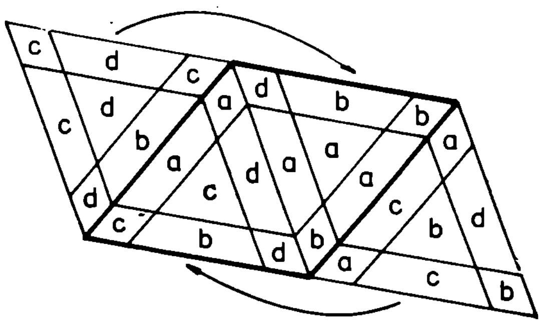
Víme tedy, že jsou aspoň dva rohové prvky orientované špatně. Vezmeme si dva takové rohové prvky a vhodně konjugovaným postupem $SBS^{-1}B^{-1}$ je pootočíme tak, aby aspoň jeden z nich byl po tomto postupu dobře orientovaný. Takto snižujeme počet špatně orientovaných rohových prvků tak dlouho, až zůstanou pouze dva. Protože je součet orientací stále 0, musí být jeden z nich pootočený doprava a druhý doleva. Vhodně konjugovaným postupem $SBS^{-1}B^{-1}$ pak uděláme správnou orientaci u obou současně, krychle je složená.

Tím jsme zcela vyjasnili, jaké pozice na Rubikově krychli jsou řešitelné, a našli postupy, jak je složit. Nepotřebovali jsme k tomu umět mnoho. Postupy P a Q ze čtvrté kapitoly, postupy R, S z tohoto odstavce, a hlavně dobře používat trik s konjugováním. Není naprosto nutné znát postupy P, Q, R, S zpaměti, vystačíme s jakýmikoliv postupy, které udělají v horní vrstvě totéž co P, Q, R nebo S. Takové postupy můžeme vymýšlet přímo při skládání, v podstatě stačí umět z každé pozice složit správně jednu vrstvu. To je docela jednoduché, každý to po nějaké době snadno zvládne. Zbytek už závisí pouze na správném používání triku s konjugováním.

5.3. Čtyřstěn a dvanáctistěn. Polohová permutace každé řešitelné pozice musí být u obou hraček sudá jak na rohových, tak na hranových prvcích. V předchozí kapitole jsme se naučili každou takovou pozici převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Nyní si ujasníme, jak je to s orientacemi.

Nejdříve musíme opět zvolit nějaký způsob, jak o každém prvku na každém místě rozhodnout, jakou má orientaci. Čtyřstěn má čtyři vrstvy — a, b, c, d, dvanáctistěn jich má dvanáct — a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l. Na každém pohyblivém prvku zvolíme opět jednu plošku a prohlásíme ji za dominantní. Využijeme k tomu uspořádání písmen podle abecedy. Hranový prvek má dvě složky a dominantní bude ta z nich, která je označená písmenem, jež je v abecedě dříve. Druhá ploška bude recesívní. Tak na prvku *ab* je ploška *a* dominantní a *b* recesívní. Na prvku *dg* je *d* dominantní atd. Podobně na rohových prvcích bude dominantní vždy ploška označená písmenem, které je v abecedě nejdříve. Na prvku *abc* je dominantní ploška *a*, na prvku *cdg* je dominantní *c* atd. (Všimněte si, že podobně jsme volili dominantní plošky také na Rubikově krychli, pouze uspořádání písmen bylo jiné než v abecedě, používali jsme uspořádání *a*, *d*, *b*, *e*, *c*, *f*.)

Které hranové prvky budeme považovat za správně orientované, a které budou orientované špatně? Vysvětlíme si to v pozici na čtyřstěnu na obrázku 5.12.



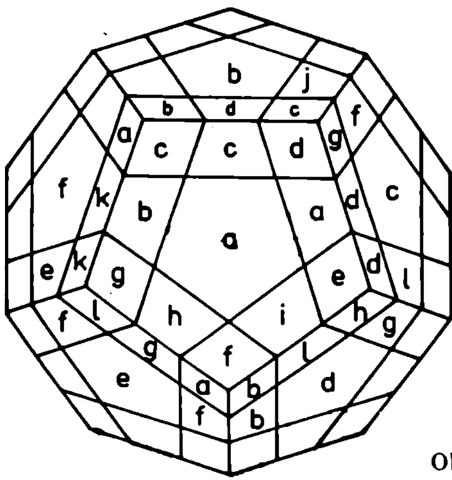
Obr. 5.12

Prvek *ad* je na místě *ac*. Dominantní ploška *a* je ve stěně *a*, ve které má v základní pozici být dominantní ploška *a* prvku *ac*. Prvek *ad* budeme považovat za správně orientovaný. Prvek *ac* je na místě *ab*, dominantní ploška *a* je ve stěně *a*, kde má být v základní pozici dominantní ploška *a* prvku *ab*. Také *ac* je dobře orientovaný. Prvek *bc* je špatně orientovaný, dominantní ploška *b* je ve stěně *c*, kde má být v základní pozici recesívní ploška prvku *bc*. Obecně můžeme definovat, že nějaký hranový prvek je orientovaný dobře, je-li jeho dominantní ploška ve stejné stěně, ve které má být dominantní ploška prvku na stejném místě v základní pozici. Udělejte si následující cvičení.

Cvičení 5.5. Rozhodněte, které z následujících prvků jsou orientované dobře a které špatně:

a) na čtyřstěnu 5.12. prvky *ab*, *bd*, *cd*,

b) na dvanáctistěnu 5.13. prvky *bk*, *cd*, *ad*, *bf*, *gh*, *ef*.



Obr. 5.13

Tak jako u krychle budeme označovat orientace hranových prvků elementy grupy $\mathbf{Z}_2$, prvek má orientaci 0, je-li orientovaný dobře, a má orientaci 1, je-li orientovaný špatně. Každé pozici pak můžeme přiřadit součet orientací (v grupě $\mathbf{Z}_2$) všech hranových prvků. Tak třeba v pozici 5.12. jsou dva prvky, *bc* a *cd*, orientované špatně, ostatní čtyři jsou orientované dobře. Součet orientací se rovná $1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$. Na čtyřstěnu a dvanáctistěnu platí stejné pravidlo o orientacích hranových prvků jako na Rubikově krychli.

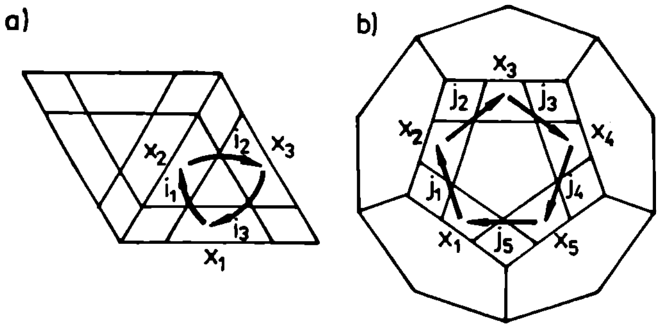
Každá pozice na čtyřstěnu nebo na dvanáctistěnu s lichým počtem špatně orientovaných hranových prvků je neřešitelná.

Při důkazu použijeme metodu ze závěru prvního odstavce. Začneme čtyřstěnem. Nechť jsou v nějaké pozici orientace jednotlivých hranových prvků $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, a otočme vrstvou, ve které jsou třeba prvky s orientacemi x_1, x_2 a x_3. Po tomto tahu budou mít prvky v této vrstvě orientace $x_1 \oplus i_1$, $x_2 \oplus i_2$, $x_3 \oplus i_3$, kde i_1, i_2, i_3 jsou nějaké prvky grupy $\mathbf{Z}_2$. Opakujeme-li tento tah třikrát, změní se orientace x_1 na $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3$. Tento prvek musí mít ale po trojnásobném opakování jednoho tahu stejnou pozici jako na počátku, tj., $x_1 \oplus \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 = x_1$. Odtud plyne $i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 = 0$. Součet orientací všech hranových prvků po jednom tahu bude tedy

$$\begin{aligned}(x_1 \oplus i_1) \oplus (x_2 \oplus i_2) \oplus (x_3 \oplus i_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 &= \\ = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus (i_1 \oplus i_2 \oplus i_3) &= \\ = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6,&\end{aligned}$$

tj., bude stejný jako v původní pozici před tahem. Žádný tah tedy součet nezmění a každá řešitelná pozice jej musí mít stejný jako pozice základní, tedy 0. Podle cvičení 5.1. musí být proto v každé řešitelné pozici sudý počet prvků s orientací 1, neboli sudý počet špatně orientovaných hranových prvků.

Cvičení 5.6. Dokažte pravidlo o orientacích hranových prvků na dvanáctistěnu — obrázek 5.14.b.



Obr. 5.14

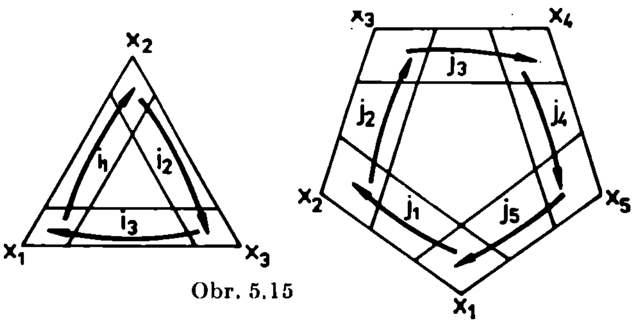
Analogicky dokážeme také pravidla o orientacích rohových prvků na čtyřstěnu a dvanáctistěnu. Stejně jako u hranových prvků budeme definovat, kdy má rohový prvek správnou orientaci. Řekneme, že rohový prvek je orientovaný dobře, má orientaci 0, je-li dominantní ploškou ve stejné stěně, ve které je dominantní ploškou prvek na stejném místě v základní pozici. Je-li prvek oproti správné orientaci pootočený o 120° vpravo, přiřadíme mu hodnotu orientace 1, a je-li pootočený vlevo, bude mít hodnotu 2. Pár příkladů definici osvětlí. Na obrázku 5.12. je prvek *abd* na místě *abc*. Dominantní ploška *a* je ve stěně *b*, zatímco v základní pozici má být dominantní ploška prvku *abc* na stejném místě ve stěně *a*. Prvek *abd* je tedy pootočený o 120° vpravo, má orientaci 1. Vpravo dole na místě *abd* je prvek *abc*. Dominantní ploškou *a* je ve stěně *b*, v základní pozici má být dominantní ploška prvku *abd* na stejném místě ve stěně *a*. Prvek *abc* je tedy pootočený o 120° vlevo, má orientaci 2. Nahoře na místě *acd* je prvek *acd*. Dominantní ploškou *a* je ve stěně *c*, zatímco v základní pozici musí být dominantní ploškou ve stěně *a*. Prvek *acd* je tedy pootočený vpravo, má orientaci 1. Zbývá prvek *bcd*. Ten je vlevo dole na místě *bcd*. Dominantní ploška *b* je ve stěně *b*. Prvek *bcd* je správně, má orientaci 0.

Cvičení 5.7. Určete hodnoty orientací následujících prvků na dvanáctistěnu v pozici na obrázku 5.13.: *abc*, *cdg*, *deh*, *abf*, *gkl*.

Každé pozici můžeme opět přiřadit součet (v grupě $\mathbf{Z}_3$) orientací všech rohových prvků. Tak jako ve všech předchozích případech můžeme ukázat, že se tento součet po žádném tahu nezmění. U všech řešitelných pozic je proto stejný jako v pozici základní, tj. 0.

> Každá pozice na čtyřstěnu nebo dvanáctistěnu, která má součet orientací rohových prvků různý od neutrálního prvku grupy $\mathbf{Z}_3$, je neřešitelná.

Cvičení 5.8. Dokažte právě uvedené pravidlo. Návod je na obrázku 5.15. Je pozice 5.12. řešitelná?



Obr. 5.15

Shrňme dosavadní poznatky o čtyřstěnu a dvanáctistěnu. Má-li být pozice řešitelná, musí mít následující vlastnosti:

a) polohová permutace musí být sudá jak na hranových, tak na rohových prvcích,

b) počet špatně orientovaných hranových prvků musí být sudý,

c) součet orientací rohových prvků musí být neutrální prvek 0 grupy $\mathbf{Z}_3$.

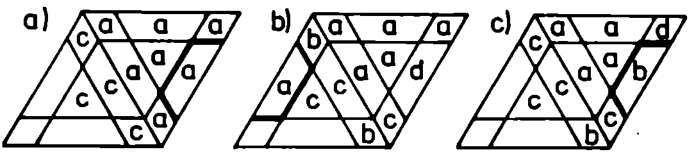
Dokážeme nyní, že každá taková pozice opravdu řešitelná je. Ve čtvrté kapitole jsme si ukázali, jak pozici splňující podmínku a) převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správném místě. Zbývá ještě správně orientovat jednotlivé hranové a rohové prvky.

Jednodušší to je u dvanáctistěnu. Můžeme použít v podstatě stejné postupy jako na krychli. Postup $R = CF^{-1}AFC^{-1}D^{-1}CF^{-1}A^{-1}A^{-1}FC$ změní orientaci prvku ab ve vrstvě b, a jinak všechny prvky v této vrstvě ponechá na původních místech a s původní orientací. (Vysvětlení postupu je doslova stejné jako v případě krychle.) Postup $RBR^{-1}B^{-1}$ pak změní orientace prvků ab a bc, a jinak nic nezmění. Konjugováním tohoto postupu ukážeme, že lze změnit orientace libovolné dvojice hranových prvků na dvanáctistěnu tak, aby všechny ostatní rohové i hranové prvky zůstaly na původních místech a s původní orientací. Postupným prováděním vhodně konjugovaného postupu $RBR^{-1}B^{-1}$ opravíme orientace všech špatně orientovaných hranových prvků (na počátku jich byl sudý počet!).

Stejně snadno opravíme orientace rohových prvků. Postupem $S = C^{-1}DCD^{-1}C^{-1}DC$ pootočíme ve vrstvě b prvek abc vpravo, a jinak nic v této vrstvě nezměníme. Vysvětlení postupu je opět doslova stejné jako v případě krychle. Postup $SBS^{-1}B^{-1}$ pak pootočí abc vpravo, bch vlevo, a jinak ponechá všechny prvky na původních místech a s původní orientací. Dalším konjugováním postupu $SBS^{-1}B^{-1}$ pootočíme libovolné dva rohové prvky, jeden vpravo a druhý vlevo. A protože součet orientací rohových prvků v původní pozici byl 0, opravíme takto postupně orientace všech rohových prvků. Na dvanáctistěnu umíme tedy složit každou řešitelnou pozici a dokázat neřešitelnost těch ostatních.

