Přímky a křivky

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

PŘÍMKY A KŘIVKY

51

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

N. B. VASILJEV, V. L. GUTENMACHER

Přímky a křivky

PRAHA 1982
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzoval RNDr. Milan Koman, CSc.

PŘEDMLUVA

Hlavními „postavami" děje této knížky jsou různé geometrické útvary, nebo jak se jim zde častěji říká, množiny bodů. Na začátku to jsou jednoduché obrazce v různých souvislostech. Pohybují se, odhalují nové vlastnosti, protínají se, sjednocují, tvoří celé systémy a mění svou tvářnost, někdy k nepoznání. Avšak je zajímavé potkat staré známé ve složité situaci, obklopené novými obrazci, které se objeví ve finále.

Knížka obsahuje asi dvě stě úloh, mnohé jsou uvedeny i s řešením nebo komentářem. Jsou to úlohy různého charakteru; od tradičních úloh, ve kterých se hledá nebo používá jistá množina bodů, až po menší úlohy badatelské, vedoucí k důležitým matematickým pojmům a teoriím (například úlohy o sýru, o člunu nebo o autobusu). Kromě běžných geometrických vět o přímkách, kružnicích a trojúhelnících se v knížce používá metoda souřadnic, vektory a geometrické transformace a často se úlohy formulují pomocí pohybu. Některé logické jemnosti v řešeních úloh jsou přenechány k rozmýšlení čtenáři. Znak ⟨?⟩ znamená „cvičení", „ověřte", „odůvodněte", „je vám tvrzení zřejmé?", atd., podle toho, kde stojí. Znakem □ je označen začátek a konec řešení a ↓ ukazuje, že řešení nebo výsledek najdete na konci knížky.

Úlohy na začátku každé kapitoly jsou obyčejně jednoduché a jsou vyloženy v textu. Ostatní úlohy není třeba řešit všechny jednu za druhou, podle vlastního uvážení si může čtenář vybrat ty lákavější. Je užitečné ověřit si vyloženou látku pokusem, načrtnout si hrubý obrázek, nejlépe v několika obměnách, s různými zadáními. Takový experimentální přístup pomůže nejen odhadnout výsledek a formulovat hypotézu, ale často ukáže cestu i při vlastním matematickém důkazu. Autoři se při přípravě obrázků přesvědčili, že za každou úlohou je skryta úloha přípravná, spočívající v sestrojení několika bodů nebo křivek, o kterých se jedná v úloze. Přípravná úloha je přístupnější, nikoli méně zajímavá.

Autoři jsou vděčni I. M. Gelfandovi za rady při přípravě knížky a I. M. Jaglomovi, V. G. Boltjanskému a Ž. M. Rabbotovi za pročtení rukopisu a užitečné připomínky. Od prvního vydání v roce 1970 je tato knížka stále používána při práci dálkového semináře. Při přípravě druhého vydání jsme vzali v úvahu zkušenosti a připomínky našich přátel a kolegů vedoucích seminář. Jim všem i redaktoru knížky A. F. Lapkovi upřímně děkujeme.

N. B. Vasiljev,
V. L. Gutenmacher

ÚVODNÍ ÚLOHY

0.1 Žebřík stojící u stěny na hladké podlaze klouže dolů. Po jaké křivce se přitom pohybuje kotě sedící uprostřed žebříku?

Předpokládejme, že je kotě netečné a sedí klidně. Za této podmínky můžeme uvedenou otázku formulovat matematicky:

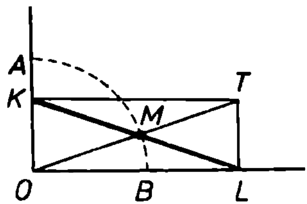
Je dán pravý úhel. Určete množinu středů všech úseček délky d, jejichž krajní body leží na ramenech daného úhlu (přesněji — jeden krajní bod leží na jednom rameni a druhý na druhém rameni).

Zkusme nejdříve uhodnout, jaká to bude množina. Pohybují-li se krajní body úsečky po ramenech úhlu, je asi zřejmé, že střed úsečky opisuje jistou křivku (což napovídá i první názorná formulace úlohy). Nejdříve uvážíme, kde leží koncové body této křivky. Odpovídají krajním polohám úsečky, tedy vertikální a horizontální poloze. To znamená, že koncové body hledané křivky leží na ramenech daného úhlu ve vzdálenosti $d/2$ od jeho vrcholu.

Sestrojte několik dalších bodů této křivky. Budete-li rýsovat dostatečně přesně, zjistíte, že jsou všechny stejně vzdáleny od vrcholu O daného úhlu.

Dospíváme tím k domněnce, že hledanou křivkou je oblouk kružnice o poloměru $d/2$ a středu O, což je však třeba dokázat.

□ Dokážeme nejdříve, že střed M každé úsečky KL požadovaných vlastností má od bodu O vzdálenost $d/2$. To ovšem platí, protože délka těžnice OM pravoúhlého trojúhelníku KOL se rovná polovině délky jeho přepony KL. (O správnosti tohoto tvrzení se lehce přesvědčíme, doplníme-li trojúhelník KOL na obdélník $KOLT$ a uvážíme, že úhlopříčky KL a OT jsou stejně dlouhé a navzájem se půlí — obr. 1.)

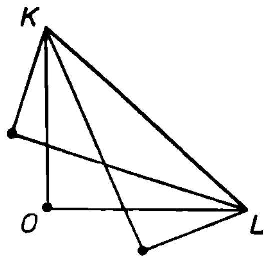


Obr. 1

Tím jsme dokázali, že střed úsečky KL leží na oblouku $\widehat{AB}$ kružnice se středem v bodě O. Abychom mohli tvrdit, že tento oblouk je hledanou množinou bodů, musíme dokázat také obráceně, že libovolný bod M oblouku AB patří do hledané množiny. Ale to je jednoduché. Libovolným bodem M oblouku $\widehat{AB}$ můžeme totiž vést polopřímku OM, na ní určit bod $T \neq O$ tak, aby $|MT| = |OM|$, a potom sestrojit kolmice bodem T na ramena úhlu, čímž dostaneme krajní body K, L úsečky o středu M, jejíž délka je d. □

Druhá polovina důkazu by se mohla zdát zbytečná, neboť je zřejmé, že střed úsečky KL vyplňuje „souvislou křivku" s koncovými body A, B, což znamená, že bod M probíhá celý oblouk $\widehat{AB}$ a ne jen jeho část. Tato úvaha se zdá přesvědčivá, není však jednoduché formulovat ji matematicky přesně.

Podíváme se teď na pohyb žebříku z úlohy 0.1 z jiné strany. Předpokládejme, že úsečka KL („žebřík") je upevněna a přímky KO a LO („stěna" a „podlaha") se pohybují kolem bodů K a L tak, že stále svírají pravý úhel (obr. 2).



Obr. 2

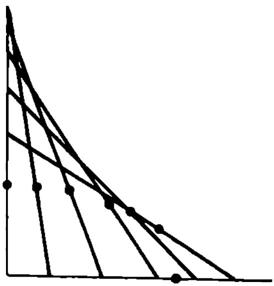
Skutečnost, že vzdálenost středu úsečky KL a bodu O se nemění, dává známou Thaletovu větu: jsou-li v rovině dány dva různé body K a L, pak množina bodů O, pro které je $|\sphericalangle KOL| = 90°$, je kružnice nad průměrem KL. Tato věta i její zobecnění, které uvedeme v bodě E 2. kap., se často hodí při řešení úloh.

Vraťme se k úloze 0.1 a položme obecnější otázku.

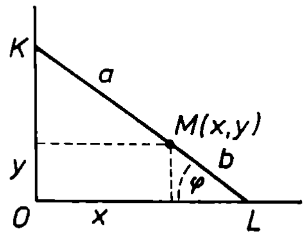
0.2 Po jaké křivce se pohybuje kotě sedící na žebříku v bodě různém od středu?

Na obrázku 3 je sestrojeno několik bodů této křivky. Hned vidíme, že zakreslené body neleží ani na přímce, ani na kružnici, ale vyplňují jinou křivku. O jakou křivku se jedná, zjistíme metodou souřadnic.

□ Zavedeme soustavu souřadnic tak, že ramena úhlu budou osy Ox a Oy (obr. 4). Nechť kotě sedí v bodě $M[x, y]$ ve vzdálenosti $a \neq 0$ od krajního bodu K a ve vzdálenosti $b \neq 0$ od krajního bodu L $(a + b = d)$.



Obr. 3



Obr. 4

Určíme rovnici, kterou musí splňovat souřadnice x, y bodu M.

Jestliže úsečka KL svírá s osou Ox úhel φ, pak $y = b \sin \varphi$, $x = a \cos \varphi$, takže pro libovolné $\varphi(0 \leqq \varphi \leqq \pi/2)$ platí

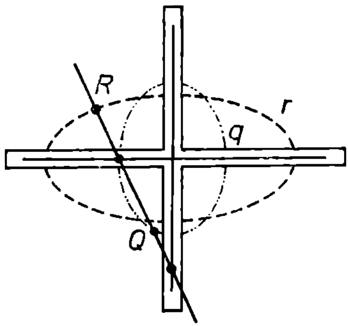
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{1}$$

V kap. 6 ukážeme, že množinou bodů v rovině, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (1), je elipsa. Kotě se bude pohybovat po oblouku elipsy. □

Všimněme si, že pro $a = b = d/2$, tj. sedí-li kotě uprostřed žebříku, rovnice (1) přejde v rovnici kružnice

$x^2 + y^2 = (d/2)^2$. Tím docházíme k dalšímu, analytickému řešení úlohy 0.1.

Výsledek úlohy 0.2 vysvětluje princip zařízení kreslícího elipsy. Tento přístroj, který je znázorněn na obrázku 5, se nazývá elipsograf Leonarda da Vinciho.



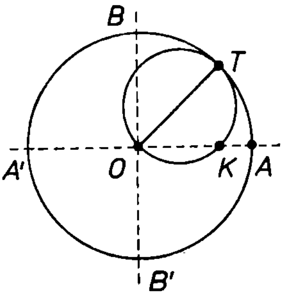
Obr. 5

0.3 Mějme pevnou kružnici, po níž se (s vnitřním dotykem) kotálí bez klouzání kružnice o polovičním poloměru. Jakou křivku opisuje přitom bod K ležící na menší kružnici?

Odpověď na tuto otázku je kupodivu jednoduchá: bod K se pohybuje po přímce, přesněji po průměru pevné kružnice. Toto tvrzení se nazývá *Koperníkovou větou.*

Přesvědčte se pokusem o pravdivosti této věty. (Přitom je důležité, aby vnitřní kružnice neklouzala, tj. aby odpovídající oblouky na obou kružnicích byly stejně veliké.) Není těžké Koperníkovu větu dokázat — stačí si vzpomenout na větu o obvodovém a středovém úhlu.

□ Nechť bod pohybující se kružnice, který splynul v počáteční poloze s bodem A pevné kružnice, se přemístil do bodu K (obr. 6). Označme T bod, ve kterém se nyní obě kružnice dotýkají. Protože délky oblouků $\widehat{KT}$ a $\widehat{AT}$ se sobě rovnají a poloměr pohybující se kružnice



Obr. 6

je poloviční, vidíme, že středový úhel příslušný oblouku $\widehat{KT}$ je roven dvojnásobku středového úhlu příslušného oblouku $\widehat{AT}$. Označíme-li O střed pevné kružnice, máme $|\sphericalangle AOT| = |\sphericalangle KOT|$ podle věty o obvodovém a středovém úhlu (viz str. 18). To znamená, že bod K leží na poloměru AO.

Tyto úvahy platí pouze do okamžiku, ve kterém se pohybující se kružnice odkotálí po čtvrtině pevné kružnice (tj. kdy bod dotyku splyne s bodem B, pro nějž je $|\sphericalangle BOA| = 90°$, a bod K splyne s bodem O). Další pohyb se děje analogicky — dráha bodu K bude při něm souměrně sdružená podle přímky BO k dráze již proběhnuté. Až bod K dostihne bod A', kde AA' je průměr pevné kružnice, bude se pohyblivá kružnice kotálet po dolní polovině pevné kružnice a bod K se vrátí po průměru AA' do bodu A. □

Porovnejme výsledky úloh 0.1 a 0.3. Jejich zajímavost spočívá zřejmě v tom, že v obou případech se jedná o poměrně složitý pohyb objektu (v první úloze o pohyb úsečky, ve druhé kružnice), avšak trajektorie některých bodů jsou neočekávaně jednoduché. Ukazuje se, že tyto dvě úlohy nesouvisí jen vnějšími znaky, nýbrž tím, že pohyby v nich zkoumané jsou totožné.

Skutečně, nechť se po vnitřku kružnice poloměru d kotálí kružnice poloměru $d/2$ a nechť je KL průměr této kružnice, pevně s ní spojený. Podle Koperníkovy věty se body K, L pohybují po průměrech AA' a BB' pevné kružnice. Takže průměr KL klouže svými koncovými body po dvou na sebe kolmých přímkách, pohybuje se tedy tak jako úsečka v úloze 0.1.

Ještě jedna zajímavá otázka souvisí s pohybem úsečky KL: jakou množinu bodů vyplňuje tato úsečka, tj. co je sjednocením všech možných poloh úsečky KL při jejím pohybu? Křivka, která ohraničuje tuto množinu, se nazývá asteroida. Dá se ukázat, že ji můžeme dostat takto: necháme kružnici o průměru $d/2$ kotálet po vnitřku kružnice o průměru $2d$ a narýsujeme trajektorii libovolného bodu pohybující se kružnice — tato trajektorie je asteroida. O ní a jí podobných křivkách pojednáme v 7. kap. této knížky, kde se podrobněji seznámíte se souvislostmi, kterých jsme se zde dotkli.

Avšak dříve než se budeme zabývat složitějšími otázkami a křivkami, zůstaneme u úloh o přímkách a kružnicích — jiné křivky se v prvních pěti kapitolách nebudou vyskytovat.

Kapitola 1

MNOŽINY BODŮ

V této kapitole pojednáme o základních typech úloh probíraných v naší knížce. Budeme je ilustrovat na příkladech a ukážeme pojmy a postupy užívané při jejich řešení. Kapitola je zakončena řadou různých geometrických úloh.

Probereme nejprve termín, který se v knize vyskytuje nejčastěji a který stojí i v nadpise kapitoly.

Množina bodů je velmi obecný pojem. Může to být libovolný útvar: jeden nebo několik bodů, přímka nebo rovinná oblast.

V mnohých úlohách naší knížky se hledá množina bodů vyhovujících jisté podmínce. Řešením úloh jsou zpravidla útvary známé ze školské geometrie (přímky, kružnice nebo obrazce jimi ohraničené aj.). Hlavní je odhadnout, o jaký útvar se jedná. V úloze 0,1 o kotěti jsme zjistili, že řešením je kružnice, a v úloze 0.3 úsečka.

Při řešení úloh je třeba přesvědčit se o tom, že

a) všechny body splňující danou podmínku patří do zjištěného útvaru,

b) všechny body uvažovaného útvaru vyhovují dané podmínce.

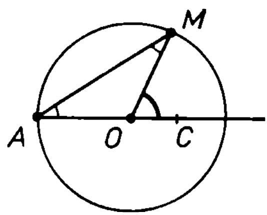
Někdy jsou obě tato tvrzení zřejmá, jindy jen některé z nich; a jindy je vůbec těžké se dopátrat řešení.

Rozebereme několik charakteristických úloh.

1.1 Bod O leží na úsečce AC. Určete množinu bodů M, pro které platí $|\sphericalangle MOC| = 2\,|\sphericalangle MAC|$ (obr. 7).

□ Řešením je sjednocení kružnice o středu O a poloměru $|OA|$ (s vyloučením bodu A) a polopřímky OC (s vyloučením bodu O).

Přesvědčíme se o tom. Nechť bod M hledané množiny neleží na přímce AO. Dokážeme, že $|MO| = |AO|$.



Obr. 7

Sestrojíme trojúhelník OAM. Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku je velikost úhlu $\sphericalangle MOC$ rovna součtu velikostí vnitřních úhlů při vrcholech A a M, tj.

$$|\sphericalangle OAM| + |\sphericalangle AMO| = |\sphericalangle MOC| = 2\,|\sphericalangle MAO|.$$

Takže z podmínky, kterou má bod M splňovat, dostáváme hned $|\sphericalangle OAM| = |\sphericalangle AMO|$, tj. trojúhelník AMO je rovnoramenný, tedy $|OM| = |AO|$.

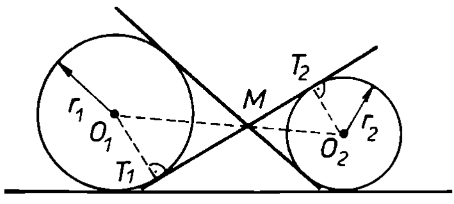
Ukážeme, že platí i obráceně: každý bod M popsané kružnice splňuje výše uvedenou podmínku. Skutečně, trojúhelník AMO je rovnoramenný, velikosti jeho úhlů při vrcholech A a M jsou stejné, a opět podle věty o vnějším úhlu trojúhelníku dostáváme $|\sphericalangle MOC| = 2\,|\sphericalangle MAC|$.

Pokud bod M leží na polopřímce OC, $M \neq O$, je

$\sphericalangle MOC| = 2|\sphericalangle MAC| = 0$ a podmínka je rovněž splněna.

Zbývající body přímky AO už nepatří do hledané množiny, neboť pro ně je $\sphericalangle MOC$ přímý a $\sphericalangle MAC$ nulový nebo přímý. (Přičemž o bodu O se nedá nic říci.) □

1.2 Ke každé dvojici kružnic o poloměrech r_1, $r_2 (r_1 > r_2)$, které se dotýkají přímky l a leží v pevně zvolené



Obr. 8

polorovině ohraničené přímkou l, sestrojíme průsečík M jejich vnitřních tečen. Určete množinu všech těchto průsečíků M (obr. 8).

□ Řešením je přímka rovnoběžná s přímkou l.

Všimněme si, že bod M leží na ose symetrie obou kružnic, tj. na přímce O_1O_2, kde jsme O_1, O_2 označili středy kružnic. Stačí tedy hledat množinu průsečíků přímky O_1O_2 a tečny T_1T_2 (kde T_1, T_2 značí body dotyku).

Znázorněme si úlohu na obrázku a vyznačme poloměry v bodech dotyku, tj. O_1T_1 a O_2T_2. Vidíme, že bod M dělí úsečku O_1O_2 v poměru $r_1 : r_2$ (neboť pravoúhlé trojúhelníky MO_1T_1 a MO_2T_2 jsou si podobné). Je zřejmé, že množina středů O_1 i množina středů O_2 jsou přímky rovnoběžné s přímkou l. Množina bodů M, které dělí úsečky o krajních bodech na těchto přímkách v daném poměru $r_1 : r_2$, je rovněž přímka rovnoběžná s přímkou l.

Množina průsečíků vnitřních tečen je tedy rovnoběžka s přímkou l (ve vzdálenosti $2r_1r_2 : (r_1 + r_2)$ od ní). □

Při řešení následující úlohy bude hledání pracnější. Bude třeba rozdělit rovinu na několik částí a v každé z nich provést vyšetřování zvlášť.

1.3 Je dán pravoúhelník $ABCD$. Najděte všechny takové body v rovině pravoúhelníku, pro které je součet jejich vzdáleností od přímek AB a CD roven součtu jejich vzdáleností od přímek BC a AD.

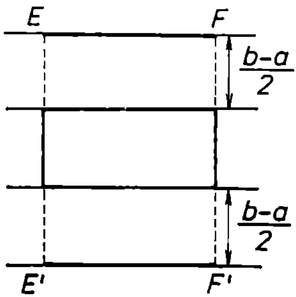
□ Označme délky stran pravoúhelníku a, b. Nejdříve vyšetříme případ, kdy pravoúhelník není čtvercem; nechť je $a < b$.

Body ležící uvnitř obdélníku, dokonce všechny body v pásu sevřeném přímkami, které jsou prodloužením delších stran obdélníku, nesplňují požadavky úlohy, protože jeden součet je roven a a druhý je větší nebo roven b.

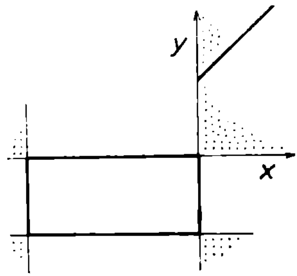
Nechť bod M leží vně obdélníku v pásu s hraničními přímkami, které jsou prodloužením kratších stran obdélníku. Označme y jeho vzdálenost od té delší strany obdélníku, která leží k němu blíž. Pak je vzdálenost od druhé strany rovna $y + a$. K tomu, aby bod splňoval podmínku úlohy, je třeba, aby platilo $y + (y + a) = b$, tj. $y = (b - a)/2$. Vidíme tedy, že z bodů ležících v tomto pásu vyhovují podmínce právě ty body, které leží vně obdélníku ve vzdálenosti $(b - a)/2$ od bližší z obou delších stran.

Vyhovují tudíž dvě úsečky EF a $E'F'$ (obr. 9).

Nakonec vezmeme bod M, který leží v úhlu, jehož ramena jsou tvořena polopřímkami opačnými k polopřímkám CD a CB. Označíme x vzdálenost bodu M od přímky CB a y vzdálenost bodu M od přímky CD.



Obr. 9



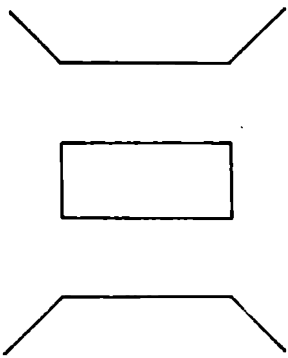
Obr. 10

Potom podmínka úlohy dává $x + (x + b) = y + (y + a)$, tj. $y = x + (b - a)/2$. Všimněme si, že čísla x, y je možno chápat jako souřadnice bodu M v soustavě souřadnic s osami CD, CB. V této soustavě souřadnic popisuje rovnice $y = x + (b - a)/2$ přímku rovnoběžnou s osou úhlu DCB. Tím jsme ukázali, že z bodů uvažovaného úhlu podmínku úlohy splňují ty a jen ty body, které leží na přímce $y = x + (b - a)/2$ (obr. 10).

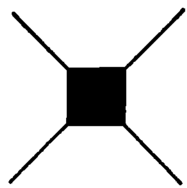
Stejnou úvahu lze provést i pro úhly ve zbývajících třech vrcholech obdélníku. Tím budou vyšetřeny všechny body v rovině. Množina všech bodů vyhovujících dané podmínce je znázorněna na obrázku 11.

Zbývá ještě vyšetřit případ, kdy daný pravoúhelník je čtverec, tj. $a = b$. Lehko se zjistí, že hledanou množinou je pak daný čtverec s celým svým vnitřkem a prodloužení jeho úhlopříček (obr. 12) ⟨?⟩. □

Všimněme si ještě, že pravoúhelník má dvě osy symetrie, a protože dvojice symetrických stran vzhledem k těmto osám vystupují v podmínce úlohy též symetricky, musí být hledaná množina také podle těchto dvou os symetrická. Z toho plyne, že při řešení není třeba vyšetřovat body celé roviny, ale stačí prozkoumat jednu ze čtyř částí, na které je rovina rozdělena uvedenými osami symetrie. V případě čtverce jsou všechny jeho čtyři osy symetrie také osami symetrie hledané množiny.



Obr. 11



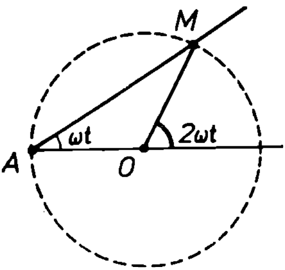
Obr. 12

Systémy křivek a pohyb. Vedle množin bodů budeme vyšetřovat i *množiny křivek* neboli, jak se častěji říká, *soustavy křivek.*

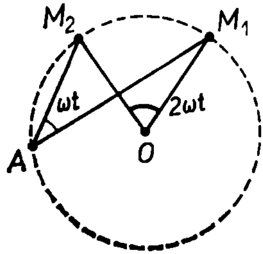
Pracujeme-li v geometrických úlohách se soustavou kružnic nebo přímek, je někdy výhodné představit si tuto soustavu jako jednu pohybující se kružnici nebo přímku. Za pomoci pohybu jsme už formulovali a řešili první úlohy a tento přístup použijeme vícekrát i v dalším výkladu, neboť velmi názorně objasňuje mnohé úlohy a věty.

Příklad nemusíme hledat daleko. Vraťme se k úloze 1.1. Její znění a řešení můžeme formulovat takto:

Nechť se přímka AM otáčí kolem bodu A s konstantní úhlovou rychlostí ω (tj. otočí se o úhel ω za jednotku času) a přímka OM se otáčí kolem bodu O v témže



Obr. 13



Obr. 14

smyslu s úhlovou rychlostí 2ω, přičemž v počátečním stavu obě přímky splývají s přímkou AO. Pak průsečík M těchto přímek opíše kružnici se středem O (obr. 13).

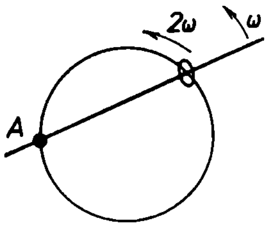
Z toho můžeme odvodit větu o středovém a obvodovém úhlu.

Otočí-li se přímka AM za čas t z polohy AM_1 do polohy AM_2 o úhel ωt, pak přímka OM se otočí o úhel $2\omega t$, jinými slovy *velikost obvodového úhlu M_1AM_2 je rovna polovině velikosti středového úhlu M_1OM_2* (obr. 14).

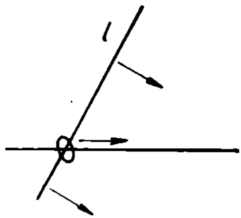
Ještě názorněji je možné formulovat předcházející větu takto:

Věta o prstenci na kružnici. *Navlékněme na drátěnou kružnici malinký prstenec. Kolem bodu A ležícího na kružnici se otáčí tyčka, která prochází prstencem. Otáčí-li se tyčka rovnoměrně úhlovou rychlostí ω, prstenec probíhá kružnici rovnoměrně úhlovou rychlostí* 2ω (obr. 15).

Uvedeme ještě jeden příklad věty, kterou je možno formulovat za pomoci pohybu.



Obr. 15



Obr. 16

Nechť se přímka l rovnoměrně posouvá v rovině, tj. tak že se nemění její směr, a přitom její průsečík M s jistou pevnou přímkou m se pohybuje rovnoměrně po m. Potom průsečík N přímky l s libovolnou pevnou přímkou n se rovněž pohybuje rovnoměrně po přímce n.

To je v podstatě přeformulované tvrzení, že rovnoběžné přímky vytínají na ramenech úhlu úměrné úseky. Analogicky k větě o prstenci můžeme dát předcházející větě tento tvar:

Věta o prstenci na přímce. *Na dvě přímky je v průsečíku navlečen malý prstenec. Je-li jedna z těchto přímek pevná a druhá se rovnoměrně posunuje (rovnoběžně se svou původní polohou), pak se i prstenec pohybuje rovnoměrně* (obr. 16).

Nejednou se ještě setkáme s různými soustavami přímek. V případech, kdy půjde o soustavy přímek procházejících daným bodem nebo o soustavy přímek téhož směru, může být užitečná první nebo druhá věta o prstenci.

Konstrukční úlohy. V klasických konstrukčních úlohách (sestrojit trojúhelník, nanést úsečku, vést tečnu, najít bod) se obvykle požaduje, aby úloha byla provedena jen za pomoci pravítka a kružítka. To znamená, že dvěma body můžeme proložit přímku, nakreslit kružnici daného poloměru a středu a najít průsečíky těchto čar.
Pro řešení takových úloh je někdy vhodné popsat kružnice a přímky jako množiny bodů vyhovujících jisté podmínce.

1.4 Nechť je dána kružnice a v její vnější oblasti bod A. Veďte bodem A tečnu t k dané kružnici.

□ Označíme-li X bod dotyku tečny t a kružnice, víme, že úhel OXA je pravý. Množina bodů M, pro které je úhel OMA pravý, vyplňuje kružnici o průměru OA (ovšem bez bodů O, A). Přímku t lze tedy zkonstruovat takto: narýsujeme kružnici, jejímž průměrem je úsečka OA. Nechť X je průsečík této kružnice s danou kružnicí (takové průsečíky jsou dva a jsou souměrně sdružené podle přímky OA). Pak vedeme přímku body A a X. □

1.5 Je dána kružnice a bod A. Veďte bodem A přímku tak, aby vytínala na dané kružnici tětivu délky d.

□ Určíme množinu všech přímek, na kterých vytíná daná kružnice tětivu délky d. Tyto přímky jsou tečnami soustředné kružnice δ s poloměrem $\sqrt{r^2 - d^2/4}$, kde r je poloměr dané kružnice ⟨?⟩. Tím se úloha převede na úlohu předcházející: vést tečnu bodem A ke kružnici δ.

Úloha má dvě řešení, pokud bod A leží ve vnější oblasti kružnice δ, jedno řešení, leží-li na ní, a nemá řešení, když bod A leží ve vnitřní oblasti kružnice δ. □

Často se hledaná množina dá získat ze známé množiny nějakým jednoduchým zobrazením: otočením, symetrií, posunutím nebo stejnolehlostí. (Tento postup je zvlášť vhodný v konstrukčních úlohách.) Připomeňme si, jak sestrojit obraz přímky a kružnice při shodnosti nebo podobnosti.

U přímky stačí sestrojit body A', B' — obrazy dvou jejích různých bodů A, B — a body A', B' vést přímku. Pro kružnici o středu O a poloměru r stačí najít obraz O' jejího středu a kolem něj opsat kružnici o poloměru r (jedná-li se o shodnost), nebo o poloměru kr (jedná-li se o podobnost s koeficientem k).

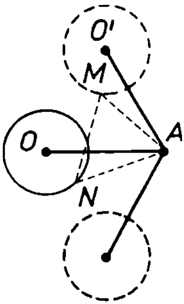
Uvedeme typické příklady úloh, kde se používá shodného zobrazení.

1.6 Je dán bod A a kružnice k, $A \notin k$. Najděte množinu vrcholů M všech rovnostranných trojúhelníků ANM, pro které vrchol N leží na dané kružnici k.

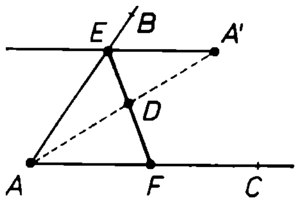
□ Nechť je N libovolný bod kružnice k. Otočíme-li úsečku AN o 60° kolem bodu A, dostane se bod N do vrcholu M rovnostranného trojúhelníku ANM (obr. 17). Odtud hned vidíme, že při otočení kružnice k o 60° kolem bodu A přejde každý její bod N ve třetí vrchol M rovnostranného trojúhelníku ANM.

