O nerovnostech a nerovnicích

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O NEROVNOSTECH A NEROVNICÍCH

48

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

FRANTIŠEK VESELÝ

O nerovnostech a nerovnicích

PRAHA 1982
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA K PRVNÍMU VYDÁNÍ

Dvacáté století zůstane ve vývoji lidstva významným mezníkem pro revoluční změny společenské i pro neobyčejný rozmach vědy a techniky. Tyto jevy spolu velmi těsně souvisí. Matematikové podporovali svou prací takový vývoj vždy, když usilovali o to, aby pomáhali pracovníkům v jiných vědách nebo v praktickém životě. Současný stav společenského vývoje vyžaduje, aby se stále zvyšovalo vzdělání všech lidí v matematice a aby byly odkrývány mladé talenty a vychovávány pro práci v matematických vědách. Tyto úkoly se snaží plnit též tradiční žákovské soutěže matematické olympiády. Na jejich podporu vznikla knižnice Škola mladých matematiků, jejíž vydávání bylo usnadněno porozuměním nakladatelství Mladá fronta.

Úkolem tohoto svazku je osvěžit nebo přehledně zopakovat a pak prohloubit vaše vědomosti z nauky o nerovnostech. Dobrá znalost učiva o nerovnostech má totiž velký význam nejen pro studium matematické analýzy, ale i pro řešení četných problémů praktického života, jak se to nejvíce projevuje v tzv. lineárním programování. V tomto svazku se pokusíme vysvětlit mimo jiné též základní pojmy, podstatu úloh i pracovní metody lineárního programování, které se stalo nepostradatelným pomocníkem velkého počtu našich techniků i ekonomů. Jeho výklad se opírá jen o takové vědomosti z elementární matematiky, které již máte nebo je získáte při studiu této knížky. V čl. 7—8 je ukázán pohled na jednoduché úlohy lineárního programování, které se *v obecnější formě vyskytují v technické i hospodářské praxi. Při řešení takových úloh uvidíte, jak úzce spolu souvisí četné poznatky z různých oborů matematiky, a to daleko víc, než se to jeví ve školské praxi, kde učivo aritmetiky, algebry i geometrie je často od sebe odtrženo. Má-li matematika dobře sloužit pracovníkům v praxi, pak je často nutné používat poznatků z různých oborů matematiky, které se musí vzájemně podporovat a doplňovat. Jen tak je možno získávat nové pohledy na řešené problémy a hledat nové cesty k využití matematické vědy.*

Omezený rozsah této knížky vyžadoval, aby výklad byl stručný. Jeho studium je však usnadněno tím, že do textu bylo zařazeno 30 příkladů, v nichž byly některé úlohy buď zcela vyřešeny, nebo byl popsán postup řešení, které si podle návodu můžete již provést sami. Téměř do všech článků jsou zařazena cvičení, jichž je 33 a obsahují celkem 82 úlohy. Řešením úloh upevníte nově získané poznatky a vycvičíte se v numerickém počítání. Nepodaří-li se vám některé úlohy rozřešit, nedejte se tím odradit od studia dalších článků. V žádném z nich nepředpokládáme při výkladu znalost řešení některých úloh ze cvičení. Radíme vám, abyste si soustavně dělali obrázky při studiu celé knížky. Jedno staré čínské přísloví říká, že je lépe jednou uvidět než stokrát uslyšet. O moudrosti skryté v tomto přísloví se jistě mnohokrát přesvědčíte.

Největší zisk z této knížky budete mít tehdy, budete-li ji soustavně a samostatně studovat. Jestliže však narazíte na překážky, které by vám znemožňovaly pokračovat v jejím studiu, obraťte se s žádostí o radu na svého učitele matematiky.

František Veselý

PŘEDMLUVA K DRUHÉMU VYDÁNÍ

Tato knížka vyšla poprvé v roce 1963 pod názvem O nerovnostech. Od té doby prošla výuka matematiky na našich středních školách složitým vývojem; změnily se učební osnovy, byly napsány nové učebnice a i terminologie je jiná. V souladu s novou terminologií se jevilo užitečné změnit název knížky a upravit její text. Knížka podává výklad o řešení nerovnic elementárním způsobem. Čtenář v ní nenalezne výklad o výrokových formách nebo o úpravách DUN 1—5, získá snad však cit pro řešení úloh s nerovnicemi a touhu poznat z matematiky víc. O to jejímu autorovi především šlo.