Skládat čtyřstěn je obtížnější, každým tahem změníme polohu více než poloviny pohyblivých prvků. Ve čtvrté kapitole jsme se naučili, jak dostat každý prvek na správné místo. Zbývá ještě všechny správně orientovat. Začneme hranovými. V základní pozici 5.16.a chceme v horní vrstvě *a* změnit orientaci hranového prvku *ab* tak, aby zbývající dva hranové prvky v této vrstvě, tj. *ac* a *ad*, zůstaly na původních místech a s původní orientací, a aby rovněž všechny rohové prvky v této vrstvě zůstaly na původních místech. Orientace rohových prvků nás v této chvíli nebude zajímat.

Jak tedy změnit orientaci prvku *ab*? Nejdříve si jej odsuneme z vrstvy *a* tak, aby všechno ostatní v *a* zůstalo na původních místech. To už umíme ze čtvrté kapitoly: postup $B^{-1}ACA^{-1}$ přesune *ab* na místo *cd* — obrázek 5.16.b.



Obr. 5.16

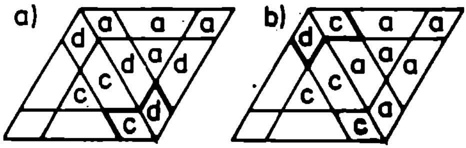
Nyní musíme vrátit *ab* zpět do vrstvy *a* s opačnou orientací. Uděláme to stejným postupem, pouze zaměníme otočení vrstvou *c* za otočení *d*: uděláme $BA^{-1}D^{-1}A$. Celý postup $R = B^{-1}ACA^{-1}BA^{-1}D^{-1}A$ udělá pozici 5.16.c, všechny prvky ve vrstvě a zůstaly na původních místech, a z hranových změnil orientaci pouze ab.

Další část je už rutinní. Postupem $RAR^{-1}A^{-1}$ změníme u hranových prvků pouze orientace ab a ad, a všechny rohové a hranové prvky zůstanou na původních místech.

Cvičení 5.9. Ověřte, že místo postupu R můžeme použít rovněž postup $B^{-1}ACADAB^{-1}$.

Vhodně konjugovaným postupem $RAR^{-1}A^{-1}$ pak můžeme změnit orientace libovolných dvou hranových prvků, a dostaneme tak pozici, ve které jsou všechny prvky na správných místech a hranové navíc se správnou orientací. Postupem $RAR^{-1}A^{-1}$ jsme sice změnili také orientace některých rohových prvků (nikoliv polohu!), to nám ale v tuto chvíli nevadí, protože jsme o jejich orientaci dosud nic nepředpokládali. Tu opravíme až nakonec.

Musíme to udělat tak, aby se správná orientace hranových prvků už nepokazila. Znamená to tentokrát najít postup S, který v horní vrstvě změní orientaci jediného rohového prvku, třeba acd, a všechno ostatní nechá ve vrstvě a na původních místech a s původní orientací. Začneme opět v základní pozici 5.16.a. Budeme se snažit o to, aby trojice prvků abc, ab a abd zůstávala stále pohromadě. Začneme tedy tahy $B^{-1}CD^{-1}$. Dostaneme pozici 5.17.a. Nyní tahem A^{-1} přemístíme prvek acd od ac k ad, a pak vrátíme všechno zpět do vrstvy a tahy $C^{-1}DB^{-1}$. Celý postup $S = B^{-1}CD^{-1}A^{-1}C^{-1}DB^{-1}$ udělá pozici 5.17.b, ve vrstvě a je všechno na původních místech s původní orientací, pouze prvek acd je pootočený doleva. Postupem $SAS^{-1}A^{-1}$ pootočíme acd doleva a abc doprava. Můžeme si vždy horní vrstvu vybrat tak, aby na místech abc a acd byly dva špatně orientované prvky. Postup $SAS^{-1}A^{-1}$ pak opraví orientaci aspoň jednoho z nich. Jelikož je součet orientací rohových prvků $0 \in \mathbf{Z}_3$, dostaneme nakonec základní pozici. Umíme tedy už řešit také čtyřstěn.



Obr. 5.17

5.4. Další krychle: 2 × 2 × 2, 4 × 4 × 4, 5 × 5 × 5 a *n × n × n. 2 × 2 × 2. Zopakujme si dosavadní poznatky. V každé pozici můžeme krychli natočit tak, aby prvek *abf* byl v levém horním rohu ploškou *a* v přední stěně. Tento prvek považujeme za pevný a polohu a orientaci zbývajících sedmi prvků posuzujeme vzhledem k *abf*. Libovolný ze zbývajících sedmi pohyblivých prvků můžeme přesunout na místo každého jiného, krychle 2 × 2 × 2 je tedy souvislá hra. Každý ze tří možných základních tahů C, D, E udělá lichou permutaci — čtyřcyklus. Polohové permutace řešitelných pozic mohou být proto jak sudé, tak liché. Ve skutečnosti každou pozici můžeme převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Jde to udělat v podstatě stejnými postupy, jaké jsme používali při přemísťování rohových prvků na Rubikově krychli.

K zapisování postupů budeme používat znovu otočení všemi vrstvami, nejenom těmi, které neobsahují základní prvek *abf*. A označení tahů bude záviset na tom, jak krychli držíme, nikoliv na polože prvku *abf* — otočení horní vrstvou bude B, otočení přední A, zadní D, dolní E, pravou C a levou F.

Jak udělat trojcyklus? Opět použijeme konjugování, a k tomu potřebujeme prohodit v horní vrstvě *b* dva prvky, třeba *abc* a *bcd*, tak, aby *bdf* a *abf* zůstaly na původním místě. To uděláme snadno postupem $P = C^{-1}D^{-1}ED$. Další už je dobře známé. Postup $PBP^{-1}B^{-1}$ udělá trojcyklus na prvcích *abc*, *bdf*, *bcd* a zbývající prvky zůstanou na původních místech a s původní orientací. Dále použijeme výsledku následujícího cvičení.

Cvičení 5.10. Dokažte, že libovolné tři pohyblivé prvky můžeme nějakým postupem posunout na místa *abc*, *bdf* a *bcd*.

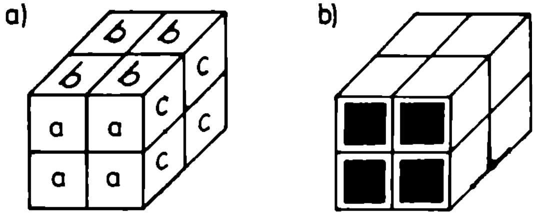
V důsledku tohoto cvičení můžeme vhodným konjugováním postupu $PBP^{-1}B^{-1}$ udělat libovolný trojcyklus, a tím tedy převést každou pozici se sudou polohovou permutací do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. A tím to umíme z každé pozice. Je-li na počátku lichá, stačí napřed libovolným tahem dostat krychli do pozice sudé.

> Z každé pozice na krychli $2 \times 2 \times 2$ můžeme dostat pozici, ve které jsou všechny prvky na správných místech.

Zbývá ještě všechny prvky správně orientovat. Tak jako v případě Rubikovy krychle zvolíme barvy *a* a *d* za dominantní a orientacím prvků přiřadíme hodnoty 0, 1, 2 podle polohy jejich dominantních plošek. Naprosto stejně jako u Rubikovy krychle dokážeme pravidlo o orientacích prvků na krychli $2 \times 2 \times 2$.

Je-li součet orientací všech pohyblivých prvků v nějaké pozici na krychli $2 \times 2 \times 2$ různý od neutrálního prvku 0 grupy $\mathbf{Z}_3$, je tato pozice neřešitelná.

Cvičení 5.11. Dokažte právě uvedené pravidlo.



Obr. 5.18

V šestém odstavci této kapitoly dokážeme Křížovu větu, která popisuje možné orientace prvků na všech hlavolamech s orientací uvedených v této knížce, speciálně také na krychli $2 \times 2 \times 2$.

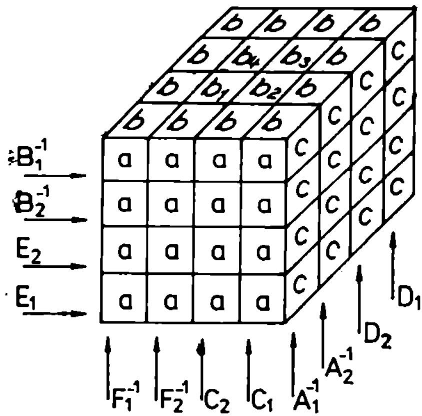
Všechny pozice, ve kterých je součet orientací různý od neutrálního prvku $0 \in \mathbf{Z}_3$, jsou tedy neřešitelné. Ty zbývající složíme postupem známým už z Rubikovy krychle. Postup $R = C^{-1}ECE^{-1}C^{-1}EC$ pootočí prvek *abc* vpravo, a všechno ostatní ve vrstvě *b* zůstane na původních místech a s původní orientací. Postup $RBR^{-1}B^{-1}$ pak pootočí *abc* vpravo, *bcd* vlevo, a jinak nic nezmění. Vhodným konjugováním tohoto postupu pootočíme prvky na libovolných dvou místech a tím složíme celou krychli $2 \times 2 \times 2$.

$4 \times 4 \times 4$. Na rozdíl od krychle $2 \times 2 \times 2$ je krychle $4 \times 4 \times 4$ nesouvislá, má tři orbity. Jednu tvoří rohové prvky, druhou hranové a třetí stěnové. Jinak má ale krychle 4 × 4 × 4 mnohem blíž ke krychli 2 × 2 × 2 než k normální Rubikově 3 × 3 × 3. Opět neexistují žádné pevné prvky, tak si znovu vybereme prvek *abf*, který budeme považovat za pevný, a polohu a orientaci všech ostatních prvků budeme posuzovat vzhledem k němu.

Na krychli 4 × 4 × 4 můžeme otáčet krajními nebo středními vrstvami. Otočení krajní vrstvou udělá jeden čtyřcyklus na rohových a jeden na stěnových kostičkách, zatímco na hranových udělá čtyřcykly dva. Tento tah je tedy sudý na hranové orbitě a lichý na rohové a stěnové. Otočení střední vrstvou udělá na stěnových prvcích dva čtyřcykly a na hranových jeden. Toto otočení je proto liché na hranové orbitě a sudé na stěnové a rohové orbitě.

Každý tah má proto stejnou paritu na rohové a stěnové orbitě. Libovolná pozice, kterou dostaneme nějakým postupem z pozice základní (tj. řešitelná), musí mít stejnou vlastnost. Nyní najdeme postupy, které každou takovou pozici převedou do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Můžeme předpokládat, že pozice je sudá jak na rohové, tak na stěnové orbitě, v případě potřeby otočíme libovolnou krajní vrstvou, a že je také sudá na hranové orbitě. Pokud by byla lichá, otočíme střední vrstvou.

Označení tahů je na obrázku 5.19. na další stránce. Dva vyznačené hranové prvky prohodíme v horní vrstvě postupem $Q = F_2A_2E_1A_2^{-1}E_1^{-1}F_2^{-1}$. Všechny ostatní prvky v horní vrstvě zůstanou na původních místech a s původní orientací. Pomocí Q už známým trikem uděláme trojcyklus na hranových kostičkách v horní vrstvě a dalším konjugováním libovolný hranový trojcyklus. Všechny hranové prvky tedy umíme dostat na správná místa, aniž bychom pohnuli prvky rohovými nebo stě-



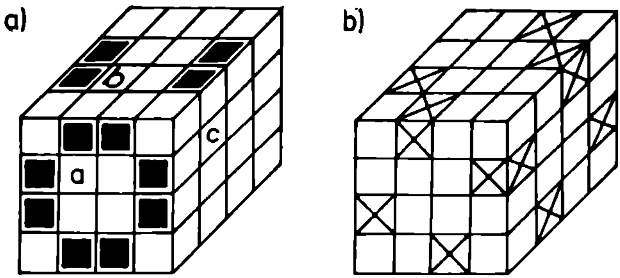
Obr. 5.19

novými. Elementární rohovou transpozici v horní vrstvě uděláme třeba postupem $P = A_1D_1E_1D_1^{-1}E_1^{-1}A_1^{-1}$ (prohodíme *abc* a *bcd*) a stěnové prvky b_1 a b_2 prohodíme postupem $S = F_2A_2E_2A_2^{-1}E_2^{-1}F_2^{-1}$. Z těchto postupů dostaneme opět postupy, které udělají libovolný rohový nebo stěnový trojcyklus. To už stačí k převedení každé pozice do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech. Postupujeme rychle, pro nikoho, kdo se při čtení dostal až sem, by už ale neměly existovat při skládání hlavolamů žádná velké problémy.

A jak je to s orientacemi prvků? Prvek *abc* pootočíme doprava starým známým způsobem: $R = C_1^{-1}E_1C_1E_1^{-1}C_1^{-1}E_1C_1$. Postup $RBR^{-1}B^{-1}$ pak pootočí *abc* vpravo, *bcd* vlevo, a všechno ostatní ponechá beze změny. A protože součet orientací rohových prvků musí být v každé řešitelné pozici rovný $0 \in \mathbf{Z}_3$ (dokážeme to v šestém odstavci — Křížova věta), umíme správně orientovat všechny rohové prvky.

U stěnových prvků při normálním označení stěn barvami nemůžeme různé orientace rozlišit, zbývá tedy orientovat hranové. Pokoušíme-li se najít postup, který by udělal elementární hranové otočení v horní vrstvě, třeba prvku *ab* vyznačeného na obrázku 5.19., zjistíme, že se stejný prvek vrací na stejné místo vždy se stejnou orientací, jakou měl původně. Jde vůbec otočit prvek *ab* tak, aby všechno ostatní v horní vrstvě zůstalo na původních místech?

Ne, a proč to nejde, si vysvětlíme pomocí obrázku 5.20. Na něm je orientační systém pro hranové prvky podobný systému z obrázku 5.1.a.