Tudíž všechny takové body M leží na jedné ze dvou kružnic, které se dostanou z dané kružnice otočením o 60° kolem bodu A, a to buď ve smyslu otáčení hodinových ručiček, nebo proti němu.

Stejným způsobem lze dokázat, že každý bod M ze sjednocení obou výše získaných kružnic je vrcholem jistého rovnostranného trojúhelníku ANM s vrcholem N na dané kružnici. □



Obr. 17



Obr. 18

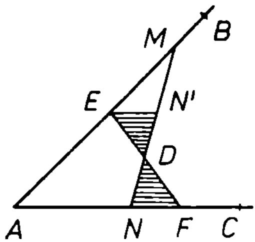
1.7a Je dán konvexní úhel BAC a v jeho vnitřku bod D. Sestrojte úsečku s krajními body na ramenech úhlu tak, aby bod D byl středem této úsečky.

□ Podívejme se na množinu všech úseček, jejichž jeden krajní bod leží na rameni AC daného úhlu s vrcholem A a jejichž střed je v bodě D. Druhé krajní body pak leží na polopřímce, která je souměrně sdružená k rameni AC podle bodu D (obr. 18).

Konstrukce spočívá v tom, že najdeme bod A' středově souměrně sdružený k bodu A podle středu D a bodem A' vedeme rovnoběžku s ramenem AC. Její průsečík s ramenem AB označme E, průsečík přímky ED s ramenem AC označme F. Úsečka EF je hledaná úsečka se středem D. Úloha má právě jedno řešení. □

Je zajímavé, že uvedená konstrukce řeší následující úlohu.

1.7b Máme dán konvexní úhel a v jeho vnitřku bod D. Bodem D se má vést přímka tak, aby z úhlu vytínala trojúhelník nejmenšího obsahu.



Obr. 19

□ Ukážeme, že hledaná přímka je právě přímka EF, kterou jsme sestrojili v předcházející úloze, tj. taková přímka, že úsečka, kterou na ní vytínají ramena úhlu, je bodem D půlena.

Veďme bodem D přímku MN různou od přímky EF, přičemž body M, N leží na ramenech daného úhlu (obr. 19). Dokážeme, že pro obsahy trojúhelníků platí

$$S_{MAN} > S_{EAF}\,. \tag{1}$$

Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že bod M má od bodu A větší vzdálenost než bod E (kdyby tomu tak nebylo, zaměníme ramena úhlu). Stačí se přesvědčit, že

$$S_{EDM} > S_{FDN}\,, \tag{2}$$

protože z toho hned plyne (1). Ale nerovnost (2) je zřejmá, neboť trojúhelník EDM obsahuje trojúhelník EDN', souměrně sdružený s trojúhelníkem FDN podle bodu D. □

Několik úloh:

1.8 Jsou dány body A, B. Určete množinu pat kolmic vedených bodem A na všechny přímky procházející bodem B.

1.9 Nechť je dána kružnice a bod A. Určete množinu středů tětiv, které vytíná daná kružnice na všech přímkách procházejících bodem A. (Je třeba vyšetřit zvlášť případy, kdy bod A leží ve vnější oblasti kružnice, ve vnitřní oblasti kružnice nebo na ní.)

1.10 Jsou dány body A, B. Určete množinu bodů souměrně sdružených s bodem A podle všech přímek procházejících bodem B.

1.11 Sestrojte kružnici*) dotýkající se dvou daných rovnoběžek a procházející daným bodem ležícím mezi nimi.

1.12 Sestrojte kružnici poloměru r, která se dotýká dané přímky a dané kružnice.

1.13 Je dána kružnice a v její vnitřní oblasti body A, B. Vpište do dané kružnice pravoúhlý trojúhelník tak, aby jeho odvěsny procházely body A, B. ↓

1.14 Jsou dány body A, B. Dvě kružnice se dotýkají přímky AB, jedna v bodě A, druhá v bodě B, a obě se

---

*) Zde a všude dále formulace jako „sestrojte kružnici" znamená „sestrojte všechny kružnice".

dotýkají vzájemně v bodě M. Určete množinu všech těchto bodů M, mění-li se obě kružnice. ↓

1.15 V rovině jsou dány čtyři body. Veďme každým z těchto bodů přímku tak, aby tyto přímky ohraničily pravoúhelník. Co je množinou středů takto vzniklých pravoúhelníků? ↓

1.16 Strany OP a OQ pravoúhelníku $OPMQ$ leží na ramenech daného pravého úhlu. Najděte množinu všech vrcholů M, jestliže je

a) délka úhlopříčky PQ,

b) součet délek stran OP a OQ,

c) součet druhých mocnin délek stran OP a OQ roven dané hodnotě d.

1.17 Nechť je dán pravoúhelník. Najděte množinu všech bodů takových, že součet druhých mocnin jejich vzdáleností od čtyř stran pravoúhelníku je roven druhé mocnině jeho úhlopříčky.

1.18 A a B jsou dvě města. Určete množinu všech bodů M s touto vlastností: jdeme-li z bodu M přímo do města B, pak se vzdálenost od města A zvětšuje.

1.19 O trojúhelníku ABC víme, že délka jeho těžnice AO je

a) rovna polovině délky strany BC,

b) větší než polovina délky strany BC,

c) menší než polovina délky strany BC.

Dokažte, že úhel při vrcholu A je a) pravý, b) ostrý, c) tupý.

1.20 V rovině je dána kružnice a bod A. Určete množinu středů úseček AN, kde bod N probíhá danou kružnici.

1.21 Je dána kružnice a bod z vnější oblasti této kružnice. Veďte tímto bodem sečnu kružnice tak, aby jeden její průsečík s kružnicí půlil úsečku tvořenou druhým průsečíkem a daným bodem.

1.22 Průsečíkem dvou daných kružnic veďte přímku tak, aby vytínala na kružnicích tětivy stejné délky.

1.23 Určete množinu vrcholů C všech čtverců $ABCD$, pro které vrchol A leží na dané přímce a vrchol B je pevně dán.

1.24 a) Kde leží čtvrtý vrchol čtverce, jestliže dva jeho vrcholy leží na jednom rameni daného ostrého úhlu a třetí vrchol leží na jeho druhém rameni?

b) Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Vpište do něj čtverec tak, aby dva jeho vrcholy ležely na straně AB.

1.25 Jakou křivku opisuje střed spojnice dvou chodců, kteří jdou rovnoměrně po přímkách? $\downarrow$

1.26 Do daného trojúhelníka ABC vpište pravoúhelník, jehož jedna strana leží na straně AB. Najděte množinu středů těchto pravoúhelníků.

1.27 Dřevěný pravoúhlý trojúhelník se pohybuje v rovině tak, že vrcholy, při nichž leží ostré úhly, se posunují po ramenech daného pravého úhlu (jeden vrchol po jednom a druhý po druhém rameni). Jak se bude pohybovat třetí vrchol tohoto trojúhelníku?

1.28 Na stole leží dvoje ploché hodinky. Oboje jdou přesně. Po jaké křivce se bude pohybovat střed úsečky spojující konce minutových ručiček? $\downarrow$

1.29 Průsečíkem A dvou daných kružnic veďme přímku. Ta protíná kružnice v bodech K, L, $K \neq A$, $L \neq A$. Určete množinu středů úseček KL. $\downarrow$

Kapitola 2

ABECEDA

Tato kapitola je soupisem vět o množinách bodů vyhovujících určitým geometrickým podmínkám. Postupně sestavíme celý seznam takových podmínek a vět, jichž budeme užívat při řešení úloh nejrůznějšího typu.

Geometrická úloha na určení množiny bodů je analogická algebraické úloze řešení rovnice (soustavy rovnic, nerovnic). Řešit rovnici nebo nerovnici znamená najít množinu všech čísel, která vyhovují jistým podmínkám. Podobně jako se ve škole učíme převádět různé rovnice (například trigonometrické, logaritmické) na lineární nebo kvadratické, ukazuje se často, že je možno složitější geometrickou podmínku převést na jednoduchou vlastnost přímky nebo kružnice.

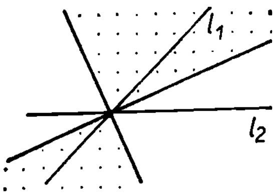
Podobnost mezi algebraickými úlohami a úlohami na hledání množin bodů daných vlastností není jen vnější. Pomocí metody souřadnic lze jednu z těchto úloh převést na druhou. Přitom uvidíme, že geometrické podmínky, které se zdají na první pohled různé, lze obsáhnout týmiž matematickými větami.

Začněme naši abecedu nejjednoduššími větami.

A. *Množina všech bodů stejně vzdálených od dvou daných bodů A, B ($A \neq B$) je přímka kolmá k úsečce AB a procházející jejím středem.*

Tuto přímku m nazýváme osou úsečky AB. Dělí rovinu na dvě poloroviny. Body jedné poloroviny (s výjimkou její hraniční přímky) jsou blíž k bodu A než k bodu B, v druhé polorovině je tomu obráceně. Body A, B jsou souměrně sdružené podle přímky m.

B. *Množina všech bodů stejně vzdálených od dvou daných různoběžek l_1 a l_2 je dvojice vzájemně kolmých přímek, které půlí úhly tvořené přímkami l_1, l_2* (obr. 20).



Obr. 20

Uvedené dvě kolmé přímky jsou osami souměrnosti dvojice přímek l_1, l_2 a dělí rovinu na čtyři části. Na obrázku jsou vyznačeny dva pravé úhly, jejichž vnitřky tvoří množinu všech bodů, které jsou blíž k přímce l_1 než k přímce l_2.

C. *Množina bodů, jejichž vzdálenost od dané přímky l je rovna danému číslu h ($h > 0$), je dvojice přímek l_1, l_2 rovnoběžných s přímkou l a ležících v různých polorovinách ohraničených přímkou l.*

Pás roviny ohraničený přímkami l_1, l_2 je množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od přímky l je nejvýše rovna číslu h.

D. *Množina všech bodů, jejichž vzdálenost od daného bodu O je rovna danému číslu r $(r > 0)$, je kružnice se středem O a poloměrem r.* (To je definice kružnice.)

Kružnice dělí rovinu na dvě části: vnitřní a vnější oblast kružnice. Pro body vnitřní oblasti je vzdálenost od středu menší než r, pro body vnější oblasti je tato vzdálenost větší než r.

Několik následujících úloh lehce vyřešíte užitím vět A, B, C, D.

2.1 Určete množinu středů všech kružnic procházejících dvěma danými body.

2.2 Určete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných různoběžek.

2.3 Najděte množinu středů všech kružnic o poloměru r, které se dotýkají dané přímky.

2.4 Jsou dány dva body A, B. Určete množinu všech bodů M takových, že obsah S_{AMB} trojúhelníku AMB je roven danému číslu $c > 0$.

Na základě tvrzení **B** dokážeme větu o osách vnitřního a vnějšího úhlu trojúhelníku.

2.5 Nechť osy dvojice přímek AC, BC protínají přímku AB v bodech E, F. Pak platí

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

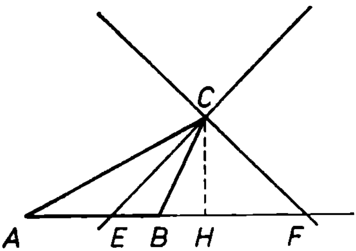
(obr. 21).

□ Nechť je M některý z bodů E a F. Pak je

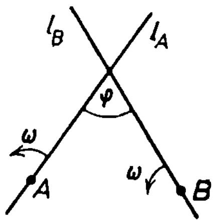
$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{S_{ACM}}{S_{BCM}}.$$

(Trojúhelníky ACM a BCM mají společnou výšku CH.)
Poměr obsahů je možno vyjádřit též jiným způsobem: protože bod M leží na ose přímek AC, BC, je od obou přímek stejně vzdálen, proto je

$$\frac{S_{ACM}}{S_{BCM}} = \frac{|AC|}{|BC|} \,. \; \square$$



Obr. 21



Obr. 22

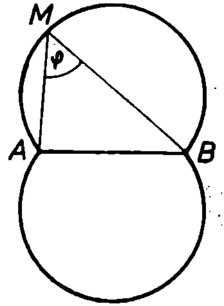
Kružnice, dvojice kruhových oblouků. Následující písmenko abecedy je ještě jednou variací věty o obvodovém a středovém úhlu a o prstenci na kružnici, kterou jsme probírali v kap. 1.

E⁰. *Dvě různoběžné přímky l_A a l_B se otáčejí kolem svých bodů A a B se stejnou úhlovou rychlostí ω a ve stejném smyslu (a proto svírají konstantní úhel). Trajektorií jejich průsečíku je kružnice* (obr. 22).

Důkaz. Sestrojíme kružnici δ procházející body A, B a jednou polohou M_0 průsečíku přímek l_A a l_B. Podle věty o prstenci na kružnici z 1. kap. se průsečík přímky l_A a kružnice pohybuje po kružnici δ rovnoměrně úhlovou rychlostí 2ω. Stejně se pohybuje i průsečík přímky l_B

a kružnice δ. Protože jsou však v jednom okamžiku (v poloze M_0) totožné, jsou totožné v každém časovém okamžiku.

Uvedeme ještě jedno znění věty E, které neužívá pohybu.



Obr. 23

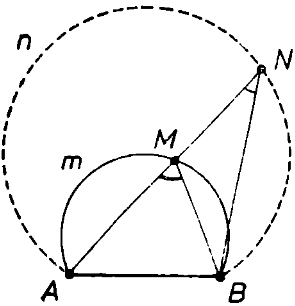
E. *Množinou všech bodů, ze kterých vidíme danou úsečku* AB *pod úhlem dané velikosti* φ *(tj. množiny bodů* M*, pro které je* $|\sphericalangle AMB| = \varphi$*), je dvojice kruhových oblouků s koncovými body* A, B, *navzájem souměrných podle přímky* AB.

Oblast, která je ohraničená těmito oblouky, je množinou všech těch bodů M*, pro které je* $|\sphericalangle AMB| > \varphi$ (obr. 23).

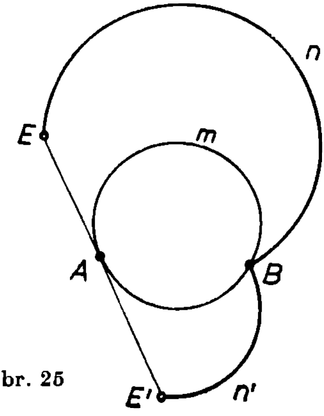
Poznamenejme, že v případě $\varphi = 90°$ vytvoří oba oblouky kružnici nad průměrem AB (viz odst. 0.1 — Thaletova věta).

2.6 Po dané kružnici s pevnou tětivou AB se pohybují krajní body tětivy CD, aniž by tětiva měnila svou velikost. Po jaké křivce se pohybuje průsečík přímek a) AD, BC, b) AC, BD?

2.7 V rovině jsou dány dva neprotínající se kruhy. Úhel vyrobený z průhledného materiálu se pohybuje v rovině tak, že stále překrývá oba kruhy a každé jeho rameno se dotýká jednoho kruhu. Dokažte, že je možno



Obr. 24



Obr. 25

na úhlu vyznačit bod, který se pohybuje po oblouku kružnice.

2.8a Je dána kružnice a na ní dva body A, B. Nechť je M libovolný bod této kružnice. Na prodloužení úsečky AM za bod M zvolíme úsečku MN, jejíž velikost je rovna velikosti úsečky BM. Určete množinu všech takto sestrojených bodů N (obr. 24).

□ Nechť je N bod sestrojený podle podmínek úlohy; pak je $|BM| = |NM|$ a $|\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle MNB|$. Protože je $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle MBN| + |\sphericalangle MNB|$, je $|\sphericalangle ANB| =$

$= |\sphericalangle AMB|/2$. Velikost úhlu AMB je pro všechny body M ležící na jednom z oblouků AB konstantní (viz bod E): $|\sphericalangle AMB| = \varphi$. Proto $|\sphericalangle ANB| = \varphi/2$, tedy všechny odpovídající body N leží na kruhovém oblouku $\widehat{AnB}$, z jehož bodů je vidět úsečku AB pod úhlem $\varphi/2$. (Střed tohoto oblouku leží ve středu oblouku $\widehat{AmB}$ dané kružnice ⟨?⟩.)

Vyhovují obráceně všechny body oblouku $\widehat{AnB}$ podmínkám úlohy? Všechny nevyhovují.

Všimněme si, že když bod M probíhá oblouk $\widehat{AmB}$ od bodu B k bodu A, otáčí se tětiva AM kolem bodu A od přímky AB k tečně dané kružnice v bodě A. Proto hledané množině patří pouze část oblouku $\widehat{AnB}$, a to oblouk $\widehat{EnB}$, kde E je průsečík oblouku $\widehat{AnB}$ s tečnou dané kružnice v bodě A (obr. 25).

Přitom můžeme bod B zahrnout do hledané množiny (odpovídá té poloze bodu M, ve které splývá bod M s bodem B a velikost úsečky BM je nulová). Naproti tomu bod E nepatří hledané množině; splývá-li bod M s bodem A, nemůžeme mluvit o přímce AM.

Podobně zkoumáme body, které leží v druhé polorovině ohraničené přímkou AB. Hledaná množina bodů se tak skládá ze dvou kruhových oblouků $\widehat{EnB}$ a $\widehat{E'n'B}$. □

Úlohu 2.8a můžeme řešit také jinak, jestliže si všimneme, že body N a B jsou souměrně sdružené podle přímky CM, kde je C střed oblouku $\widehat{AmB}$. Dále pak využijeme výsledku úlohy 1.10.

Podobně jako úlohu 2.8a si může čtenář vyřešit úlohu:

2.8b **Podmínky úlohy jsou stejné jako v úloze 2.8a,**

pouze úsečku MN nanášíme na opačnou polopřímku, tedy na polopřímku MA.

Druhé mocniny vzdáleností. Předpokládejme, že jsou v rovině dány dva body A, B a dále libovolné číslo c.

F. *Množinou všech bodů M, pro které je*

$$|AM|^2 - |BM|^2 = c,$$

je přímka kolmá k přímce AB. V případě $c = 0$ se jedná o osu úsečky AB.

G. *Nechť je $|AB| = 2a$. Množinou bodů, pro které je*

$$|AM|^2 + |BM|^2 = c,$$

je v případě

a) $c > 2a^2$ *kružnice se středem ve středu O úsečky AB a poloměrem* $\sqrt{(c - 2a^2)/2}$,

b) $c = 2a^2$ *bod O,*

c) $c < 2a^2$ *prázdná množina.*

Tvrzení F a G je možno lehce dokázat užitím Pythagorovy věty nebo metodou souřadnic ⟨ ? ⟩. Nebudeme je nyní každou zvlášť dokazovat, ukážeme později, že jsou obě důsledkem obecnějšího tvrzení. Dříve však je doplníme několika příklady.

2.9 Jsou dány dvě kružnice, bod M a body dotyku T_1, T_2 tečen vedených bodem M k jedné a druhé kružnici. Určete množinu všech těch bodů M, pro které platí $|MT_1| = |MT_2|$.

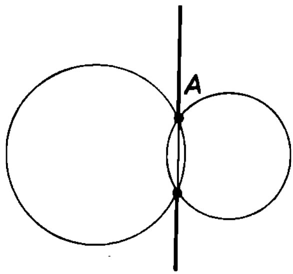
□ Nechť jsou O_1 a O_2 středy daných kružnic, r_1 a r_2 jejich poloměry ($r_2 \geqq r_1$), MT_1 a MT_2 jejich tečny vedené bodem M. Užitím Pythagorovy věty zapíšeme podmínku $|MT_1|^2 = |MT_2|^2$ ve tvaru

$$|MO_1|^2 - |O_1T_1|^2 = |MO_2|^2 - |O_2T_2|^2$$

neboli

$$|MO_2|^2 - |MO_1|^2 = r_2^2 - r_1^2.$$

Podle tvrzení F leží všechny body M požadované vlastnosti na přímce kolmé k přímce O_1O_2. Jestliže se



Obr. 26

kružnice protínají, je tato přímka spojnicí jejich průsečíků. Je-li totiž A průsečík obou kružnic, je

$$|AO_2|^2 - |AO_1|^2 = r_2^2 - r_1^2,$$

a bod A tedy leží na této přímce. Množina hledaných bodů je vyznačena na obrázku 26; je sjednocením dvou polopřímek.

Jsou-li dané kružnice různé a soustředné, je hledaná množina prázdná. Splývají-li obě kružnice, skládá se hledaná množina ze všech bodů této kružnice a z bodů její vnější oblasti. Nejsou-li kružnice soustředné a ani se neprotínají, je výsledkem celá přímka. □

Přímka, o které se mluví v předcházející úloze, se nazývá *chordálou* daných kružnic. Nechť se kružnice neprotínají. Pak jejich chordála dělí doplněk sjednocení obou kruhů, které dané kružnice ohraničují, na dvě oblasti: vnitřek jedné oblasti je množina bodů M, pro které je $|MT_1| > |MT_2|$, a vnitřek druhé je množina bodů M, pro které je $|MT_1| < |MT_2|$.

2.10 Určete množinu středů všech kružnic, které protínají každou z daných dvou kružnic v bodech diametrálně protilehlých.

2.11 a) Součet druhých mocnin délek úhlopříček rovnoběžníku se rovná součtu druhých mocnin délek jeho stran. Dokažte.

b) Jestliže má konvexní čtyřúhelník $AMBN$ kolmé úhlopříčky, je $|AM|^2 + |BN|^2 = |AN|^2 + |BM|^2$. Dokažte. ↓

□ a) Označme a vzdálenost vrcholů A a B od středu O rovnoběžníku $AMBN$ a r vzdálenost vrcholů M a N od bodu O. Položme $c = 2(a^2 + r^2)$. Protože je pak $|OM| = \sqrt{(c - 2a^2)/2}$, je podle tvrzení G součet druhých mocnin vzdáleností bodů A, B od bodu M roven c a totéž platí pro vzdálenosti bodu N od bodů A, B. Proto je

$$|AM|^2 + |BM|^2 + |AN|^2 + |BN|^2 =$$
$$= 2c = 4(a^2 + r^2) = |MN|^2 + |AB|^2. \ \square$$

Uvedeme nyní obecnou větu, ze které vyplývají tvrzení F, G, A a D naší abecedy.

Věta o druhých mocninách vzdáleností. ***Množinou všech bodů M, pro které platí podmínka***

$$\lambda_1|MA_1|^2 + \lambda_2|MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n|MA_n|^2 = \mu, \quad (1)$$

kde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *jsou dané body a* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$ *jsou daná čísla, je*

1) *kružnice, bod nebo prázdná množina v případě, kdy platí* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$;

2) *přímka, celá rovina nebo prázdná množina, je-li* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$.

Při *důkazu* užijeme metody souřadnic. Druhá mocnina vzdálenosti bodů $M[x; y]$ a $A_k[x_k; y_k]$ je rovna

$$|MA_k|^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 =$$
$$= x^2 + y^2 - 2x_kx - 2y_ky + x_k^2 + y_k^2 .$$

Výraz $\lambda_1\,|MA_1|^2 + \lambda_2\,|MA_1|^2 + \ldots + \lambda_n\,|MA_n|^2$ se v souřadnicích rovná součtu několika výrazů tvaru

$$(x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2).$$

Můžeme tedy podmínku (1) psát ve tvaru rovnice

$$dx^2 + dy^2 + ax + by + c = 0, \quad (2)$$

kde $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Dokážeme nyní, že rovnicí (2) je dána některá z uvedených množin.

1°. Je-li $d \neq 0$, můžeme rovnici (2) přepsat ekvivalentně tímto způsobem:

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d} = 0$$

nebo

$$\left(x + \frac{a}{2d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2d}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2 - 4dc}{4d^2}. \quad (2')$$

Vidíme, že je tím dána:

kružnice se středem $C[-a/2d; -b/2d]$, je-li pravá strana rovnice (2') kladná,

jeden jediný bod $C[-a/2d; -b/2d]$, je-li pravá strana rovna nule,

prázdná množina, je-li pravá strana záporná.

2°. Je-li $d = 0$, má rovnice (2) tvar

$$ax + by + c = 0.$$

Touto rovnicí je dána:

přímka, je-li $a^2 + b^2 \neq 0$,

celá rovina, je-li $a = b = c = 0$,

prázdná množina, je-li $a = b = 0$, $c \neq 0$.

V každém konkrétním případě se vždy lehce určí, která z uvedených možností nastává. Vraťme se k bodům F, G naší abecedy, které jsme nedokázali.

Důkaz F. Podmínka $|MA|^2 - |MB|^2 = c$ je zvláštním případem podmínky (1), ve které je $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, tedy $d = 0$, a definuje tudíž přímku, rovinu nebo prázdnou množinu.

Protože rovnice $(x + a)^2 - (x - a)^2 = c$ má v případě $a \neq 0$ vždy jediné řešení $x = c/4a$, leží na přímce AB právě jeden bod hledané množiny, která je tudíž přímkou. Ze souměrnosti plyne, že je kolmá k přímce AB. (Přímku AB jsme zvolili za osu x, střed úsečky AB za počátek soustavy souřadnic).

Důkaz G. Podmínka $|MA|^2 + |MB|^2 = c$ je opět zvláštní případ (1). Zde je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $d \neq 0$, je tedy hledaná množina buď prázdná, nebo se skládá z jediného bodu, nebo je kružnicí. Vzhledem k tomu, že body A, B vystupují v podmínce úlohy symetricky, splývá střed kružnice se středem úsečky AB.

Abychom poznali, kdy je hledaná množina kružnicí a jaký je její poloměr, najdeme na přímce AB body vyhovující podmínce úlohy $|AM|^2 + |BM|^2 = c$. Tato podmínka dává rovnici $(x - a)^2 + (x + a)^2 = c$, která má řešení pro $c \geqq 2a^2$, přičemž

$$|x| = r = \sqrt{(c - 2a^2)/2}\,.$$

2.12 Najděte množinu všech bodů, pro které je součet druhých mocnin jejich vzdáleností od dvou protilehlých vrcholů daného pravoúhelníku roven součtu druhých mocnin jejich vzdáleností od zbývajících dvou vrcholů pravoúhelníku.

□ Řešením je celá rovina. Nechť je $ABCD$ daný pravoúhelník. Hledáme tedy množinu všech bodů M, pro které platí

$$|MA|^2 + |MC|^2 - |MB|^2 - |MD|^2 = 0.$$

Položme v podmínce (1) $n = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$, a tudíž $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Podle tvrzení je hledaná množina buď přímka, nebo prázdná množina, nebo celá rovina.

Všimněme si, že vrcholy A, B, C, D daného pravoúhelníku vyhovují podmínce úlohy. Například pro bod A platí $|AA|^2 + |AC|^2 - |AB|^2 - |AD|^2 = 0$ (Pythagorova věta). Není tedy hledaná množina prázdná a není přímkou. Musí to tudíž být celá rovina. □

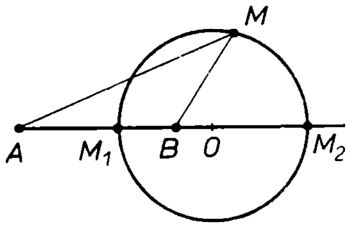
Z výsledku úlohy 2.12 plyne, že pro každý bod M roviny pravoúhelníku $ABCD$ platí

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2.$$

Užitím tohoto vztahu řešte tuto úlohu:

2.13 Je dán kruh a jeho vnitřní bod A. Najděte množinu čtvrtých vrcholů C pravoúhelníků $ABCD$, jejichž vrcholy B a D leží na hraniční kružnici daného kruhu.

2.14 Dokažte, že v případě $|MA| \geqq |MB|$ platí $|MA|^2 - |MB|^2 = 2\,|AB| \,.\, \varrho(M, m)$, kde m je osa úsečky AB a $\varrho(M, m)$ je vzdálenost bodu M od přímky m.



Obr. 27

Přidejme k naší abecedě ještě jedno písmenko — tvrzení, které se často v geometrii užívá a jež je důsledkem věty o druhých mocninách vzdáleností.

H. *V rovině jsou dány dva různé body A, B. Množinou všech bodů M, pro které je $|MA| \,/\, |MB| = k$, $k > 0$, $k \neq$ $\neq 1$, je kružnice se středem na přímce AB.*

Tato množina všech bodů, jejichž poměr vzdáleností od bodů A a B je konstantní (různý od jedné), se nazývá *Apolloniova kružnice* (obr. 27).

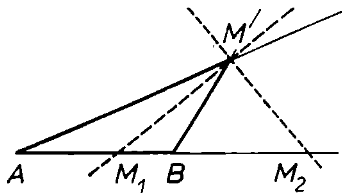
□ Přepíšeme-li podmínku v úloze H do tvaru

$$|MA|^2 - k^2\,|MB|^2 = 0,$$

vidíme, že se jedná o zvláštní případ podmínky (1), pro který je $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -k^2$, a protože je

$1 - k^2 \neq 0$, je hledaná množina kružnicí, bodem nebo prázdnou množinou. Protože rovnice $(x + a)^2 = k^2(x - a)^2$ má při $k^2 \neq 1$, $a \neq 0$ právě dva různé kořeny, existují na přímce AB právě dva různé body M_1 a M_2 hledané množiny, která je tudíž kružnicí. □

Je-li M bod této Apolloniovy kružnice, který neleží na přímce AB, pak osy dvojice přímek MA a MB protínají přímku AB právě v bodech M_1, M_2 (obr. 28).



Obr. 28

Tvrzení vyplývá z věty 2.5, podle které je

$$\frac{|AM_1|}{|BM_1|} = \frac{|AM_2|}{|BM_2|} = \frac{|AM|}{|BM|}.$$

Této skutečnosti můžeme využít při řešení následující úlohy.

2.15 Na průměru kulatého kulečníkového stolu leží kulečníkové koule A a B. Jakým směrem musíme odstrčit kouli B, má-li se po odrazu od hrany stolu srazit s koulí A, a nemá-li se pohybovat po průměru stolu?

2.16 Na dané přímce leží body A, B, C, D. Sestrojte bod, z něhož jsou vidět úsečky AB, BC a CD pod shodnými úhly.

Vzdálenosti od přímek. Dosud se v naší abecedě vyskytovaly hlavně takové podmínky, které dávaly kružnici. V dalších dvou případech budou výsledkem přímky (dvojice přímek).

Nechť je dáno kladné číslo c a dvě různoběžky l_1 a l_2.