K dalšímu studiu doporučujeme čtenáři následující knížky, které vyšly ve stejné knižnici a byly věnovány podobné problematice. Jsou to:

K. Havlíček: Analytická geometrie a nerovnosti (sv. 18),
J. Černý: O aplikáciách matematiky (sv. 36),
A. Kufner: Nerovnosti a odhady (sv. 39).

A nakonec osobní poznámku: jsem rád, že knížka vychází znovu, a děkuji všem, kteří se o to zasloužili. Pokud se bude čtenáři zdát příliš nemoderní ve srovnání s pojetím dnešních učebnic, je to moje chyba — chtěl jsem původní text upravit jen tam, kde to bylo nezbytně nutné. Doufám, že právě proto zůstane knížka přístupná i těm velmi mladým adeptům matematiky a že se jim bude líbit.

Jiří Veselý

O AUTOROVI

Na podzim roku 1961 vydalo nakladatelství Mladá fronta první svazek nové knižnice Škola mladých matematiků. Tato knižnice, kterou dnes dobře znáte, vznikla na popud zesnulého prof. Františka Veselého a byla významným krokem vpřed při vytváření studijní literatury pro mladé řešitele matematické olympiády. Uvážíme-li, že od r. 1961 vycházejí dva až tři svazky ročně, představuje dnes knižnice pěkný soubor brožur s nejrůznějšími tématy, které napsali povolaní autoři: vědečtí pracovníci i učitelé.

Profesor Veselý měl dlouholetou učitelskou praxi na středních školách i na plzeňské Vysoké škole strojní a elektrotechnické; pro něj nebylo vyučování nikdy pouhým řemeslem, ale uměním — uměním, jak podchytit pozornost a zájem studentů. Ve školské matematice měl široký okruh zájmů; patřila mezi ně logika, historie matematiky, elementární teorie čísel, matematická terminologie. Jako učitel fyziky vždy zdůrazňoval nutnost dnes obecně uznávanou, totiž aby matematické poznatky vyúsťovaly do problémů reálného světa.

Pro Školu mladých matematiků napsal dva svazečky: O nerovnostech *(v pořadí pátý) a* O dělitelnosti *(v pořadí čtrnáctý). Přistupujeme-li dnes k reedici brožury O nerovnostech (1. vydání vyšlo r. 1963), máme k tomu dva hlavní důvody: ukázat, jak v té době před necelými dvaceti lety, kdy u nás neprobíhaly ještě žádné modernizační pokusy, bylo zpracování Veselého brožury progresivní, ale zároveň* *také ukázat, že od r. 1963 udělala naše školská matematika slušný krok vpřed.*

Původní název svazečku byl O nerovnostech; tehdy se totiž ještě nerozlišovalo mezi nerovností jako relací a nerovnicí jako výrokovou formou. Zato najdeme ve svazečku zmínku o vývoji matematiky, o množinách, o analytickém vyjádření přímek a polorovin, dále články o algebraickém řešení nerovnic a jejich soustav a o lineárním programování. To všechno sice dnes zní velmi všedně, ale uvažte, že to bylo napsáno v letech, kdy se u nás celá školská algebra ještě točila kolem rovnic a jejich řešení.

Jmenovanými dvěma brožurami se ovšem nevyčerpávalo vše, co udělal prof. Veselý pro matematickou olympiádu: navrhoval soutěžní úlohy, přednášel pro žáky i učitele, psal a recenzoval učebnice. Jeho zájem se soustřeďoval také na Jednotu československých matematiků a fyziků, které věnoval mnoho odborné i organizační práce až do konce svého života. K stému výročí vzniku Jednoty r. 1962 sepsal historii této naší nejstarší vědecké společnosti. Z jeho popudu vznikly též matematické besedy, které pořádá Jednota v Klubu školství a kultury v Praze.