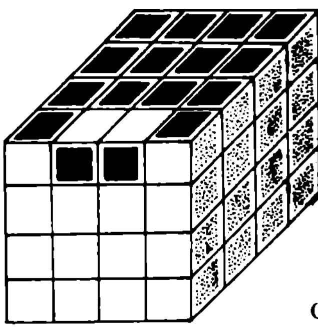


Obr. 5.20

Pouze tahy A_1, D_1, C_1 a F_1, tj. otočení přední, zadní, pravou a levou vrstvou, nemění orientace žádných hranových prvků. Zbývající tahy, otočení horní a dolní vrstvou B_1 a E_1 a všechna otočení středními vrstvami, mění orientace všech hranových prvků, které v příslušných vrstvách leží. Každý prvek se tedy může objevit na různých místech s různou orientací vzhledem k orientačnímu systému 5.20.a. Nemůže se ale vyskytnout různě orientovaný na stejném místě. Dokážeme to pomocí obrázku 5.20.b.

Na něm jsou křížky vyznačena určitá místa pro hranové prvky. Jsou to všechna místa, jejichž prvky na sebe můžeme převádět, používáme-li pouze tahy A_1, D_1, C_1 a F_1. Tyto tahy nemění orientace hranových prvků. Označeným místům budeme říkat místa typu X. Pokud tedy používáme pouze tahy neměnící orientaci hranových prvků, můžeme převést prvek z místa typu X zase jenom na jiné místo typu X. Každý jiný tah, který mění orientace hranových prvků, naopak převádí prvky z místa typu X na místa, která typ X nemají, říkejme jim třeba místa typu Y. Orientaci nějakého hranového prvku změníme pouze za cenu toho, že změníme typ místa, na kterém se nachází, z X na Y, nebo naopak. Má-li být nějaký prvek na počátku a na konci nějakého postupu na stejném místě, musí být počet těchto změn nutně sudý. Každý hranový prvek se proto musí vrátit na stejné místo vždy se stejnou orientací. Hranové prvky na krychli $4 \times 4 \times 4$ jsou bez orientace, pokud jsou na správném místě, mají v řešitelné pozici nutně také správnou orientaci. Žádný postup, který by udělal elementární hranové otočení v jedné vrstvě, neexistuje, a ani ho nepotřebujeme.

Každý, kdo si někdy hrál s krychlí $4 \times 4 \times 4$, teď asi namítne pozici 5.21.

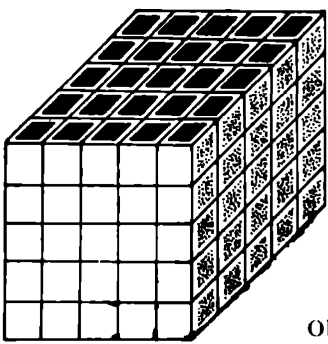


Obr. 5.21

V ní jsou pouze dva špatně orientované hranové prvky. jinak je všechno správně. A přesto je tato pozice řešitelná. Není to ve sporu s tím, že hranové prvky mohou být na správném místě pouze se správnou orientací? Vtip je v tom, že oba prvky jsou obarvené stejně, takže jsou na správných místech pouze zdánlivě, ve skutečnosti jsou prohozené. Pokud se nám je podaří zaměnit, změní každý z nich typ místa, na kterém se nachází, a tím se také změní jeho orientace na správnou. V pozici na obrázku 5.21. jsou tedy dva hranové prvky prohozené, polohová permutace pozice je na hranové orbitě lichá. Uděláme napřed libovolný tah střední vrstvou, třeba C_2. Dostaneme tak pozici, jejíž polohová permutace je sudá na všech třech orbitách, a pak už používáme pouze postupy uvedené dříve.

5 × 5 × 5. Umíme-li skládat Rubikovu krychli 3 × 3 × 3 a krychli 4 × 4 × 4, složíme snadno také krychli 5 × 5 × 5 na obrázku 5.22. To už ponecháme jako složitější cvičení.

Najděte všechny orbity, rozhodněte, které prvky se mohou objevit na stejném místě s různou orientací, na-



Obr. 5.22

jděte postupy, které udělají elementární transpozice na jednotlivých orbitách, případně elementární otočení, pokud jsou možná. A pokud vám to půjde dobře, můžete vyzkoušet síly na krychli *$n \times n \times n$. Tady je důležité rozlišit případy, kdy je n sudé a kdy liché.

***5.5. Matematický model hlavolamů s orientací. Věncový součin grup.** Ve třetí kapitole jsme sestrojili matematický model úplných her bez orientace. Různým pozicím odpovídaly různé permutace na množině I pohyblivých prvků. Každý tah udělal nějakou permutaci, těmto permutacím jsme říkali generátory. Postupnému provádění tahů odpovídalo skládání permutací-generátorů. Umět řešit hlavolam pak znamenalo popsat všechny permutace, které můžeme dostat skládáním generátorů (tj. popsat řešitelné pozice), a pro každou takovou permutaci najít nějaké konkrétní vyjádření jako složení generátorů (tj. najít postup, který každou řešitelnou pozici složí). Stejný model jsme používali také při zkoumání polohy prvků u her s orientací. Orientace ale nebyla v tomto modelu nijak zachycena.

Nyní sestrojíme model úplných her s orientací, který bude obsahovat také všechny potřebné informace o orientacích jednotlivých prvků.

Názornější bude začít s nějakou souvislou hrou s orientací. Takovou známe dosud pouze jednu — krychli $2 \times 2 \times 2$. Jak můžeme zapsat polohu a orientaci všech prvků v nějaké (řešitelné nebo neřešitelné) pozici p? Polohu a orientaci posuzujeme vzhledem k prvku *abf*, který považujeme na pevný. Polohu zaznamenávat umíme. Je popsána permutací p na množině $I = \{abc, ace, aef, bcd, bdf, cde, def\}$ všech pohyblivých prvků. Zbývá nějak zachytit orientace. Vzhledem k orientačnímu systému na obrázku 5.18.b má orientace každého pohyblivého prvku hodnotu 0, 1 nebo 2 v grupě $\mathbf{Z}_3$. Orientaci všech prvků popíšeme zobrazením $g: I \to \to Z_3$, které každému prvku $i \in I$ přiřadí hodnotu jeho orientace $ig \in Z_3$. Poloha a orientace všech prvků v pozici $\mathbf{p}$ je tak zcela popsána dvojicí (p, g), kde p je permutace na množině I a g je zobrazení z množiny I do grupy $\mathbf{Z}_3$. Tato dvojice pozici $\mathbf{p}$ úplně popisuje, pro jednoduchost budeme dvojici (p, g) s pozicí $\mathbf{p}$ ztotožňovat a psát $\mathbf{p} = (p, g)$. Prvek i je na místě ip a má orientaci ig vzhledem k orientačnímu systému 5.18.b. Zobrazení g budeme nazývat *zobrazení orientace*.

Jakou dvojicí je popsána základní pozice $\mathbf{n}$? Každý prvek i je na správném místě, poloha prvků je popsána identickou permutací n na množině I. Každý prvek má navíc správnou orientaci 0. Zobrazení orientace, které každému prvku $i \in I$ přirazuje neutrální prvek grupy orientací (v tomto případě $\mathbf{Z}_3$), budeme vždy označovat písmenem o, $io = 0$. Základní pozice $\mathbf{n}$ je tedy popsána dvojicí (n, o).

Postupem P uděláme ze základní pozice na krychli $2 \times 2 \times 2$ nějakou pozici $PU = \mathbf{p} = (p, g)$. Jiným postupem Q uděláme pozici $QU = \mathbf{q} = (q, h)$. Jakou pozici uděláme složeným postupem PQ? Vezmeme libovolný prvek $i \in I$. Musíme určit, na jakém místě a s jakou orientací bude po provedení postupu PQ ze základní pozice. Poloha je jasná — postupem P přejde z místa i na místo ip a z tohoto místa dále postupem Q na místo $(ip)q = i(p \circ q)$. Zbývá určit funkci orientace v pozici $(PQ)U$. Prvek i je po postupu P na místě ip s orientací ig. Děláme-li postup Q ze základní pozice, změní se původní orientace 0 prvku na místě ip na orientaci $(ip)h$ v pozici $\mathbf{q}$. Tentokrát ale děláme postup Q z pozice $\mathbf{p}$, ve které má prvek na místě ip orientaci ig. Postupem Q přejde tento prvek dále na místo $i(p \circ q)$ a jeho původní orientace ig se změní na $ig \oplus (ip)h$. Funkce orientace k v pozici $(\boldsymbol{PQ})\boldsymbol{U}$ je proto popsána rovností $ik = ig \oplus (ip)h$ (sčítáme v grupě $\boldsymbol{Z}_3$). Postupem $\boldsymbol{PQ}$ tedy uděláme pozici $(p \circ q, k)$. Tuto pozici můžeme nazvat složení pozic $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ a označíme ji $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$. Definovali jsme tak složení libovolných dvou pozic, které dostaneme ze základní pozice nějakými postupy, tj. libovolných dvou řešitelných pozic. Naprosto stejně můžeme ale skládat i neřešitelné pozice.

Definice skládání pozic na krychli 2 × 2 × 2. Jsou-li $\boldsymbol{p} = (p, g)$ a $\boldsymbol{q} = (q, h)$ dvě pozice, pak jejich složení $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} = (p \circ q, k)$, kde funkce orientace k je definována předpisem $ik = ig \oplus (ip)h$.

Polohové permutace pozic na hlavolamech spolu s operací skládání permutací tvoří grupu. Ukážeme nyní, že také všechny pozice na krychli 2 × 2 × 2 s právě definovanou operací skládání pozic tvoří grupu.

Grupa pozic na krychli 2 × 2 × 2. Musíme ověřit axiómy grupy. Pokud jde o existenci neutrálního prvku, máme očividného kandidáta — základní pozici $\boldsymbol{n} = (n, o)$. Platí $(p, g) \circ (n, o) = (p \circ n, k)$, kde $ik = ig \oplus (ip)o = ig \oplus 0 = ig$. Protože také $p \circ n = p$, platí $(p, g) \circ (n, o) = (p, g)$. Stejně spočítáme $(n, o) \circ (p, g) = (n \circ p, l) = (p, l)$, kde $il = io \oplus (in)g = 0 \oplus ig = ig$, tj. $(n, o) \circ (p, g) = (p, g)$. Pozice $\boldsymbol{n} = (n, o)$ je tedy skutečně neutrální vzhledem k operaci skládání.

Dále budeme hledat inverzní prvek k pozici (p, g). Inverzní pozici k nějaké pozici $\boldsymbol{p} = (p, g)$, kterou uděláme nějakým postupem $\boldsymbol{P}$, bychom měli udělat nejspíš inverzním postupem $\boldsymbol{P}^{-1}$. Jakou pozici tento postup udělá? Polohová permutace je jasná, je to inverzní permutace p^{-1} k permutaci p. Postup $\boldsymbol{P}$ přemístí prvek i na místo $j = ip$ a jeho nová orientace bude ig. Inverzní postup $\boldsymbol{p}^{-1}$ vrátí prvek i z místa $j = ip$ na místo $i = jp^{-1}$ a orientace bude správná 0, tj. k orientaci ig musíme přičíst $(ig)^{-1} = ((jp^{-1})g)^{-1}$. Zkusme tedy jako kandidáta na inverzní prvek k pozici $\boldsymbol{p} = (p, g)$ pozici (p^{-1}, h), kde $ih = ((ip^{-1})g)^{-1}$. Potom platí $(p, g) \circ (p^{-1}, h) = (p \circ \circ p^{-1}, k) = (n, k)$, kde $ik = ig \oplus (ip)h = ig \oplus (((ip)p^{-1})g)^{-1} = ig \oplus ((i(p \circ p^{-1}))g)^{-1} = ig \oplus (ig)^{-1} = 0$. Hodnota zobrazení orientace k se proto vždy rovná $0 \in \boldsymbol{Z}_3$, tj. $k = o$. Tím jsme dokázali $(p, g) \circ (p^{-1}, h) = (n, o)$. Podobně ukážeme také $(p^{-1}, h) \circ (p, g) = (n, o)$, tj. (p^{-1}, h) je opravdu inverzní pozice k pozici (p, g).

Zbývá ověřit asociativitu skládání pozic. Zvolíme tři libovolné pozice $\boldsymbol{p} = (p, g)$, $\boldsymbol{q} = (q, h)$ a $\boldsymbol{r} = (r, k)$. Máme ukázat rovnost $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}) \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{r})$. Platí $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} = (p \circ q, l)$, kde $il = ig \oplus (ip)h$. Potom $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}) \circ \boldsymbol{r} = (p \circ q, l) \circ (r, k) = ((p \circ q) \circ r, m)$, kde $im = il \oplus \oplus (i(p \circ q))k = (ig \oplus (ip)h) \oplus (i(p \circ q))k$. Nyní budeme počítat $\boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{r}) = (p, g) \circ (q \circ r, s)$, kde zobrazení orientace s je definované pevností $is = ih \oplus (iq)k$. Potom $(p, g) \circ (q \circ r, s) = (p \circ (q \circ r), t)$ a $it = ig \oplus (ip)s = it \oplus ((ip)h \oplus (i(p \circ q))k)$. Protože operace skládání v grupě $\boldsymbol{Z}_3$ je asociativní, platí $it = im$ pro každé $i \in I$. A protože také skládání permutací je asociativní, máme rovněž $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$. Tím jsme dokázali, že opravdu platí $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}) \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{r})$. Množina všech pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ spolu s operací skládání tvoří grupu.

Při konstrukci grupy pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ jsme používali dvě grupy — grupu všech permutací na množině I pohyblivých prvků a grupu orientací, v tomto případě $\boldsymbol{Z}_3$. Žádné speciální vlastnosti těchto dvou grup jsme nepotřebovali. Ve skutečnosti je konstrukce grupy pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ velice speciálním případem obecné a důležité konstrukce v teorii grup, věncového součinu grup.

Definice věncového součinu grup. Předpokládejme, že $\boldsymbol{P} = (P, \circ)$ je permutační grupa na nějaké množině I a $\boldsymbol{G} = (G, \oplus)$ libovolná grupa. Na množině všech dvojic tvaru (p, g), kde $p \in P$ a $g{:}I \rightarrow G$ je zobrazení, definujeme operaci skládání předpisem $(p, g) \circ (q, h) = (p \circ q, k)$ zobrazení k je definováno formulí $ik = ig \oplus (ip)h$. Množinu všech dvojic (p, g) spolu s právě definovanou operací skládání budeme nazývat *věncový součin grup* $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{G}$ a označovat ji budeme $\boldsymbol{P} \int \boldsymbol{G}$.