J. *Množina všech bodů M, pro které je poměr $\varrho(M, l_1) : \varrho(M, l_2)$ jejich vzdáleností od přímek l_1, l_2 roven c, je dvojice přímek procházejících průsečíkem daných přímek.*

K. *Množina všech bodů M, pro které je součet $\varrho(M, l_1) + \varrho(M, l_2)$ jejich vzdáleností od přímek l_1 a l_2 roven c, je hranice pravoúhelníku, jehož úhlopříčky leží na daných přímkách.*

Dříve než přejdeme k důkazu těchto tvrzení, probereme dva jednoduché příklady.

2.17 Je dán trojúhelník ABC. Najděte množinu všech bodů M, pro které se obsahy S_{AMC} a S_{BMC} trojúhelníků AMC a BMC sobě rovnají.

□ Nechť h_b a h_a jsou vzdálenosti bodu M od přímek AC a BC. Pak je

$$S_{AMC} = \frac{1}{2}\,|AC| \,.\, h_b, \quad S_{BMC} = \frac{1}{2}\,|BC| \,.\, h_a,$$

tedy $h_a/h_b = |AC| \,/\, |BC|$.

Vidíme, že hledanou množinou všech bodů M je množina popsaná pod písmenem J pro přímky AC a BC a $c = |AC| \,/\, |BC|$. Je to tedy dvojice přímek procházejících bodem C. Ukážeme, že jedna z těchto přímek je těžnicí trojúhelníku ABC a druhá je rovnoběžná s přímkou AB. K důkazu stačí zvolit na každé z těchto přímek jeden bod a ukázat, že splňuje zadanou podmínku.

Označme h velikost výšky trojúhelníku ABC vedené bodem C a nechť je N libovolný bod přímky l vedené vrcholem C rovnoběžně s přímkou AB; pak je

$$S_{ACN} = \frac{1}{2}\,|CN|\,h, \quad S_{BCN} = \frac{1}{2}\,|CN|\,h, \text{ tedy } S_{ACN} = S_{BCN}$$

a přímka l je částí hledané množiny.

Nechť je K střed strany AB, tj. $|AK| = |KB|$. Pak je $S_{AKC} = |AK|\,h/2 = |BK|\,h/2 = S_{BKC}$, tudíž i těžnice m je částí hledané množiny. □

Tvrzení K se dá v podstatě přeformulovat takto:

2.18 Je dán rovnoramenný trojúhelník AOB. Dokažte, že součet vzdáleností libovolného bodu M základny AB od ramen AO a BO je roven výšce trojúhelníku vedené k jeho rameni.

Tvrzení J a K nebudeme dokazovat geometricky, i když by to nebylo složité, nýbrž podáme důkaz použitím pohybu (podobně jako v bodě E o kružnici a dvojici kruhových oblouků). Nejdříve však vyslovíme lemmu* zobecňující tvrzení o prstenci na přímce (viz str. 19).

Lemma. *Na přímky l_1 a l_2 je v jejich průsečíku navlečen malý prstenec M. Jestliže se každá z přímek l_1, l_2 rovnoměrně posouvá, pohybuje se prstenec rovnoměrně po přímce.*

Důkaz. Přímku z tvrzení lemmy dostaneme, vyznačíme-li si dvě různé polohy M_1 a M_2 pohybujícího se

*) lemma — poučka, pomocná věta

prstence. Průsečíky pohybujících se přímek l_1 a l_2 s pevnou přímkou M_1M_2 se pohybují rovnoměrně. Protože však ve dvou různých časových okamžicích splývají, splývají v každém okamžiku.

Důkaz tvrzení J. Pro kladné číslo c tvoří body, jejichž vzdálenost od přímky l_2 je rovna t a do přímky l_1 je rovna ct, vrcholy rovnoběžníku se středem O v průsečíku přímek l_1, l_2. Množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od přímky l_2 je t, jsou totiž dvě rovnoběžky s přímkou l_2 (viz úloha B) a stejně tak je množinou bodů o vzdálenosti ct od přímky l_1 dvojice rovnoběžek s přímkou l_1. Obě dvojice rovnoběžek se protínají ve čtyřech vrcholech rovnoběžníku, které vyhovují podmínce úlohy J, neboť $ct/t = c$. Probíhá-li číslo c množinu všech kladných reálných čísel, dostaneme všechny body hledané množiny.

Díváme-li se na t jako na „čas", vidíme, že se obě dvě dvojice rovnoběžek pohybují rovnoměrně (jedna dvojice je stále rovnoběžná s přímkou l_1, druhá s l_2). Podle lemmy se jejich průsečíky pohybují po přímkách procházejících bodem O.

Důkaz tvrzení K. Veďme dvě přímky ve vzdálenosti t od přímky l_1 a další dvě přímky ve vzdálenosti $c - t$ od přímky l_2 ($0 \leqq t \leqq c$). Čtyři průsečíky těchto přímek patří do hledané množiny. Měníme-li „čas" spojitě od 0 do c, pohybují se přímky rovnoměrně a každý ze čtyř obdržených průsečíků se podle lemmy pohybuje po úsečce. Krajní body těchto úseček odpovídají hodnotám $t = 0$ a $t = c$, leží na přímkách l_1, l_2 a tvoří vrcholy pravoúhelníku.

Uvedeme teď obecnou větu, která zahrnuje tvrzení B, C, J a K jako své zvláštní případy. Zkoumejme množinu všech bodů M, pro které platí

$$\lambda_1\varrho(M, l_1) + \lambda_2\varrho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n\varrho(M, l_n) = \mu; \quad (3)$$

zde jsou $l_1, l_2, \ldots, l_n$ dané přímky roviny a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, μ daná čísla.

Popsat takto zadanou množinu není jednoduché. Hned však uvidíme, že je snadné určit průniky této množiny s částmi roviny, na které je rovina rozdělena přímkami $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Označme Q jednu takovou část.

Věta o vzdálenostech od přímek. *Množina bodů vyhovujících podmínce* (3) *a patřících do Q je buď* 1) *průnikem Q a nějaké přímky, tedy úsečkou, polopřímkou nebo celou přímkou, nebo* 2) *celé Q, nebo* 3) *prázdná množina.*

Důkaz. Zjistíme-li průniky hledané množiny s každou částí roviny, na které je rovina rozdělena přímkami $l_1, l_2, \ldots, l_n$, je tím dána celá hledaná množina. K důkazu věty použijeme metody souřadnic.

Nechť je tedy Q zvolená část roviny. Pak je Q průnikem n polorovin s hraničními přímkami $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Rovnici $a_kx + b_ky + c_k = 0$ přímky l_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) můžeme zvolit tak, že příslušná polorovina je dána nerovnicí $a_kx + b_ky + c_k \geqq 0$ a že platí $a_k^2 + b_k^2 = 1$ ⟨?⟩, takže pro body $M[x; y]$ této poloroviny platí $\varrho(M, l_k) = a_kx + b_ky + c_k$. Proto je levá strana rovnice (3) součtem výrazů tvaru $\lambda_k(a_kx + b_ky + c_k)$, a rovnice (3) má tudíž tvar

$$ax + by + c = 0.$$

Je-li $a^2 + b^2 \neq 0$, je to rovnice přímky, pro $a = b = 0$ je touto rovnicí dána buď celá rovina, nebo prázdná množina.

Jiný důkaz dostaneme, převedeme-li úlohu pomocí úlohy 2.14 na větu o druhých mocninách vzdáleností ⟨?⟩.

2.19 a) Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Najděte množinu všech bodů M, pro které se součet vzdáleností od přímek AB, BC, CA rovná danému číslu $\mu > 0$. ↓

b) Je dán pravoúhelník $ABCD$. Najděte množinu všech bodů M, pro které je součet vzdáleností od přímek AB, BC, CD a DA roven danému číslu μ.

2.20 a) Tři přímky l_0, l_1, l_2 procházejí jedním bodem a každé dvě z nich svírají úhel 60°. Najděte množinu všech bodů M, pro které platí

$$\varrho(M, l_0) = \varrho(M, l_1) + \varrho(M, l_2).$$

b) Je dán rovnostranný trojúhelník. Najděte množinu všech bodů M, pro které je vzdálenost od jedné z přímek AB, BC, CA rovna polovičnímu součtu vzdáleností od zbývajících dvou. ↓

Přehled naší abecedy. Množina všech bodů vyhovujících určité podmínce se zpravidla označuje takto: do složených závorek se nejdříve napíše písmeno označující „libovolný bod“ množiny (zpravidla užíváme písmeno M, může to být ovšem i jiné písmeno), pak se napíše dvojtečka a za ní se napíše podmínka, kterou jsou body množiny charakterizovány.

Napíšeme krátce probrané množiny v naší abecedě:

A. $\{M : |MA| = |MB|\}$
B. $\{M : \varrho(M, l_1) = \varrho(M, l_2)\}$
C. $\{M : \varrho(M, l) = h\}$
D. $\{M : |MO| = r\}$
E. $\{M : \sphericalangle AMB = \varphi\}$
F. $\{M : |AM|^2 - |BM|^2 = c\}$
G. $\{M : |AM|^2 + |BM|^2 = c\}$

H. $\{M : |AM| \,/\, |BM| = k\}$
J. $\{M : \varrho(M, l_1) \,/\, \varrho(M, l_2) = k\}$
K. $\{M : \varrho(M, l_1) + \varrho(M, l_2) = c\}$

Připomeňme si, žc všechny tyto množiny kromě množiny uvedené pod písmenem E jsme rozdělili na dvě skupiny

A, D, F, G, H a B, C, J, K.

První skupina — to jsou zvláštní případy množiny

$$\{M : \lambda_1|MA_1|^2 + \ldots + \lambda_n|MA_n|^2 = \mu\},$$

druhá skupina jsou zvláštní případy množiny

$$\{M : \lambda_1\varrho(M, l_1) + \ldots + \lambda_n\varrho(M, l_n) = \mu\}.$$

V kap. 6 doplníme naši abecedu dalšími čtyřmi písmeny:

L. $\{M : |MA| + |MB| = c\}$
N. $\{M : ||MA| - |MB|| = c\}$
P. $\{M : |MA| = \varrho(M, l_1)\}$
Q. $\{M : |MA| \,/\, \varrho(M, l) = c\}$

Tyto množiny (elipsy, hyperboly a paraboly) tvoří také přirozeným způsobem jednu skupinu křivek, tzv. křivek druhého stupně.

Kapitola 3

LOGICKÉ KOMBINACE

Zde jsou shromážděny různé úlohy, ve kterých vystupuje zpravidla několik geometrických podmínek najednou. Při řešení těchto úloh se naučíme třídit body, vyjadřovat logické souvislosti mezi podmínkami pomocí operací s množinami.

Společný bod tří přímek. V prvních úlohách se dotkneme tradičního geometrického tématu. Pomocí jednoduhých operací s množinami naší abecedy dokážeme věty o „významných bodech" trojúhelníku. Všechny úvahy se vlastně převedou na užití tranzitivnosti: je-li $a = b$ a $b = c$, pak je $a = c$.

3.1 V trojúhelníku se osy stran protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané. Dokažte.

□ Osy m_c a m_a stran AB a BC trojúhelníku ABC se samozřejmě protínají; označme jejich průsečík O. Protože bod O leží na ose m_c, je podle A 2. kap. $|OA| = |OB|$. Stejně tak je $|OB| = |OC|$, protože bod O leží také na ose m_a. Pak je však také $|OA| = |OC|$, a tudíž je bod O také bodem osy m_b strany AC. Tím jsme dokázali, že všechny tři osy stran procházejí jediným bodem. □

3.2 Výšky trojúhelníku se protínají v jediném bodě, který se nazývá průsečík výšek, nebo též ortocentrum trojúhelníku. Dokažte.

□ Veďme každým vrcholem trojúhelníku ABC přímku rovnoběžnou s protější stranou. Tyto přímky tvoří nový trojúhelník $A'B'C'$, v němž jsou body A, B, C středy stran a výšky trojúhelníku ABC jsou současně osami stran trojúhelníku $A'B'C'$. Procházejí tudíž podle 3.1 jediným bodem. □

Ukážeme si ještě jiný důkaz věty 3.2, podobný důkazu věty 3.1.

□ Každou výšku trojúhelníku můžeme popsat jako množinu všech bodů splňujících jistou podmínku. Využijeme k tomu bodu E. Víme, že množina $\{M : |MA|^2 - |MB|^2 = d\}$ je přímka kolmá k přímce AB. Zvolme d tak, aby tato přímka procházela bodem C, tedy $d = |CA|^2 - |CB|^2$. Je tudíž $h_c = \{M : |MA|^2 - |MB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2\}$ výška trojúhelníku vedená vrcholem C.

Zcela obdobně můžeme popsat zbývající dvě výšky:

$$h_a = \{M : |MB|^2 - |MC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2\},$$
$$h_b = \{M : |MC|^2 - |MA|^2 = |BC|^2 - |BA|^2\}.$$

Nechť se přímky h_c a h_a protínají v bodě H, pak platí současně

$$|HA|^2 - |HB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2,$$
$$|HB|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2.$$

Sečtením těchto dvou rovností dostaneme

$$|HA|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |CB|^2.$$

Odtud však plyne, že bod H je také bodem výšky h_b. □

3.3 Osy úhlů trojúhelníku se protínají v jediném bodě (ve středu kružnice trojúhelníku vepsané). Dokažte.

□ Zvolme libovolný trojúhelník ABC a označme a, b a c přímky BC, CA a AB. Osy l_a a l_b úhlů trojúhelníku při vrcholech A a B se protínají ve vnitřním bodě O trojúhelníku ABC. Bod O splňuje podmínky $\varrho(O, b) = \varrho(O, c)$ a $\varrho(O, a) = \varrho(O, c)$. Pak je také $\varrho(O, b) = \varrho(O, a)$, tedy bod O je také bodem osy l_c úhlu při vrcholu C zvoleného trojúhelníku. □

Poznámka. Množina všech bodů M roviny, pro které je $\varrho(M, c) = \varrho(M, b)$ a současně $\varrho(M, a) = \varrho(M, c)$, se skládá ze čtyř bodů O, O_1, O_2, O_3, ve kterých se protínají osy dvojice přímek b, c s osami přímek a, c. Z tranzitivnosti opět plyne, že těmito čtyřmi body procházejí též osy přímek a, b (každá osa prochází dvěma z těchto čtyř bodů).

Odtud plyne, že šest os vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku se protíná ve čtyřech bodech, každým z nich procházejí tři osy. Jeden z těchto čtyř bodů je středem kružnice trojúhelníku vepsané, zbývající tři body jsou středem tří kružnic trojúhelníku vně vepsaných.

Poznamenejme, že pro paty výšek A, B, C ostroúhlého trojúhelníku $O_1O_2O_3$ jsou body O_1, O_2, O_3 středy kružnic, vně vepsaných trojúhelníku ABC. Jsou tedy výšky trojúhelníku $O_1O_2O_3$ osami úhlů v trojúhelníku ABC.

3.4 Těžnice trojúhelníku procházejí jediným bodem, tzv. těžištěm trojúhelníku. Dokažte.

Tuto větu můžeme dokázat mnoha způsoby. První důkaz, který si uvedeme, zároveň vysvětluje název těžiště.

□ Umístěme ve vrcholech trojúhelníku ABC závaží Γ_A, Γ_B, Γ_C téže hmotnosti a hledejme jejich těžiště. Těžiště závaží Γ_A a Γ_B je ve středu úsečky AB, a proto těžiště Z všech tří závaží leží na odpovídající těžnici. Stejně tak musí těžiště Z ležet na zbývajících dvou těžnicích, všechny tři těžnice se tudíž protínají v jediném bodě. □

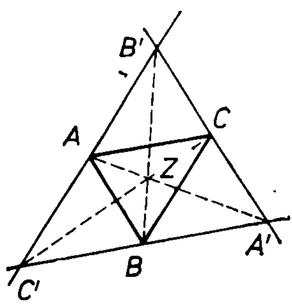
Ukážeme si ještě důkaz obdobný důkazům předcházejících tří vět.

□ Body těžnic trojúhelníku ABC vedených vrcholy A, B, C vyhovují postupně podmínkám (viz 2.17)

$$S_{AMB} = S_{CMA}, \quad S_{AMB} = S_{BMC}, \quad S_{BMC} = S_{CMA}. \quad (1)$$

Je vidět, že z prvních dvou podmínek plyne třetí podmínka, těžnice se tudíž protínají v jediném bodě. □

Poznámka. Množina všech bodů, které vyhovují některé podmínce v (1), je (viz 2.17) dvojice přímek skládající se z těžnice a z další přímky. Všechny tři takovéto dvojice přímek se protínají ve čtyřech bodech Z, A', B', C'. Trojúhelník $A'B'C'$ je trojúhelník, kterého jsme použili v prvním důkaze věty 3.2 (obr. 29).



Obr. 29

3.5 a) Dokažte, že chordály tří kružnic procházejí jediným bodem nebo jsou spolu rovnoběžné (viz 2.9).

b) Mějme tři kružnice, které se po dvou protínají. Pro každou dvojici daných kružnic vezměme jejich společnou tětivu. Pak se tyto tři tětivy (nebo jejich prodloužení) protínají v jediném bodě nebo jsou rovnoběžné. ↓

3.6 Dokažte, že v ostroúhlém trojúhelníku ABC existuje bod T, ze kterého jsou všechny tři strany trojúhelníku vidět pod shodnými úhly, tj. $|\sphericalangle ATB| = |\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle CTA|$. Tento bod se nazývá *bod Torricelliho* (čti Toričeliho).

3.7 Uvažujme všechny trojúhelníky s danou stranou AB a danou velikostí φ úhlu při protějším vrcholu. Určete množinu

a) těžišť všech těchto trojúhelníků;

b) středů kružnic vepsaných těmto trojúhelníkům; ↓

c) průsečíků výšek uvažovaných trojúhelníků. ↓

3.8 a) Po dvou se protínající přímky a, b, c procházejí po řadě body A, B, C, kolem kterých se otáčejí všechny tři stejnou úhlovou rychlostí ω. Dokažte, že v jednom okamžiku procházejí všechny tři přímky jediným bodem. ↓

b) Dokažte, že kružnice, které jsou souměrně sdružené s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC podle přímek AB, BC, CA, procházejí jediným bodem, průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. ↓

3.9 Věta Cevova (čti Čevova). Na stranách AB, BC, CA trojúhelníku ABC jsou zvoleny body C_1, A_1, B_1. Dokažte, že se úsečky AA_1, BB_1, CC_1 protínají v jediném bodě právě tehdy, když platí

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} \, \frac{|BA_1|}{|CA_1|} \, \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = 1 \, . \downarrow$$

3.10 Body C_1, A_1, B_1 ležícími po řadě na stranách AB, BC, CA daného trojúhelníku ABC jsou vedeny kolmice k těmto stranám. Dokažte, že tyto tři kolmice procházejí právě tehdy jedním bodem, když je splněna podmínka $|AC_1|^2 + |BA_1|^2 + |CB_1|^2 = |AB_1|^2 + |BC_1|^2 + |CA_1|^2$. ↓

Průnik a sjednocení. Popišme podrobněji ty základní operace, kterými se stále zabýváme.

Nechť jsou dány dvě, nebo i více množin bodů. Průnikem těchto množin nazýváme množinu všech bodů, které patří současně všem daným množinám. Sjednocením těchto množin je množina všech bodů, které patří alespoň jedné z daných množin.

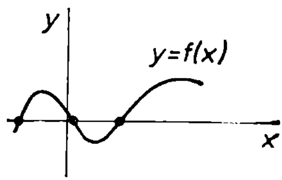
Jestliže jsme měli najít v úloze všechny body, které splňovaly současně několik podmínek, postupovali jsme takto: našli jsme množiny všech bodů, které splňovaly postupně vždy jednu z těchto podmínek, a pak jsme vzali průnik všech takto nalezených množin. S takovou situací jsme se setkali také v algebraických úlohách: množina řešení soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= 0,\\
f_2(x) &= 0
\end{aligned}
$$

je průnikem množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Máme-li v úloze najít body, které vyhovují alespoň jedné z několika podmínek, musíme najít množiny bodů, které vyhovují jednotlivým podmínkám, a pak vzít jejich sjednocení. Stejně tak postupujeme při řešení rovnice $f(x) = 0$, jejíž levá strana je součinem: $f(x) = f_1(x)f_2(x)$. Najdeme množiny řešení jednotlivých rovnic $f_1(x) = 0$ a $f_2(x) = 0$ a vezmeme jejich sjednocení.

Ještě jeden pojem, se kterým jsme zde pracovali, vyvolává algebraické asociace — pojem rozkladu. Při řešení nerovnice $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$ pro spojitou funkci f řešíme nejdříve odpovídající rovnici $f(x) = 0$. Obdržené body rozdělují definiční obor funkce f (interval nebo celou přímku) na části, ve kterých nabývá funkce f hodnot stejného znaménka (obr. 30). Stejně tak množiny bodů roviny, které splňují nějakou nerovnici, jsou



Obr. 30

obyčejně oblasti ohraničené křivkami, na kterých je splněna odpovídající rovnice. Mnoho jednoduchých příkladů jsme viděli v kap. 2.

V následující úloze se setkáme se složitějšími rozklady a složitějšími kombinacemi množin.

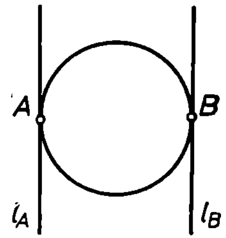
3.11 Nechť jsou dány dva různé body A, B v rovině. Najděte množinu všech bodů M, pro které je trojúhelník AMB

a) pravoúhlý,
b) ostroúhlý,
c) tupoúhlý.

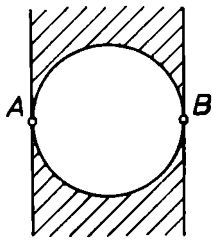
☐ a) Trojúhelník AMB je pravoúhlý, jestliže je splněna jedna z podmínek: 1) $|\sphericalangle AMB| = 90°$, 2) $|\sphericalangle BAM| = 90°$, 3) $|\sphericalangle ABM| = 90°$.

Hledaná množina je proto sjednocením těchto tří množin: 1) kružnice s průměrem AB, 2) přímky l_A, procházející bodem A kolmo k přímce AB, 3) přímky l_B, procházející bodem B kolmo k přímce AB. Z tohoto sjednocení nutno ovšem vyjmout body A, B (obr. 31).

b) Trojúhelník AMB je ostroúhlý, jestliže jsou splněny zároveň podmínky: 1) $|\sphericalangle AMB| < 90°$, 2) $|\sphericalangle BAM| < 90°$, 3) $|\sphericalangle ABM| < 90°$. Hledaná množina je tudíž



Obr. 31



Obr. 32

průnikem těchto tří množin: 1) množiny vnějších bodů kruhu s průměrem AB (viz kap. 2, D), 2) poloroviny bez hraniční přímky l_A, obsahující bod B, 3) poloroviny bez hraniční přímky l_B, obsahující bod A. Jejich průnikem je pás mezi přímkami l_A, l_B bez bodů kruhu s průměrem AB (obr. 32).

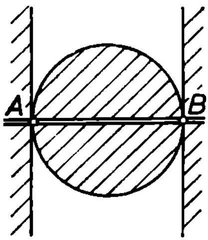
c) Všimněme si, že každý bod M roviny (s výjimkou bodů přímky AB) splňuje některou ze tří podmínek: buď je trojúhelník AMB pravoúhlý, nebo je ostroúhlý, nebo je tupoúhlý, přičemž jednotlivé případy se vzájemně vylučují. Proto se v případě c) rovná hledaná množina množině všech těch bodů, které nepatří ani do množiny bodů splňujících podmínku a), ani do množiny bodů splňujících podmínku b). Tato množina je sjednocením dvou polorovin a kruhu s vynecháním bodů přímky AB a hraničních bodů (obr. 33). □

3.12 V rovině jsou opět dány dva různé body A, B. Najděte množinu všech bodů M, pro které je

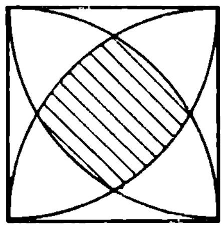
a) trojúhelník AMB rovnoramenný;

b) nejdelší stranou trojúhelníku ABM strana AB;

c) nejdelší stranou trojúhelníku ABM strana AM.



Obr. 33



Obr. 34

3.13 V rovině je dán čtverec o straně délky 1. Zvolený bod roviny nemá od žádného vrcholu čtverce vzdálenost větší než 1. Dokažte, že vzdálenost tohoto bodu od každé strany čtverce je alespoň 1/8.

□ Množina bodů M, jejichž vzdálenost od každého vrcholu čtverce je nejvýše rovna jedné, je průnikem čtyř kruhů o poloměru 1 se středy ve vrcholech čtverce (obr. 34). Je to „čtyřúhelník" ohraničený čtyřmi kruhovými oblouky; vzdálenost jeho vrcholů od nejbližší strany je $1 - \sqrt{3}/2$. Ověřme, že toto číslo je větší než 1/8:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{8} > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{49}{16} > 3\,.$$

Teď je zřejmé, že všechny body naší množiny mají od každé strany čtverce vzdálenost větší než $1/8$. □

3.14 Bodem O roviny jsou vedeny tři přímky, které rozdělují rovinu na šest shodných úhlů. Vzdálenost bodu M od každé z daných přímek je menší než 1. Dokažte, že vzdálenost $|OM|$ je menší než $7/6$.

3.15 Je dán čtverec $ABCD$. Najděte množinu všech bodů, které jsou blíž k přímce AB než k přímkám BC, CD a DA.

3.16 Je dán trojúhelník ABC. Určete v rovině trojúhelníku množinu bodů M, pro které je obsah každého z trojúhelníků AMB, BMC, CMA menší než obsah trojúhelníku ABC.

3.17 Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že čtyři kruhy s průměry AB, BC, CD a DA pokrývají celý čtyřúhelník.

□ Předpokládejme, že uvnitř čtyřúhelníku leží bod M, který neleží v žádném z popsaných kruhů. Pak podle kap. 2, E jsou všechny úhly AMB, BMC, CMD a DMA ostré, a tedy jejich součet menší než 360°, což je spor. □

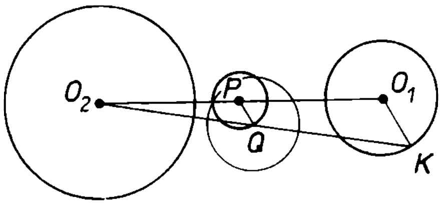
3.18 Část lesa má tvar konvexního čtyřúhelníku o obsahu S a obvodu p. Dokažte, že uvnitř lesa je bod, jehož vzdálenost od okraje lesa je větší než S/p.

3.19 Uvnitř čtverce o straně délky 1 je zvoleno n bodů. Dokažte, že z nich lze vybrat dva body tak, že jejich vzdálenost je menší než $2/\sqrt{\pi n}$. ↓

V dalších úlohách bude třeba zkoumat sjednocení nekonečně mnoha množin.

3.20 a) Je dán bod O. Uvažujme systém všech kružnic o poloměru 3 cm, jejichž středy mají od bodu O vzdálenost 5 cm, a dále systém kružnic poloměru 5 cm, jejichž vzdálenost od bodu O je 3 cm. Dokažte, že sjednocení všech kružnic prvního systému splývá se sjednocením všech kružnic druhého systému.

b) Najděte množinu středů všech úseček, jejichž jeden krajní bod leží na jedné z daných kružnic a druhý na druhé.



Obr. 35

□ b) Označme poloměry daných kružnic r_1 a r_2 a jejich středy O_1 a O_2 (obr. 35). Zvolme nejdříve pevně bod K první kružnice a najděme množinu středů úseček, jejichž jeden krajní bod splývá s bodem K a druhý leží na druhé kružnici. Výsledkem je kružnice s poloměrem $r_2/2$ a středem Q, který splývá se středem úsečky KO_2. Je to kružnice, která odpovídá kružnici (O_2, r_2) ve stejnolehlosti se středem K a koeficientem $1/2$. Poznamenejme, že bod Q leží ve vzdálenosti $r_1/2$ od středu P úsečky O_1O_2.

Budeme-li pohybovat bodem K po kružnici (O_1, r_1), bude se bod Q pohybovat po kružnici o poloměru $r_1/2$ a středu P. Hledaná množina je sjednocením všech kružnic o poloměru $r_2/2$, jejichž středy leží na kružnici o poloměru $r_1/2$ a středu P. Množinou všech bodů vyhovujících podmínce úlohy je mezikruží s vnějším poloměrem $(r_1 + r_2)/2$ a vnitřním poloměrem $|r_1 - r_2|/2$. V případě $r_1 = r_2$ je touto množinou kruh. □

3.21 Bod O je počátečním bodem n vektorů délky jedna, které jsou umístěny v jedné polorovině, ohraničené přímkou l, jež prochází bodem O. Dokažte, že v případě lichého n je velikost součtu daných vektorů rovna alespoň jedné. ↓

3.22 Vesnicí A, obklopenou ze všech stran loukami, prochází jediná přímá cesta. Člověk může jít po cestě rychlostí 5 km/hod a po louce rychlostí 2 km/hod. Načrtněte množinu bodů, kterých člověk může dosáhnout za jednu hodinu po vyjití z A.

3.23 Úloha o sýru. Je možno čtvercový sýr s dírkami rozřezat vždy na konvexní části tak, aby v každé části byla právě jedna dírka?

Matematicky můžeme tuto úlohu formulovat takto:

Uvnitř čtverce je několik neprotínajících se kruhů. Je možno čtverec rozdělit na konvexní mnohoúhelníky tak, aby v každém z nich byl právě jeden kruh?

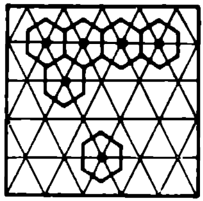
Odpověď je vždy kladná. Pro libovolný příklad s nepříliš velkým počtem kruhů můžeme lehce ukázat, jak čtverec rozřezat, aby byla splněna podmínka úlohy. Abychom však podali vyčerpávající důkaz, musíme ukázat obecný postup, který by se hodil pro libovolný počet kruhů a jejich libovolné rozmístění.

Zkoumejme nejdříve jednodušší úlohu: předpokládejme, že poloměry všech kruhů jsou stejné. Pak můžeme čtverec rozříznout způsobem, který popíšeme nejdříve velmi stručně, jednou větou. Každému kruhu přiřadíme množinu těch bodů čtverce, které mají od něho menší vzdálenost než od všech ostatních kruhů — a to budou právě hledané konvexní mnohoúhelníky ⟨?⟩.