Všechnu tuto práci, která vyžadovala rozsáhlé studium pramenů, cestování a jiné, konal po téměř dvacet pět let v hlubokých temnotách, neboť r. 1953 úplně oslepl. Nepostradatelnou a obětavou spolupracovnicí prof. Veselého při veškeré této činnosti byla jeho manželka paní Marie Veselá, bez níž by jeho práce nebylo. Až budete číst tuto brožuru, vzpomeňte na jejího autora, který zůstal nezlomen životním osudem a který tolik učinil pro matematiku.

František Veselý (1903—1977) byl moravský rodák. Studoval v Praze, působil jako učitel na středních školách a posléze přednášel na VŠSE v Plzni. Od r. 1964 žil v Praze. R. 1962 ho JČSMF jmenovala čestným členem.

Jan Vyšín

Kapitola 1.

VZNIK HLAVNÍCH OBORŮ MATEMATIKY

Z práce na řešení některých otázek praktického života se vyvíjely již v nejstarších dobách společenského vývoje dovednosti počtářské a zeměměřičské. Při rozvoji umění počtářského i zeměměřičského přibývalo stále více nových poznatků, které bylo třeba roztřídit a uspořádat. Tak vznikala matematická věda jako jedna z nejstarších věd. Velikou zásluhu o to si získali ve starověku zejména řečtí učenci, z nichž nejznámější jsou *Pythagoras* (žil v 6. stol. před n. l.), *Euklides* (žil kolem roku 300 před n. l.) a *Archimédes* (287—212 před n. l.). Celá matematická věda byla v době svého vzniku v Řecku označována názvem geometrie, který zřetelně ukazoval na její praktický původ. Řecké slovo gé znamená totiž země, metrein měřiti. Teprve později se význam názvu geometrie zúžil na označení té části matematiky, která se zabývá vztahy mezi prostorovými prvky, jako jsou body, přímky, roviny, křivky, plochy, tělesa apod.

Názvem aritmetika označujeme dnes tu část matematiky, která jedná o vlastnostech čísel různých číselných oborů a o počítání s určitými čísly. Proto zkoumání vlastností celých čísel (dělitelnost, prvočísla apod.), zahrnované do tzv. číselné teorie, tvoří jen část aritmetiky. Ve starší době patřilo do aritmetiky i řešení rovnic, z něhož se vyvinula nová samostatná část matematiky, označovaná slovem arabského původu algebra. K velkému rozvoji algebry přispělo užívání písmen ve významu čísel, k němuž došlo zejména od konce 16. století. Moderní algebra se však rozvinula tak, že nauka o řešení rovnic tvoří jen její poměrně malou a ne nejdůležitější část. Dnes se často dělí matematika zhruba na geometrii, na matematickou analýzu a algebru.

Od starověku se geometrie jako věda vyvíjela nejprve tak, že po zavedení základních geometrických pojmů a základních vět, jejichž platnost byla uznávána bez důkazu, byly další geometrické poučky odvozovány logickými úvahami. Pro označení této části dnešní geometrie se často užívá názvu syntetická geometrie. Od 17. století se začala v geometrii vyvíjet nová pracovní metoda tím, že geometrickým prvkům, např. bodům, přímkám, křivkám, rovinám, plochám apod., byly přiřazovány prvky aritmetické a algebraické, tj. čísla, číselné dvojice nebo trojice, rovnice apod., s nimiž byly prováděny početní operace a po jejichž provedení byly dosažené výsledky vykládány opět geometricky. Pro tuto část geometrie, která řeší geometrické úlohy prostředky početními (analytickými), se ustálil název analytická geometrie.