Věncový součin grup je grupa. To jsme vlastně dokázali už před definicí věncového součinu. Při důkazu, že množina pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ s operací skládání tvoří grupu, jsme nijak nevyužívali speciálních vlastností grupy polohových permutací a grupy $\boldsymbol{Z}_3$, a celý důkaz můžeme doslova zopakovat i v případě obecných grup $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{G}$.

Grupa všech možných pozic na krychli $2 \times 2 \times 2$ se rovná věncovému součinu $\boldsymbol{S}_7 \int \boldsymbol{Z}_3$.

A teď zpátky k Rubikově krychli. Tady je situace o něco málo komplikovanější, protože grupy orientací prvků z různých orbit jsou různé — $\boldsymbol{Z}_3$ u rohové orbity a $\boldsymbol{Z}_2$ u hranové. Jak tedy popíšeme polohu a orientaci všech prvků v nějaké pozici $\boldsymbol{p}$? Začneme rohovými prvky. Jejich poloha je popsána permutací p_1 na množině $J = \{abc, abf, ace, aef, bcd, bdf, cde, def\}$ všech rohových prvků. Jejich orientace jsou stejně jako u krychle $2 \times 2 \times 2$ popsány zobrazením orientace $g_1{:}J \rightarrow Z_3$, které každému rohovému prvku $j \in J$ přiřadí hodnotu jeho orientace $jg_1 \in Z_3$ vzhledem k nějakému pevně zvolenému orientačnímu systému, například k tomu na obrázku 5.1.b. Poloha a orientace všech rohových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$ je tedy popsána dvojicí (p_1, g_1).

Podobně popíšeme také polohu a orientaci hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$. Poloha je určená permutací p_2 na množině $K = \{ab, ac, ae, af, bc, bd, bf, cd, ce, de, df, ef\}$ všech hranových prvků. Každý z nich má dvě možné orientace $0, 1 \in Z_2$ a tato orientace je popsána zobrazením orientace $g_2 : K \to Z_2$, které každému prvku $k \in K$ přiřazuje hodnotu jeho orientace kg_2 vzhledem k nějakému orientačnímu systému, třeba k tomu na obrázku 5.1.a. Poloha a orientace všech hranových prvků je potom popsána dvojicí (p_2, g_2). Celá pozice $\boldsymbol{p}$ je jednoznačně popsána dvojicí dvojic $((p_1, g_1), (p_2, g_2))$. Pro jednoduchost budeme tuto dvojici dvojic s pozicí $\boldsymbol{p}$ ztotožňovat a psát $\boldsymbol{p} = ((p_1, g_1), (p_2, g_2))$.

Také pozice na Rubikově krychli můžeme přirozeným způsobem skládat. Uděláme-li postupem P pozici $P\boldsymbol{U} = \boldsymbol{p} = ((p_1, g_1), (p_2, g_2))$ a postupem Q pozici $Q\boldsymbol{U} = \boldsymbol{q} = ((q_1, h_1), (q_2, h_2))$, jakou pozici uděláme složeným postupem PQ? Zcela stejně jako v případě krychle $2 \times 2 \times 2$ ukážeme, že postup PQ udělá pozici $(PQ)\boldsymbol{U} = ((p_1 \circ q_1, k_1), (p_2 \circ q_2, k_2))$, kde $jk_1 = jg_1 \oplus (jp_1)h_1$ (sčítáme v grupě $\boldsymbol{Z}_3$), a $ik_2 = ig_2 \oplus (ip_2)h_2$ (tady sčítáme v $\boldsymbol{Z}_2$). Tuto definici skládání pozic na Rubikově krychli můžeme rozšířit i na neřešitelné pozice.

Definice skládání pozic na Rubikově krychli. Jsou-li $\boldsymbol{p} = ((p_1, g_1), (p_2, g_2))$ a $\boldsymbol{q} = ((q_1, h_1), (q_2, h_2))$ dvě pozice na Rubikově krychli, pak jejich složení je pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} = ((p_1 \circ q_1, k_1), (p_2 \circ q_2, k_2))$, kde $jk_1 = jg_1 \oplus (jp_1)h_1$ a $ik_2 = ig_2 \oplus (ip_2)h_2$.

Podíváme-li se pouze na rohové části pozic, vidíme, že jejich skládání je zcela stejné jako skládání v grupě $\boldsymbol{S}_J \int \boldsymbol{Z}_3$, která je věncovým součinem symetrické grupy na množině J s grupou $\boldsymbol{Z}_3$. Podobně skládání hranových částí pozic na Rubikově krychli je stejné jako skládání ve věncovém součinu $\boldsymbol{S}_K \int \boldsymbol{Z}_2$. A vzpomeneme-li si na definici obyčejného součinu grup ze čtvrté kapitoly, vidíme, že skládání pozic na Rubikově krychli je stejné jako operace skládání v součinu grup $(\boldsymbol{S}_J \int \boldsymbol{Z}_3) \times \times (\boldsymbol{S}_K \int \boldsymbol{Z}_2)$. Vzhledem k tomu, že množina J má osm prvků a K dvanáct, dostáváme, že:

> Množina všech možných pozic na Rubikově krychli spolu s operací skládání pozic je grupa a rovná se součinu grup $(\boldsymbol{S}_8 \int \boldsymbol{Z}_3) \times (\boldsymbol{S}_{12} \int \boldsymbol{Z}_2)$.

Matematický model Rubikovy krychle pak vypadá následovně. V grupě všech možných pozic $(\boldsymbol{S}_8 \int \boldsymbol{Z}_3) \times \times (\boldsymbol{S}_{12} \int \boldsymbol{Z}_2)$ zvolíme pozice $\boldsymbol{a} = A\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{b} = B\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{c} = C\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{d} = D\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{e} = E\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{f} = F\boldsymbol{U}$. Jsou to pozice, které uděláme jednotlivými tahy. Umět řešit Rubikovu krychli pak znamená popsat množinu všech pozic, které dostaneme skládáním prvků $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, tj. popsat všechny řešitelné pozice a pro každou řešitelnou pozici $\boldsymbol{p}$ najít nějaké její vyjádření jako složení prvků $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, neboli najít postup $\boldsymbol{P}$, kterým pozici $\boldsymbol{p}$ složíme. Obojí už umíme.

Stručně ještě uvedeme grupy všech možných pozic na dalších hlavolamech s orientací, kterými jsme se dosud zabývali. Na čtyřstěnu jsou dvě orbity, čtyřprvková rohová a šestiprvková hranová. Grupa orientací rohových prvků je $\boldsymbol{Z}_3$, hranových $\boldsymbol{Z}_2$.

> Grupa všech možných pozic na čtyřstěnu se rovná součinu $(\boldsymbol{S}_4 \int \boldsymbol{Z}_3) \times \times (\boldsymbol{S}_6 \int \boldsymbol{Z}_2)$.

Podobně popíšeme grupu pozic na dvanáctistěnu.

Grupa všech možných pozic na dvanáctistěnu se rovná součinu $(S_{20} \int Z_3) \times \times (S_{30} \int Z_2)$.

Na krychli $4 \times 4 \times 4$ mohou mít různou orientaci rohové a hranové prvky, orientace stěnových prvků zanedbáváme. Rohových prvků je osm a grupa jejich orientací je Z_3, hranových prvků je dvacet čtyři a grupa orientací je Z_2. Také stěnových prvků je čtyřiadvacet.

Grupa všech možných pozic na krychli $4 \times 4 \times 4$ se rovná součinu $(S_8 \int Z_3) \times \times (S_{24} \int Z_2) \times S_{24}$.

Připomeňme ještě jednou, že všemi možnými pozicemi na nějakém hlavolamu rozumíme všechny pozice, které můžeme udělat tak, že hračku rozebereme a zase složíme. Patří sem tedy i pozice neřešitelné.

Grupy řešitelných pozic. Také všechny řešitelné pozice na každém úplném hlavolamu tvoří spolu s operací skládání grupu, podgrupu grupy všech možných pozic. Řešitelné pozice jsou ty, které můžeme udělat ze základní pozice nějakým postupem. Jsou-li tedy p a q dvě řešitelné pozice, pak $p = PU$ a $q = QU$ pro nějaké postupy P, Q. Složeným postupem PQ uděláme pozici $p \circ q$ (tak je skládání pozic definované), pozice $p \circ q$ je proto také řešitelná. Nulovým postupem N základní pozici nezměníme, uděláme jím tedy vlastně neutrální prvek grupy všech možných pozic. A protože postupy PP^{-1} a $P^{-1}P$ nic nezměníme, hra zůstane v základní pozici, platí, že pozice $(PP^{-1})U = (P^{-1}P)U$ je neutrální prvek grupy všech možných pozic. Označíme-li $(P^{-1})U = r$, rovnají se obě pozice $(PP^{-1})U = p \circ r$ a $(P^{-1}P)U = r \circ p$ neutrálnímu prvku, r je proto inverzní prvek k p. Tím jsme dokázali, že:

> Množina všech řešitelných pozic na nějakém úplném hlavolamu spolu s operací skládání pozic je podgrupa grupy všech možných pozic na tomto hlavolamu.

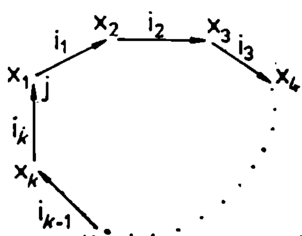
***5.6. Křížova věta.** Řešitelné pozice na všech možných hlavolamech jsme charakterizovali na mnoha místech v předchozím textu. Vlastnosti polohových permutací jsme zkoumali ve třetí a čtvrté kapitole, orientace v prvních odstavcích této kapitoly. Tam jsme se také zmínili o Křížově větě, která popisuje možné orientace prvků v řešitelných pozicích. Nyní si pro zajímavost tuto velmi pěknou větu uvedeme. Jejím autorem je Igor Kříž, bývalý úspěšný účastník matematických olympiád a nyní posluchač matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Uvažujeme nějakou orbitu na úplném hlavolamu s orientací, jejíž prvky se mohou na stejném místě vyskytovat s různými orientacemi. Budeme předpokládat, že grupa G orientací prvků této orbity je komutativní. Takovou vlastnost mají všechny hlavolamy v této knize, grupa orientací byla dosud vždy Z_2 nebo Z_3. Dále budeme předpokládat, že opakováním žádného tahu nemůžeme změnit orientaci nějakého prvku naší orbity. Jinak řečeno, opakujeme-li jeden tah tak dlouho, až se nějaký prvek z naší orbity vrátí na původní místo, vrátí se tam hned poprvé také s původní orientací. I tuto vlastnost mají všechny dosud zkoumané hlavolamy, na žádném nemůžeme změnit orientaci nějakého prvku na stejném místě opakováním pouze jednoho tahu. Nyní zvolíme na hlavolamu orientační systém v naší vybrané orbitě tak, abychom mohli o každém prvku na každém místě rozhodnout, jakou má orientaci, a aby hodnota orientace správně orientovaného prvku na správném místě byla rovná neutrálnímu prvku 0 grupy orientací $\mathbf{G}$. Takové orientační systémy jsme vždy volili.

A jak zní Křížova věta?

> Za uvedených předpokladů má součet orientací všech prvků dané orbity v každé řešitelné pozici hodnotu $0 \in \mathbf{G}$.

Důkaz je celkem jednoduchý. Předpokládejme, že hra je v nějaké pozici $\mathbf{p}$. Vezmeme si jeden prvek j ve zvolené orbitě a budeme předpokládat, že má orientaci $x_1 \in \mathbf{G}$. Nyní uděláme nějaký tah. V grafu polohové permutace, kterou tento tah udělá, leží námi zvolený prvek j v nějakém cyklu délky $k \geq 1$ — obrázek 5.23. Další prvky v tomto cyklu mají v pozici $\mathbf{p}$ orientace $x_2, x_3, \ldots, x_k$ podle obrázku. U šipek v grafu permutace jsou zaznamenané prvky $i_1, i_2, \ldots, i_k$ grupy orientací $\mathbf{G}$.



Obr. 5.23

Tyto prvky zachycují, jak se změní orientace jednotlivých prvků v tomto cyklu, uděláme-li zvolený tah. Prvek s orientací x_1 bude mít po tomto tahu orientaci $x_1 \oplus i_1$, prvek s orientací x_2 bude mít novou orientaci $x_2 \oplus i_2$ atd.

Prvek j se dostane poprvé zpět na své původní místo, opakujeme-li zvolený tah k-krát po sobě. Přitom se jeho původní orientace mění postupně z x_1 na $x_1 \oplus i_1$, pak na $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2$ atd., až nakonec po k tazích bude mít hodnotu $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus i_k$. Druhý předpoklad říká, že se tato hodnota bude rovnat opět počáteční orientaci x_1. Z rovnosti $x_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus i_k = x_1$ plyne $i_1 \oplus i_2 \oplus \oplus \ldots \oplus i_k = 0$.

Sečteme-li nyní hodnoty orientací všech prvků v cyklu obsahujícím j po provedení zvoleného tahu, dostaneme $(x_1 \oplus i_1) \oplus (x_2 \oplus i_2) \oplus \ldots \oplus (x_k \oplus i_k)$. Protože grupa $\mathbf{G}$ je komutativní, můžeme jednotlivé prvky součtu libovolně proházet, aniž by se výsledek změnil. Součet orientací se proto rovná také $(x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_k) \oplus (i_1 \oplus i_2 \oplus \oplus \ldots \oplus i_k) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_k$, neboť $i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus \oplus i_k = 0$. Součet orientací prvků v jednom cyklu se tedy provedením zvoleného tahu nezmění. A protože to platí pro všechny cykly, nezmění se ani součet orientací všech prvků v naší orbitě. Platí to také pro každý tah, součet orientací všech prvků ve zvolené orbitě je proto stejný jako součet orientací všech prvků v pozici základní. V ní je každý prvek na správném místě a se správnou orientací. Podle toho, jak jsme zvolili orientační systém, má jeho orientace v základní pozici hodnotu $0 \in \mathbf{G}$. Součet orientací všech prvků naší orbity v základní pozici je tedy 0, a takový musí být i v každé řešitelné pozici.