Vysvětleme si nyní tento postup podrobněji. Středy daných kruhů označíme $C_1, C_2, \dots, C_n$, a nechť C_i je jeden z nich. Najdeme množinu všech bodů čtverce, jejichž vzdálenost od bodu C_i není větší než vzdálenost od ostatních bodů C_j. Množina všech bodů roviny, které jsou blíže k bodu C_i než k jednomu zvolenému bodu C_j $(i \neq j)$, tvoří polorovinu ohraničenou osou úsečky C_iC_j (viz kap. 2,A). Nás zajímají body čtverce, které jsou blíž k bodu C_i než ke všem ostatním středům, tedy body, které leží ve všech takto obdržených polorovinách. Tvoří tedy množinu, která je průnikem $(n - 1)$ polorovin a daného čtverce, a tudíž konvexním mnohoúhelníkem ⟨?⟩. Protože každá z uvažovaných polorovin obsahuje bod C_i, a dokonce celý kruh se středem C_i (plyne z toho, že kruhy se středy C_i a C_j mají stejný poloměr a neprotínají se), leží tento kruh i v jejich průniku.

Každému středu C_i odpovídá tudíž mnohoúhelník $\{M : |MC_i| \leqq |MC_j|$ pro všechna $j \neq i$, M leží v daném čtverci$\}$. Je zřejmé, že tyto mnohoúhelníky pokrývají celý čtverec a žádné dva nemají společný vnitřní bod. Chceme-li určit, do kterého z těchto mnohoúhelníků patří bod N daného čtverce, musíme si zodpovědět otázku: Který ze středů C_i leží nejblíž bodu N? Je-li takových nejbližších bodů více, leží bod N na ose úsečky C_iC_j pro některou dvojici $i \neq j$, tedy na hranici mnohoúhelníku, na řezu. Tímto způsobem je čtverec rozřezán na konvexní mnohoúhelníky, z nichž každý obsahuje právě jeden kruh.

Krásný příklad dostaneme, splývají-li středy kruhů s vrcholy sítě tvořené shodnými rovnoběžníky. Náš způsob rozdělení čtverce můžeme popsat takto: ve všech rovnoběžnících sítě vedeme kratší úhlopříčky. Dostaneme tím síť tvořenou navzájem shodnými ostroúhlými trojúhelníky s týmiž vrcholy jako síť rovnoběžníková. Uvnitř každého trojúhelníku sítě vedeme osy stran. Obdržené šestiúhelníky (přesněji jejich průniky se čtvercem) tvoří naše rozdělení čtverce (obr. 36).



Obr. 36

Zatím jsme vyřešili úlohu 3.23 v případě, kdy všechny kruhy měly stejný poloměr. V obecném případě, kdy jsou poloměry kruhů různé, můžeme postupovat takto: Z každého bodu, který leží vně všech daných kruhů, vedeme ke všem kruhům tečny. Množina bodů přiřazená kruhu γ se bude skládat z kruhu γ a z těch bodů, ze kterých je tečna ke kruhu γ kratší než tečny k ostatním kruhům. Tato množina je průnikem několika polorovin obsahujících kruh γ; hraničními přímkami těchto polorovin jsou chordály kružnice γ a některé z dalších kružnic (viz úlohy 2.9 a 3.5). Tímto způsobem bude opět celý čtverec dán jako sjednocení konvexních mnohoúhelníků, které nemají společné vnitřní body, a každý z mnohoúhelníků obsahuje svůj kruh.

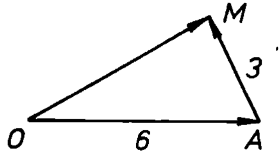
Kapitola 4

MINIMUM A MAXIMUM

Tato kapitola začíná zcela jednoduchými úlohami, ve kterých se hledají největší nebo nejmenší hodnoty, jichž nabývá ta či ona veličina, a končí zajímavými, složitějšími příklady. Úlohy na maximum a minimum je možné obyčejně převést na zkoumání analyticky zadané funkce. Zde si však ukážeme hlavně takové úlohy, ve kterých geometrické úvahy vedou mnohem rychleji k cíli. Uvidíte, jak se při řešení takových úloh používá množin bodů dané vlastnosti.

4.1 Pod jakým úhlem vzhledem k břehům přímého úseku řeky musí plout loďka, aby vzdálenost, o kterou je loďka unesena proudem řeky za dobu její plavby od jednoho břehu ke druhému, byla co možná nejkratší. Přitom je rychlost proudu řeky 6 km/hod a rychlost loďky ve stojaté vodě 3 km/hod.

□ Odpověď je 60°. Musíme totiž nařídit loďku tak,



Obr. 37

aby její absolutní rychlost (vzhledem k břehům) svírala s břehem největší možný úhel (?). Nechť vektor $\overrightarrow{OA}$ značí rychlost toku řeky a $\overrightarrow{AM}$ značí vektor rychlosti loďky vzhledem k vodě (obr. 37). Součet $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$ dává absolutní rychlost loďky vůči břehům. Velikost vektoru $\overrightarrow{AM}$ je 3, jeho směr můžeme zvolit libovolně. Množina všech možných koncových bodů M vektorů $\overrightarrow{AM}$ je kružnice o poloměru 3 se středem v bodě A. Je zřejmé, že největší možný úhel s břehem svírá ze všech vektorů $\overrightarrow{OM}$ vektor $\overrightarrow{OM_0}$, který leží na tečně k uvažované kružnici. Dostaneme tak pravoúhlý trojúhelník, ve kterém je odvěsna rovna polorovině přepony, a tudíž je hledaný úhel 60°. □

4.2 Ze všech trojúhelníků s danou stranou BC a danou velikostí φ úhlu při vrcholu A máme najít ten, pro který je poloměr vepsané kružnice největší.

□ Uvažujme body A, které leží v jedné polorovině ohraničené přímkou BC a pro které je $|\sphericalangle BAC| = \varphi$. Množina středů všech kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC je oblouk kružnice s krajními body B a C (viz 3.7 b). Je vidět, že největší poloměr vepsané kružnice odpovídá rovnoramennému trojúhelníku. □

4.3 Ze všech trojúhelníků s danou stranou a danou velikostí protějšího úhlu vyberte ten, který má největší obsah.

4.4 Po dvou na sebe kolmých přímých cestách jdou dva chodci, jeden rychlostí u, druhý rychlostí v. Když byl první chodec v průsečíku obou cest, zbývalo druhému ještě d kilometrů do tohoto místa. Určete nejmenší vzdálenost obou chodců. $\downarrow$

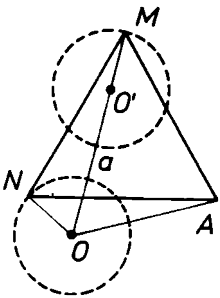
4.5 Vesnicí A, obklopenou ze všech stran loukami, prochází jediná přímá cesta. Člověk může jít po cestě rychlostí 5 km/hod, po louce rychlostí 2 km/hod v libovolném směru. Jak daleko má jít chodec po cestě, chce-li se co nejrychleji dostat z vesnice A k chaloupce B, která stojí ve vzdálenosti 13 km od vesnice a ve vzdálenosti 5 km od cesty?

4.6 Jsou dány dvě protínající se kružnice, nechť A je jeden jejich společný bod. Bodem A máme vést přímku tak, aby její druhé průsečíky s kružnicemi tvořily úsečku maximální délky. $\downarrow$

4.7 V rovině je dán bod O. Vzdálenost jednoho vrcholu rovnostranného trojúhelníku od bodu O je a, vzdálenost druhého vrcholu je b. Jaká je maximální vzdálenost třetího vrcholu od bodu O?

□ Odpověď je $a + b$. Nechť je AMN rovnostranný trojúhelník, pro který je $|OA| = a$, $|ON| = b$. Při řešení úlohy můžeme předpokládat, že všechny uvažované trojúhelníky mají jeden vrchol v bodě A. V opačném případě bychom totiž mohli celý trojúhelník otočit kolem bodu O tak, aby vrchol, jehož vzdálenost od bodu O je a, splynul s bodem A. Při tomto otočení se nezmění vzdálenosti bodů od bodu O. Budeme tedy předpokládat, že A je pevný bod ve vzdálenosti a od bodu O a bod N probíhá kružnici o poloměru b a středu O (obr. 38). Jakou množinu pak probíhá bod M? Odpověď je dána v úloze 1.6: Bod M probíhá dvě kružnice, které dostaneme z kružnice $(O; b)$ otočením o úhel 60° kolem bodu A. Z nich stačí vzít jen jednu, druhá je s ní souměrně sdružená podle přímky OA. Vzdálenost jejího středu O' od bodu O je a (neboť trojúhelník OAO' je rovnostranný) a její poloměr je b. Tudíž je maximální vzdálenost bodu O od třetího vrcholu M rovna $a + b$. □

Z této úlohy plyne zajímavé tvrzení: vzdálenost libovolného bodu roviny od vrcholu rovnostranného trojúhelníku není nikdy větší než součet vzdáleností tohoto bodu od zbývajících dvou vrcholů.



Obr. 38

4.8 Jaká je největší možná vzdálenost bodu O od vrcholu M čtverce $AKMN$, jestliže

a) $|OA| = |ON| = 1$;

b) $|OA| = a$, $|ON| = b$?

4.9 Ze všech trojúhelníků s danou jednou stranou a velikostí protějšího úhlu vyberte trojúhelník s maximálním obvodem. ↓

Kde umístit bod?

4.10 Myš může vylézt třemi dírami, a to v bodech A, B, C, které jsou kočce známy. Kam si má kočka sednout, aby byla co nejblíže i k díře, která je od ní nejvzdálenější? Jinými slovy, hledáme místo, pro které je maximum vzdáleností od daných děr nejmenší.

□ Uvažujme kruhy téhož poloměru r se středy v bodech A, B, C. Je třeba najít nejmenší poloměr r_0, při kterém mají tyto tři kruhy společný bod. Bude to pak jejich jediný společný bod, a to bude hledaný bod K. Je-li totiž M jiný bod, je vnějším bodem alespoň jednoho z uvažovaných kruhů o poloměru r_0, a je tudíž jeho vzdálenost od jednoho z bodů A, B, C větší než r_0.

V případě ostroúhlého trojúhelníku ABC splývá bod K se středem opsané kružnice, v případě pravoúhlého trojúhelníku nebo tupoúhlého trojúhelníku je bod K středem nejdelší strany. □

□ Bod K můžeme najít také jako střed nejmenšího kruhu, který obsahuje body A, B, C ⟨?⟩. □

□ Ukážeme ještě jeden způsob řešení úlohy 4.10.

Rozdělíme rovinu na tři množiny:

$$a = \{M : |MA| \geqq |MB| \text{ a } |MA| \geqq |MC|\},$$
$$b = \{M : |MB| \geqq |MA| \text{ a } |MB| \geqq |MC|\},$$
$$c = \{M : |MC| \geqq |MB| \text{ a } |MC| \geqq |MA|\}.$$

To jsou tři úhly, jejichž ramena leží na osách stran trojúhelníku ABC. Sedí-li kočka v úhlu a, pak z bodů A, B, C je od ní nejvzdálenější bod A, sedí-li v úhlu b, je nejvzdálenější bod B a v úhlu c bod C.

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, je pro kočku nejvýhodnější sedět ve společném vrcholu úhlů a, b, c, tj. ve středu opsané kružnice. Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý nebo tupoúhlý, je zřejmě pro kočku nejvýhodnější sedět ve středu nejdelší strany trojúhelníku ABC. (Podobně v případě, kdy body A, B, C leží na přímce.) □

4.11 V části lesa ohraničené třemi rovnými železničními tratěmi žije medvěd. Kde si má vybudovat doupě, chce-li být od tratě co nejdál?

4.12 a) V kruhovém jezeře žijí tři krokodýli. Kde mají sedět, má-li být největší ze vzdáleností libovolného bodu jezera k nejbližšímu krokodýlovi co nejmenší?
b) Řešte tutéž úlohu pro čtyři krokodýly.

4.13 Úloha o člunu. Na malém ostrově O stojí maják, jehož světelný paprsek osvětluje na mořské hladině úsečku délky $a = 1$ km. Světelný paprsek se rovnoměrně otáčí kolem osy majáku, jednu otáčku vykoná za čas $T = 1$ min. Člun, který může plout nejvýše rychlostí v, se má dostat nepozorovaně k ostrovu (tak, aby nebyl osvětlen paprskem majáku). Při jaké nejmenší rychlosti v se mu to podaří?

□ Nazvěme kruh o poloměru a, který je světlometem osvětlován, „nebezpečným kruhem". Je zřejmé, že pro člun je nejvýhodnější vplout do tohoto kruhu v bodě A, který byl právě osvětlen.

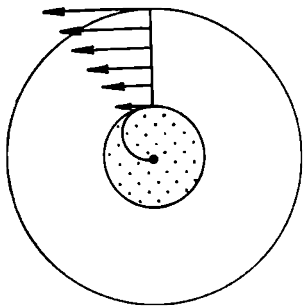
Pluje-li člun k ostrovu po úsečce, dostane se k ostrovu za čas a/v; aby paprsek člun nedostihl, je třeba, aby se světelný paprsek nestačil za tuto dobu jednou otočit, tj. aby byla splněna nerovnost $a/v < T$, odkud

$$v > a/T = 60 \text{ km/hod.}$$

Tím jsme dokázali, že při $v > 60$ km/hod se může člun dostat nepozorovaně na ostrov. Z toho ovšem neplyne, že 60 km/hod je dolní hranicí rychlosti, při které nebude člun objeven. Kapitán člunu může totiž vybrat i jinou cestu než po úsečce AO.

Skutečně se ukáže, že existuje výhodnější dráha člunu. Než budete číst dál, promyslete si některou výhodnější cestu sami.

Všimněme si, že rychlosti různých bodů světelného paprsku jsou různé: čím blíže leží bod k bodu O, tím je jeho rychlost menší (obr. 39). Úhlová rychlost paprsku je rovna $2\pi/T$. Po kružnici o poloměru $r = vT/2\pi$ může člun klidně plout před světelným paprskem, protože jeho rychlost je rovna rychlosti odpovídajícího bodu paprsku. Vně kruhu o poloměru r a středu O je rychlost



Obr. 39

bodu na paprsku větší a uvnitř tohoto kruhu je rychlost bodu paprsku menší než v (nazveme tento kruh „bezpečným kruhem").

Dostal-li se člun bez potíží k bezpečnému okruhu, dostane se nepozorovaně na ostrov. Jedna z možných cest uvnitř bezpečného kruhu je kružnice o poloměru $r/2$ procházející bodem O: pohybuje-li se člun K po této kružnici rychlostí v, otáčí se úsečka KO kolem bodu O se stejnou úhlovou rychlostí, se kterou by se člun pohyboval po kružnici o poloměru r, tj. takovou, jakou se pohybuje paprsek majáku (viz úloha 0.3). Proto nebude člun osvětlen.

Hlavním úkolem člunu je tedy dosáhnout bezpečného kruhu.

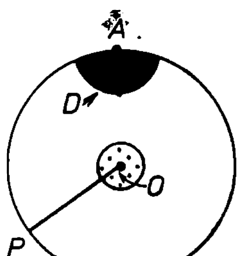
Pluje-li člun do bezpečného kruhu po poloměru AO a pak výše popsaným způsobem, splní svůj úkol už při rychlosti

$$v > \frac{1}{1 + (1/2\pi)} \frac{a}{T} \doteq 0{,}862 \frac{a}{T} = 51{,}7 \text{ km/hod.}$$

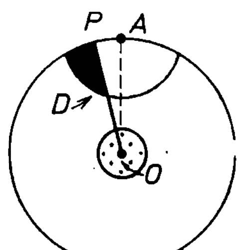
Podařilo se nám zlepšit předcházející odhad pro nejnižší rychlost člunu, při které se může člun dostat nepozorovaně k ostrovu. Ukáže se, že to není nejlepší odhad. Ten najdeme nyní.

Množina bodů nebezpečného kruhu, kterých může člun dosáhnout za čas t, je oblast ohraničená kruhovým obloukem o poloměru vt se středem v bodě A. Předpokládejme, že za tuto dobu se paprsek otočí z polohy OA do polohy OP (obr. 40—42). Množinu všech bodů, do kterých se za dobu t dostane člun nepozorován, označíme D. Na obrázcích je ukázáno, jak se mění množina D v závislosti na t. Jsou možné dva případy:

1) není-li rychlost v dostatečně veliká, pak množina D v jistém čase t úplně vymizí, aniž by se člun dostal před-

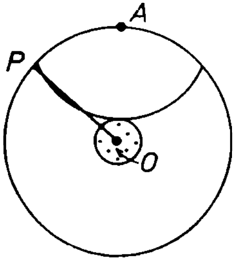


Obr. 40

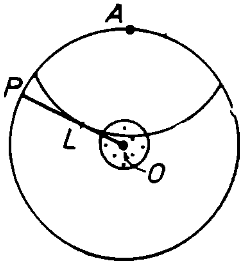


Obr. 41

tím do bezpečného kruhu. Bude tedy zpozorován nejpozději v čase $t = t_0$, kdy se paprsek dotýká v bodě L kruhového oblouku o poloměru vt_0 se středem v bodě A (obr. 43). Bod L leží vně bezpečného kruhu (jinak by člun dosáhl nepozorovaně ostrova), přičemž čím je v větší, tím větší je čas t_0 a tím blíže je bod L k ostrovu.



Obr. 42



Obr. 43

2) je-li rychlost v větší než jistá hodnota v_0, má množina D v jistém čase t neprázdný průnik s bezpečným kruhem a člun dostihne ostrova.

Minimální hodnota v_0 rychlosti člunu odpovídá tomu případu, kdy se paprsek dotýká oblouku o poloměru $v_0 t_0$ v bodě N, ležícím na hraniční kružnici bezpečného kruhu (obr. 44). Abychom našli hodnotu v_0, označme β velikost úhlu NOA a využijme těchto rovností:

$$|NO| = r = \frac{v_0 T}{2\pi}, \quad |AN| = v_0 t_0,$$

$$\frac{|AN|}{|NO|} = \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{2\pi + \beta}{t_0} = \frac{2\pi}{T},$$

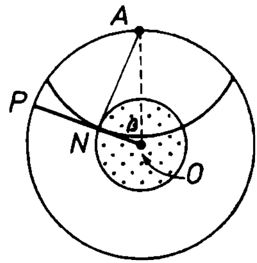
$$|NO| = a \cos \beta.$$

Z první a poslední rovnosti plyne

$$v_0 = (2\pi\, a \cos\beta)/T$$

a z prvních čtyř dostaneme

$$2\pi + \beta = \operatorname{tg}\beta.$$



Obr. 44

Tuto rovnici můžeme řešit pouze přibližně, například pomocí tabulek. Dostaneme, že se β rovná přibližně $0{,}92\pi/2$, odkud

$$v_0 \doteq 0{,}8a/T = 48\ \mathrm{km/hod}.$$

Při rychlostech člunu větších než v_0 se může člun dostat bezpečně k ostrovu. □

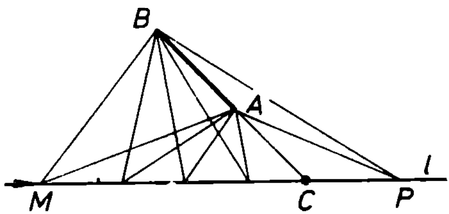
4.14 a) Syn plave uprostřed kruhového bazénu. Otec stojící na okraji bazénu neumí plavat, ale běží čtyřikrát rychleji, než plave syn. Syn dokáže běžet rychleji než otec, a chce mu uniknout. Podaří se mu to?

b) Při jakém poměru rychlostí v a u (v rychlost, jakou syn plave; u rychlost běhu otce) nemůže syn utéci?

Kapitola 5

HLADINY

V této kapitole pojednáme o úlohách a větách předcházejících kapitol, budeme je však formulovat v jiné terminologii. Seznámíme se s pojmem funkce definované v rovině a s pojmem hladiny funkce, které jsou zvlášť vhodné při řešení úloh na maximum a minimum.



Obr. 45

5.1 Úloha o autobusu. Po přímé silnici jede zájezdový autobus. Stranou od silnice stojí palác, jehož průčelí svírá se silnicí jistý úhel. V kterém místě na silnici má autobus zastavit, aby si cestující mohli z autobusu průčelí paláce nejlépe prohlédnout?

Matematicky můžeme úlohu formulovat takto:

Je dána přímka l a úsečka AB, která ji neprotíná. Na přímce l najděte bod P tak, aby úhel APB byl co největší (obr. 45).

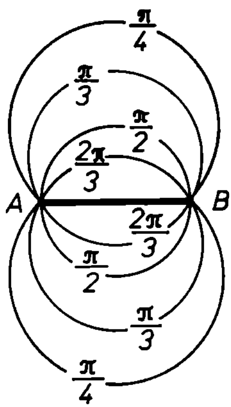
Nejdříve se podívejme, jak se asi mění úhel AMB, pohybuje-li se bod M po přímce l. Jinými slovy, jak se chová funkce f, která každému bodu M přímky l přiřazuje velikost úhlu AMB.

Lehce můžeme sestrojit přibližný graf této funkce. Připomeňme, že graf se sestrojí takto: nad každým bodem M naší přímky zvolíme bod ve vzdálenosti $f(M) = |\sphericalangle AMB|$.

Úlohu bychom mohli řešit analyticky: zavést na přímce l soustavu souřadnic a vyjádřit velikost úhlu AMB pomocí souřadnice x bodu M a pak zjistit, pro kterou hodnotu x nabývá funkce svého maxima. Avšak vyjádření funkce $f(x)$ je poměrně složité.

Podáme elementárnější a poučnější řešení. K tomu bude třeba zjistit, jak závisí velikost úhlu AMB na poloze bodu M, když bod M probíhá celou rovinu, nejen přímku l.

□ Množina všech bodů M v rovině, pro něž má úhel



Obr. 46

ABM danou velikost φ, je dvojice souměrně sdružených kruhových oblouků s krajními body A, B (kap. 2, E). Tyto oblouky, probíhá-li φ interval $(0, \pi)$, pokrývají celou rovinu s výjimkou přímky AB. Například hodnotě $\varphi = \pi/2$ odpovídá kružnice nad průměrem AB (obr. 46).

Budeme nyní zkoumat pouze body M, ležící na přímce l. Z nich máme vybrat bod, pro který je úhel AMB největší. S výjimkou průsečíku C přímky l s přímkou AB prochází každým bodem přímky l oblouk našeho systému; je-li $|\sphericalangle AMB| = \varphi$, leží bod M na oblouku odpovídajícím hodnotě φ. Máme tedy ze všech uvažovaných oblouků, které mají společný bod s přímkou l, vybrat ten, který odpovídá největší hodnotě φ.

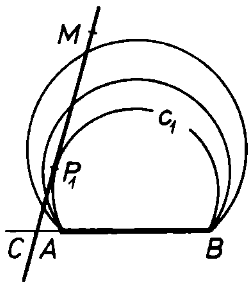
Uvažujme jen jednu z polopřímek, na které dělí přímku l bod C. (Případ, kdy přímka l je rovnoběžná s úsečkou AB, přenecháme čtenáři.) Sestrojíme oblouk c_1, který se dotýká zvolené polopřímky, a dokážeme, že z bodu dotyku P_1 je úsečka AB vidět pod největším úhlem (obr. 47). Skutečně, libovolný bod M naší polopřímky různý od bodu P_1 leží vně oblouku c_1. Odtud plyne (kap. 2, E), že $|\sphericalangle AMB| < |\sphericalangle AP_1B|$.

Je zřejmé, že pro druhou polopřímku je situace stejná; bod P_2, ze kterého je vidět úsečka AB pod největším úhlem, je bodem dotyku této polopřímky a jednoho z uvažovaných oblouků.

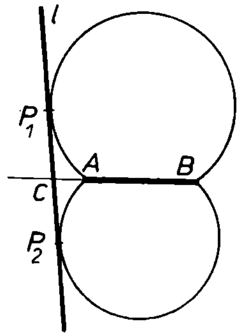
Tím jsme dokázali, že hledaný bod P splývá s jedním z bodů P_1, P_2, ve kterých se dotýkají kružnice procházející body A, B přímky l (obr. 48). Bod P splyne s tím z bodů P_1, P_2, pro který je úhel PCA ostrý. Je-li úsečka AB kolmá k přímce l, je ze symetrie zřejmé, že oba body P_1 a P_2 splňují podmínky úlohy. Avšak výletníci si musí v každém případě vybrat z bodů P_1, P_2 ten, ze kterého vidí průčelí paláce. □

Funkce definované v rovině. Základní myšlenka řešení úlohy 5.1 spočívala v tom, že jsme na celé rovině uvažovali funkci f, která každému bodu M přiřazovala velikost úhlu AMB, tj. $f(M) = |\sphericalangle AMB|$.

V předcházejících paragrafech jsme se vlastně už setkali s různými funkcemi v rovině. Kromě nejjednodušších funkcí v rovině, jako $f(M) = |OM|$, $f(M) = \varrho(l, M)$, $|f(M) = |\sphericalangle ABM|$ (kde O, A, B jsou dané



Obr. 47



Obr. 48

body a l daná přímka), jsme zkoumali součty, rozdíly, poměry těchto funkcí a jiné jejich kombinace.

Hladiny funkcí. Mnoho podmínek, kterými jsme definovali množiny bodů, je možno formulovat takto: v rovině nebo v její části je definována funkce f a je třeba najít množinu všech bodů M, ve kterých tato funkce nabývá dané hodnoty h, tj. $\{M : f(M) = h\}$.

Zpravidla je touto množinou pro každé pevné číslo h křivka; rovina se tímto způsobem rozkládá na křivky, které se nazývají hladinami (někdy též vrstevnicemi) funkce f. Při řešení úlohy 5.1 jsme tedy zkoumali hladiny funkce $f(M) = |\sphericalangle AMB|$.

Graf funkce. Vysvětlíme si nyní pojem hladina funkce. Pro funkce definované v rovině je možné sestrojit graf v podstatě stejně jako pro funkce $y = f(x)$ definované na přímce, jen s tím rozdílem, že to bude útvar v prostoru. Budeme předpokládat, že rovina, na které je funkce definována, je horizontální, a pro každý její bod M vyznačíme v prostoru bod ležící nad bodem M ve vzdálenosti $f(M)$, je-li $f(M) \geqq 0$, a pod bodem M ve vzdálenosti $|f(M)|$, je-li $f(M) < 0$. Všechny takto vyznačené body tvoří plochu, která se nazývá grafem funkce f. Jinými slovy, zavedeme v horizontální rovině soustavu souřadnic Oxy; kladná část osy z nechť směřuje kolmo vzhůru. Grafem funkce bude množina bodů se souřadnicemi $[x; y; z]$, kde $z = f(M)$ a $[x; y]$ jsou souřadnice bodu M v rovině. (Není-li funkce definována ve všech bodech roviny, ale jen v bodech její jisté části, leží graf jen nad touto částí.)

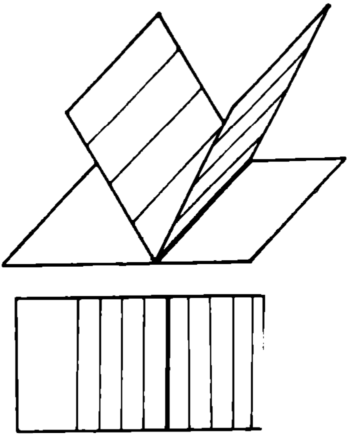
Vidíme, že hladina $\{M : f(M) = h\}$ se skládá z těch bodů M, nad kterými jsou body grafu ve stejné úrovni, ve výšce h.

Na následujících obrázcích jsou znázorněny grafy funkcí, jejichž hladinami jsou množiny naší abecedy. U každého grafu je též obrázek vyznačující hladiny příslušné funkce.

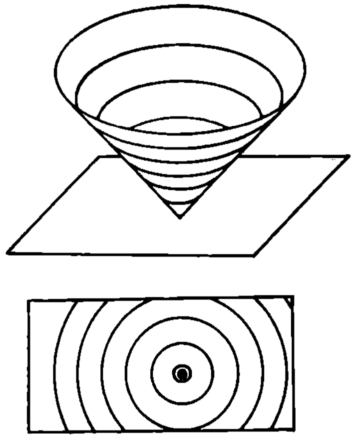
C. $f(M) = \varrho(M, l)$, grafem je hranice klínu, hladinami jsou dvojice rovnoběžných přímek (obr. 49).

D. $f(M) = |MO|$, grafem je část kuželové plochy, hladinami jsou soustředné kružnice (obr. 50).

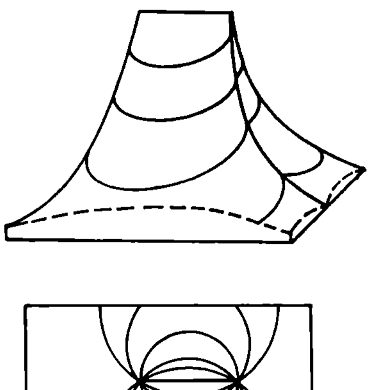
E. $f(M) = |\sphericalangle AMB|$, grafem je „horský hřbet“, nejvyšší body tvoří horizontální úsečku ve výšce π nad úsečkou AB; v krajních bodech horizontální



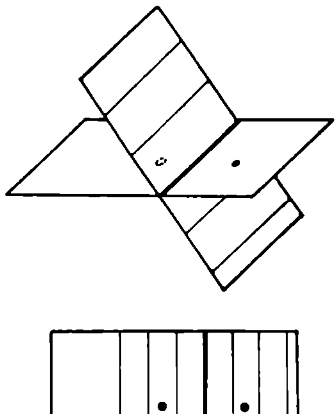
Obr. 49



Obr. 50



Obr. 51



Obr. 52

úsečky jsou vertikální srázy, z ostatních bodů lze zvolna sestoupit k nulové hladině, kterou tvoří přímka AB s výjimkou úsečky AB (obr. 51).

F. $f(M) = |MA|^2 - |MB|^2$, grafem je rovina, hladinami navzájem rovnoběžné přímky (obr. 52).

G. $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$, grafem je rotační paraboloid, hladinami soustředné kružnice (obr. 53).

H. $f(M) = |MA| / |MB|$, graf má v bodě A důlek, u bodu B se zdvíhá nade všechny meze; hladinami jsou kružnice, jejichž středy leží na přímce AB, každé dvě z nich mají za svou chordálu osu úsečky AB. Ta je sama též hladinou odpovídající hodnotě 1 (obr. 54).

J. $f(M) = \varrho(M, l_1)/\varrho(M, l_2)$, graf se skládá ze dvou částí hyperbolických paraboloidů, hladinami jsou dvojice přímek procházejících průsečíkem přímek l_1, l_2 (obr. 55).