Jako zakladatel analytické geometrie bývá zpravidla uváděn francouzský filozof a matematik *René Descartes*[1]) (1596—1650), který je v odborné literatuře uváděn často též latinským jménem *Cartesius*[2]). Základy analytické geometrie i její pracovní metodu naznačil v doplňku k svému slavnému spisu „Rozprava o metodě“, který vyšel roku 1637. Francouzský matematik *Pierre de Fer-*

---

[1]) čti Dékár

[2]) čti Kartézius; spisovatel Zikmund Winter ve svém historickém románu Mistr Kampanus připomíná Descartesův (čti Dékártův) pobyt v Praze v době bitvy na Bílé hoře 1620; uvádí jej tam se jménem Cartesius

mat[3]) (1601—1665), který se proslavil některými výsledky svých prací v číselné teorii, budoval také základy analytické geometrie, a to snad o něco dříve i hlouběji než Descartes, jemuž je přiznáváno prvenství jen proto, že jako první své úvahy o analytické geometrii uveřejnil, zatímco Fermatův spis s úvahami o analytické geometrii vyšel až po Fermatově smrti. Vznik analytické geometrie a její rozvoj měl silný vliv nejen na další vývoj matematiky, ale i na vývoj přírodních věd, zejména fyzikálních.

I když matematika vyrůstala z práce na řešení otázek skutečného života, stávaly se časem úvahy matematiků stále abstraktnější, takže často souvislost některých úvah s otázkami praktického života nebyla již zřejmá. Tak se stalo, že se začala rozlišovat matematika ryzí a matematika užitá čili aplikovaná. V posledních desetiletích vzrostl pronikavě společenský význam matematiky proto, že se jejích poznatků využívá nejen ve vědách fyzikálních a technických, ale i ve vědách společenských, zejména v ekonomii.

---

[3]) čti Pier d'Ferma

Kapitola 2.

NĚKTERÉ POZNATKY Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE

(analytický popis polorovin)

Ze školy je vám známo, jak lze v rovině, v níž byla zvolena pravoúhlá souřadnicová soustava, přiřadit všem bodům $[x, y]$ dané přímky p lineární rovnici, která má obecný tvar $ax + by + c = 0$. V tomto článku chceme ukázat, jak lze v takové rovině přiřadit všem bodům $[x, y]$ poloroviny vyťaté přímkou p lineární nerovnici $ax + by + c \geqq 0$ a všem vnitřním bodům této poloroviny nerovnici $ax + by + c > 0$. Dříve než tak učiníme, připomeneme některé základní pojmy z geometrie a pak se umluvíme na užívání některých názvů a značek. Tyto úmluvy nám umožní zestručnit další výklad.

Je-li dána přímka p a mimo ni ležící bod A, je jimi určena rovina pA. Přímka p rozděluje body této roviny na tři části:

I. Všechny takové body X roviny pA, pro které platí, že úsečka AX nemá žádný bod společný s přímkou p; nevylučujeme $X \equiv A$.

II. Všechny body přímky p.

III. Všechny takové body X roviny pA, pro které platí, že úsečka AX má vnitřní bod společný s přímkou p.

Souhrn všech bodů, které leží v částech I a II, nazveme *polorovinou*, určenou přímkou p a bodem A, a označíme ji $\varrho(p, A)$. Souhrn všech bodů, které leží v částech II a III, nazveme *polorovinou opačnou* k $\varrho(p, A)$. Polorovina $\varrho(p, A)$ a polorovina k ní opačná mají společné právě všechny body přímky p, kterou nazýváme *hraniční přímka* obou polorovin. Body části I nazveme vnitřními body $\varrho(p, A)$ a body části III vnitřními body poloroviny opačné k $\varrho(p, A)$.

V rovině, v níž byla zvolena kartézská (pravoúhlá) souřadnicová soustava, si můžeme označování obou polorovin vyťatých přímkou p ještě více zjednodušit. Za předpokladu, že souřadnicová soustava s počátkem O a jednotkovými body J_1 na první souřadnicové ose[4]) a J_2 na druhé byla zvolena tak, že osa x je vodorovná, osa y svislá, bod J_1 leží vpravo od bodu O a bod J_2 nad bodem O, můžeme rozlišení polorovin vyťatých přímkou p charakterizovat zhruba takto: a) Je-li přímka p různoběžná s osou y, pak dolní polorovinu označíme $\varrho(p)$ a horní $\bar{\varrho}(p)$. b) Je-li přímka p rovnoběžná s osou y, označíme levou polorovinu $\varrho(p)$ a pravou $\bar{\varrho}(p)$. Pro praktickou potřebu řešení úloh v této knížce by snad stačila tato úmluva, která se odvolává na smyslový názor při volbě zvláštní souřadnicové soustavy. Ukážeme však, že můžeme zavést označení $\varrho(p)$ a $\bar{\varrho}(p)$ bez odvolání na názor takto:

1. Prochází-li přímka p_0 počátkem a je různá od osy y, pak označíme $\bar{\varrho}(p_0)$ polorovinu $\varrho(p_0, J_2)$ a $\varrho(p_0)$ polorovinu opačnou. Jestliže je p přímka rovnoběžná s přímkou p_0 a protíná-li osu y v bodě Q, pak označíme $\varrho(p)$ a $\bar{\varrho}(p)$ ty poloroviny, které dostaneme posunutím $\varrho(p_0)$ a $\bar{\varrho}(p_0)$, při němž počátek O přejde do bodu Q.

2. Jestliže p_0 splývá s osou y, pak označíme $\bar{\varrho}(p_0)$ polorovinu $\varrho(p_0, J_1)$ a $\varrho(p_0)$ polorovinu opačnou. Jestliže je p přímka rovnoběžná s přímkou p_0 a protíná-li osu x v bodě P, pak označíme $\varrho(p)$ a $\bar{\varrho}(p)$ ty poloroviny, které dostaneme posunutím $\varrho(p_0)$ a $\bar{\varrho}(p_0)$, při němž počátek O přejde do bodu P.

---

[4]) $J_1 \equiv [1; 0]$ $J_2 \equiv [0; 1]$

Nechť je dána přímka p (různoběžná s osou y) rovnicí ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Zvolme nyní libovolně mimo přímku p bod $M \equiv [x, y]$, tj. vnitřní bod roviny $\varrho(p)$ nebo $\bar{\varrho}(p)$. (Udělejte si náčrtek.) Bod P přímky p, který má s bodem M stejnou souřadnici x, je bod $[x, kx + q]$. Pro souřadnici y bodu M platí:

$$y > kx + q, \text{ je-li } M \text{ vnitřním bodem poloroviny } \bar{\varrho}(p),$$
$$y < kx + q, \text{ je-li } M \text{ vnitřním bodem poloroviny } \varrho(p).$$

Poněvadž k polorovinám $\bar{\varrho}(p)$ i $\varrho(p)$ počítáme též body hraniční přímky $y = kx + q$, dostáváme pro body obou polorovin tyto nerovnice:

$$y \geqq kx + q \text{ pro body z poloroviny } \bar{\varrho}(p),$$
$$y \leqq kx + q \text{ pro body z poloroviny } \varrho(p).$$

Znásobíme-li druhou z těchto nerovnic číslem -1 a v obou převedeme všechny členy na levou stranu, dostaneme

$$-kx + y - q \geqq 0 \text{ pro body z poloroviny } \bar{\varrho}(p),$$
$$kx - y + q \geqq 0 \text{ pro body z poloroviny } \varrho(p).$$

Jsou to nerovnice souhlasné ($\geqq$) a jejich platnost pro obě poloroviny se snadno mnemotechnicky zapamatuje: je-li koeficient při y rovný číslu $+1$, jde o polorovinu $\bar{\varrho}(p)$ (horní), je-li -1, jde o polorovinu $\varrho(p)$ (dolní). Na jeden z těchto tvarů lze převést každou nerovnici tvaru

$$ax + by + c \geqq 0, \tag{2.1}$$

v níž je $b \neq 0$, jestliže ji dělíme kladným číslem $|b|$. Podíl $\dfrac{b}{|b|} = \pm 1$ podle toho, je-li $b > 0$ nebo $b < 0$. Dělení však není nutno provádět, neboť stačí, když určíme znamení čísla b.

Je-li p přímka jdoucí bodem $[r; 0]$ rovnoběžná s osou y, snadno zjistíme, že platí $x \geqq r$ pro body z $\bar{\varrho}(p)$ a $x \leqq r$ čili $-x \geqq -r$ pro body z $\varrho(p)$. Na tento tvar můžeme však snadno převést nerovnici $ax + c \geqq 0$, jestliže absolutní člen c převedeme na pravou stranu a pak celou nerovnici dělíme kladným číslem $|a|$.