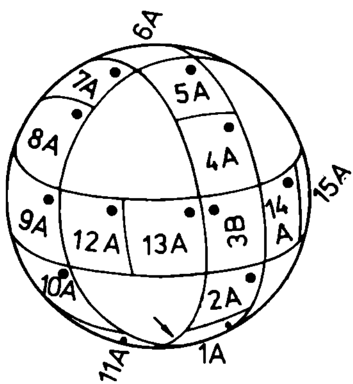
Z Křížovy věty tedy okamžitě plynou vlastnosti orientací prvků v řešitelných pozicích na všech dosud zkoumaných hlavolamech.

***5.7. Koule a kosá krychle.** Jsou to poslední dva hlavolamy v této knížce, které ještě neumíme řešit.

Koule. Koule — obrázek 1.10. — není o nic obtížnější než ostatní hlavolamy. Její teorie je ale poněkud komplikovanější, a proto ji uvedeme až nyní. Na kouli je třicet pohyblivých čtverečků. Můžeme si je rozdělit do patnácti dvojic, každou dvojici tvoří vždy dva protilehlé čtverce. Tyto dva čtverce mají vůči sobě stále stejnou polohu, v každé pozici jsou na dvou protilehlých místech. Zvolíme-li v každém z nich jeden roh tak, aby jejich spojnice byla průměrem koule, žádný postup tuto vlastnost nezmění. Pokud se nám podaří jeden ze čtverců pootočit doprava, pootočí se druhý automaticky doleva. Dvojice protilehlých čtverců mají stejnou vlastnost jako dvojice plošek na hranových kostičkách na Rubikově krychli — jejich poloha a orientace jsou vzájemně propojené, jeden vůči druhému nemůžeme ani posunout, ani otočit. Při skládání koule je proto musíme považovat za jeden prvek. Tím jsme počet pohyblivých prvků zmenšili na polovinu, na patnáct. Každý je tvořený dvojicí protilehlých čtverečků.

Při obarvení podle obrázku 1.10. jsou některé prvky nerozlišitelné, jsou obarvené stejně. Ve správné pozici tak mohou být na různých místech. Jako vždy změníme označení tak, aby měl každý prvek v základní pozici jediné správné místo a jedinou správnou orientaci. Základní pozice je na obrázku 5.24 na další stránce. Pohyblivé prvky jsou označené čísly 1, 2, 3, ..., 15, každý z nich má jednu dominantní plošku, označenou A, a druhou recesívní, kterou označíme B. $3A$ je dominantní ploška prvku 3, $11B$ je recesívní ploška prvku 11. Na obrázku 5.24. je navíc šipkou označené správné místo a orientace pro prvek 1, přesněji pro jeho dominantní plošku $1A$. Poloha a orientace všech ostatních prvků je pak jednoznačně určená vzhledem k prvku 1.

Na každé plošce zvolíme dále jeden řídicí vrchol. U dominantních plošek (ty jsou všechny aspoň částečně vidět na obrázku 5.24.) to bude vrchol vpravo nahoře nad



Obr. 5.25

označením, tj. vpravo nahoře nad $1A$, $2A$, atd. Na recesívních ploškách zvolíme řídicí vrchol tak, aby spojnice řídicích vrcholů obou protilehlých plošek tvořících jeden prvek byla průměr krychle. Řídicí vrcholy jsou na obrázcích označené tečkami.

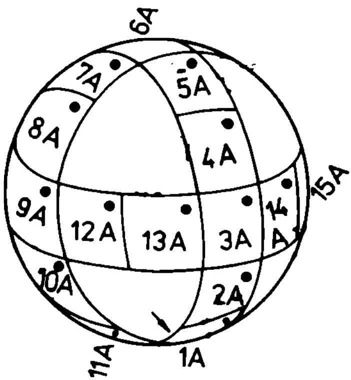
Jaké orientace může mít jeden prvek na stejném místě? Vysvětlíme to třeba na prvku 3. Může být tak jako na obrázku 5.24., nebo pootočený o 90°, 180° nebo 270° vpravo. Tato různá pootočení tvoří grupu, stejně jako ji tvořily různé orientace hranových nebo rohových prvků na Rubikově krychli. Tentokrát je to grupa $\boldsymbol{Z}_4$.

Grupa $\boldsymbol{Z}_4$. Na množině $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ definujeme operaci skládání takto: $x \oplus y$ se rovná zbytku čísla $x + y$ (normální součet) při dělení číslem 4. Tak třeba

$2 \oplus 3 = 1$, $2 \oplus 2 = 0$ atd. Zcela stejně jako v případě grup Z_2 a Z_3 lze dokázat, že množina Z_4 s právě definovanou operací tvoří grupu. Budeme ji označovat Z_4. Je to grupa komutativní. Všimněte si, že součet (tj. složení) dvou sudých nebo dvou lichých prvků v grupě Z_4 je sudý, součet lichého se sudým pak lichý. Tato vlastnost bude důležitá.

Cvičení 5.12. Ověřte, že Z_4 splňuje axiómy grupy.

Prvek 3 může být navíc převrácený, recesívní ploškou $3B$ na místě dominantní $3A$, jako na obrázku 5.25.



Obr. 5.24

Převrácený prvek může být také pootočený čtyřmi různými způsoby. Celkem je proto pro orientaci jednoho prvku na stejném místě osm různých možností.

Jakou grupu těchto osm možných orientací tvoří? Orientaci každého prvku na správném místě popíšeme dvojicí (x, y). Číslo x udává, je-li prvek převrácený nebo ne. Je-li $x = 0$, prvek převrácený není, je dominantní ploškou tam, kde má být dominantní ploška také v základní pozici. V opačném případě bude $x = 1$. Druhé číslo y udává, jak je prvek pootočený. Tady musíme být trochu opatrnější. Otočíme-li jednu plošku doprava o 90°, otočí se ploška protilehlá také o 90°, *ale doleva*. Otočení budeme proto posuzovat pouze podle dominantních plošek. Je-li řídicí vrchol dominantní plošky tam, kde má být řídicí vrchol plošky na stejném místě v základní pozici, má y hodnotu 0. Je-li dominantní ploška oproti správné orientaci otočená o 90° doprava, má y hodnotu 1. Je-li otočená o 180° nebo 270° vpravo, má y hodnotu 2 nebo 3. Podle recesívních plošek to pak vychází přesně naopak. Číslo y má hodnotu 0, 1, 2, 3, je-li recesívní ploška pootočená o 0°, 90°, 180°, 270° *doleva*. Prvek 3 na obrázku 5.25. má tedy hodnotu $y = 1$. Jeho celková orientace je (1, 1), je převrácený a recesívní ploška je otočená o 90° vlevo (dominantní pak musí být otočená o 90° vpravo).

Všimněte si také, že dvojnásobným převrácením se vrátí dominantní ploška na původní místo. Číslo x proto budeme považovat za prvek grupy $\boldsymbol{Z}_2$, číslo y pak za prvek grupy $\boldsymbol{Z}_4$.

Dominantní plošky a řídicí vrcholy nyní využijeme pro určení hodnoty orientace prvku na libovolném místě, tj. ke stanovení orientačního systému na kouli. Je-li dominantní ploška nějakého prvku i tam, kde má být dominantní ploška prvku na stejném místě v základní pozici, bude $x = 0$. V opačném případě bude $x = 1$. Je-li navíc dominantní ploška pootočená vůči plošce na stejném místě v základní pozici o 0°, 90°, 180° nebo 270° vpravo, bude hodnota y rovná 0, 1, 2, nebo 3. Chceme-li posuzovat orientaci podle recesívní plošky, musíme brát v úvahu otočení vlevo. Každému prvku na každém místě tak umíme přiřadit jednoznačně nějakou dvojici $(x, y) \in Z_2 \times Z_4$, která popisuje jeho orientaci. Pozici $\boldsymbol{p}$ potom můžeme stejně jako u jiných hlavolamů s orientací popsat dvojicí (p, g), kde p je polohová permutace na množině $I = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ a g je zobrazení orientace, které každému prvku i přiřazuje jeho orientaci $ig \in Z_2 \times Z_4$. Budeme psát $\boldsymbol{p} = (p, g)$.

Jak se mění orientace prvku, uděláme-li nějaký postup? Vezmeme si základní pozici a v ní nějaký prvek i. Má správnou orientaci $(0, 0)$. Postupem $\boldsymbol{P}$ přejde na místo ip a jeho orientace bude $ig = (x, y)$. Pokud by byl prvek i na počátku pootočený, měl orientaci $(0, v)$, pak jeho dominantní ploška bude vůči dominantní plošce v prvním případě stále pootočená o $v . 90°$ *vpravo*. Po postupu $\boldsymbol{P}$ se tedy původní orientace $(0, v)$ prvku i ve druhém případě změní na $(x, v \oplus y)$, sčítáme v grupě $\boldsymbol{Z}_4$. Zatím to vychází podle očekávání. K překvapení dojde, jestliže je prvek i na počátku překlopený, má orientaci $(1, v)$. Nyní se recesívní ploška prvku i pohybuje po stejné dráze, po jaké se pohybovala dominantní ploška stejného prvku v prvním případě, kdy jsme začínali v základní pozici. Tehdy se dominantní ploška pootočila o $y . 90°$ vpravo. Tentokrát se pootočí stejně recesívní ploška — o $y . 90°$. vpravo. Orientaci ale posuzujeme podle dominantní plošky. Protože se recesívní ploška otočila o $y . 90°$ vpravo, musí se dominantní ploška otočit o $y . 90°$ vlevo, tj. o $(4 - y) . 90°$ vpravo. Jestliže se v prvním případě prvek i překlopil, tj. jestliže $x = 1$, pak se překlopí také v posledním případě. Počáteční orientace $(1, v)$ prvku i se tak změní na $(1 \oplus x, v \oplus (4 - y))$. Orientace prvku i proto neskládáme stejně jako v součinu $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4$, skládání je v tomto případě jiné:

$$(0, v) \circ (x, y) = (0 \oplus x, v \oplus y),$$

první součet je v grupě $\boldsymbol{Z}_2$, druhý v $\boldsymbol{Z}_4$,

$$(1, v) \circ (x, y) = (1 \oplus x, v \oplus (4 - y)),$$

také tady jsou oba součty v $\boldsymbol{Z}_2$ a $\boldsymbol{Z}_4$, rozdíl $4 - y$ je normální rozdíl celých čísel.

Množina $Z_2 \times Z_4$ s právě definovanou operací tvoří grupu. Neutrální prvek je $(0, 0)$, k $(0, y)$ je inverzní $(0, 4 - y)$, k $(1, y)$ je inverzní $(1, y)$. Trochu pracnější je ověřit asociativitu, necháme to jako další cvičení. Tuto grupu budeme označovat $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$, abychom ji odlišili od obyčejného součinu $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$. Obě grupy jsou definované na stejných množinách, operace skládání jsou ale různé. Grupa $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ se nazývá *semidirektní* (polopřímý) *součin* grup $\mathbf{Z}_2$ a $\mathbf{Z}_4$. Je to speciální případ další důležité základní konstrukce v teorii grup — semidirektního součinu dvou grup. Abychom odlišili operace skládání v grupách $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$ a $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$, budeme používat v $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ symbol $\oplus$ místo $\circ$.

Všimněme si ještě toho, že grupa $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ není komutativní, $(0, 1) \oplus (1, 0) = (1, 1)$ a $(1, 0) \oplus (0, 1) = (1, 3)$. Koule je tak jediná hračka v této knize, na které je grupa orientací nekomutativní. Jednu vlastnost má ale skládání v grupě $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ společnou se skládáním v grupě $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4$. Ve složení $(u, v) \oplus (x, y) = (r, s)$ můžeme o paritě čísel r, s rozhodnout pouze na základě znalosti parity čísel u, x a v, y. Jsou-li obě čísla u, x sudá nebo obě lichá, pak je také $r = u \oplus x$ sudé. Je-li jedno sudé a jedno liché, je $r = u \oplus x$ liché. Čísla y a $4 - y$ jsou buď obě sudá, nebo obě lichá. Jsou-li čísla v, y obě sudá, nebo obě lichá, pak také v, $4 - y$ jsou obě sudá, nebo obě lichá. Prvek s je buď $v \oplus y$, nebo $v \oplus (4 - y)$, v každém případě je proto sudý. Je-li jedno z čísel v, y sudé a druhé liché, je s v každém případě liché. Žádná tato vlastnost také nezávisí na pořadí, v jakém prvky skládáme.

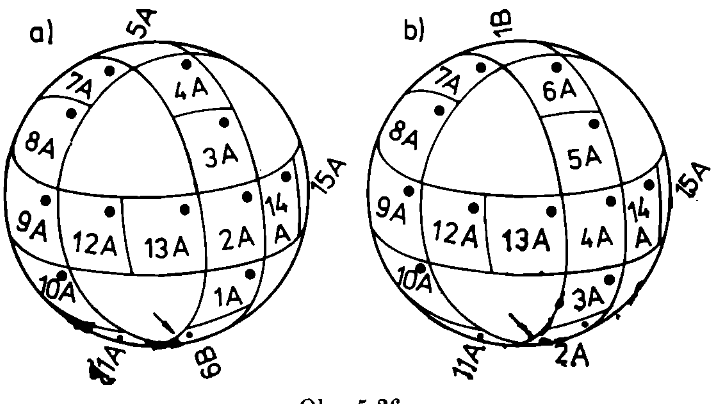
Každou pozici $\mathbf{p}$ na kouli můžeme tedy popsat dvojicí $\mathbf{p} = (p, g)$, kde p je polohová permutace na množině $I = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ a $g : I \to \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ je zobrazení orientace. Jednotlivé pozice můžeme pak skládat tak, jak jsme se to naučili v odstavci 5.5. Dostáváme tak grupu všech možných pozic na kouli.

Grupa všech pozic na kouli se rovná věncovému součinu $\mathbf{S}_{15} \int (\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4)$.

Poznamenejme, že v definici zobrazení orientace složené pozice $p \circ q$ musíme používat skládání v grupě $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$, tj. $\oplus$.

Nyní popíšeme řešitelné pozice a najdeme postupy jak je složit. K popisu řešitelných pozic nemůžeme použít Křížovu větu, grupa orientací $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ není komutativní. Koule navíc nesplňuje ani druhý předpoklad Křížovy věty. Opakujeme-li jeden tah šestkrát, vrátí se všechny prvky v příslušném pruhu zpět na původní místa převrácené, dominantní plošky budou na místech recesívních. Koule je tak jediná hra, na které můžeme měnit orientaci prvků opakováním jediného tahu. Poloha a orientace prvků spolu úzce souvisí. Řešitelné pozice musíme popsat jinak, bez použití Křížovy věty.