K. $f(M) = \varrho(M, l_1) + \varrho(M, l_2)$, grafem je část čtyřboké jehlanové plochy, hladinami jsou pravoúhelníky s úhlopříčkami na přímkách l_1, l_2 (obr. 56).

Funkce

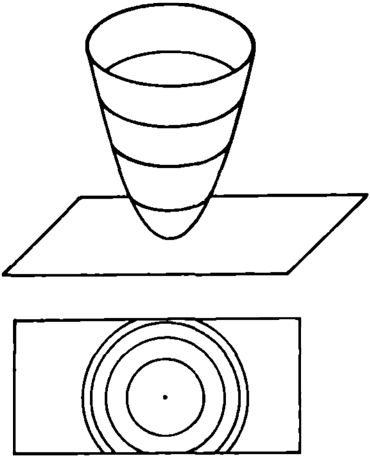
$$f(M) = \lambda_1\varrho(M, l_1) + \lambda_2\varrho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n\varrho(M, l_n),$$

o které jsme hovořili v kap. 2 (věta o vzdálenostech od přímky), má v každé části Q, na kterou je rovina rozdělena přímkami l_1, l_2, ..., l_n, tvar

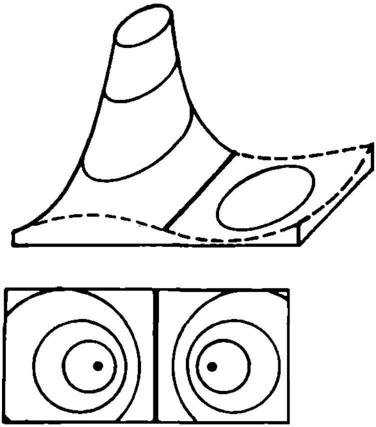
$$f(x, y) = ax + by + c,$$

je tedy lineární. Proto se její graf bude skládat z kousků rovin, které jsou buď nakloněné, nebo (je-li $a = b = 0$) horizontální. To jsme viděli na příkladech množin v bodech C, J, K naší abecedy.

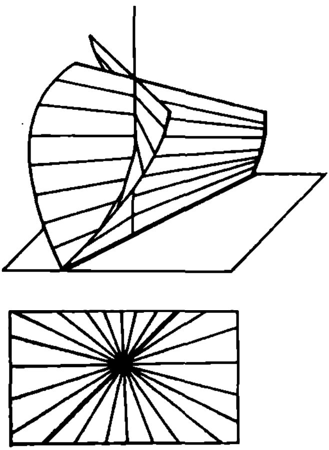
Hladiny takové funkce se skládají z kousků přímek;



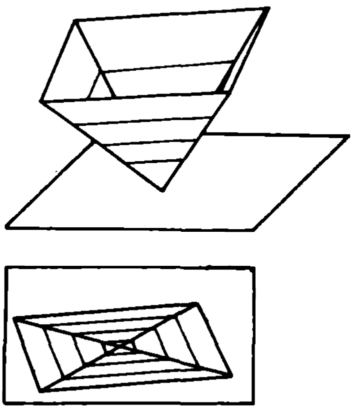
Obr. 53



Obr. 54



Obr. 55

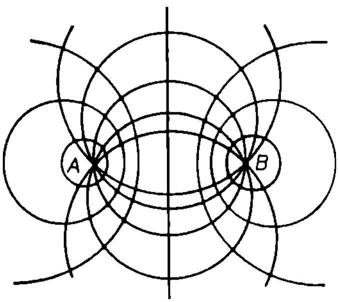


Obr. 56

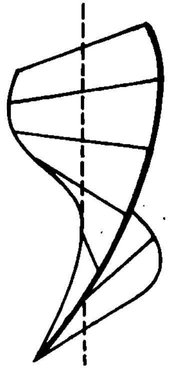
obsahuje-li graf horizontální plošinku, obsahuje některá hladina celou část Q roviny.

Funkce f tvaru $f(M) = \lambda_1|MA_1|^2 + \lambda_2|MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n|MA_n|^2$ je v případě $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$ také lineární funkcí definovanou na celé rovině (příklad F) a v obecném případě při $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$ se dá psát ve tvaru

$$f(M) = d|MA|^2,$$



Obr. 57



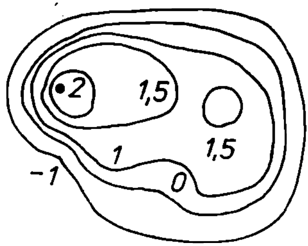
Obr. 58

kde A je jistý bod roviny. V tomto případě jsou hladinami kružnice (věta o druhých mocninách vzdáleností §2) a grafem je rotační paraboloid.

Nejsložitější grafy v naší abecedě mají funkce $f(M) = |\sphericalangle AMB|$ a $f(M) = |AM| / |BM|$. Poznamenejme, že mezi hladinami těchto funkcí je zajímavý vztah: jsou to dva systémy kružnic, přičemž každá kružnice jednoho systému protíná každou kružnici druhého systému kolmo ⟨ ? ⟩; říkáme jim ortogonální systémy (obr. 57).

Ukážeme ještě jeden příklad jednoduché funkce, jejíž hladiny jsou polopřímky vycházející z jednoho bodu a grafem je poměrně složitá plocha. Je to funkce $f(M) = |\sphericalangle MAB|$, kde A, B jsou dané body roviny. Jejím grafem je nad každou polorovinou, na kterou dělí rovinu přímka AB, šroubová plocha, *helikoid* (obr. 58).

Mapa funkce. Jak vidíme, pro mnohé funkce je dost složité sestrojit jejich graf. Pro představu o průběhu funkce je zpravidla výhodnější zakreslit si její hladiny.



Obr. 59

Geografická mapa se sestavuje tímto způsobem: nechť je $f(M)$ nadmořská výška v místě M. Narýsují se hladiny $\{M : f(M) = 200 \text{ m}\}$, $\{M : f(M) = 400 \text{ m}\}$ atd. Oblasti mezi těmito vrstevnicemi se vyznačují různými barvami: oblast $\{M : 0 < f(M) < 200 \text{ m}\}$ zeleně, oblasti $\{M : f(M) > 200 \text{ m}\}$ hnědě a oblasti $\{M : f(M) < 0\}$ různými odstíny modré.

K sestavení mapy funkce je třeba narýsovat několik jejích hladin — dostatečně mnoho, aby z nich bylo možné usoudit na průběh ostatních — a připsat ke každé z nich hodnotu funkce, které tato hladina odpovídá.

Narýsujeme-li hladiny odpovídající rovnoměrně rostoucím funkčním hodnotám, dá se z jejich hustoty usoudit na strmost grafu: hladiny jsou hustěji rozloženy tam, kde je graf strmější (obr. 59).

Dělicí křivky. Při řešení úlohy 3.23 o sýru jsme zkoumali poměrně složitou funkci

$$f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, \ldots, |MC_n|\},$$

která přiřazuje každému bodu jeho nejmenší vzdálenost od bodů $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Při vlastním řešení úlohy nás ani tak nezajímala samotná funkce, jako s ní svázané křivky, které dělily rovinu na oblasti; každá oblast byla průnikem polorovin. Zkusme si představit mapu a graf této funkce. Začneme u nejjednodušších případů $n = 2$ a $n = 3$.

5.2 a) V rovině jsou dány různé body C_1 a C_2. Nakreslete hladiny funkce $f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|\}$.

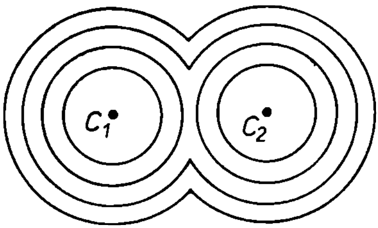
b) V rovině jsou dány body C_1, C_2, C_3, které neleží na přímce. Nakreslete hladiny funkce

$$f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}.$$

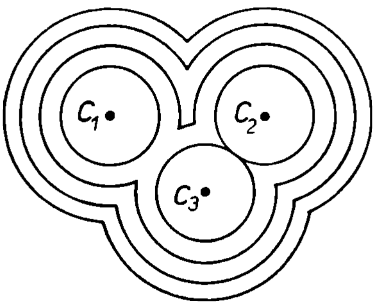
□ a) Vezměme nejdříve množinu všech bodů M, pro které je $|MC_1| = |MC_2|$. Touto množinou je osa úsečky C_1C_2, která dělí rovinu na dvě poloroviny, a až na body společné přímky jsou body jedné poloroviny blíž k bodu C_1, body druhé poloroviny blíž k bodu C_2. V první polorovině tudíž platí $f(M) = |MC_1|$ a ve druhé $f(M) = |MC_2|$. Sestrojíme tedy v první polorovině hladiny funkce $f(M) = |MC_1|$, což jsou kružnice (přesněji průniky kružnic s uvažovanou polorovinou) a výslednou mapu ještě doplníme obrazem souměrně sdruženým podle osy úsečky C_1C_2 (obr. 60).

b) Uvažujme množiny $\{M : |MC_1| = |MC_2| \leqq |MC_3|\}$, $\{M : |MC_2| = |MC_3| \leqq |MC_1|\}$, $\{M : |MC_1| = |MC_3| \leqq$

$\leq |MC_2|\}$. To jsou tři polopřímky na osách stran trojúhelníku $C_1C_2C_3$, které vycházejí ze společného bodu O a dělí rovinu na tři oblasti (viz úloha 3.1). V oblasti, která obsahuje bod C_1, platí $f(M) = |MC_1|$, v oblasti s bodem C_2 je $f(M) = |MC_2|$ a ve třetí oblasti platí $f(M) = |MC_3|$. Mapu funkce $f(M) = \min \{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}$ dostaneme tedy takto: v první oblasti vezmeme mapu funkce $f(M) = |MC_1|$, ve druhé mapu funkce $f(M) = |MC_2|$ a ve třetí funkce $f(M) = |MC_3|$ a tyto tři mapy slepíme podél dělicích křivek, kterými jsou tři polopřímky (obr. 61). □



Obr. 60



Obr. 61

Graf funkce

$$f(M) = \min\{|MC_1|, |MC_2|, \ldots, |MC_n|\}$$

si můžeme představit takto: nasypeme do truhlíku rovnou vrstvu písku a v bodech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ provrtáme do dna truhlíku dírky, kterými část písku vypadne; kolem každé dírky se vytvoří „trychtýř". Plocha tvořená všemi těmito trychtýři je grafem funkce f. Předpokládáme ovšem, že jsme vzali dostatečně silnou vrstvu písku tak sypkého, aby sklon trychtýřů byl 45°.

Vraťme se teď k úlohám 3.11 a 3.12. Jejich podmínky lze také formulovat pomocí funkcí definovaných v rovině.

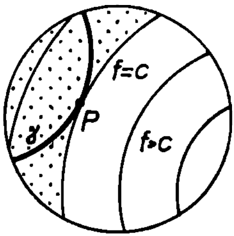
5.3 V rovině jsou dány různé body A, B. Zakreslete hladiny funkcí
a) $f(M) = \max\{|\sphericalangle AMB|, |\sphericalangle BAM|, |\sphericalangle MBA|\}$,
b) $f(M) = \min\{|AM|, |MB|, |AB|\}$
a popište jejich grafy.

Extrémy funkce. Nechť je f funkce definovaná v rovině. Představme si její graf jako kopcovitou krajinu. Maximální hodnoty $f(M)$ odpovídají výškám kopců grafu a minimální hodnoty jsou úrovně proláklin.

Na mapě funkce jsou vrcholy a proláklinу zpravidla obepnuty hladinami. Například funkce $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$ nabývá svého minima ve středu M_0 úsečky AB a hladinami jsou soustředné kružnice se středem v bodě M_0.

Složitější mapu dostaneme pro funkci $f(M) = |\sphericalangle AMB|$. Tato funkce nabývá své maximální hodnoty π ve všech bodech úsečky AB (s výjimkou bodů A, B, ve kterých není definována). Své minimální hodnoty 0 nabývá ve všech ostatních bodech přímky AB. Přechod od maximální hodnoty k minimální není v bodech A, B plynulý, graf má v těchto bodech vertikální srázy.

Na začátku paragrafu jsme použili mapu hladin funkce při řešení úlohy 5.1. Byla to také úloha na hledání maxima funkce, avšak jiného typu. Obecně se úloha formuluje takto: určete, jakou největší nebo nejmenší hodnotu nabývá funkce f (definovaná v rovině)



Obr. 62

v bodech dané křivky γ. V uvažované úloze byla křivka přímkou. Postup, který jsme uplatnili v úloze 5.1, lze užít i v jiných obdobných úlohách. Funkce nabývá zpravidla své největší a nejmenší hodnoty na křivce γ v některém z těch bodů, ve kterých se křivky γ dotýká hladina funkce. Prochází-li však křivka bodem, ve kterém nabývá funkce své největší nebo nejmenší hodnoty v celé rovině, nabývá zřejmě v tomto bodě také své největší nebo nejmenší hodnoty na křivce γ.

Nechť funkce f nabývá své maximální hodnoty na křivce γ v bodě P a je $f(P) = c$. Pak křivka γ nemůže mít společný bod s oblastí $\{M : f(M) > c\}$, musí celá ležet v doplňku $\{M : f(M) \leqq c\}$, přičemž bod P leží na dělicí křivce mezi těmito oblastmi, na hladině $\{M :$

$: f(M) = c\}$. Křivka γ nemůže tedy protínat hladinu $\{M : f(M) = c\}$, musí se jí v bodě P dotýkat (obr. 62).

Viděli jsme, jak se tento princip „dotyku" uplatnil při hledání extrémů v úlohách paragrafu 4. V těchto úlohách jsme hledali maximum nebo minimum jednoduchých funkcí $f(M) = \varrho(M, l)$, $f(M) = |\sphericalangle MOA|$, $f(M) = |MA|$ na dané křivce γ. Hladina odpovídající extremální hodnotě se dotýkala křivky γ. Křivkou γ byla vždy kružnice. Také některé následující úlohy vedou na hledání maxima nebo minima funkce na dané kružnici nebo přímce.

5.4 a) Na přeponě pravoúhlého trojúhelníku najděte takový bod, aby jeho průměty na odvěsny měly nejmenší vzdálenost.

b) Na dané přímce najděte bod M tak, aby vzdálenost jeho průmětů na ramena daného úhlu byla nejmenší. ↓

5.5 Je dána kružnice se středem O a její vnitřní bod A. Najděte na kružnici bod M, pro který je velikost úhlu AMO nejmenší.

5.6 Jsou dány body A, B. Na dané kružnici γ najděte bod M, pro který je

a) součet

b) rozdíl

druhých mocnin vzdáleností bodu M od bodů A a B minimální.

5.7 Je dána přímka l a s ní rovnoběžná úsečka AB. Najděte na přímce l ty body M, pro které je hodnota $|AM| / |BM|$ nejmenší nebo největší. ↓

5.8 Poblíž jezera vedou dvě přímé cesty. Pro který bod na břehu jezera je součet jeho vzdáleností od obou cest nejmenší? Uvažujte případ, kdy má jezero tvar a) kruhu, b) pravoúhelníku.

Poznamenejme, že i při hledání maxima funkce $y = f(x)$ jedné proměnné se uplatňuje „princip dotyku". Nechť je narýsován graf funkce f, kterým je nějaká křivka. Najít maximum funkce f znamená najít nejvyšší bod grafu. Stačí tedy najít přímku, která se „dotýká" grafu, je rovnoběžná s osou x a celý graf leží pod ní.

Kapitola 6

KŘIVKY DRUHÉHO STUPNĚ

Elipsy, hyperboly, paraboly. Dosud jsme se omezovali na nepříliš širokou třídu křivek, které se probírají již na základní škole; mluvili jsme pouze o přímkách a kružnicích. Všechny množiny naší abecedy se v podstatě skládaly z částí přímek a kružnic. V tomto paragrafu se seznámíme s některými dalšími křivkami — *elipsami, hyperbolami a parabolami*. Tyto křivky se nazývají souhrnně *kuželosečky*, protože každou z nich můžeme dostat jako průnik roviny a kuželové plochy.

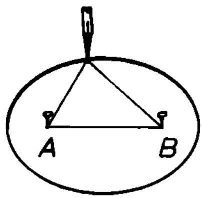
Nejdříve budeme definovat elipsy, hyperboly a paraboly analogicky jako množiny naší abecedy v 2. kap. Dále vystupují jako obalové křivky systémů přímek. Pomocí soustavy souřadnic nakonec ukážeme, že tyto křivky jsou dány algebraickými rovnicemi druhého stupně. Důkaz ekvivalence těchto definic není jednoduchý, ale všechny jsou užitečné. Každá z definic umožňuje výhodně řešit jinou třídu úloh.

Rozšiřme tedy naši abecedu o další písmena L, N, P a posléze o písmeno R.

L. Elipsa. Uvažujme množinu všech bodů M v rovině, pro něž je součet vzdáleností od dvou daných různých bodů A, B roven danému číslu.

Označme toto číslo $2a$, vzdálenost bodů A a B označíme $2c$. Poznamenejme, že pro $a \leqq c$ je tato množina málo zajímavá; je-li $a < c$, dostaneme prázdnou množinu, protože v rovině neexistuje bod M, pro který platí $|AM| + |MB| < |AB|$. Pro $a = c$ je uvažovanou množinou úsečka AB.

Abychom získali představu o tvaru křivky pro $a > c$, zatlučeme v bodech A, B hřebíky a navlékneme na ně provázek délky $2(a + c)$, jehož konce spojíme. Napneme provázek tužkou a opíšeme takto křivku, přičemž dbáme, aby provázek byl stále napnutý. Dostaneme uzavře-



Obr. 63

nou křivku, která se nazývá *elipsa*. Body A, B jsou tzv. *ohniska* této elipsy (obr. 63). Z definice elipsy je zřejmé, že má dvě osy souměrnosti, jednou je přímka AB a druhou osa úsečky AB, jejich průsečík O je *středem* elipsy.

Připustíme-li $A = B$, dostaneme uvedeným způsobem kružnici. Považujeme proto kružnici za zvláštní případ elipsy, pro který splývají obě ohniska se středem.

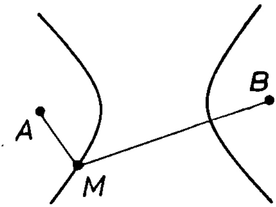
Měníme-li délku provázku, dostaneme celý systém elips s danými ohnisky. Jinými slovy, dostaneme mapu hladin funkce

$$f(M) = |MA| + |MB|.$$

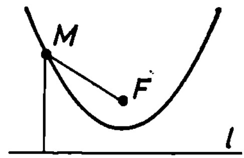
N. Hyperbola. Uvažujme množinu všech bodů, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou daných bodů A a B se v absolutní hodnotě rovná dané hodnotě $2a (a > 0)$.

Nechť je jako v předcházejícím případě $|AB| = 2c$. Je-li $a > c$, je hledaná množina prázdná, protože pro žádný bod M není $|AM| - |MB| > |AB|$ ani $|MB| - |AM| > |AB|$. Pro $a = c$ se hledaná množina skládá ze dvou polopřímek, které dostaneme z přímky AB vynecháním vnitřních bodů úsečky AB.

V případě $a < c$ se uvažovaná množina skládá ze dvou částí, tzv. *větví*. Jedna je množinou $\{M : |MA| - |MB| =$



Obr. 64



Obr. 65

$= 2a\}$ a druhá množinou $\{M : |MB| - |MA| = 2a\}$. Celá křivka (sjednocení obou větví) se nazývá *hyperbola* a body A, B jejími *ohnisky* (obr. 64). Z definice plyne, že hyperbola má dvě osy souměrnosti, střed O úsečky AB je jejím *středem*.

Abychom dostali celou mapu hladin funkce

$$f(M) = ||MA| - |MB||,$$

musíme k systému hyperbol s ohnisky A, B přidat osu úsečky AB, která odpovídá hodnotě $f(M) = 0$.

P. Parabola. Množina všech bodů M stejně vzdálených od bodu F jako od přímky l, jež bodem F neprochází, se nazývá *parabola* (obr. 65).

Bod F se nazývá jejím *ohniskem* a přímka l *řídicí* *přímkou* paraboly. Parabola má jednu osu souměrnosti, která prochází ohniskem F kolmo k řídicí přímce.

Shrňme uvedené definice. Doplnili jsme naši abecedu těmito množinami:

L. $\{M : |MA| + |MB| = 2a\}$, kde $2a > |AB|$.
N. $\{M : ||MA| - |MB|| = 2a\}$, kde $2a < |AB|$.
P. $\{M : |MF| = \varrho(M, l)\}$, kde $F \notin l$.

Je-li výsledkem nějaké úlohy množina bodů, kterou lze popsat jednou z vlastností P, L, N, je odpovědí parabola, elipsa nebo hyperbola. K úplné odpovědi je ovšem třeba určit polohu a rozměry kuželosečky, např. určit její ohniska a číslo a.

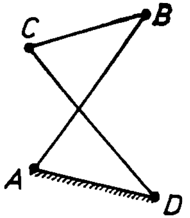
6.1 V rovině jsou dány dva různé body A, B. Najděte množinu všech bodů M, pro které
a) je obvod trojúhelníku AMB roven danému číslu p,
b) není obvod trojúhelníku AMB větší než p,
c) není rozdíl $|MA| - |MB|$ menší než p.

6.2 Je dána úsečka AB a na ní bod T. Najděte množinu všech bodů M, pro které se kružnice vepsaná trojúhelníku AMB dotýká strany AB v bodě T.

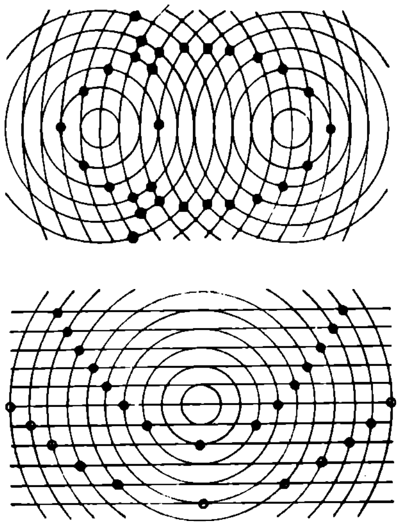
6.3 Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají
a) dané přímky a procházejí daným bodem,
b) dané kružnice a procházejí daným vnitřním bodem této kružnice,
c) dané kružnice a procházejí daným vnějším bodem této kružnice,
d) dané kružnice a dané přímky,
e) daných dvou kružnic. ↓

6.4 Mějme kloubový mechanismus, který leží v rovině a skládá se z tyčí AB, BC, CD, přičemž klouby A a D jsou umístěny pevně, klouby B a C se pohybují v rovině volně. Je $|AD| = |BC| = a$, $|AB| = |CD| = b$. Najděte množinu všech průsečíků přímek AB a CD, je-li 1) $a < b$, 2) $a > b$ (obr. 66).

6.5 a) V rovině jsou dány dva body A, B, jejichž vzdálenost je přirozené číslo. Sestrojme všechny kružnice s celočíselnými poloměry a středy v bodech A, B. Na obdržené síti zvolme posloupnost jejích vrcholů tak,



Obr. 66



Obr. 67a, obr. 67b

aby každé dva za sebou jdoucí vrcholy byly protějšími vrcholy křivočarého čtyřúhelníku sítě. Dokažte, že všechny body posloupnosti leží buď na elipse, nebo na hyperbole (obr. 67a).

b) V rovině je dána přímka l a na ní bod F. Sestrojme všechny kružnice s celočíselnými poloměry a středy v bodě F a všechny přímky rovnoběžné s přímkou l, jejichž vzdálenost od přímky l je také celé číslo. Dokažte, že všechny body posloupnosti vrcholů sítě sestrojené stejně jako v úloze a) leží na parabole s ohniskem F (obr. 67b).

Plochy, které dostaneme rotací paraboly, elipsy nebo hyperboly kolem její osy, se nazývají *rotační paraboloid*, *rotační elipsoid* nebo *rotační hyperboloid*. Ten je buď *jednodílný*, nebo *dvojdílný*, podle toho, kolem které osy hyperbolu otáčíme.

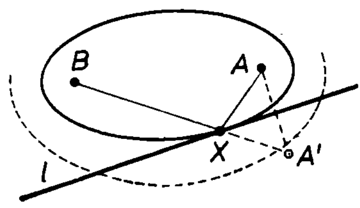
Ohniska a tečny. Mnoho zajímavých úloh pro elipsy, hyperboly a paraboly souvisí s vlastnostmi tečen těchto křivek. Jednu vlastnost tečny elipsy dostaneme porovnáním dvou řešení následující úlohy.

6.6 Jsou dány dva body A a B a přímka l, která je neodděluje. Najděte na přímce l bod X tak, aby součet vzdáleností $|AX| + |XB|$ byl nejmenší.

□ Uvažujme bod A' souměrně sdružený k bodu A podle přímky l. Pro každý bod M přímky l je $|A'M| = |AM|$. Proto je součet $|AM + |MB| = |A'M| + |MB|$ nejmenší, splývá-li bod M s průsečíkem X úsečky $A'B$ a přímky l. Pak je $|A'X| + |XB| = |A'B|$. □

Poznamenejme, že bod X má tuto vlastnost: úsečky AX a BX svírají shodné úhly s přímkou l.

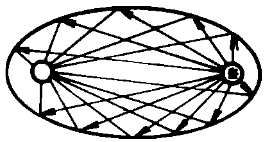
Kdybychom řešili úlohu 6.6 postupem uvedeným v kap. 5 — pomocí hladin funkce — sestrojili bychom



Obr. 68

systém elips $\{M : |AM| + |MB| = c\}$ s ohnisky A, B a vybrali bychom z nich tu, která se dotýká přímky l. Je tedy bod X bodem dotyku elipsy s ohnisky A, B a přímky l (obr. 68). Opravdu, všechny ostatní body M přímky l leží vně elipsy, tj. součet $|AM| + |MB|$ je větší než $|AX| + |BX|$.

Porovnáním obou řešení dostáváme tzv. ohniskovou vlastnost elipsy: *Úsečky spojující bod X elipsy s jejími ohnisky svírají shodné úhly s tečnou elipsy v bodě X.*



Obr. 69

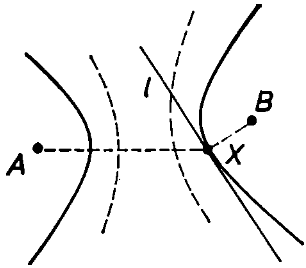
Tato vlastnost elipsy má názornou fyzikální interpretaci. Nechť má reflektor tvar části rotačního elipsoidu, který vznikl rotací elipsy kolem spojnice jejích ohnisek A, B. Umístíme-li bodový zdroj světla do ohniska A, odrážejí se paprsky do bodu B (obr. 69).

Také hyperbola má výše uvedenou ohniskovou vlastnost: *Úsečky spojující bod X hyperboly s jejími ohnisky svírají stejně velké úhly s tečnou hyperboly v bodě X.* Tuto vlastnost hyperboly dokážeme řešením následující úlohy dvěma způsoby.

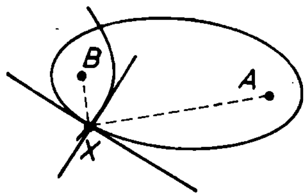
6.7 Jsou dány body A a B a přímka l, která je odděluje, přičemž bod A leží dál od přímky l než bod B. Najděte na dané přímce bod X, pro který je rozdíl vzdáleností $|AX| — |BX|$ největší.

První způsob řešení: označme A' bod souměrně sdružený k bodu A podle přímky l. Hledaným bodem X je průsečík přímky $A'B$ s přímkou l ⟨?⟩. Úsečky AX a BX svírají zřejmě stejně velké úhly s přímkou l.

Druhý postup, který se opírá o výsledky kap. 5, vede k této odpovědi: X je bodem dotyku přímky l a hyperboly s ohnisky A a B (obr. 70). Srovnání obou výsledků dává ohniskovou vlastnost hyperboly.



Obr. 70

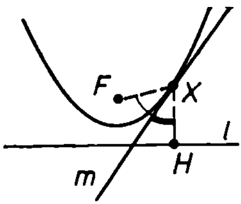


Obr. 71

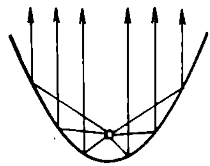
Z ohniskových vlastností plyne zajímavý důsledek týkající se systému všech elips a hyperbol se společnými ohnisky A, B. Vezmeme jednu elipsu a jednu hyperbolu, které se protínají v bodě X. Veďme bodem X přímky, které svírají stejně velké úhly s přímkami AX a BX. Dostaneme tak dvě přímky, které jsou na sebe kolmé (obr. 71). Z ohniskových vlastností plyne, že jedna je tečnou elipsy, druhá tečnou hyperboly. Takže tečny k elipse a hyperbole jsou na sebe kolmé, tvoří tudíž elipsy a hyperboly s ohnisky A a B dva ortogonální systémy křivek, každá elipsa protíná každou hyperbolu kolmo. Oba systémy budou dobře patrné na obrázku k úloze 6.5a, vybarvíme-li čtyřúhelníčky jako na šachovnici.

Ohnisková vlastnost paraboly. *Nechť je parabola dána ohniskem F a řídicí přímkou l a nechť X je její bod. Pak přímka XF a kolmice vedená bodem X na přímku l svírají stejně veliké úhly s tečnou paraboly v bodě X.*

Důkaz. Označme H patu kolmice vedené bodem X na přímku l (obr. 72). Podle definice paraboly je $|XF| = |XH|$, leží tudíž bod X na ose m úsečky FH. Dokážeme, že přímka m je tečnou paraboly. Ukážeme, že má s parabolou společný jen bod X a že celá parabola leží



Obr. 72

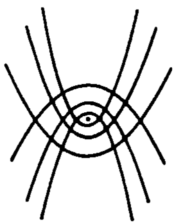

Obr. 73

v jedné polorovině ohraničené přímkou m. Bude to ta polorovina, ve které leží bod F. Pro každý bod M paraboly různý od bodu X je totiž $|MF| < |MH|$, protože $|MF| = \varrho(M, l)$ a $\varrho(M, l) < |MH|$.

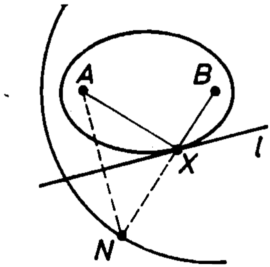
Poznámka. Pro všechny křivky, se kterými jsme se setkali, se tečna definovala takto: tečna křivky γ v jejím bodě M_0 je taková přímka l procházející bodem M_0, pro kterou leží křivka γ (nebo alespoň její průnik s nějakým kruhem o středu M_0) v jedné polorovině ohraničené přímkou l.

Ohniskovou vlastnost paraboly je možné využít při konstrukci reflektorů. Má-li reflektor tvar části rotačního paraboloidu a umístíme-li bodový světelný zdroj do ohniska, odrážejí se paprsky rovnoběžně s osou paraboly (obr. 73).

6.8 Všechny paraboly s daným ohniskem a danou vertikální osou se přirozeným způsobem dělí na dva systémy. Paraboly jednoho systému mají řídicí přímku nad ohniskem, paraboly druhého systému pod ohniskem. Dokažte, že každá parabola prvního systému protíná každou parabolu druhého systému kolmo (obr. 74).



Obr. 74



Obr. 75

Oba systémy parabol, o kterých se mluví v úloze, budou dobře patrny na obrázku 67b, vybarvíme-li čtyřúhelníčky jako na šachovnici.

Řešení dalších úloh se opírá o definice kuželoseček a jejich ohniskové vlastnosti.

6.9 a) Je dána elipsa s ohnisky A, B. Dokažte, že množina bodů souměrně sdružených k ohnisku A podle všech tečen elipsy je kružnice.

b) Dokažte, že množina pat kolmic vedených ohniskem A ke všem tečnám elipsy je kružnice.

□ a) Nechť je l tečna elipsy v bodě X a N bod souměrně sdružený k bodu A podle přímky l (obr. 75).

Podle úlohy 6.6 leží bod X na přímce NB a vzdálenost $|NB| = |AX| + |XB|$ je konstantní, nezávisí na volbě tečny l. Označme ji $2a$. Bod N tudíž leží na kružnici o poloměru $2a$ se středem v bodě B. Obráceně bychom ukázali, že každý bod této kružnice je souměrně sdružený k bodu A podle některé tečny elipsy.

b) Je-li M pata kolmice vedená bodem A na přímku l, je $|AM| = \frac{1}{2} |AN|$. Podle a) víme, že všechny body N tvoří kružnici. Proto tvoří body M kružnici o poloměru a, jejímž středem je střed úsečky AB. □

6.10 Dokažte tvrzení úlohy 6.9 pro případ hyperboly.

6.11 Je dána parabola s ohniskem F a řídicí přímkou l.

a) Najděte množinu všech bodů souměrně sdružených k ohnisku F podle tečen paraboly.

b) Dokažte, že množina všech pat kolmic vedených ohniskem F na tečny paraboly je přímka rovnoběžná s přímkou l.

6.12 a) Dokažte, že součin vzdáleností ohnisek elipsy od její tečny je konstantní, nezávislý na tečně. ↓

b) Najděte množinu všech bodů, ze kterých je vidět elipsu pod pravým úhlem.

6.13 Řešte úlohu 6.12a pro hyperbolu.

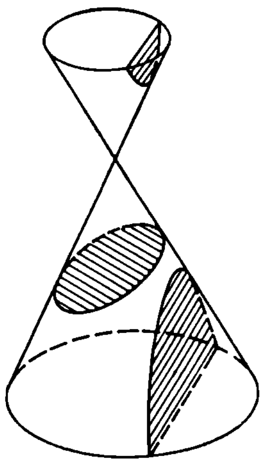
6.14 Řešte úlohu 6.12b pro parabolu.

6.15 Nechť se světelný paprsek odráží od vnitřku elipsy tak, že vytvoří lomenou čáru $P_0P_1P_2P_3 \ldots$, která neprochází ohnisky A a B (body P_0, P_1, P_2, ... leží na elipse, ostatní body lomené čáry leží ve vnitřní oblasti elipsy).

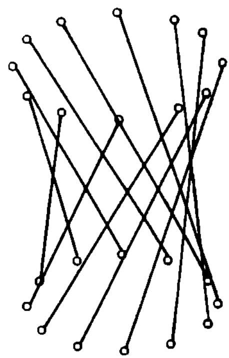
Dokažte a) neprotíná-li úsečka P_0P_1 úsečku AB, pak ji neprotínají ani úsečky P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... a všechny se dotýkají téže elipsy s ohnisky A, B; ↓

b) protíná-li úsečka P_0P_1 úsečku AB, protínají ji i úsečky P_1P_2, P_2P_3, ... a všechny se dotýkají téže hyperboly s ohnisky A, B. ↓

Řez rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází jejím vrcholem, je elipsa, hyperbola nebo parabola (obr. 76). Sféra, jež se dotýká roviny řezu a je vepsána



Obr. 76



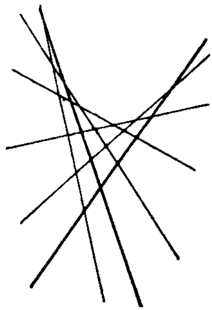
Obr. 77

kuželové ploše, se dotýká roviny řezu v ohnisku kuželosečky, která je řezem. Řídicí přímka je průsečnicí roviny řezu a roviny kružnice, podél níž se sféra dotýká kuželové plochy.

Sjednocením všech přímek v prostoru stejně vzdálených od daného bodu dané přímky l a svírajících s ní daný ostrý úhel je jednodílný rotační hyperboloid (obr. 77).

Tečná rovina hyperboloidu jej protíná ve dvou různoběžkách, každá jiná rovina ho protíná v kuželosečce.

Pohybují-li se body P a N rovnoměrně po dvou různoběžkách, jsou přímky PN spolu rovnoběžné nebo se dotýkají téže paraboly. Pohybují-li se body P, N rovnoměrně po dvou mimoběžkách, vytvoří přímky PN plochu, která se nazývá *hyperbolický paraboloid*. Každá jeho tečná rovina jej protíná ve dvou různoběžkách,



Obr. 78

každá jiná rovina v parabole nebo hyperbole. Hyperbolický paraboloid (sedlo) dostaneme také jako sjednocení všech přímek protínajících dané mimoběžky l_1, l_2 a rovnoběžných s danou rovinou, která přímky l_1, l_2 protíná (obr. 78).

Kuželosečky jako obalové křivky. Dosud jsme definovali křivky jako množiny bodů, které splňovaly jistou podmínku. V dalších úlohách vznikají křivky jako obalové křivky systémů přímek. Pojem „obalová“ znamená pouze to, že se křivka dotýká každé přímky systému.

6.16 Je dána kružnice se středem O a bod A. Každým bodem M kružnice je vedena přímka kolmá k úsečce MA. Dokažte, že obalovou křivkou tohoto systému přímek je
a) kružnice, splývá-li od A s bodem O,
b) elipsa, je-li A bodem vnitřní oblasti kružnice,
c) hyperbola, je-li A bodem vnější oblastí kružnice. $\downarrow$

6.17 Je dána přímka l a bod A, který na ní neleží. Každým bodem M přímky l je vedena přímka kolmá k úsečce MA. Dokažte, že obalovou křivkou tohoto systému přímek je parabola. $\downarrow$

Rovnice kuželoseček. Začali jsme tento paragraf geometrickými definicemi elipsy, hyperboly a paraboly. Mnoho dalších informací o těchto křivkách získáme použitím metody souřadnic.

Začneme u paraboly. Víme, že parabolu dostaneme jako graf funkce

$$y = ax^2, \qquad a \neq 0. \tag{1}$$

Ukážeme, že výše uvedená geometrická definice vede také k této rovnici. Nechť je vzdálenost bodu F od přímky l rovna $2h$. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa x byla rovnoběžná s přímkou l a byla od ní stejně vzdálena jako od bodu F a aby osa y procházela bodem F (osa y bude tedy osou souměrnosti paraboly). Rovnice, kterou dostaneme z geometrické definice paraboly, se snadno upraví na tvar (1):

$$\sqrt{x^2 + (y - h)^2} = |y + h|,$$
$$x^2 + y^2 - 2hy + h^2 - y^2 + 2hy + h^2,$$
$$y = x^2/4h.$$

Stačí položit $a = 1/4h$.

Grafem libovolné funkce $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ je také parabola, dostaneme ji z paraboly $y = ax^2$ posunutím. Stejnolehlost se středem v počátku soustavy souřadnic s koeficientem $1/a$ zobrazuje parabolu $y = x^2$ na parabolu $y = ax^2$. Jsou tudíž každé dvě paraboly podobné. Naproti tomu nejsou každé dvě paraboly kongruentní (shodné), čím větší je $|a|$, tím je parabola $y = ax^2$ sevřenější. Poznamenejme, že parabolu $y = ax^2$ $(a > 0)$ můžeme dostat z paraboly $y = x^2$ také stlačením nebo roztažením ve směru některé osy soustavy souřadnic, přesněji transformacemi, které bodu $[x; y]$ přiřazují bod $[x/\sqrt{a}; y]$ nebo $[x; ay]$.

Přejdeme teď k elipse a hyperbole. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby ohniska A, B měla souřadnice $A[-c; 0]$, $B[c; 0]$. Elipsa pak má rovnici

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a, \quad a > c. \tag{2'}$$

Ekvivalentními úpravami můžeme odstranit odmocniny a převést rovnici elipsy na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } b = \sqrt{a^2 - c^2}. \tag{2}$$

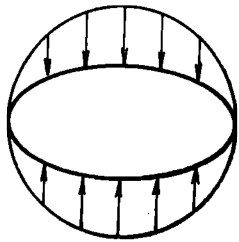
Podrobněji vysvětlíme přechod od rovnice (2′) k (2) později.

Z rovnice (2) je vidět, že je možné dostat elipsu také takto: Vezmeme kružnici o poloměru a s rovnicí $x^2 + y^2 = a^2$ a „stlačíme“ ji ve směru osy y v poměru $a : b$; přitom přejde bod $[x; y]$ do bodu $[x; y']$, kde $y' = yb/a$ (obr. 79). Dosadíme-li $y = y'a/b$ do rovnice naší kružnice, dostaneme rovnici elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Je vidět, že elipsu můžeme dostat i bez hřebíků a provázku. Stačí zapnout televizor v době, kdy se vysílá monoskop, a otočit regulátorem svislé dimenze; všechny kružnice na monoskopu se zdeformují v elipsy.

Dvě elipsy s rovnicemi ve tvaru (2) jsou podobné, mají-li stejný poměr $b : a$.



Obr. 79

Zvolíme-li soustavu souřadnic stejně jako u elipsy, bude mít hyperbola rovnici

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a, \quad a < c, \tag{3'}$$

kterou můžeme ekvivalentními úpravami převést na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ kde } b = \sqrt{c^2 - a^2}. \tag{3}$$

Abychom získali představu o průběhu hyperboly v kvadrantu $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, sestrojíme si graf funkce

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Tato funkce je zřejmě definována pro $x \geqq a$ a je rostoucí. Méně zřejmé je, že se její graf při zvětšujícím se x stále více přimyká k přímce $y = bx/a$. Přesněji řečeno, pro každou posloupnost čísel x_n, která roste nade všechny meze, konverguje posloupnost

$$\frac{b}{a}\sqrt{x_n^2 - a^2} - \frac{b}{a}x_n$$

k nule. To se snadno dokáže užitím rovnosti $x - \sqrt{x^2 - a^2} = a^2/(\sqrt{x^2 - a^2} + x)$. Z uvedených důvodů říkáme, že přímka $y = bx/a$ je *asymptotou* naší hyperboly. Další její asymptotou je přímka $y = -bx/a$.

Často se setkáváme s jinou rovnicí hyperboly, s rovnicí

$$xy = d,\ d \neq 0. \tag{4}$$

Jak je to možné? Není touto rovnicí dána jiná křivka? Není, rovnicí (4) je skutečně dána hyperbola, jejíž asymptoty jsou na sebe kolmé. Její rovnice ve tvaru (3) je

$$\frac{x^2}{2d} - \frac{y^2}{2d} = 1.$$

Máme tudíž dvě rovnice téže hyperboly, každou v jiné soustavě souřadnic (obr. 80): jednou jsme za osy soustavy souřadnic zvolili její asymptoty, podruhé osy hyperboly ⟨?⟩.

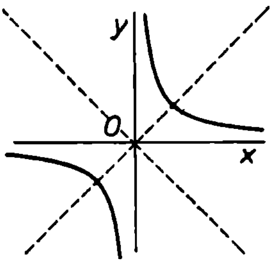
Již jsme si ukázali, jak můžeme dostat elipsu „stlačením" kružnice $x^2 + y^2 = a^2$. Stejně tak můžeme dostat hyperbolu $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ z hyperboly $x^2 - y^2 = a^2$ s kolmými asymptotami, stlačíme-li ji ve směru osy y v poměru $a : b$ (obr. 81).

Dvě hyperboly jsou podobné, mají-li stejný poměr $a : b$, nebo, což je totéž, svírají-li jejich asymptoty stejně velký úhel 2γ, $\operatorname{tg} \gamma = b/a$.

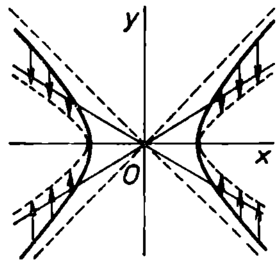
Odstranění odmocnin. Ukážeme zároveň, jak je možné dostat z rovnic (2′) a (3′) jednodušší tvary (2) a (3). Položme

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{2} \right)^2, \quad (3'')$$

$$z_2 = \left(\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{2} \right)^2. \quad (2'')$$



Obr. 80



Obr. 81

Nechť je $x \neq 0$, $y \neq 0$. Snadno se přesvědčíme, že $0 < z_1 < z_2$, $z_1 + z_2 = x^2 + y^2 + c^2$, $z_1 z_2 = c^2 x^2$. Jsou tedy z_1, z_2 kořeny kvadratické rovnice (o neznámé z)

$$z^2 - (x^2 + y^2 + c^2)\, z + c^2 x^2 = 0. \quad (5)$$

Trojčlen na levé straně rovnice (5) je pro $z = c^2$ záporný, proto je $z_1 < c^2$, $z_2 > c^2$. Všimněme si, že rovnici (5) lze psát ve tvaru $x^2(z - c^2) + y^2 z = z(z - c^2)$, tedy

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z - c^2} = 1. \quad (5')$$

Ukážeme, že po dosazení a^2 za z je rovnicí (5′) dána elipsa (pro $a > c$) nebo hyperbola (pro $a < c$).

Nechť je $a > c > 0$. Víme, že pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ jsou rovnicemi (3″) a (2″) dány menší a větší kořen rovnice (5′), přičemž $z_1 < c^2 < z_2$. Rovnici elipsy (2′) můžeme zřejmě psát ve tvaru $z_2 = a^2$, a protože z_2 je kořenem rovnice (5′), splňuje bod $[x; y]$ elipsy ($x \neq 0 \neq y$) rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1\,. \tag{6}$$

Obráceně, splňuje-li bod $[x; y]$ rovnici (6), je číslo $z = a^2$ kořenem rovnice (5′), a protože je $a^2 > c^2$, je a^2 větším kořenem rovnice (5′), tedy $a^2 = z_2$. Je tudíž pro $a > c$ rovnice (2′) ekvivalentní s rovnicí (6).

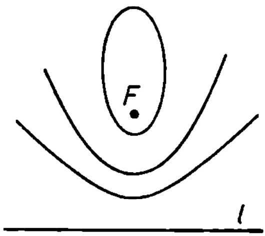
Analogicky můžeme dokázat, že pro $a < c$ jsou ekvivalentní rovnice (3′) a (6), že rovnice hyperboly $z_1 = a^2$ je totožná s rovnicí (6).

Snadno se ověří, že pro $x = 0$ nebo $y = 0$ je rovnice (6) ekvivalentní s rovnicí (2′) nebo (3′) podle toho, je-li $a > c$ nebo $a < c$.

Tím jsme dokázali, že rovnice (6) zahrnuje jak rovnici elipsy (2′), tak rovnici hyperboly (3′). Položíme-li $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (pro $a > c$) nebo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (pro $a < c$), dostaneme rovnice (2) a (3). Tak jsme přes rovnici (6) dokázali ekvivalentnost rovnic (2) a (2′) a také rovnic (3) a (3′). Ukázaný postup můžeme často použít, chceme-li odstranit odmocniny: vedle součtu (nebo rozdílu) druhých odmocnin uvažujeme také jejich rozdíl (nebo součet).

Konec abecedy. Uvažujme ještě jednu funkci v rovině, jejíž mapa obsahuje všechny tři typy křivek, se kterými jsme se seznámili v této kapitole. Bude to poslední písmeno naší abecedy.

R. *Nechť je dán bod F a přímka l, která jím neprochází. Množina všech bodů roviny, jejichž poměr vzdáleností od bodu F a od přímky l se rovná danému kladnému číslu k, je elipsa (pro $k < 1$), hyperbola (pro $k > 1$) nebo parabola (pro $k = 1$)* (obr. 82).



Obr. 82

K *důkazu* zvolíme soustavu souřadnic tak, jak jsme ji volili v případě paraboly. Naše množina má tedy rovnici

$$\frac{\sqrt{x^2 + (y - h)^2}}{|y + h|} = k;$$

pro $k = 1$ jsme již viděli, že je to rovnice paraboly $y = ax^2$, kde $a = 1/(4h)$. Pro $0 < k < 1$ ji můžeme ekvivalentními úpravami uvést na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \text{ (elipsa)} \tag{7}$$

a pro $k > 1$ na tvar

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \text{ (hyperbola)}, \tag{8}$$

kde jsme v obou případech položili

$$a = 2kh/\sqrt{|k^2 - 1|}, \qquad b = 2kh/|k^2 - 1|,$$
$$d = h(k^2 + 1)/(k^2 - 1).$$

Rovnice (7) a (8) dostaneme z kanonických rovnic (2) a (3) posunutím soustavy souřadnic a záměnou os x, y. V našem případě leží ohniska na ose y a středem je bod $[0; d]$. Můžeme se přesvědčit, že bod F je ohniskem nejen v případě paraboly, ale i v případě elipsy nebo hyperboly. Přímka l se i v těchto případech nazývá řídicí přímkou elipsy nebo hyperboly.

Tak jsme si ukázali, že hladinami funkce

$$f(M) = |MF|/\varrho(M, l)$$

jsou elipsy, hyperboly a jedna parabola.

Snadno jsme mohli uhodnout, že hladinami budou kuželosečky. Uvažujme totiž v rovině funkce $f_1(M) = |MF|$, $f_2(M) = k\varrho(M, l)$. Grafem první je část kuželové plochy, graf druhé funkce je dvojice polorovin, přičemž číslo k je tangens úhlu, který svírají poloroviny s horizontální rovinou. Průnikem těchto grafů je elipsa, parabola nebo hyperbola. Nás pak zajímají průměty obdržených křivek do horizontální roviny, tedy množiny

$$\{M : f_1(M) = f_2(M)\} = \{M : |MF| = k\varrho(M, l)\}.$$

Při rovnoběžném promítání se tvar křivky mění stejně jako při jejím stlačení ve směru kolmém k přímce l (v poměru $\sqrt{k^2 + 1} : 1$). Proto dostaneme opět elipsy, hyperboly a parabolu.

Jak jsme již několikrát ukázali, mají elipsa, hyperbola a parabola mnoho společných vlastností. To má prostý algebraický důvod: všechny jsou dány rovnicemi druhého stupně. Ovšem jejich charakteristické rovnice

$$y = ax^2, x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$$
$$xy = d$$

dostaneme pouze při speciální volbě soustavy souřadnic, zvolíme-li soustavu souřadnic v obecné poloze, bude rovnice kuželosečky složitější. Není však těžké dokázat, že v libovolné soustavě souřadnic má rovnice kuželosečky tvar

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{9}$$

kde alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly.

Je pozoruhodné, že platí i tvrzení obrácené: každá rovnice druhého stupně $p(x, y) = 0$, tj. rovnice tvaru (9), určuje kuželosečku. Přesněji řečeno, každá rovnice tvaru (9) definuje elipsu, hyperbolu nebo parabolu, pokud se její levá strana nedá rozložit na součin dvou lineárních činitelů (dostali bychom dvojici přímek) a pokud levá strana nabývá kladných i záporných hodnot (jinak bychom dostali bod, jednu přímku nebo prázdnou množinu). Odtud plyne společný název pro elipsy, hyperboly a paraboly; říkáme jim též *křivky druhého stupně.*

Věta, kterou jsme výše vyslovili, je velmi užitečná při hledání množin všech bodů dané vlastnosti. Vidíme-li, že v některé soustavě souřadnic je množina dána rovnicí druhého stupně, víme, že hledanou množinou je elipsa, hyperbola nebo parabola, ve výjimečném případě to může ovšem být i dvojice přímek, bod apod. Zbývá pak najít „rozměry“ kuželosečky a její polohu (ohniska, střed, asymptoty atd.).

6.18 Najděte množinu všech bodů roviny, pro které je součet vzdáleností od dvou daných kolmých přímek c-krát větší než jejich vzdálenost od průsečíku daných přímek.

6.19 Je dáno kladné číslo c a v rovině bod A a přímka l. Najděte množinu všech bodů, pro které je

a) součet vzdáleností od bodu A a přímky l roven c,

b) rozdíl vzdáleností od bodu A a přímky l v absolutní hodnotě roven c,

c) poměr vzdáleností od bodu A a od přímky l menší než c.

6.20 Určete množinu všech bodů, jejichž

a) součet,

b) rozdíl

druhých mocnin vzdáleností od dvou daných různoběžek l_1, l_2 je roven danému číslu d. Nakreslete hladiny odpovídajících funkcí:

a) $f(M) = \varrho^2(M, l_1) + \varrho^2(M, l_2)$,

b) $f(M) = \varrho^2(M, l_1) - \varrho^2(M, l_2)$.

6.21 V rovině je dán bod F a přímka l. Nakreslete hladiny funkcí

a) $f(M) = |MF|^2 + \varrho^2(M, l)$,

b) $f(M) = |MF|^2 - \varrho^2(M, l)$.

6.22 Kloub O kloubového rovnoběžníku $OPMQ$ je upevněn a ramena OP a OQ různých délek se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí v opačných smyslech. Po jaké křivce se pohybuje bod M?

□ Nechť je $|OP| = p$, $|OQ| = q$. Protože se přímky OP a OQ otáčejí na různé strany, musí v jednom okamžiku splynout. Vezměme tento okamžik za výchozí čas $t = 0$ a splývající přímky za osu x, počátek soustavy souřadnic zvolíme v bodě O. Nechť se přímky OP a OQ otáčejí úhlovou rychlostí ω. Pak mají body P a Q v čase t souřadnice $P[p \cos \omega t; p \sin \omega t]$, $Q[q \cos \omega t; -q \sin \omega t]$. Proto má bod M souřadnice

$$x = (p + q) \cos \omega t, \quad y = (p - q) \sin \omega t,$$

neboť $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Leží tudíž bod M na elipse

$$\frac{x^2}{(p+q)^2} + \frac{y^2}{(p-q)^2} = 1. \square$$

Při řešení úlohy jsme dostali elipsu jako množinu bodů $[x; y]$ se souřadnicemi

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t, \tag{10}$$

t probíhá množinu reálných čísel. Rovnice uvedeného typu, které vyjadřují souřadnice bodu množiny pomocí parametru t, se nazývají parametrické rovnice množiny. V daném případě byl parametr t čas.

6.23 V rovině se kolem bodů A, B otáčejí stejnou úhlovou rychlostí přímky. Jakou křivku opisuje jejich průsečík, otáčejí-li se přímky v opačných smyslech? $\downarrow$

6.24 Najděte v rovině množinu všech bodů M, pro které je $|\sphericalangle MBA| = 2|\sphericalangle MAB|$, kde AB je daná úsečka roviny. $\downarrow$

6.25 a) Uvažujme všechny úsečky, které z daného úhlu vytínají trojúhelník daného obsahu S. Dokažte, že středy těchto úseček leží na téže hyperbole Γ, jejímiž asymptotami jsou ramena daného úhlu. $\downarrow$

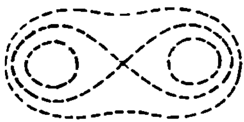
b) Dokažte, že všechny tyto úsečky se dotýkají téže hyperboly Γ. $\downarrow$

c) Dokažte, že úsečka s krajními body na asymptotách dané hyperboly, které se dotýká, je bodem dotyku půlena. $\downarrow$

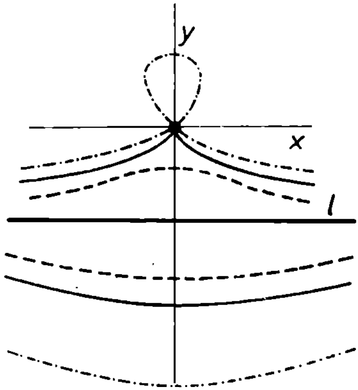
6.26 a) Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC, $|AC| = |BC|$. Najděte množinu všech bodů M roviny, jejichž vzdálenost od přímky AB je rovna geometrickému průměru jejich vzdáleností od přímek AC a BC.

b) Tři přímky tvoří rovnostranný trojúhelník. Určete množinu všech bodů M roviny trojúhelníku, pro které je vzdálenost od některé z daných přímek rovna geometrickému průměru vzdáleností od zbývajících dvou přímek.

6.27 Tři vrcholy kosočtverce leží postupně na stranách AB, BC a CD daného čtverce. Kde leží čtvrtý vrchol kosočtverce?



Obr. 83



Obr. 84

Algebraické křivky. Množiny bodů v různých geometrických úlohách nemusí být samozřejmě vždy přímkami nebo kuželosečkami. Ukážeme si dva příklady.

Množina všech bodů roviny, jejichž součin vzdáleností od dvou daných bodů F_1 a F_2 se rovná danému kladnému číslu p, se nazývá *Cassiniho ovál* (obr. 83). Je hladinou funkce

$$f(M) = |MF_1| \, . \, |MF_2| \, .$$

Při vhodné volbě soustavy souřadnic má proto rovnici

$$[(x - c)^2 + y^2]\,[(x + x)^2 + y^2] = p^2,$$
$$\text{kde } 2c = |F_1F_2|.$$

Pro $p = c^2$ má Cassiniho ovál tvar ležaté osmičky a nazývá se *Bernoulliho lemniskata*, pro $p < c^2$ se skládá ze dvou částí.

A ještě jeden příklad. Nechť je dán bod F a přímka l, která jím neprochází. Označme $q(M)$ vzdálenost bodu M od průsečíku přímek FM a l. Množina $\{M : q(M) = d\}$ se pro každé kladné číslo d nazývá *Nikomedova konchoida* (obr. 84). Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že počátek splyne s bodem F a přímka l bude mít rovnici $y + a = 0$, má Nikomedova konchoida rovnici

$$(x^2 + y^2)\,(y + a)^2 - d^2y^2 = 0\,.$$

Obecně se každá křivka, která je dána rovnicí $P(x, y) = 0$ a $P(x, y)$ je mnohočlen v proměnných x, y, nazývá *algebraickou křivkou*. Stupeň polynomu P je jejím stupněm. Jsou tedy Cassiniho ovál i Nikomedova konchoida algebraické křivky čtvrtého stupně.

Již z uvedených dvou příkladů je vidět, že algebraické křivky vyšších stupňů mohou vznikat různými zajímavými způsoby, mohou mít body vratu a mohou samy sebe protínat (konchoida pro $a = d$ nebo pro $a < d$). Jejich tvar se může podstatně měnit při změně parametrů. S některými se ještě seznámíme v další kapitole.

Kapitola 7

OTÁČENÍ, KOTÁLENÍ A TRAJEKTORIE

V závěrečné kapitole seznámíme čtenáře se zajímavými křivkami, které se definují přirozeným způsobem jako dráhy bodu na kružnici, která se kotálí po jiné kružnici nebo po přímce. Jejich nejzajímavější vlastnosti se týkají tečen. Milovník klasické geometrie pozná souvislost mezi kružnicí devíti bodů trojúhelníku, jeho Simsonovými přímkami a jejich obálkou, kterou je cykloidální křivka s třemi body vratu. Na začátku probereme důkladně jednu z nejjednodušších cykloidálních křivek.

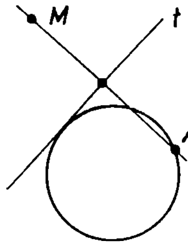
Kardioida. *Kardioida* se obyčejně definuje jako trajektorie bodu kružnice, která se kotálí po pevné kružnici stejného poloměru. Jsou ovšem i jiné definice kardioidy. Dvě z nich uvedeme ve tvaru úloh.

7.1 Dokažte, že kardioida je

a) množinou bodů souměrně sdružených k danému bodu A podle všech tečen pevné kružnice, která prochází bodem A,

b) množinou všech pat kolmic vedených daným bodem A k tečnám kružnice, která prochází bodem A (obr. 85).

☐ a) Uvažujme kružnici γ, která se dotýká dané kružnice δ v bodě A a má s ní stejný poloměr. Kotálejme kružnici γ po kružnici δ a studujme trajektorii toho bodu M, který ve výchozí poloze splývá s bodem A. Protože se jedná o kotálení, jsou délky kruhových oblouků AT a MT v každém okamžiku stejně dlouhé (T je proměnný bod dotyku obou kružnic). Odtud plyne, že jsou body M a A souměrně sdružené podle tečny v bodě T. Oběhne-li bod T kružnici δ, opíše bod M celou kardioidu.



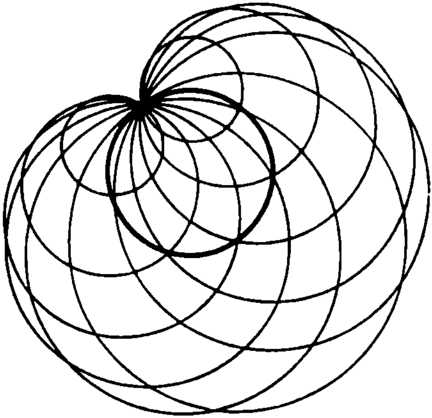
Obr. 85

b) Uvažovanou množinu dostaneme z množiny popsané v části a) pomocí stejnolehlosti s koeficientem 1/2 a středem A. Je to tedy také kardioida, dvakrát menší než kardioida v úloze a). □

Užitím úlohy 7.1 můžeme sestrojit libovolný počet bodů kardioidy a tak ji dost přesně nakreslit. Je to křivka, která má v bodě A singularitu — *bod vratu*. Tvarem je podobná osovému řezu jablkem, o něco méně obrysu srdce, podle něhož dostala název (kardia — srdce).

Z úlohy 7.1 plyne i další způsob vytvoření kardioidy — jako obálky systému kružnic.