Probereme, jaké pozice udělají jednotlivé tahy. Začneme B a B^{-1}.

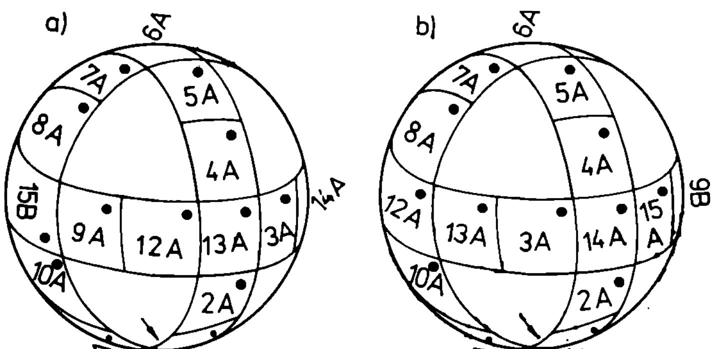


Obr. 5.26

Na obrázku a) je pozice po tahu B, na b) pak po inverzním B^{-1}. Tah B udělá cyklus délky šest na prvcích 1, 2, 3, 4, 5, 6, ostatní zůstávají na místě. Orientace všech prvků s výjimkou 6 je stejná jako původní — (0, 0). Prvek 6 je převrácený, recesívní ploška $6B$ je na místě dominantní $1A$. Recesívní ploška je pootočená o 90° vlevo, dominantní $6A$ proto musí být o 90° vpravo. Orientace prvku 6 je (1, 1). Tah B tedy udělá pozici $\mathbf{p} = (p, g)$, polohová permutace je lichá a součet orientací všech prvků v (grupě $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$) je (1, 1), obě čísla v součtu jsou lichá.

S tahem B^{-1} je to stejné. Udělá šesticyklus, a pouze prvek 1 změní orientaci. Recesívní ploška $1B$ je na místě dominantní $6A$ a otočená o 90° vlevo. Dominantní ploška $1A$ je proto otočená o 90° vpravo, orientace prvku 1 je tedy také (1, 1). Součet orientací všech prvků v pozici, kterou udělá tah B^{-1}, je proto (1, 1), také tady jsou obě čísla lichá.

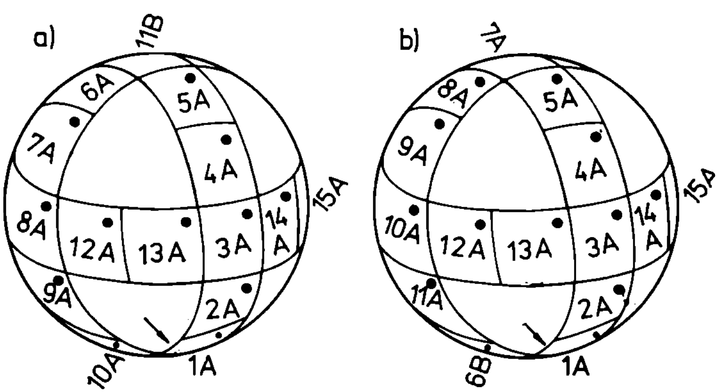
Podobné je to s tahy A a A^{-1}.



Obr. 5.27

Tah A na obrázku a) udělá šesticyklus a změní orientaci pouze prvku 15. Recesívní ploška $15B$ na dominantním místě je otočená o 90° vpravo, dominantní $15A$ proto musí být vlevo. Prvek 15 má orientaci (1, 3). Pozice je lichá a součet orientací všech prvků je (1, 3), obě čísla jsou zase lichá. Stejné to je s tahem A^{-1} — obrázek b). Tentokrát se mění orientace pouze u prvku 9 a je také (1, 3). Součet orientací všech prvků je (1, 3), všechno je zase liché.

A nakonec tahy C a C^{-1}.



Obr. 5.28

Oba tahy udělají cyklus délky šest, každý mění orientaci dvou prvků. Na obrázku a) je pozice po tahu C, změněnou orientaci mají prvky 6 a 11. Prvek 6 je pouze pootočený doleva, není převrácený, má orientaci (0, 3). Recesívní ploška $11B$ je na místě dominantní plošky $6A$, správně otočená. Prvek 11 má orientaci (1, 0). Všechny zbývající prvky mají správnou orientaci (0, 0). Součet orientací všech prvků závisí na pořadí, v jakém je sčítáme, může být buď $(0, 3) \oplus (1, 0) = (1, 3)$, nebo $(1, 0) \oplus (0, 3) = (1, 1)$. V každém případě jsou obě čísla v součtu lichá, což je pro nás důležité. Stejné je to po tahu C^{-1} — obrázek b). Změní se orientace prvku 7 na $(0, 1)$ a prvku 6 na $(1, 0)$. Jejich součet je buď $(0, 1) \oplus (1, 0) = (1, 1)$, nebo $(1, 0) \oplus (0, 1) = (1, 3)$, obě čísla jsou vždy lichá.

Můžeme shrnout: každý tah udělá lichou permutaci a součet orientací všech prvků v nové pozici (v grupě $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_4$ a v libovolném pořadí) je nějaký prvek $(r, s) \in \in \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_4$, ve kterém jsou obě čísla r, s vždy lichá.

Uděláme nyní dva tahy, jeden udělá pozici $\boldsymbol{p} = (p, g)$ a druhý $\boldsymbol{q} = (q, h)$. Jejich složení proto udělá pozici $p \circ q = (p \circ q, k)$, kde $ik = ig \oplus (ip)\, h$. Permutace $p \circ \circ q$ bude sudá, je složením dvou lichých. Ještě potřebujeme sečíst všechny orientace $ik = ig \oplus (ip)\, h$ v nějakém pořadí. Můžeme to udělat třeba tak, že sečteme napřed všechny orientace ig a pak všechny orientace $(ip)\, h$. Součet se tím změní, protože grupa $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_4$ není komutativní, nezmění se ale parita čísel ve výsledku (x, y). Sečtením všech orientací ig dostaneme nějaký prvek (r, s), obě čísla jsou lichá. Také sečtením všech orientací $(ip)\, h$ dostaneme nějaký prvek (u, v), ve kterém jsou obě čísla u, v lichá, sčítáme orientace všech prvků v pozici $\boldsymbol{q}$. Celkový součet orientací prvků v pozici $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je proto $(r, s) \oplus (u, v) = (x, y)$. Tento výsledek závisí na tom, v jakém pořadí orientace ik sčítáme, nezávisí na něm ale parita čísel x, y. V tomto případě jsou obě sudá. Uděláme-li dva tahy, je ve výsledné pozici všechno sudé — jak polohová permutace, tak obě čísla v libovolném součtu orientací všech prvků. Po třech tazích bude všechno liché, po čtyřech zase sudé. V každé řešitelné pozici musí být proto buď všechno sudé, nebo všechno liché.

Je-li v nějaké pozici $\mathbf{p} = (p, g)$ na kouli polohová permutace p lichá a v součtu (r, s) orientací ig všech prvků i (v grupě $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$ a v libovolném pořadí) aspoň jedno z čísel r, s sudé, nebo permutace p sudá a aspoň jedno z čísel r, s liché, je pozice neřešitelná.

A nakonec ukážeme, jak pozice, ve kterých je všechno sudé nebo všechno liché, dostat do základní pozice 5.24. Můžeme předpokládat, že v pozici $\mathbf{p} = (p, g)$ je všechno sudé, v opačném případě stačí udělat jeden tah. Nejdříve dostaneme všechny prvky na správná místa. Tak jako vždy se napřed pokusíme udělat transpozici v jednom pruhu, třeba v A, tak, aby všechno ostatní v A zůstalo na původních místech. To je jednoduché. Postup $P = BAB^{-1}A^{-1}B$ prohodí v pruhu A prvky 3 a 13 a všechno ostatní v A nechá na místě. Postup $PAP^{-1}A^{-1}$ proto udělá trojcyklus na prvcích 3, 12, 13, a jinak na kouli nic nezmění. Konjugováním tohoto postupu uděláme každý trojcyklus a tím i každou sudou permutaci. Dostaneme tak pozici $\mathbf{q} = (n, h)$, ve které je polohová permutace identická, všechno je na správném místě.

V součtu orientací všech prvků v pozici $\mathbf{q}$ musí být proto obě čísla sudá. Speciálně to znamená, že je v $\mathbf{q}$ sudý počet převrácených prvků. Dva sousední prvky 12 a 13 převrátíme třeba takto: postup $(PAP^{-1}A^{-1})\,A^{-1}$ nechá mimo pruh A všechno na místě, v pruhu A nechá na místě prvky 12 a 13 a na zbývajících čtyřech udělá čtyřcyklus. 3 bude na místě 9, 9 na místě 15, 15 na 14 a 14 na místě 3. Navíc bude prvek 9 převrácený. Uděláme-li $(PAP^{-1}A^{-1})\,A^{-1}$ čtyřikrát po sobě, vrátí se všechny prvky na původní místa a prvky 3, 9, 14 a 15 budou převrácené. Nyní šestinásobným opakováním tahu A převrátíme všechno v pruhu A, prvky 3, 9, 14 a 15 pak převrácené nebudou, zato 12 a 13 ano. Konjugováním tohoto postupu převrátíme libovolné dva prvky a dostaneme tak nakonec pozici $\mathbf{r}$, ve které je všechno na správném místě a nepřevrácené, pouze snad špatně otočené. Součet všech otočení musí být sudý.

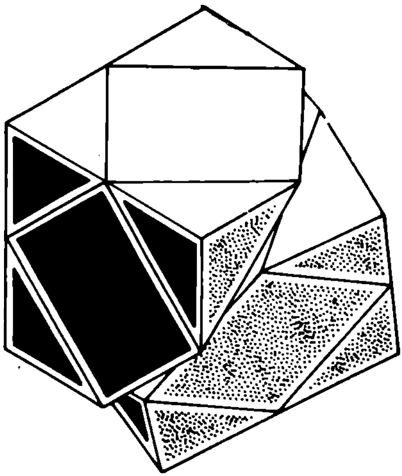
A jak změníme otočení? Postupem $Q = BBBA^{-1}A^{-1}A^{-1}CCCAAA$ otočíme prvek 3 o 90° vlevo, jinak všechno ostatní v pruhu A zůstane na původních místech a s původní orientací. Postup $QAQ^{-1}A^{-1}$ otočí prvek 3 vlevo, 13 vpravo, a jinak nic nezmění. Konjugováním $QAQ^{-1}A^{-1}$ můžeme pootočit libovolné dva prvky, jeden vlevo a druhý vpravo. Jestliže byl součet orientací v pozici $\mathbf{r}$ rovný (0, 0), dostaneme tak nakonec pozici základní. Jestliže byl (0, 2), dostaneme pozici, ve které všechny prvky až na jeden mají správnou orientaci (0, 0), ten poslední pak (0, 2).

Nechť je to třeba prvek 3. Uděláme napřed šestkrát tah B a potom šestkrát A. Prvek 3 se vrátí na původní místo a se správnou orientací (0, 0). Všechny ostatní prvky v pruzích B, A jsou převrácené, je jich celkem 10. Ty převrátíme zpět se správnou orientací postupným používáním postupu na převrácení, napřed v pruhu A a potom v pruhu B. Tolik o kouli.

Každá pozice na kouli, ve které je buď všechno sudé, nebo všechno liché, je řešitelná.

Kosá krychle je maskovaný čtyřstěn. Pokud není z obrázku 1.6. jasné, jaké se na kosé krychli dají dělat tahy, pak na dalším obrázku je jeden naznačený.

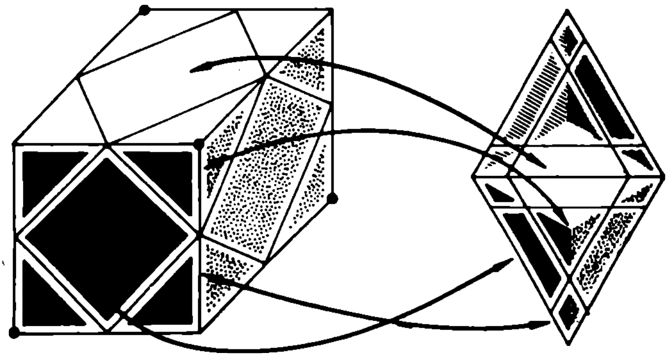
Krychle má čtyři dlouhé tělesové úhlopříčky a rovina kolmá na některou z nich a procházející středem dělí krychli na dvě přesně stejné poloviny. Tyto poloviny lze vůči sobě pootáčet o 120° nebo 240°.



Obr. 5.29

Obarvení, které ze čtyřstěnu dělá kosou krychli, je na obrázku 1.7. A proč jsou obě hračky, aspoň pokud jde o řešení, stejné, si vysvětlíme na obrázku 5.30.

Na krychli jsou vyznačené čtyři rohy. Každý tah můžeme považovat za otočení tou polovinou, která obsahuje ve středu vyznačený vrchol. Tyto rohy jsou potom pevné, mohou se pootáčet, nemohou ale měnit polohu. Odpovídají tak stěnovým prvkům na čtyřstěnu. Čtverce ve středech stěn na krychli potom odpovídají hranovým prvkům a neoznačené vrcholy na krychli rohovým prvkům na čtyřstěnu. Otočení polovinou krychle, která obsahuje některý označený roh ve středu, pak změní vzájemnou polohu a orientaci prvků na krychli zcela

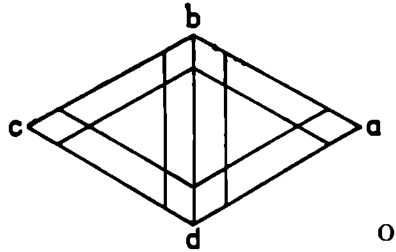


Obr. 5.30

stejně jako otočení vrstvou čtyřstěnu obsahující příslušný stěnový prvek. Na obou hračkách se prvky prohazují stejně, umíme-li řešit jednu z nich, umíme i druhou.