7.2 Je dána kružnice a na ní bod A. Dokažte, že sjednocení všech kružnic procházejících bodem A, jejichž střed leží na dané kružnici, je oblast ohraničená kardioidou (obr. 86). ↓



Obr. 86

Dvě otáčení. Dále ukážeme, jak poznat některé vlastnosti křivek pomocí kinematiky (teorie pohybu), a jako příklad nám bude často sloužit kardioida. Dříve se však ještě vraťme k řešení 7.1a. Tam jsme došli k závěru, že bod M proběhne kardioidu, když bod T udělá jednu otáčku. Tím se mínilo, že bod T i střed P pohybující se kružnice γ se jednou otočí. Avšak sama kružnice, nebo lépe řečeno kruh γ se otáčí rychleji. Vyjasněme si to.

7.3 Kružnice γ se kotálí po pevné kružnici téhož poloměru, přičemž střed P kružnice γ vykoná jednu otáčku. Kolikrát se za tutéž dobu otočí kruh γ, kolik vykoná otáček kolem svého středu P?

Zvolme na kruhu γ některý jeho poloměr PM a v rovině pevný bod E. Vezměme takovou úsečku EN, aby se vektory $\overrightarrow{EN}$ a $\overrightarrow{PM}$ sobě rovnaly. Otázku úlohy 7.3 pak můžeme formulovat takto: kolik otáček kolem bodu E vykoná úsečka EN, otočí-li se úsečka OP o 360°? Jaký je poměr úhlových rychlostí obou úseček? Uvažujme dvě polohy pohybujícího se kruhu. Otočí-li se úsečka OP o 90°, otočí se úsečka EN o 180°, a stejně tak to platí pro další úhly, o které se otočí úsečka OP. Otočí-li se o úhel 360°, otočí se úsečka EN o úhel 720°, tedy o dvě plné otáčky. Poměr obou úhlových rychlostí je 2.

Zvolíme-li bod E totožný se středem O pevné kružnice a bod Q tak, aby $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PM}$, dostaneme rovnoběžník $OPMQ$. Při rovnoměrném kotálení kruhu γ po kružnici δ je bod O pevný a úsečky OP a OQ se otáčejí úhlovými rychlostmi ω a 2ω v témže smyslu. Tím dostáváme další možnost vytvoření kardioidy, kterou lze dobře popsat pomocí kloubového rovnoběžníku.

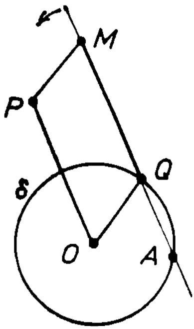
Otáčejí-li se ramena OP a OQ ($|OP| = 2|OQ|$) kolem pevného bodu O v témže smyslu otáčení úhlovými rychlostmi ω a 2ω, je trajektorií čtvrtého vrcholu rovnoběžníku $OPMQ$ kardioida.

Nyní je snadné ukázat ještě jeden způsob konstrukce bodů kardioidy a předvést další její zajímavé vlastnosti.

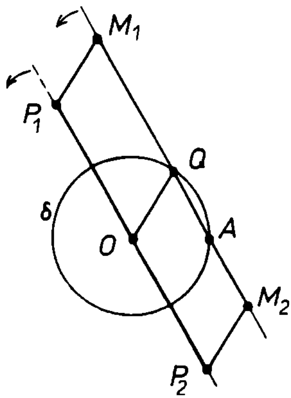
7.4 Naneseme-li na každou přímku l procházející pevným bodem A dané kružnice δ o poloměru r od průsečíku Q přímky l a kružnice δ ($A \neq Q$) úsečku QM délky $2r$, vytvoří takto obdržené body M spolu s bodem A kardioidu (obr. 87).

☐ Pro každou polohu přímky l můžeme sestrojit rovnoběžník $OPMQ$, ve kterém splynou body Q a M se stejně označenými body úlohy (O je střed kružnice δ). Bude-li se přímka l otáčet kolem bodu A úhlovou rychlostí ω, budou se ramena OP a OQ rovnoběžníku otáčet úhlovými rychlostmi ω a 2ω, viz tvrzení o prstenci na kružnici v kap. 1. Proto pak opisuje bod M kardioidu. □

Zkuste si na velkém papíře sestrojit kardioidu jednak podle 7.1, jednak podle 7.4, a přesvědčte se, že dostanete stejné křivky. Jednodušší bude asi druhý způsob. Všimněme si, že v úloze 7.4 můžeme nanést od bodu Q úsečku délky $2r$ na obě navzájem opačné polopřímky.



Obr. 87



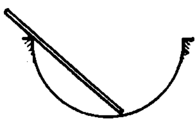
Obr. 88

Tím dostáváme hned dva body M_1, M_2 kardioidy (obr. 88). Odpovídají dvěma polohám kloubového rovnoběžníku $OQMP$. Oběhne-li bod Q jednou kružnici δ, otočí se úsečka QM o 180° a bod M_1 přejde do bodu M_2. To ukazuje další vlastnost kardioidy.

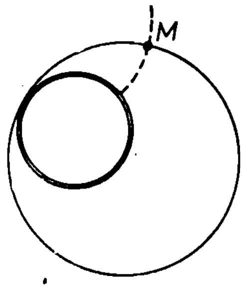
7.5 Dokažte, že každá tětiva kardioidy procházející jejím bodem vratu A má délku $4r$ a její střed leží na pevné kružnici poloměru r.

A ještě dvě úlohy opírající se o druhý způsob konstrukce kardioidy.

7.6 Tyč délky $2r$ se pohybuje ve vertikální rovině tak, že její konec klouže po vnitřní stěně jámy, jejíž vertikální řez má tvar půlkruhu o poloměru r a tyč se opírá o kraj jámy. Dokažte, že se druhý konec tyče pohybuje po kardioidě (obr. 89).



Obr. 89



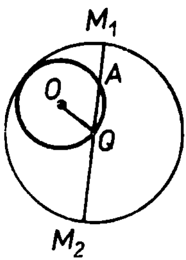
Obr. 90

7.7 Po pevném kruhu poloměru r se kotálí kružnice poloměru $2r$ tak, že kruh leží ve vnitřní oblasti kružnice. Dokažte, že trajektorií bodu kružnice je kardioida (obr. 90).

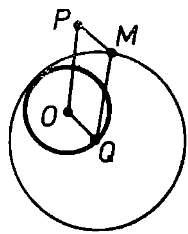
□ Jedno řešení úlohy dostaneme jejím porovnáním s Koperníkovou větou 0.3. Jedná se o pohyb týchž dvou kružnic, jen je vyměněna role pohybující se a nepohybující se kružnice. Koperníkova věta při této záměně rolí tvrdí, že se každý průměr M_1M_2 pohybující se kružnice pohybuje tak, že stále prochází určitým bodem A pevné kružnice. Přitom se střed Q průměru M_1M_2 pohybuje po pevné kružnici a je $|M_1Q| =$

$= |QM_2| = 2r$ (obr. 91). Tím se dostáváme k úloze 7.4 a vidíme, že se body M_1 a M_2 pohybují po téže kardioidě.

Mohli jsme též převést řešení úlohy přímo na kloubový rovnoběžník. Nechť je M bod otáčející se kružnice a Q její pohybující se střed. Sestrojme rovnoběžník $OPMQ$. Otáčí-li se rameno OQ úhlovou rychlostí 2ω, otáčí se pohybující se kružnice a s ní i rameno QM úhlovou rychlostí ω (obr. 92). □



Obr. 91



Obr. 92

Kardioida, se kterou jsme se dost podrobně seznámili, patří do systému křivek, jež se nazývají *konchoidami* kružnice, nebo též *Pascalovými závitnicemi*. Dostaneme je trochu obecnějším postupem, než je postup uvedený v úloze 7.4. Na přímky l procházející daným bodem A pevné kružnice nanášíme od průsečíku Q této kružnice a přímky l úsečky dané délky h (na obě polopřímky od bodu Q). Koncové body těchto úseček vytvoří Pascalovu závitnici. Rovná-li se délka h průměru dané kružnice, jde o kardioidu. Porovnejte tuto definici s definicí Nikomedovy konchoidy, tj. konchoidy přímky. Ukazuje se, že Pascalovu závitnici můžeme při každé hodnotě h definovat kinematicky. To je obsahem dalších úloh.

7.8 a) Dokažte, že vrchol M kloubového rovnoběžníku, jehož kloub O je upevněn a jehož ramena OP a OQ se otáčejí úhlovými rychlostmi 2ω a ω, opisuje Pascalovu závitnici.

b) V rovině je pevně zvolena kružnice poloměru r. Po ní se kotálí jiná kružnice téhož poloměru. Dokažte, že bod na průměru kotálející se kružnice nebo na jeho prodloužení opisuje Pascalovu závitnici.

c) V předcházející úloze nahraďte pohybující se kružnici kružnicí o poloměru $2r$, přičemž pevná kružnice se jí dotýká uvnitř.

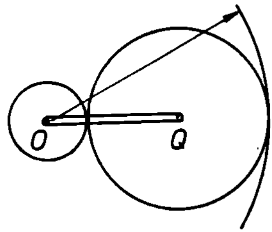
Ukážeme teď několik různých úloh, v nichž poměr úhlových rychlostí dvou otáčení není (jako v případě kardioidy) roven dvěma. Dostaneme tak několik dalších *cykloidálních* křivek.

7.9 Po pevné kružnici poloměru R se vně kotálí kruh o poloměru a) $R/2$, b) $R/3$, c) $2R/3$. Kolikrát se vnější kruh otočí, vykoná-li jeho střed jednu otáčku kolem středu pevné kružnice? ↓

7.10 Řešte tutéž úlohu v případě, kdy se pohybující kruh dotýká pevné kružnice uvnitř.

7.11 Mezi otáčejícím se kroužkem ložiska o průměru 6 mm a jeho pevným pouzdrem o průměru 10 mm jsou kuličky o průměru 2 mm. Předpokládejme, že při otáčení vnitřního kroužku kuličky nekloužou. Jakou úhlovou rychlostí se
a) otáčejí kuličky,
b) se pohybují jejich středy
kolem středu ložiska, otáčí-li se vnitřní kroužek ložiska rychlostí 100 otáček za sekundu?

7.12 Tři ozubená kola otáčející brusičským kamenem jsou spojena podle obrázku. Určete poměr poloměrů pohybujících se kol, má-li se malé kolečko (brus) točit dvanáctkrát rychleji než rameno OQ, které je uvádí v pohyb (obr. 93).



Obr. 93

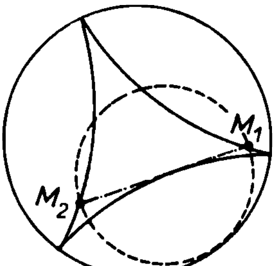
Uvažujme dva body kružnice, která se kotálí po kruhu. Je zřejmé, že opisují kongruentní (shodné) trajektorie. Ve zvláštním případě se dokonce může stát, že obě trajektorie splynou, že se oba body pohybují po téže křivce, jeden za druhým. Například v řešení úlohy 7.7 jsme viděli, že diametrálně protilehlé body vnější kružnice opisovaly stejnou kardioidu. Přesvědčíme se o tom, ukážeme-li, že trajektorie těchto bodů mají bod vratu v témže bodě pevné kružnice. V dalších úlohách můžeme postupovat analogicky.

7.13 a) Dokažte, že diametrálně protilehlé body M_1 a M_2 kružnice o poloměru $2R/3$, která se kotálí po vnitřku pevné kružnice o poloměru R, opisují tutéž křivku. Tato křivka se nazývá *deltoid*, nebo též *Steinerova křivka* (obr. 94). ↓

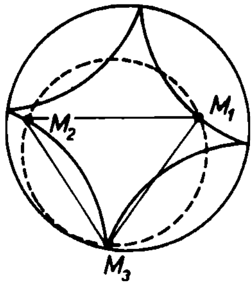
b) Dokažte, že body M_1, M_2 a M_3 na kružnici o poloměru $3R/4$, které tvoří rovnostranný trojúhelník, opisují tutéž křivku *(asteroidu)*, jestliže se kružnice kotálí po vnitřku pevné kružnice o poloměru R (obr. 95).

c) V předcházející úloze nahraďte hodnotu $3R/4$ hodnotou $3R/2$ a předpokládejte, že pohybující se kružnice obklopuje pevnou kružnici. Místo asteroidy dostanete křivku, která se nazývá *nefroida*.

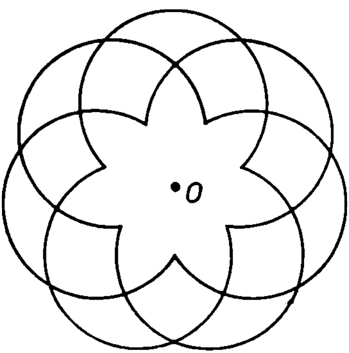
Mějme kloubový rovnoběžník $OPMQ$, kde vrchol O je pevný a ramena OP a OQ se otáčejí kolem O, přičemž



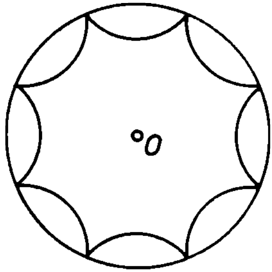
Obr. 94



Obr. 95



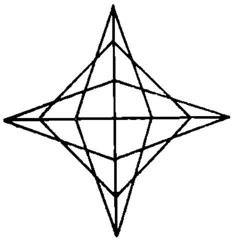
Obr. 96



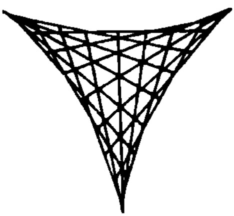
Obr. 97

poměr ω_{OP}/ω_{OQ} jejich úhlových rychlostí je k a poměr $|OP|/|OQ|$ jejich ramen je $1/|k|$ ($k \neq 0, 1, -1$). Potom křivku, kterou opisuje vrchol M, nazveme *k-cykloida.*

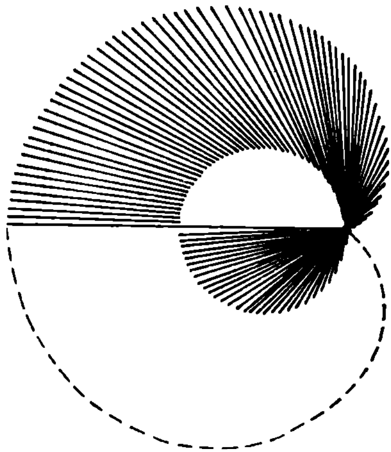
Pohybují-li se dva body P a N rovnoměrně po kružnici tak, že poměr ω_P/ω_N jejich úhlových rychlostí je roven k, je obalovou křivkou přímek PN k-cykloida (viz 7.19).



Obr. 98



Obr. 99



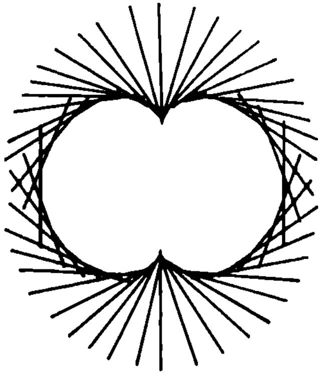
Obr. 100

Křivky k-cykloida a $(1/k)$-cykloida jsou shodné.

Křivku k-cykloidu můžeme definovat také jako trajektorii bodu kružnice, která se kotálí po kružnici o poloměru $|k - 1|/r$, přičemž při $k > 1$ mají kružnice vnější a při $k < 1$ vnitřní dotyk.

Obyčejně se k-cykloidy nazývají v případě $k > 0$ *epicykloidami*, v případě $k < 0$ *hypocykloidami*.

Na obrázcích 96—101 jsou zobrazeny k-cykloidy pro $k = 3/8$, $-1/7$, -3, -2, 2 a 3. Poslední čtyři jsou asteroida, Steinerova křivka, kardioida a nefroida.



Obr. 101

Na obr. 102 je zobrazena trajektorie bodu kružnice, která se kotálí po přímce. Tato křivka se nazývá *cykloida*. Obalovou křivkou průměru kotálející se kružnice je cykloida dvakrát menší.

Již v případě kardioidy jsme viděli, že tutéž křivku můžeme dostat jako trajektorii bodů dvou různých kružnic kotálejících se po téže pevné kružnici. Porov-

Obr. 102

nejte první definici kardioidy s úlohou 7.7: v jednom případě je středem pohybující se kružnice bod P a ve druhém vrchol Q kloubového rovnoběžníku $OPQM$. Další úloha ukazuje obecně, v jakém vztahu musí být pohybující se kružnice, aby trajektorie jejich bodů byly shodné.

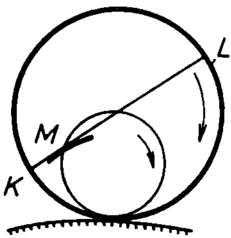
7.14 a) Dokažte, že bod kružnice o poloměru r, jež se kotálí po pevném kruhu o poloměru R, opisuje trajektorii shodnou s trajektorií, kterou opisuje bod kružnice o poloměru $R + r$ kotálející se po témže kruhu tak, že jej obklopuje.

b) Po vnitřku kružnice o poloměru R se kotálejí dvě kružnice o poloměrech r a $R - r$. Dokažte, že trajektorie bodů jedné i druhé kružnice jsou shodné. ↓

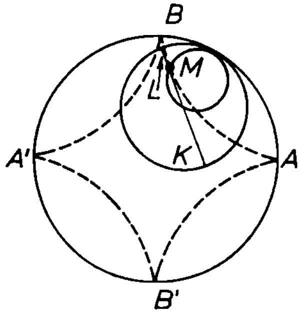
K řešení těchto úloh potřebujeme umět vypočíst vztahy mezi rychlostmi spolu vázaných otáčení. Ty vyšetříme později, teď přejdeme k nejzajímavějším vlastnostem cykloidálních křivek, k vlastnostem jejich tečen.

Věta o dvou kruzích. Vyslovíme zajímavé pravidlo, které nám umožní názorně popsat systém všech tečen trajektorie bodu M na kružnici o poloměru r kotálející se bez klouzání po pevné křivce γ. Kotálejme po téže křivce γ kružnici o poloměru $2r$ a představme si s ní pevně spojený průměr KL, který jsme zvolili tak, aby v určitém časovém okamžiku splynul bod K s bodem M v tentýž bod křivky γ (obr. 103). Pak se v každém okamžiku dotýká průměr KL trajektorie bodu M. Jinými slovy, tato trajektorie je obalovou křivkou všech poloh průměru KL.

Toto výhodné pravidlo jsme nazvali větou o dvou kruzích. K jejímu důkazu se vrátíme později, zatím její tvrzení doplníme. Kotálíme-li obě kružnice, o kterých věta mluví, současně tak, aby v každém okamžiku splynuly jejich body dotyku s křivkou γ, kotálí se menší kružnice uvnitř větší bez klouzání. Podle Koperníkovy věty se bod M pohybuje po pevném průměru KL větší kružnice. A naše věta o dvou kruzích tvrdí, že přímka KL je tečnou sestrojenou v bodě M k jeho trajektorii.



Obr. 103

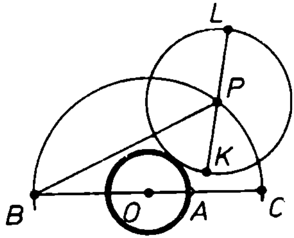


Obr. 104

Přejděme k příkladům. Začneme u systému přímek, o kterém jsme již hovořili v úvodu knížky. Nechť se kružnice o poloměru r s vyznačeným bodem M kotálí zevnitř po kružnici o poloměru $R = 4r$. Kotálejme spolu s ní kružnici o poloměru $2r$ a na ní pevně zvolený průměr KL také po vnitřku pevné kružnice o poloměru $4r$. Předpokládáme přitom, že ve výchozím okamžiku splývají body K a M s bodem A pevné kružnice (obr. 104). Podle Koperníkovy věty se krajní body průměru KL pohybují po dvou na sebe kolmých průměrech AA' a BB' pevné kružnice. Současně se podle věty o dvou kruzích dotýká průměr KL v každém okamžiku trajektorie bodu M, tj. obalovou křivkou přímek KL je asteroida s body vratu A, B, A', B'.

Další úloha se týká kardioidy.

7.15 Z pevného bodu B kružnice vycházejí světelné paprsky, dopadají do všech bodů kružnice a odrážejí se od ní (úhel dopadu se rovná úhlu odrazu). Dokažte, že obalovou křivkou odražených paprsků je kardioida.



Obr. 105

□ Označme O střed dané „zrcadlové" kružnice a C bod diametrálně protilehlý k bodu B. Nechť se paprsek BP odrazí v bodě P do bodu N úsečky BC (předpokládáme, že $|\sphericalangle PBC| \leqq 45°$). Pak je $|\sphericalangle PNC| = |\sphericalangle BPN| + |\sphericalangle PBN| = 3|\sphericalangle PBC|$. Otáčí-li se tudíž paprsek BP úhlovou rychlostí ω, otáčí se odražený paprsek úhlovou rychlostí 3ω, přičemž se bod odrazu P pohybuje po zrcadlové kružnici úhlovou rychlostí 2ω (věta o prstenci v kap. 1). To zůstává v platnosti i při $|\sphericalangle PBC| > 45°$.

Náš systém přímek PN můžeme tedy dostat také takto: Kotálejme po pevné kružnici o poloměru $r = |OB|/3$ se středem v bodě O kružnici poloměru $2r$ a s ní pevně spojený průměr KL, který leží ve výchozí poloze na přímce BC (obr. 105). Probíhá-li střed P této kružnice kružnici o poloměru $3r$ a středu O úhlovou rychlostí 2ω, otáčí se průměr KL úhlovou rychlostí 3ω ⟨?⟩, stejně jako odražený paprsek.

Podle věty o dvou kruzích je obalovou křivkou systému přímek KL trajektorie bodu M na kružnici o poloměru r, která se kotálí po kružnici téhož poloměru se středem v bodě O, tj. kardioida. Ve výchozí poloze splývá bod M s bodem A, který dělí úsečku BC v poměru 2 : 1. Ten je bodem vratu kardioidy. □

7.16 Svazek rovnoběžných paprsků dopadá na zrcadlo tvaru půlkružnice. Dokažte, že se odražené paprsky dotýkají nefroidy.

Kdyby bylo zrcadlo parabolické, odrážely by se všechny paprsky do jednoho bodu, do ohniska paraboly (viz kap. 6). Proto se nefroidě také říká *ohnisková křivka kružnice*.

7.17 Najděte množinu všech bodů, kterou opíše pevný průměr kruhu o poloměru r kotálející se

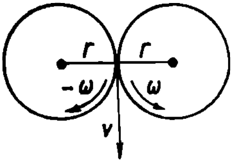
a) vně po pevné kružnici o poloměru r,

b) uvnitř po pevné kružnici o poloměru $3r/2$.

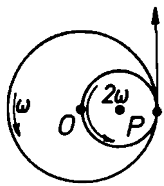
Několik dalších zajímavých úloh o tečnách křivky uvedeme dále. Dříve však pojednáme o kinematických vztazích použitých ve větě o dvou kruzích a v řešeních posledních úloh.

Rychlosti a tečny. Pro určení vztahů mezi úhlovými rychlostmi složených otáčení existuje výhodnější postup než ten poměrně primitivní, který jsme použili při řešení úlohy 7.4. Je to pravidlo skládání úhlových rychlostí analogické pravidlu skládání lineárních rychlostí, užívané hlavně při přechodu od jedné vztažné soustavy ke druhé.

Domluvíme se, že úhly a úhlové rychlosti odpovídající otáčení ve smyslu proti otáčení hodinových ručiček budeme brát s kladným znaménkem a úhly odpovídající otáčení ve smyslu otáčení hodinových ručiček budeme brát záporně. Otočí-li se pak přímka l_2 vzhledem k přímce l_1 o úhel φ' a přímka l_3 vzhledem k přímce l_2 o úhel φ, otočí se přímka l_3 vůči přímce l_1 o úhel $\varphi + \varphi'$. Otáčí-li se tudíž rovinný útvar γ_2 kolem „pevného" útvaru γ_1 úhlovou rychlostí ω' a útvar γ_3 kolem útvaru γ_2 úhlovou rychlostí ω, otáčí se útvar γ_3 kolem γ_1 úhlovou rychlostí $\omega + \omega'$. Vzhledem k tomu, že se v našich úlohách jedná především o otáčení kruhů, budeme na každém z nich předpokládat pevně vyznačený poloměr, abychom lépe viděli úhly otočení.



Obr. 106



Obr. 107

Ukážeme užití pravidla skládání úhlových rychlostí. Uvažujme dva kruhy o poloměru r, jejichž středy jsou pevně umístěny ve vzdálenosti $2r$ (obr. 106). Otáčejí-li se kruhy bez klouzání, jsou jejich úhlové rychlosti v absolutní hodnotě stejné, ale mají opačná znaménka. Je-li například úhlová rychlost prvního $-\omega$, je rychlost druhého ω. Rychlosti (už nikoli úhlové) jejich bodů dotyku musí být na obou kruzích stejné. To plyne z toho, že kruhy neprokluzují. Protože velikost v lineární rychlosti bodu M na kruhu, který se otáčí úhlovou rychlostí ω, je rovna $v = \omega r$ (r je vzdálenost bodu M od středu kruhu), plyne z rovnosti lineárních rychlostí rovnost absolutních hodnot úhlových rychlostí. Vezměme teď vztažnou soustavu, pevně spojenou s prvním kruhem. Pak je třeba ke všem úhlovým rychlostem přičíst ω, úhlová rychlost prvního kruhu bude O a druhého 2ω. To jsme již viděli v úloze 7.4.

Ještě jeden příklad. Nechť je vzdálenost mezi (zatím pevnými) středy O a P dvou dotýkajících se kružnic o poloměrech $R = 2r$ a r rovna r (obr. 107). Otáčejí-li se kružnice bez prokluzování, jsou jejich úhlové rychlosti ω a 2ω (poměr absolutních hodnot jejich úhlových rychlostí se rovná převrácené hodnotě poměru jejich poloměrů). Ve vztažné soustavě pevně spojené s větší kružnicí jsou jejich úhlové rychlosti 0 a ω (jedná se o pohyb, o kterém se mluví v Koperníkově větě). Ve vztažné soustavě menší kružnice jsou úhlové rychlosti $-\omega$ a 0 (úloha 7.7).

Při určení úhlové rychlosti se ovšem můžeme také obejít bez zavedení otáčející se vztažné soustavy. Musíme pak umět zjistit (lineární) rychlost každého bodu kotálejícího se kruhu. To budeme hlavně potřebovat v dalším odstavci, pojednávajícím o tečnách cykloidálních křivek. Vraťme se tedy k prvnímu příkladu — uvažujme kruh o poloměru r kotálející se po pevné kružnici téhož poloměru. Označme T bod kruhu, v němž se v daném okamžiku dotýká pohybující se kruh pevné kružnice. Okamžitá rychlost bodu T je nulová, protože kotálení probíhá bez prokluzování. Jak najít okamžité rychlosti ostatních bodů kruhu?

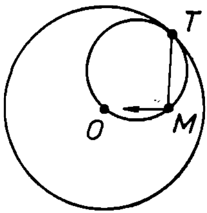
K odpovědi použijeme věty Mozziho: V každém okamžiku jsou rychlosti bodů desky, která se pohybuje v pevné rovině, buď stejné jako v případě posunutí desky, tj. všechny jsou stejně veliké a mají stejný směr, nebo jsou takové jako při otáčení, tj. rychlost jednoho bodu T je nulová a velikost rychlosti libovolného bodu M je rovna $|MT|\,\omega$, kde je ω okamžitá úhlová rychlost otáčení desky. Přitom je směr rychlosti bodu $M \neq T$ kolmý na spojnici bodů M, T. A právě tato druhá možnost nastává v případě kotálejícího se kruhu, přičemž roli bodu T — okamžitého středu otáčení — hraje bod dotyku kruhu a kružnice. (A to platí i v případě kotálení křivého kolečka po kostrbaté cestě.) Použijeme-li toto tvrzení, najdeme poměr úhlové rychlosti ω_1 kotálející se kružnice a úhlové rychlosti ω_2, se kterou se otáčí její střed P kolem středu O pevného kruhu. Stačí dvěma způsoby vypočíst velikost rychlosti bodu P. Jednak se rovná tato velikost hodnotě $2r\omega_2$, a protože je bod T okamžitým středem otáčení, rovná se též $r\omega_1$. Je tedy $2r\omega_2 = r\omega_1$, odkud $\omega_1 = 2\omega_2$.

Tentýž postup uplatníme v případě kruhu o poloměru r, který se kotálí po vnitřku kružnice o poloměru $2r$ tak, že se jeho střed otáčí po kružnici o poloměru r úhlovou rychlostí $\omega_2 > 0$. Označme úhlovou rychlost kruhu ω_1 a všimněme si, že $\omega_1 < 0$. Vyjádříme-li rychlost bodu P (středu kruhu) dvěma způsoby, dostaneme $|\omega_1 r| = |\omega_2 r|$, odkud $\omega_1 = -\omega_2$.

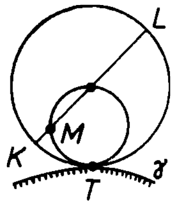
Analogické úvahy nám pomohou i při studiu jiných složených otáčení. Pro nás je zvlášť důležité, že Mozziho věta nám umožňuje určit i směr rychlosti každého bodu pohyblivého útvaru. Rychlost bodu M je vždy kolmá k úsečce MT, která ho spojuje s okamžitým středem otáčení.

Uvedeme ještě jeden důkaz Koperníkovy věty. Nechť je M bod kružnice o poloměru r, která se kotálí po vnitřku kružnice o poloměru $2r$ se středem O (obr. 108). V každém okamžiku směřuje rychlost bodu M kolmo na úsečku TM, kde je T bod dotyku obou kružnic, tedy okamžitý střed otáčení menší kružnice. Směřuje tudíž rychlost bodu M do středu O větší kružnice, protože T a O jsou diametrálně protilehlými body menší kružnice. Proto se bod M pohybuje po průměru velké kružnice, což je tvrzení Koperníkovy věty.

Dokážeme teď větu o dvou kruzích. Kotálejme po křivce nebo přímce γ najednou dvě kružnice o poloměrech r a $2r$. Označme M a K jejich body, které splývají



Obr. 108



Obr. 109

ve výchozí poloze s bodem A křivky γ, a T společný okamžitý střed otáčení obou kružnic, tedy jejich bod dotyku s křivkou γ (obr. 109). Směr okamžité rychlosti bodu M je kolmý k úsečce MT, a je tedy totožný se směrem toho průměru větší kružnice, který prochází bodem M. Je proto tento průměr, jehož krajní body označíme K, L, pevným průměrem větší kružnice a přímka KL se v každém okamžiku dotýká trajektorie bodu M. A to je právě tvrzení věty o dvou kruzích.

Všimněme si, že jsme zde použili jiné hledisko při určení tečny křivky; tečnou trajektorie pohybujícího se bodu je přímka procházející bodem M trajektorie ve směru vektoru rychlosti bodu M.