Abychom uměli řešit čtyřstěn obarvený podle obrázku 1.7., musíme se ještě naučit pootáčet stěnové prvky. Při normálním obarvení to nebylo třeba. Tady si pomůžeme dalším trikem. Dosud jsme považovali stěnové prvky na čtyřstěnu za pevné a rohové a hranové za pohyblivé. Za tah jsme považovali otočení jednou vrstvou, každý měnil polohu tří rohových a tří hranových prvků. Nyní zaměníme roli stěnových a rohových kostiček. Rohové budeme považovat za pevné a stěnové za pohyblivé. Za tah budeme považovat otočení doplňkem vrstvy, tj. jednou rohovou, třemi hranovými a třemi stěnovými prvky mimo nějakou vrstvu. Stěnové prvky mění vůči nyní pevným rohovým polohu zcela stejně, jako původně měnily rohové vůči stěnovým. Označíme si rohové prvky písmeny *a*, *b*, *c*, *d* podle obrázku 5.31.

Stěnové prvky pak můžeme zapsat seznamem rohů,



Obr. 5.31

které leží ve stejné vrstvě. Na obrázku vidíme stěnové prvky *abd* a *bcd*. Dále už můžeme postupovat stejně jako na normálně obarveném čtyřstěnu. Pomocí nějakého orientačního systému pro stěnové prvky zjistíme, že v každé řešitelné pozici musí být součet orientací těchto prvků 0 (v grupě $\mathbf{Z}_3$, což je grupa orientací stěnových prvků). Postupem $S = B^{-1}CD^{-1}A^{-1}C^{-1}BD^{-1}$ (tahy interpretujeme jako otočení skupin prvků kolem rohů!) pootočíme stěnový prvek *acd* doleva, jinak všechny ostatní prvky sousedící s rohovým *a* zůstávají na původních místech a s původní orientací. Postup $SAS^{-1}A^{-1}$ potom otočí *acd* doleva a *abc* doprava, všechny ostatní stěnové a hranové prvky zůstávají na původních místech a s původní orientací. A protože v postupu $SAS^{-1}A^{-1}$ otáčíme každým rohovým prvkem tolikrát doleva, kolikrát doprava, nezmění se ani původní správná orientace rohových prvků.

****5.8. Typy pozic — Rubikova krychle a koule.** Budeme říkat, že dvě pozice na Rubikově krychli jsou *podobné*, jestliže jednu z druhé můžeme dostat nějakým postupem. Každé dvě řešitelné pozice $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ jsou podobné. Pozici $\mathbf{p}$ uděláme nějakým postupem P a pozici $\mathbf{q}$ postupem Q. Složeným postupem $P^{-1}Q$ pak uděláme pozici $(P^{-1}Q)\,\mathbf{U} = (P^{-1}\mathbf{U}) \circ (Q\mathbf{U} = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{q}$. Uděláme-li postup

$P^{-1}Q$ v pozici p, dostaneme pozici $\boldsymbol{p} \circ (P^{-1}Q)\, \boldsymbol{U} = \boldsymbol{p} \circ$ $\circ (\boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{p}^{-1}) \circ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$. Z pozice $\boldsymbol{p}$ dostaneme $\boldsymbol{q}$ postupem $P^{-1}Q$.

Naučíme se teď určovat typy pozic tak, aby dvě pozice měly stejný typ, právě když jsou podobné. Vyjdeme z popisu řešitelných pozic uvedeného v odstavci 5.2. Řešitelná pozice $\boldsymbol{p}$ musí mít tyto vlastnosti:

a) polohová permutace musí být sudá,

b) součet orientací hranových prvků v grupě $\boldsymbol{Z}_2$ musí být 0,

c) součet orientací rohových prvků v grupě $\boldsymbol{Z}_3$ musí být také 0.

Libovolné (i neřešitelné) pozici $\boldsymbol{p}$ nyní přiřadíme trojici čísel (r, s, t), kterou budeme nazývat typ pozice $\boldsymbol{p}$ a označovat $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T}$, takto:

je-li $\boldsymbol{p}$ sudá pozice, pak $r = 0$, je-li lichá, pak $r = 1$. Čísla 0, 1 budeme považovat za prvky grupy $\boldsymbol{Z}_2$;

s je součet orientací hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$ v grupě $\boldsymbol{Z}_2$,

t je součet orientací rohových prvků v pozici p v grupě $\boldsymbol{Z}_3$.

Platí tedy $r, s \in \boldsymbol{Z}_2$ a $t \in \boldsymbol{Z}_3$. Je-li pozice $\boldsymbol{p}$ řešitelná, pak $r = s = t = 0$, tj. $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 0, 0)$. Tato vlastnost řešitelné pozice charakterizuje, pokud je $\boldsymbol{p}$ neřešitelná, nesplňuje aspoň jednu z podmínek a), b), c), a aspoň jedno z čísel r, s, t je proto různé od 0.

Vezmeme si nyní dvě pozice $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ s typy $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (r, s, t)$ a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = (u, v, w)$. Jaký je typ složené pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} =$ $= (p \circ q, k)$? Označíme $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\, \boldsymbol{T} = (x, y, z)$. Číslo x popisuje paritu polohové permutace $p \circ q$. Ta je sudá, právě když jsou obě polohové permutace p, q současně sudé nebo současně liché, a je lichá, právě když je jedna z nich sudá a druhá lichá. V každém případě dostaneme číslo x tak, že sečteme čísla r a u v grupě $\boldsymbol{Z}_2$: $x = r \oplus u$.

Je-li orientace hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$ popsána zobrazením orientace g a v pozici $\boldsymbol{q}$ zobrazením h, pak orientace hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je popsána zobrazením orientace k, které každému hranovému prvku i přiřazuje hodnotu orientace $ik = ig \oplus (ip)\,h$. Máme-li sečíst všechna čísla ik, využijeme toho, že je grupa $\boldsymbol{Z}_2$ komutativní. Můžeme to udělat také tak, že sečteme napřed čísla ig a k jejich součtu pak přičteme součet všech čísel $(ip)\,h$. Součet čísel ig — orientací všech hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p}$ — se rovná s. V součtu čísel $(ip)\,h$ sčítáme orientace všech hranových prvků v pozici $\boldsymbol{q}$, neboť permutace p je vzájemně jednoznačné zobrazení. Jejich součet je proto v. Součet orientací všech hranových prvků v pozici $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je proto rovný $y = s \oplus v$.

Podobně se dokáže také $z = t \oplus w$ (v grupě $\boldsymbol{Z}_3$). Typ pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ je proto $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\,\boldsymbol{T} = (r \oplus u,\ s \oplus v,\ t \oplus w)$. Typ složené pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ tak závisí pouze na typech pozic $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$, nikoliv na pozicích samotných.

Na množině všech typů pozic můžeme proto přirozeným způsobem definovat operaci skládání. Složení typů (r, s, t) a (u, v, w) je typ $(r, s, t) \circ (u, v, w) = (r \oplus u, s \oplus v, t \oplus w)$. Snadno se opět ověří, že množina všech možných typů s takto definovanou operací skládání je grupa. Tuto grupu budeme nazývat grupa typů pozic na Rubikově krychli. Má dvanáct prvků, pro čísla r, s máme vždy dvě možnosti 0, 1, pro číslo t pak tři možnosti 0, 1, 2. Typ (0, 0, 0) je neutrální prvek a k typu (r, s, t) je inverzní typ (r^{-1}, s^{-1}, t^{-1}). Vzpomeneme-li si na definici součinu grup, můžeme říct, že grupa typů pozic na Rubikově krychli se rovná součinu $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_3$. A pravidlo o typu složené pozice, které jsme před chvilkou odvodili, můžeme vyjádřit také takto: $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\,\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{q}\boldsymbol{T}$.

Jaký je typ inverzní pozice $\boldsymbol{p}^{-1}$? Protože $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{p}^{-1} =$

$= \boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}\boldsymbol{T} = (0, 0, 0)$, platí také $(0, 0, 0) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ (\boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T}$. Typ $(\boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T}$ je proto inverzní k typu $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T}$. Je-li $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (r, s, t)$, pak $(\boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T} = (r^{-1}, s^{-1}, t^{-1})$.

Nyní můžeme dokázat, že dvě pozice $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ mají stejný typ, právě když můžeme jednu z druhé dostat nějakým postupem. Je-li $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = (r, s, t)$, pak $(\boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q})\, \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{p}^{-1})\, \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = (r^{-1}, s^{-1}, t^{-1}) \circ (r, s, t) = (0, 0, 0)$. Pozice $\boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q}$ je proto řešitelná. Existuje postup P, který ji udělá, $P\boldsymbol{U} = \boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q}$. Uděláme-li postup P v pozici $\boldsymbol{p}$, dostaneme novou pozici $\boldsymbol{p} \circ (P\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{p}^{-1} \circ \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{p}^{-1}) \circ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$.

Nechť naopak nějakým postupem R dostaneme z pozice $\boldsymbol{p}$ pozici $\boldsymbol{q}$. Postup R udělá nějakou řešitelnou pozici $\boldsymbol{r}$ a platí $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}$. Potom $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{r}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ (0, 0, 0) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{T}$. Pozice $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ mají proto stejný typ.

Zajímavá je také grupa typů pozic na kouli. Vlastnosti pozice $\boldsymbol{p}$ jsme zjišťovali pomocí trojice (p, r, s), kde p byla polohová permutace pozice $\boldsymbol{p}$ a (r, s) byl nějaký součet orientací všech prvků v pozici $\boldsymbol{p}$. Zajímala nás pouze parita p, r, s. Pozice je řešitelná, právě když je buď všechno sudé, tj. jak permutace p, tak čísla r, s, anebo všechno liché. Takovým pozicím přiřadíme typ $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 0, 0)$. V neřešitelných pozicích nemá všechno stejnou paritu. Dva z prvků p, r, s mají paritu stejnou a třetí jinou. Typ pozice pak určíme podle toho, který z prvků p, r, s má paritu různou od druhých dvou. Je-li v pozici $\boldsymbol{p}$ polohová permutace sudá a obě čísla r, s jsou lichá, nebo permutace p lichá a obě čísla r, s sudá, bude typ $\boldsymbol{p}$ rovný $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (1, 0, 0)$. Liší-li se parita čísla r od parity p a s, pak $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 1, 0)$, a je-li parita s odlišná od p a r, pak $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 0, 1)$. Každá pozice má jeden z typů $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Označíme si

$(1, 0, 0) = a$, $(0, 1, 0) = b$, $(0, 0, 1) = c$ a $(0, 0, 0) = 1$.

Snadno se ověří, že je-li $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = a$ a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = b$, pak $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\, \boldsymbol{T} = c$. Podobně v případě $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = b$ a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = c$ je $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})\, \boldsymbol{T} = a$, atd. Na množině $\{1, a, b, c\}$ typů pozic definujeme operaci skládání takto: $1 \circ a = a \circ 1 = a$, $1 \circ b = b \circ 1 = b$, $1 \circ c = c \circ 1 = c$, $a \circ a = b \circ b = c \circ c = 1$, $a \circ b = b \circ a = c$, $a \circ c = c \circ a = b$ a nakonec $b \circ c = c \circ b = a$. Množina $\{1, a, b, c\}$ s touto operací tvoří grupu, kterou označíme $\boldsymbol{K}$. Platí, že typ složené pozice $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ se rovná složení typů pozic $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ v grupě $\boldsymbol{K}$. $\boldsymbol{K}$ je tak *grupa typů pozic* na kouli. Grupa $\boldsymbol{K}$ se nazývá *Kleinova grupa* na počest znamenitého německého matematika Felixe Kleina (1849—1925).

Podobně můžeme určit grupy typů pozic i na dalších hračkách. Pro zajímavost uvedeme některé z nich už bez dalšího vysvětlování. Na čtyřstěnu a dvanáctistěnu to je grupa $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_3$, na krychli $2 \times 2 \times 2$ to je $\boldsymbol{Z}_3$. Na krychli $4 \times 4 \times 4$ to je $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_3$, u patnáctky $\boldsymbol{Z}_2$. Grupa typů pozic na kosé krychli je $\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{Z}_3 \times \boldsymbol{Z}_3$.

****5.9. Normální podgrupy a faktorové grupy.** Způsob, jakým jsme sestrojili v minulém odstavci grupu typů pozic na Rubikově krychli a na kouli, je opět speciální případ jedné základní konstrukce v teorii grup. Naši výpravu za tajemstvím Rubikových kostek proto skončíme tam, kde teorie grup začíná — definicí normální podgrupy a konstrukcí faktorové grupy.

Podgrupa $\boldsymbol{H}$ grupy $\boldsymbol{G}$ se nazývá *normální*, jestliže pro každý prvek $g \in \boldsymbol{G}$ a každý prvek $h \in \boldsymbol{H}$ leží konjugovaný prvek $g \circ h \circ g^{-1}$ také v $\boldsymbol{H}$.

Každá podgrupa komutativní grupy je normální, platí $g \circ h \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \circ h = h \in \boldsymbol{H}$.

Alternativní grupa $\boldsymbol{A}_l$ je normální podgrupa symetrické grupy $\boldsymbol{S}_I$, permutace $g \circ h \circ g^{-1}$ je sudá, je-li $h \in \boldsymbol{A}_I$.

Také grupa $\boldsymbol{R}$ řešitelných pozic na Rubikově krychli je normální podgrupa grupy všech možných pozic $\boldsymbol{P}$. Je-li $\boldsymbol{p}$ řešitelná pozice, tj. $\boldsymbol{p}\boldsymbol{T} = (0, 0, 0)$, a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{T} = (r, s, t)$, pak $(\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}^{-1})\ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{p}\boldsymbol{T} \circ (\boldsymbol{q}^{-1})\ \boldsymbol{T} = (r, s, t) \circ \circ (0, 0, 0) \circ (r^{-1}, s^{-1}, t^{-1}) = (0, 0, 0)$. Pozice $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}^{-1}$ je proto také řešitelná, leží v $\boldsymbol{R}$.

Obě nevlastní podgrupy $\{n\}$ a $\boldsymbol{G}$ grupy $\boldsymbol{G}$ jsou také normální.

Každá normální podgrupa $\boldsymbol{H}$ grupy $\boldsymbol{G}$ určuje jinou grupu — *faktorovou grupu* $\boldsymbol{G}$ podle $\boldsymbol{H}$, která se označuje $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$. Faktorovou grupu $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ nyní sestrojíme. Jako vždy označíme G a H množiny, na kterých jsou grupy $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{H}$ definované. Platí $H \subseteq G$.

Je-li x libovolný prvek grupy $\boldsymbol{G}$, pak symbolem Hx označíme množinu všech prvků množiny $\boldsymbol{G}$, které jsou tvaru $h \circ x$, $h \in H$. Stejnou věc jsme dělali při důkazu Lagrangeovy věty. Tak jako tehdy teď dokážeme, že dvě množiny Hx a Hy jsou buď disjunktní, nebo se rovnají. Předpokládejme, že existuje prvek $z \in Hx \cap \cap Hy$. Potom $z = h_1 \circ x$ a $z = h_2 \circ y$ pro nějaké prvky h_1, h_2 grupy $\boldsymbol{H}$. Z rovnosti $h_1 \circ x = h_2 \circ y$ plyne $h_2^{-1} \circ \circ h_1 \circ x = y$ a $h \circ h_2^{-1} \circ h_1 \circ x = h \circ y$ pro každý prvek $h \in H$. Každý prvek $h \circ y \in Hy$ se tak rovná nějakému prvku $h \circ h_2^{-1} \circ h_1 \circ x \in Hx$. Hy je proto podmnožina Hx. Zcela stejně se dokáže také $Hx \subseteq Hy$, obě množiny Hx a Hy se proto rovnají. Celá množina G se tak rozpadá do vzájemně disjunktních množin Hx. Těmto množinám říkáme *rozkladové třídy* grupy $\boldsymbol{G}$ podle podgrupy $\boldsymbol{H}$. V případě, že je $\boldsymbol{H}$ konečná grupa, jsou všechny rozkladové třídy stejně velké; na tom byl založen důkaz Lagrangeovy věty. Budeme také říkat, že dva prvky ve stejné rozkladové třídě jsou podobné, mají stejný typ.

Ukážeme nyní, že typ (tj. rozkladová třída) složení

$x \circ y$ závisí pouze na typech (rozkladových třídách) prvků x a y. Vezmeme nějaký prvek $h_1 \circ x$, který leží ve stejné rozkladové třídě jako x, a nějaký prvek $h_2 \circ y$ ze stejné rozkladové třídy jako y. Pro jejich složení platí:

$$(h_1 \circ x) \circ (h_2 \circ y) = h_1 \circ x \circ h_2 \circ y =$$
$$= h_1 \circ x \circ h_2 \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = h_1 \circ x \circ h_2 \circ x^{-1} \circ$$
$$\circ y \circ x = h_1 \circ (x \circ h_2 \circ x^{-1}) \circ x \circ y =$$
$$= (h_1 \circ (x \circ h_2 \circ x^{-1})) \circ (x \circ y).$$

Prvek $x \circ h_2 \circ x^{-1}$ leží v podgrupě $\boldsymbol{H}$, protože je $\boldsymbol{H}$ normální. Složení $h_1 \circ (x \circ h_2 \circ x^{-1})$ také leží v $\boldsymbol{H}$. Prvky $x \circ y$ a $(h_1 \circ x \circ h_2 \circ x^{-1}) \circ (x \circ y)$ proto leží ve stejné rozkladové třídě $\boldsymbol{G}$ podle $\boldsymbol{H}$, mají stejný typ. Rozkladová třída, ve které leží prvek $x \circ y$, tak závisí pouze na tom, v jakých rozkladových třídách leží prvky x a y. Vybereme-li místo x prvek $h_1 \circ x$ ze stejné rozkladové třídy jako x a místo y prvek $h_2 \circ y$ ze stejné rozkladové třídy jako y, pak jejich složení $(h_1 \circ x) \circ (h_2 \circ y) = (h_1 \circ x \circ \circ h_2 \circ x^{-1}) \circ (x \circ y)$ leží ve stejné rozkladové třídě jako složení $x \circ y$.

Dvě rozkladové třídy Hx a Hy můžeme proto složit, přiřadit jim třídu $H(x \circ y)$. Právě jsme si ukázali, že složení libovolného prvku z Hx s libovolným prvkem z Hy leží vždy v $H(x \circ y)$. Na množině G/H všech rozkladových tříd jsme tak definovali operaci skládání, a dokážeme, že G/H s touto operací tvoří grupu.

a) $(Hx \circ Hy) \circ Hz = H(x \circ y) \circ Hz = H((x \circ y) \circ z) = H(x \circ (y \circ z)) = Hx \circ H(y \circ z) = Hx \circ (Hy \circ Hz)$, skládání rozkladových tříd je proto asociativní.

b) Je-li n neutrální prvek $\boldsymbol{G}$, pak $Hn \circ Hx = H(n \circ x) = Hx$ a $Hx \circ Hn = Hx$ pro každou třídu Hx. Třída Hn je proto neutrální vzhledem k operaci skládání tříd.

c) $Hx \circ Hx^{-1} = H(x \circ x^{-1}) = Hn$ a také $Hx^{-1} \circ \circ Hx = H(x^{-1} \circ x) = Hn$, třída Hx^{-1} je proto inverzní k Hx, tj. $(Hx)^{-1} = Hx^{-1}$.

Množina všech rozkladových tříd spolu s operací skládání tříd tak tvoří opravdu grupu. Tato grupa je slíbená *faktorová grupa* $\boldsymbol{G}$ *podle* $\boldsymbol{H}$.

Závěrem můžeme také přesně definovat, co jsou to jednoduché grupy, o kterých jsme se zmínili v odstavci 3.17. Grupa $\boldsymbol{G}$ je *jednoduchá*, jestliže kromě nevlastních podgrup neobsahuje žádnou jinou normální podgrupu.

Prvním matematikem, který systematicky používal pojmy, jako jednoduchá grupa, normální podgrupa, faktorová grupa, byl právě E. Galois. Zmínili jsme se o něm už v úvodu první kapitoly. Od něho se datují počátky rozvoje teorie grup. V současnosti jsou grupy používány snad ve všech oblastech matematiky. Teorie grup je, velmi zhruba řečeno, nauka o symetriích. O symetriích těles, prostorů, umístění předmětů v prostoru, o symetriích fyzikálních zákonů, matematických úloh atd. První a často nejdůležitější krok při řešení nějaké úlohy spočívá právě ve vyjasnění jejích symetrií. Také my jsme se snažili vždy objasnit, jaké vlastnosti jsou společné všem řešitelným pozicím na hlavolamech, jak moc jsou řešitelné pozice symetrické.

A tím končí náš výlet za tajemstvím Rubikových kostek. Naučili jsme se zapisovat polohu prvků na hlavolamech, kreslit grafy pozic, rozlišovat orientace prvků a poznávat neřešitelné pozice. Trik s konjugováním nám umožnil poměrně snadno hlavolamy řešit. Seznámili jsme se také s několika základními pojmy teorie grup. A snad jste také získali trochu úctu k matematikům, kteří už více než sto padesát let před Rubikem znali všechno potřebné k tomu, aby snadno zvládli věci zdánlivě tak nezvládnutelné, jako jsou Rubikovy kostky.

OBSAH

Úvod – [illegible]

1. HRY A POSTUPY
1.1 Rubikova krychle – – – – – – – – – – – – – – – – 5
1.2 Domino – 10
1.3 Uši – 11
1.4 Koule – 12
1.5 Patnáctka – – – – – – – – – – – – – – – – – – – 13
1.6 Tahy. Úplné a neúplné hry – – – – – – – – – – – 14
1.7 Postupy – 16
1.8 Vztah mezi postupy a pozicemi – – – – – – – – – 19
1.9 Řešitelné a neřešitelné pozice – – – – – – – – – – 20
*1.10 Redukované postupy – – – – – – – – – – – – – – 22

2. PATNÁCTKA — NEŘEŠITELNÉ POZICE
2.1 Reklamní pozice – – – – – – – – – – – – – – – – 27
2.2 Trik se šachovnicí – – – – – – – – – – – – – – – 28
2.3 Zápis pozice pomocí tabulky – – – – – – – – – – 29
2.4 Graf pozice – – – – – – – – – – – – – – – – – – 31
2.5 Cykly – 32
2.6 Jak se změní pozice po jednom tahu – – – – – – – 33
2.7 Jak se změní počet cyklů po jednom tahu – – – – 35
2.8 Sudé a liché pozice – – – – – – – – – – – – – – – 37
2.9 Neřešitelnost reklamní pozice – – – – – – – – – – 39
2.10 Další neřešitelné pozice – – – – – – – – – – – – 39
2.11 Počet sudých cyklů v pozici – – – – – – – – – – – 40
*2.12 Jiné varianty – – – – – – – – – – – – – – – – – 41

3. POLOHY PRVKŮ
3.1 Poloha a orientace – – – – – – – – – – – – – – – 44
3.2 Orbity – 46
3.3 Základní pozice – – – – – – – – – – – – – – – – 48
3.4 Tabulka a graf pozice – – – – – – – – – – – – – 54
3.5 Permutace – – – – – – – – – – – – – – – – – – – 59
3.6 Jaké permutace dělají tahy a postupy – – – – – – 62
3.7 Co udělá složení dvou postupů a inverzní postup? 67
3.8 Skládání permutací – – – – – – – – – – – – – – – 72
3.9 Matematický model úplných hlavolamů – – – – – – 76
3.10 Nezajímavé hračky – – – – – – – – – – – – – – – 79
3.11 Sudé a liché permutace – – – – – – – – – – – – 83
3.12 Některé neřešitelné pozice – – – – – – – – – – – 88
3.13 Pojem grupy. Symetrická a alternativní grupa – – 98
*3.14 Podgrupy. Lagrangeova věta – – – – – – – – – – – 104
*3.15 Grupy na hračkách – – – – – – – – – – – – – – – 107
*3.16 Homomorfismus a izomorfismus grup – – – – – – 109
*3.17 Sylowovy věty – – – – – – – – – – – – – – – – – 111
**3.18 Cayleyho reprezentace – – – – – – – – – – – – – 113
**3.19 Volné grupy – – – – – – – – – – – – – – – – – – 115

4. VŠECHNO NA SPRÁVNÉ MÍSTO!
4.1 Strategie řešení hlavolamů – – – – – – – – – – – 117
4.2 Jak udělat trojcykly – – – – – – – – – – – – – – – 119
4.3 Konjugované postupy a permutace – – – – – – – – 129
4.4 Další trojcykly na Rubikově krychli – – – – – – – 133
4.5 Každou sudou pozici na Rubikově krychli můžeme převést do pozice, ve které jsou všechny prvky na správných místech – – – – – – – – – – – – – – – 137
4.6 Uši – 138
4.7 Dvanáctistěn, čtyřstěn, domino, patnáctka, babylónská věž – – – – – – – – – – – – – – – – – – – 145
*4.8 k-tranzitivní grupy permutací – – – – – – – – – – 157
*4.9 Součin grup – – – – – – – – – – – – – – – – – – – 161
**4.10 Mathieuovy grupy a vícetranzitivní permutační grupy – 166

5. ORIENTACE

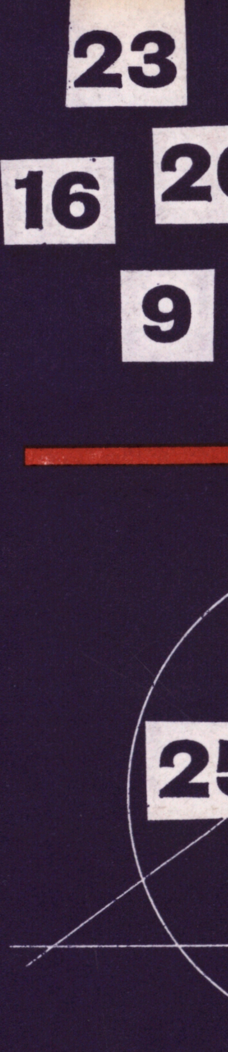
5.1 Rubikova krychle, zbývající neřešitelné pozice – – 173
5.2 Jak složit Rubikovu krychli – – – – – – – – – – – 188
5.3 Čtyřstěn a dvanáctistěn – – – – – – – – – – – – – 195
5.4 Další krychle: $2 \times 2 \times 2$, $4 \times 4 \times 4$, $5 \times 5 \times 5$ a *$n \times n \times n$ – – – – – – – – – – – – – – – – – – – 204
*5.5 Matematický model hlavolamů s orientací. Věncový součin grup – – – – – – – – – – – – – – – – – – 212
*5.6 Křížova věta – – – – – – – – – – – – – – – – – – – 220
*5.7 Koule a kosá krychle – – – – – – – – – – – – – – – 223
**5.8 Typy pozic — Rubikova krychle a koule – – – – 237
**5.9 Normální podgrupy a faktorové grupy – – – – – 241

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

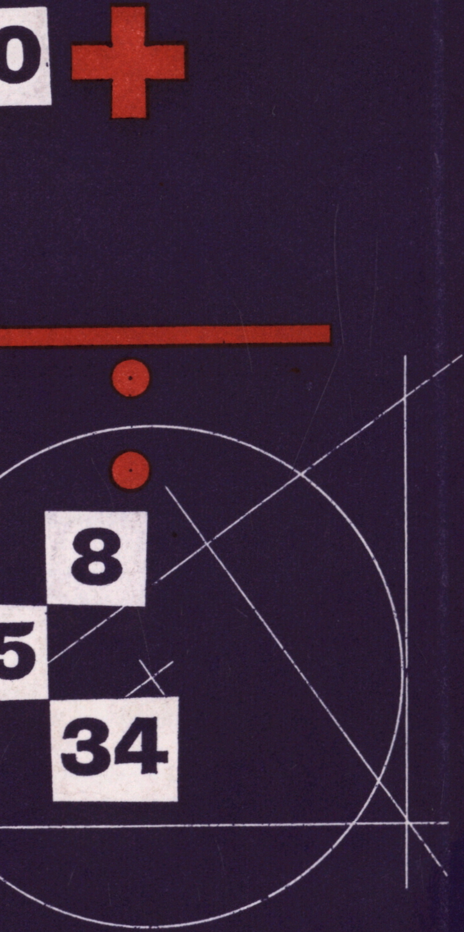
JIŘÍ TŮMA

Matematické hlavolamy a základy teorie grup

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jiří Příbramský
Odpovědné redaktorky Zdena Šmídová
a Blanka Fučíková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4996
Edice Škola mladých matematiků, svazek 60
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
9,45 AA. 11,52 VA. 248 stran
Náklad 11500 výtisků. První vydání
Praha 1988 508/21/82,5
23-069-88 03/2 Cena brož. výt. 14 Kčs



23-069-88
03-2
Cena brož.
Kčs 14,—


0
8
5
34