Větu Mozziho dokazovat nebudeme, ukážeme si však její geometrickou analogii. Je to tvrzení, že každé přemístění roviny v sebe, při kterém rovinu nepřeklopíme, je buď posunutí roviny, nebo její otočení kolem některého jejího bodu T. V souvislosti s Mozziho větou si všimněme ještě jedné okolnosti. Okamžitý střed otáčení T mění při zcela obecném pohybu destičky v rovině svou polohu, a to jak vzhledem k pevné rovině, tak vzhledem k pohybující se destičce. Vytváří tak v pevné rovině i v pohybující se rovině pevně spojené s destičkou křivku. První se nazývá *pevná poloida*, druhá *hybná poloida*. Například při kotálení kolečka po cestě je pevnou poloidou cesta, hybnou poloidou obvod kolečka. V kinematice se dokazuje, že se hybná poloida kotálí po nehybné. S výjimkou posouvání je tedy každý spojitý pohyb roviny v sebe kotálením jedné křivky po druhé. My jsme se omezili na ty pohyby, při kterých byly obě poloidy kružnicemi.

Tím ukončíme náš malý výlet do kinematiky a můžeme přistoupit k odhalení nejpozoruhodnějších vlastností cykloidálních křivek, souvisících s jejími tečnami.

7.18 Dokažte, že tečny kardioidy v krajních bodech její libovolné tětivy, která prochází bodem vratu kardioidy, jsou na sebe kolmé. Vzdálenost jejich průsečíku od středu pevné kružnice je $3r$, kde r značí poloměr této kružnice. ↓

7.19 Po kružnici jdou dva chodci P a Q, poměr jejich úhlových rychlostí je k (k je různé od 0, 1 a —1). Určete obalovou křivku všech spojnic PQ. ↓

7.20 Je dána kružnice a přímka procházející jejím středem. Dokažte, že sjednocením všech kružnic se středem na dané kružnici a dotýkajících se dané přímky je oblast ohraničená nefroidou.

7.21 Uvažujme Steinerovu křivku opsanou kružnici poloměru $2r$. Dokažte, že každá její tečna s bodem dotyku M ji protíná ještě v bodech K, L, přičemž délka úsečky KL je $4r$, její střed leží na dané vepsané kružnici; tečny Steinerovy křivky v bodech K, L jsou na sebe kolmé a jejich průsečík N leží také na vepsané kružnici. Ta půlí úsečky KN a LN. ↓

7.22 Asteroida je opsána kružnici o poloměru $2r$. Dokažte, že každým bodem P vepsané kružnice lze vést k asteroidě tři tečny PT_1, PT_2, PT_3, z nichž každé dvě svírají spolu úhel 60° a body dotyku T_1, T_2, T_3 tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku vepsaného kružnici o poloměru $3r$, která se dotýká kružnice opsané asteroidě.

Poslední úloha této série, kterou lze též řešit pomocí pohybu, ukazuje nečekanou souvislost mezi elementární geometrií trojúhelníku a cykloidální křivkou, která nese jméno geometra, objevitele této souvislosti.

7.23 Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že

a) paty kolmic vedených libovolným bodem kružnice opsané trojúhelníku ABC na přímky AB, BC, CA leží na jedné přímce (*Simsonova přímka*),

b) středy stran trojúhelníku, paty jeho výšek a středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníku leží na jedné kružnici (tzv. *kružnice devíti bodů*, nebo také *Feuerbachova kružnice*),

c) všechny Simsonovy přímky trojúhelníku ABC se dotýkají Steinerovy křivky opsané kružnici devíti bodů. ↓

Parametrické rovnice. Všechny vlastnosti cykloidálních křivek jsme mohli dokázat také analyticky. Přitom je nejvýhodnější použít parametrických rovnic křivky, kterými jsou souřadnice $[x; y]$ bodu M křivky vyjádřeny pomocí parametru t. Pod parametrem t si můžeme představit čas. S takovými rovnicemi jsme se setkali už v úloze 6.22.

Uvažujme trajektorii, po které se pohybuje čtvrtý vrchol M kloubového rovnoběžníku $OPMQ$, jehož vrchol O je pevný a splývá s počátkem soustavy souřadnic. Vyjdeme ze vztahu $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Pohybuje-li se bod P po kružnici o poloměru r_1 a středu O úhlovou rychlostí ω_1 a bod Q po kružnici o poloměru r_2 a středu O úhlovou rychlostí ω_2, má v okamžiku t bod P souřadnice $[r_1 \cos \omega_1 t;\ r_1 \sin \omega_1 t]$, $Q = [r_2 \cos \omega_2 t;\ r_2 \sin \omega_2 t]$ a souřadnice čtvrtého vrcholu M rovnoběžníku $OPMQ$ jsou

$$x = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos \omega_2 t,$$
$$y = r_1 \sin \omega_1 t + r_2 \sin \omega_2 t$$

(předpokládáme, že v okamžiku $t = 0$ splývají polopřímky OP a OQ s kladnou polopřímkou osy x). V úloze 6.22 jsme si ukázali, že v případě $\omega_2 = -\omega_1$ opisuje bod M elipsu. V obecném případě, platí-li vztahy

$$\omega_1/\omega_2 = k, \quad r_2/r_1 = |k|,$$

opisuje bod M cykloidální křivku, *k-cykloidu.*

Vyloučením parametru t z výše uvedených parametrických rovnic dostaneme v některých případech jednoduchou rovnici, kterou jsou spolu svázány souřadnice x, y každého bodu k-cykloidy. Vezměme například asteroidu. Pro ni je $r_1 = 3r_2$, $\omega_2 = -3\omega_1$; můžeme vzít $\omega_1 = 1$, pak je $\omega_2 = -3$ a parametrické rovnice asteroidy jsou (položili jsme $r_2 = r$)

$$x = 3r \cos t + r \cos 3t,$$
$$y = 3r \sin t - r \sin 3t,$$

nebo v jednodušším tvaru (?)

$$x = 4r\cos^3 t, \qquad y = 4r\sin^3 t.$$

Odtud plyne jednoduchá rovnice asteroidy

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (4r)^{2/3}.$$

Asteroidu i další křivky, se kterými jsme se seznámili, je možné zadat algebraickými rovnicemi. Ověřte si, že souřadnice $[x; y]$ každého bodu příslušné křivky vyhovují rovnici:

asteroida	$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 + 108r^2x^2y^2 = 0,$
kardioida	$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0,$
nefroida	$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 - 108r^4x^2 = 0,$
Steinerova křivka	$(x^2 + y^2 + 9r^2)^2 + 8rx(3y^2 - x^2) - 108r^4 = 0.$

Jsou tedy asteroida a nefroida křivky šestého stupně, kardioida a Steinerova křivka jsou stupně čtvrtého.

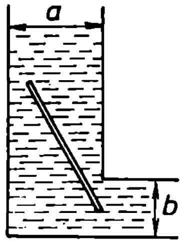
Dá se ukázat, že při racionálním poměru $k = \omega_1/\omega_2$ je cykloidální křivka křivkou algebraickou. Pro iracionální k dostaneme nealgebraickou křivku, jejíž body vyplňují hustě mezikruží se středem O a poloměry $r_1 + r_2$ a $|r_1 - r_2|$. To znamená, že v každém kruhu se středem v popsaném mezikruží a s libovolně malým poloměrem leží alespoň jeden bod křivky.

Porovnáním rovnice křivky s jejími geometrickými vlastnostmi můžeme dostat zajímavé důsledky. Ukážeme si jednu úlohu, ve které se užívá vlastností asteroidy.

7.24 a) Je dán pravý úhel a uvnitř něho ve vzdálenostech a, b od ramen úhlu bod K. Je možné proložit bodem K úsečku délky d s krajními body na ramenech úhlu?

b) Kanál, jehož břehy jsou rovnoběžne přímky, se láme do pravého úhlu. Před lomem má šířku a, za lomem šířku b. Pro která d může lomem proplout tenké břevno délky d (obr. 110)?

☐ a) Zvolíme ramena úhlu za osy soustavy souřadnic. Úsečka délky d s krajními body na ramenech úhlu se dotýká asteroidy, jejíž body vratu mají vzdálenost d



Obr. 110

od středu asteroidy. Její rovnice je $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$. Je-li K vnitřním bodem oblasti ohraničené asteroidou a rameny úhlu (nebo bodem hranice oblasti), existuje úsečka požadovaných vlastností. Je to úsečka procházející bodem K a dotýkající se asteroidy. Leží-li bod K vně uvedené oblasti, nemá úloha řešení. Úsečka předepsaných vlastností existuje tedy právě tehdy, je-li $a^{2/3} + b^{2/3} \leqq d^{2/3}$. ☐

Poznamenejme, že ačkoliv jsme si objasnili, jak „sestrojit“ za předpokladu $a^{2/3} + b^{2/3} \leqq d^{2/3}$ hledanou úsečku pomocí asteroidy, není úloha řešitelná jen pomocí pravítka a kružítka.

Pozoruhodné křivky, se kterými jsme se seznámili v posledních dvou paragrafech, jsou známy již více než 2000 let. Základní vlastnosti elips, hyperbol a parabol byly popsány již v díle „O kuželosečkách" starořeckého matematika Apollonia z Pergy, který žil téměř současně s Euklidem (třetí století před naším letopočtem). Studiem trajektorií pohybů složených z kruhových se již ve starověku zabývali astronomové, a nemůžeme se tomu divit. Předpokládáme-li, že se planety pohybují kolem Slunce zhruba po kruhových drahách a v téže rovině, je pohyb každé planety pozorován ze Země jako složený kruhový pohyb. Popis pohybu planet pomocí cykloidálních křivek se novými astronomickými pozorováními stále zpřesňoval až do doby, kdy Johannes Kepler zjistil, že trajektorie planet jsou s velkou přesností elipsy s jedním ohniskem ve středu Slunce. Různé úlohy fyziky, mechaniky i matematiky související s křivkami byly zkušebním kamenem analytické metody v geometrii, kterou vytvořili v 17. století Descartes, Leibnitz, Newton, Fermat a jiní. Tato metoda umožnila přechod od jednotlivých úloh o konkrétních křivkách k obecným zákonitostem týkajícím se vždy celých tříd křivek. Při výpočtech složitých mechanismů a konstrukcí se sice neobejdeme bez analytické geometrie, ale názorné představy, kterým je věnována tato knížka, jsou užitečné, a to i v úlohách nesouvisejících s geometrií. Ne nadarmo se výsledky výzkumů a výpočtů předkládají ve formě grafů nebo systémů křivek.

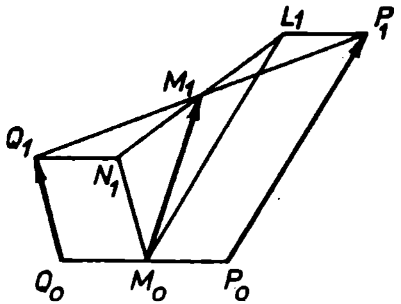
ODPOVĚDI, NÁVODY, ŘEŠENÍ

1.13 Vrcholy M pravoúhlých trojúhelníků AMB s přeponou AB leží na kružnici s průměrem AB.

1.14 Bodem dotyku M kružnic veďme jejich společnou tečnu. Její průsečík s přímkou AB označme O. Pak je $|AO| = |BO| = |MO|$ (délky tečen vedených bodem O k téže kružnici jsou stejně velké).

1.15 Sjednocení tří kružnic. Nechť jsou A, B, C, D dané body. Bodem A vedeme přímku l, bodem C přímku s ní rovnoběžnou a body B, D vedeme přímky kolmé k přímce l. Tím dostaneme pravoúhelník. Je-li L střed úsečky AC, K střed BD, je $\sphericalangle LMK = 90°$, kde je M střed pravoúhelníku. Otáčíme-li přímku l kolem bodu A a odpovídajícím způsobem ostatní přímky, vidíme, že množinou bodů M je kružnice nad průměrem KL. Protože čtyři body A, B, C, D můžeme rozdělit na dvojice třemi způsoby, skládá se hledaná množina ze tří kružnic.

1.25 Buď je střed pevný, nebo probíhá přímku. Pohybují-li se chodci po rovnoběžných přímkách, je střed buď pevný (chodci jdou každý na jinou stranu), nebo se i střed pohybuje po přímce rovnoběžné s danými. Nechť se přímky protínají, označme O jejich průsečík a $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ rychlosti chodců, tedy vektory ze zaměření první a druhé přímky, jejichž velikost je rovna dráze, kterou ujde ten který chodec za jednotku času. Nechť se první chodec nachází v okamžiku t v bodě P, druhý v bodě Q, pak je $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\vec{v}_1$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{b} + t\vec{v}_2$, vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ udávají polohu chodců v čase $t = 0$. Střed M úsečky PQ je dán vztahem $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})/2 = (\vec{a} + \vec{b})/2 + t(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$. Vidíme, že se bod M pohybuje po přímce rychlostí



Obr. 111

$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$. Pro její určení stačí určit střed počátečních poloh obou chodců a střed jejich poloh třeba za jednotku času.

Výpočty s vektory můžeme nahradit též geometrickými úvahami. Nechť jsou P_0P_1 a Q_0Q_1 libovolné, ale ne rovnoběžné úsečky, M_0 střed úsečky P_0Q_0 a M_1 střed úsečky P_1Q_1. Úsečka M_0M_1 je těžnicí v trojúhelníku $L_1M_0N_1$, kde L_1 a N_1 jsou čtvrtými vrcholy rovnoběžníků $P_1P_0M_0L_1$, $Q_1Q_0M_0N_1$. Úsečky P_1Q_1 a N_1L_1 jsou totiž úhlopříčkami v rovnoběžníku $P_1L_1Q_1N_1$ (obr. 111). Zvolíme-li místo bodů P_1 a Q_1 na přímkách P_0P_1, Q_0Q_1 body P, Q tak, aby $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{Q_0Q} = t\overrightarrow{Q_0Q_1}$, a sestrojíme-li obdobně jako předtím trojúhelník LM_0N

s těžnicí M_0M, je tento trojúhelník zřejmě stejnolehlý s trojúhelníkem $L_1M_0N_1$ s těžnicí M_0M_1, a bod M leží proto na přímce M_0M_1.

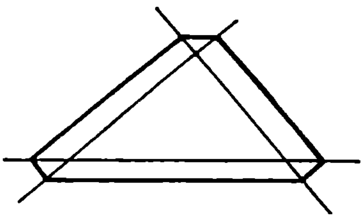
1.28 Použijeme obrázku z řešení 1.25. Otáčí-li se úsečky P_0P_1 a Q_0Q_1 rovnoměrně kolem bodů P_0, Q_0 stejnou úhlovou rychlostí, otáčí se stejnou úhlovou rychlostí trojúhelník $L_1M_0N_1$ s těžnicí M_0M_1.

1.29 Kružnice. Úlohu řešíme pomocí pohybu, sestrojíme poloměry O_1K, O_2L. Otáčí-li se přímka KL rovnoměrně úhlovou rychlostí ω, otáčí se podle věty o prstenci poloměry O_1K a O_2L stejnou úhlovou rychlostí 2ω, je tedy velikost úhlu přímek O_1K a O_2L konstantní. Tím se úloha převede na předcházející.

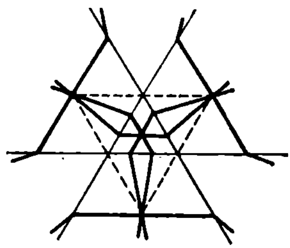
2.11 b) Použijte F.

2.19 Označme výšku trojúhelníku h. Je-li $\mu < h$, je hledaná množina prázdná, pro $\mu = h$ je to celý trojúhelník, pro $\mu > h$ obvod šestiúhelníku (obr. 112).

2.20 Obrázek 113.



Obr. 112

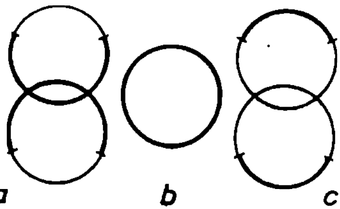


Obr. 113

3.5 b) Převede se na úlohu 3.5a, nebo se dá řešit „prostorově“. Sestrojíme tři sféry, které mají dané kružnice za hlavní kružnice (každá sféra prochází jednou kružnicí a střed sféry a střed kružnice splývají). Každé dvě sféry se protínají v kružnici, která se promítá do příslušné tětivy.

3.7 b) Je $|\sphericalangle AMB| = 90° + \varphi/2$, kde M je střed kružnice vepsané trojúhelníku. Podle E je hledanou množinou dvojice kruhových oblouků s koncovými body A, B.

3.7 c) Hledanou množinou je dvojice kruhových oblouků. Na obrázku 114 jsou po řadě zachyceny pří-



Obr. 114

pady $\varphi < 90°$, $\varphi = 90°$, $\varphi > 90°$. Nechť l_A, l_B jsou různoběžky procházející body A, B a nechť k_A, k_B jsou přímky rovněž procházející body A, B, přičemž $k_A \perp l_B$, $k_B \perp$ $\perp l_A$. Otáčejí-li se přímky l_A, l_B kolem bodů A, B rovnoměrně, otáčejí se stejně přímky k_A, k_B. Podle E_0 probíhá jejich průsečík kružnici. Probíhá-li průsečík přímek l_A, l_B kruhový oblouk kružnice γ, probíhá průsečík přímek k_A, k_B kruhový oblouk kružnice souměrně sdružené ke kružnici γ podle přímky AB.

3.8 a) Označme K, L, M postupně průsečíky dvojic přímek a a b, b a c, c a a. Podle E_0 opisují body K, L

kružnice s tětivami AB, BC. Označme H průsečík těchto kružnic, různý od B. V okamžiku, kdy přímka b prochází bodem H, splývají body K, L s bodem M, procházejí tudíž přímky a a c také bodem H. (Případy, ve kterých se uvažované dvě kružnice v bodě B dotýkají, nebo dokonce splývají, nutno vyšetřit zvlášť. V prvním případě splývají body B a M, ve druhém splývají v každém okamžiku body K, L, M, na přímky a, b, c je možné navléknout jeden prstenec.) Poznamenejme ještě, že při celém otáčení je trojúhelník KLM stále podobný jedné své poloze. Procházejí-li přímky a, b, c bodem H, redukuje se na bod a největších rozměrů nabývá v okamžiku, kdy jsou přímky a, b, c po řadě kolmé na přímky AH, BH, CH. Pak splývají jeho vrcholy s body diametrálně protilehlými k bodu H na jednotlivých trajektoriích (kružnicích).

3.8 b) Nechť se přímky AH, BH, CH začínají otáčet stejnou úhlovou rychlostí kolem bodů A, B, C (H je průsečík výšek). Pak opisuje průsečík každé dvojice kružnici, a to jsou ty kružnice, o kterých se mluví v úloze.

3.9 Zkoumáme tři množiny bodů M ležících uvnitř trojúhelníku, $\{M : S_{AMB} = k_1 . S_{BMC}\}$, $\{M : S_{BMC} = k_2 . S_{AMC}\}$, $\{M : S_{AMC} = k_3 . S_{AMB}\}$. To jsou tři úsečky (viz J), které se protínají v jednom bodě, právě když platí $k_1k_2k_3 = 1$.

3.10 Uvažujte množiny $\{M : |MA|^2 - |MB|^2 = h_1\}$, $\{M : |MB|^2 - |MC|^2 = h_2\}$, $\{M : |MC|^2 - |MA|^2 = h_3\}$. Tyto tři přímky (viz F) se protínají právě tehdy v jednom bodě, když $h_1 + h_2 + h_3 = 0$.

3.19 Uvažujte pro každý z daných n bodů C_i množinu bodů, jejichž vzdálenost od bodu C_i není větší než $1/\sqrt{\pi n}$ $(i = 1, \dots, n)$.

3.21 Uvažujte množinu koncových bodů vektorů $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE}_1 + \overrightarrow{OE}_2 + \dots + \overrightarrow{OE}_n$ (kde $\overrightarrow{OE}_i$ jsou jednotkové vektory podle podmínek úlohy) nejdříve pro $n = 1$, pak $n = 2$ atd.

4.4 Nejmenší vzdálenost mezi chodci je $ud/\sqrt{u^2 + v^2}$. Rychlost prvního chodce nechť je $\vec{u}$, druhého $\vec{v}$ (velikosti těchto vektorů jsou dány). Uvažujme relativní pohyb chodce P vzhledem ke Q, to je rovnoměrný pohyb rychlostí $\vec{u} - \vec{v}$ (viz 1.3). V počáteční poloze, kdy se chodec P nachází v průsečíku P_0 obou cest, je chodec Q v poloze Q_0, vzdálené od P_0 ve směru vektoru $-\vec{v}$ o délku $|Q_0P_0| = d$. K určení odpovědi úlohy stačí bodem P_0 vést přímku l ve směru vektoru $\vec{u} - \vec{v}$ (to je trajektorie bodu P při relativním pohybu vzhledem k vztažné soustavě, svázané s bodem Q) a určit vzdálenost Q_0H bodu Q_0 od přímky l (H je kolmý průmět bodu Q_0 na l). Protože trojúhelník Q_0P_0H je podobný trojúhelníku složenému z vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ $(Q_0P_0 \perp \vec{u}, Q_0H \perp \vec{u} - \vec{v})$, je $|Q_0H|/|Q_0P_0| = |\vec{u}|/|\vec{u} - \vec{v}| = u/\sqrt{u^2 + v^2}$.

4.6 Veďme středem O_1 jedné kružnice kolmici O_1N na přímku l procházející bodem A, středem druhé kružnice kolmici na O_1N; její patu označme M. Pak je $|O_1M|$ polovina vzdálenosti průsečíků přímky l s oběma kružnicemi (různých od A).

4.9 Rovnoramenný trojúhelník. Použijte 2.8a.

5.4 b) Dokažte, že průsečík M kolmic vedených body

K, L k přímkám KA, LA opisuje kružnici, pohybují-li se body K, L po ramenech úhlu s vrcholem A tak, aby se neměnila velikost úsečky KL (vzpomeňte na souvislost s Koperníkovou větou vyloženou v úvodu).

5.7 Použijte tvrzení, že hladiny funkce $f(M) = |AM|/|BM|$ jsou kružnice kolmé ke kružnicím procházejícím body A, B.

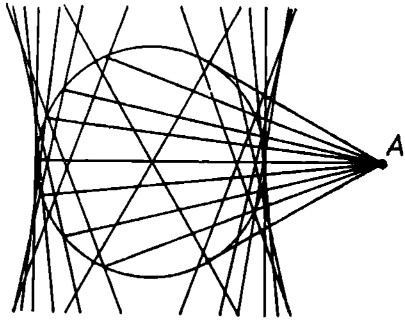
6.3 e) Odpověď je hyperbola, jestliže každá z daných kružnic leží vně druhé (nebo mají vnější dotyk), sjednocení hyperboly a elipsy, jestliže se kružnice protínají, a elipsa v případě, že jedna z kružnic leží ve vnitřní oblasti druhé (nebo mají vnitřní dotyk). Ohniska splývají se středy kružnic.

6.12 a) Spolu s danou tečnou uvažujte i tečnu souměrně sdruženou podle středu elipsy. Využijte 6.9b a větu o součinu úseků na tětivě procházející daným bodem vnitřní oblasti kružnice (součin nezávisí na směru tětivy).

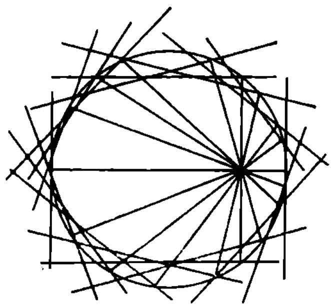
6.15 Sestrojte v případě a) elipsu a v případě b) hyperbolu s ohnisky A, B dotýkající se první úsečky P_0P_1 a dokažte, že se jí dotýká i druhá úsečka P_1P_2. Užijte k tomu shodnosti trojúhelníků $A'P_1B$, AP_1B', kde A' je bod souměrně sdružený k bodu A podle P_0P_1, B' je bod souměrně sdružený k B podle P_1P_2. Tečny jsou osami úseček AA', BB' (viz 6.9a, 6.10a).

6.16 c) Sestrojíme množinu všech bodů N, pro které leží střed úsečky AN na dané kružnici. Je to kružnice, její střed označíme B, její poloměr R. Množina bodů, které jsou blíž k bodu A než k libovolnému z bodů N

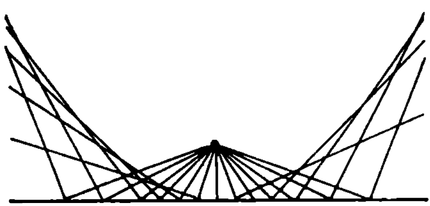
K úlohám 6.16 a 6.17. Na obrázcích 115—117 je zakresleno pouze několik přímek příslušného systému, ale zdá se, jako by byly prorýsovány i výsledné obálky — hyperbola, elipsa, parabola.



Obr. 115



Obr. 116



Obr. 117

sestrojené kružnice, je průnikem polorovin ohraničených osami úseček AN a obsahujících bod A. Tutéž množinu můžeme psát ve tvaru $\{M : |MA| - |MB| \leqq R\}$, hraniční křivkou je jedna větev hyperboly.

6.17 Porovnejte návod k 6.16 s důkazem ohniskové vlastnosti paraboly.

6.23 Počátek soustavy souřadnic zvolte ve středu úsečky AB a směr osy x tak, aby v některém okamžiku byly otáčející se přímky s ní rovnoběžné. Vyjádřete rovnice přímek a souřadnice jejich průsečíku v závislosti na čase t. Vyloučením parametru t ze souřadnic průsečíku (jako v řešení 6.22) dostanete rovnici hyperboly ve tvaru (4) na str. 104.

6.24 Představme si dvě přímky otáčející se kolem bodů A, B v opačných smyslech tak, že se druhá otáčí s dvojnásobnou úhlovou rychlostí než přímka první. Lehce uhodneme, že se jejich průsečík pohybuje po křivce podobné hyperbole, přičemž její asymptoty svírají s přímkou AB úhel 60° a její průsečík C s úsečkou AB ji dělí v poměru $|AC|/|BC| = 2$. A odpověď v této úloze skutečně zní — větev hyperboly. Geometrický důkaz podáme nejlépe převedením úlohy na množinu Q naší abecedy. K tomu sestrojíme bod M' souměrně sdružený k bodu M podle osy l úsečky AB a všimneme si, že BM' je osou úhlu ABM a že $|MM'| = |MB|$, proto je $|MB|/\varrho(M, l) = 2$.

6.25 a) Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, aby ramena úhlu byla dána rovnicemi $y = kx$, $y = -kx (x \geqq 0)$, je obsah trojúhelníku OPQ s vrcholy P, Q na ramenech úhlu a středu $P[x; y]$ roven $kx^2 - y^2/k$.

b) Použijte výsledků úlohy 1.7b.

c) Vyplývá z a) a b).

7.2 Sjednocení je množinou všech bodů M, ke kterým existuje takový bod P kružnice, že $|MP| \leqq |PA|$, nebo též množinou bodů M, pro které má osa úsečky MA společný bod s danou kružnicí. Srovnejte s úlohami 6.16, 6.17.

7.9 Odpověď: a) 3, b) 4, c) 2,5. Najděte poměr úhlových rychlostí tak, jak to bylo ukázáno v odstavci o rychlostech a tečnách.

7.13 a) Kruhový oblouk kružnice o poloměru R mezi dvěma body vratu Steinerovy křivky má stejnou délku jako polokružnice o poloměru $2R/3$.

7.14 b) Jednu i druhou křivku můžeme dostat jako trajektorii vrcholu M kloubového rovnoběžníku o stranách $R - r$, r s poměrem úhlových rychlostí $\omega_1/\omega_2 = -r/(R - r)$ (úhlové rychlosti mají opačná znaménka).

7.18 Použijte 7.7 a větu Mozziho.

7.19 k-cykloida.

7.21 Použijte 7.13a, Mozziho větu a větu o dvou kruzích.

7.23 Nechť se bod M pohybuje po opsané kružnici úhlovou rychlostí ω. Pak
(1) se body M_1, M_2, M_3, souměrně sdružené k bodu M podle přímek BC, CA a AB, pohybují po kružnicích úhlovou rychlostí $-\omega$,
(2) tyto tři kružnice se protínají v průsečíku výšek H trojúhelníku ABC (3.8b),
(3) každá z přímek M_iM ($i = 1, 2, 3$) se otáčí kolem bodu H úhlovou rychlostí $-\omega/2$,
(4) body M_1, M_2, M_3 leží na jedné přímce l_M procházející bodem H (tj. přímky M_iM splývají v jednu přímku l_M),

(5) středy úseček M_iM ($i = 1, 2, 3$) a střed K úsečky MH leží na jedné přímce, Simsonově přímce trojúhelníku,

(6) bod K se pohybuje po kružnici γ, stejnolehlé s kružnicí opsanou, s koeficientem $1/2$ a středem stejnolehlosti H,

(7) kružnice γ prochází těmi 9 body, které jsou vyjmenovány v 7.23b,

(8) obalovou křivkou přímek l_M je Steinerova křivka, dotýkající se kružnice γ.

Seznam dosud vydaných svazků edice ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ v nakladatelství Mladá fronta

---

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler - Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler - Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967
20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969

24. *Ján Gatial - Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Beloslav Riečan - Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980
46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *N.B.Vasiljev, V. L. Gutenmacher:* Přímky a křivky, 1982
49. *Pavel Vít:* Řetězové zlomky, 1983
50. *Adam Plocki:* O náhodě a pravděpodobnosti, 1982

OBSAH

Předmluva - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 3

Úvod. Úvodní úlohy - - - - - - - - - - - - - - - - 5

1. Množiny bodů - - - - - - - - - - - - - - - - - 12

2. Abeceda - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 27

3. Logické kombinace - - - - - - - - - - - - - - - 48

4. Minimum a maximum - - - - - - - - - - - - - - 62

5. Hladiny - 72

6. Křivky druhého stupně - - - - - - - - - - - - - 88

7. Otáčení, kotálení a trajektorie - - - - - - - - - - 114

Odpovědi, návody a řešení - - - - - - - - - - - - - 141

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

N. B. VASILJEV, V. L. GUTENMACHER

Přímky a křivky

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědné redaktorky Libuše Rousková
a Zdena Šmídová
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4481
Edice Škola mladých matematiků, svazek 48
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
5,14 AA, 6,49 VA, 160 stran
Náklad 5500 výtisků. 1. vydání
Praha 1982. 508/21/82.5

23-091-82 03/2 Cena brož. výt. 8,— Kčs

23-091-82
03/2
Cena brož.
Kčs 8,—