Shrnutím těchto výsledků můžeme stanovit pravidlo pro určení polorovin popsaných nerovnicí tvaru (2.1) takto:

1. Je-li $b \neq 0$, pak při $b < 0$ vyhovují nerovnici body z $\varrho(p)$ a při $b > 0$ body z $\bar{\varrho}(p)$.
2. Je-li $b = 0$, pak při $a < 0$ vyhovují nerovnici body z $\varrho(p)$ a při $a > 0$ body z $\bar{\varrho}(p)$.

Bylo by ovšem možné odvodit i jiná pravidla pro rozhodování o tom, kterou polorovinu nerovnice (2.1) popisuje. Nebudeme je odvozovat, poněvadž pro řešení úloh obsažených v dalších článcích této knížky vystačíme s tímto pravidlem. Dobře si však zapamatujeme, že hraniční přímkou poloroviny, kterou popisuje nerovnice (2.1), je přímka o rovnici $ax + by + c = 0$ a že vnitřní body příslušných polorovin jsou popsány nerovnicemi, v nichž zaměníme např. značku $\geqq$ značkou $>$.

Příklad 1. Rozhodněme, které body vyhovují nerovnici $3x + 2y - 15 < 0$, a také o tom, zda jí vyhovují body $A \equiv [0; 0]$, $B \equiv [4; 1]$, $C \equiv [2; 6]$, $D \equiv [-1; 9]$.

Tato nerovnice platí pro vnitřní body poloroviny vyťaté přímkou r, která má rovnici $3x + 2y - 15 = 0$. Abychom danou nerovnici převedli na nerovnici se znaménkem $>$, znásobíme ji číslem -1 a podle záporného koeficientu při y v nerovnici $-3x - 2y + 15 > 0$ rozhodneme, že jde o dolní polorovinu $\varrho(r)$. Dosadíme-li třebas do původní nerovnice souřadnice bodu A, obdržíme $-15 < 0$; je tedy bod A vnitřním bodem poloroviny $\varrho(r)$. Podobně to zjistíme i o bodu B. Při dosazení souřadnic bodu C do původní nerovnice dostaneme $3 < 0$, což neplatí; bod C leží v $\bar{\varrho}(r)$. Dosadíme-li do původní nerovnice souřadnice bodu D, dostaneme $0 < 0$, což neplatí. Bod D není vnitřním bodem $\varrho(r)$, leží však zřejmě na hraniční přímce r, jejíž rovnici vyhovuje.

Příklad 2. Rozhodněme, zda přímka s daná rovnicí $x - 2y + 4 = 0$ protíná strany trojúhelníka o vrcholech $A \equiv [-3; 1]$, $B \equiv [4; -1]$, $C \equiv [2; 3]$.

Po dosazení souřadnic vrcholů A, B, C daného trojúhelníka ABC do levé strany rovnice přímky s dostaneme výsledky -1, 10, 0. Bod C leží tedy na přímce s, která protíná stranu AB daného trojúhelníka ABC, poněvadž body A, B leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou s.

Příklad 3. Najděme nerovnici popisující polorovinu $\varrho(p, M)$, je-li hraniční přímka p určena body $[0; 1]$, $[5; 5]$ a bod $M \equiv [9; 8]$.

Ze známého vzorce $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ najdeme $k = \dfrac{5 - 1}{5 - 0} = \dfrac{4}{5}$ a dosazením souřadnic bodu $[0; 1]$ do rovnice $y = \dfrac{4}{5}x + q$ vypočteme q. Po úpravě má rovnice přímky p tvar $4x - 5y + 5 = 0$. Dosadíme-li do levé strany této rovnice souřadnice bodu M, dostaneme jako hodnotu výrazu $4x - 5y + 5$ číslo 1. Pro bod M platí tedy nerovnost $4x - 5y + 5 > 0$. Podle známého pravidla můžeme určit $\varrho(p) \equiv \varrho(p, M)$. Leží tedy bod M pod přímkou p.

Uvědomte si, že jsme zjišťovali některé vztahy mezi geometrickými prvky jen početními metodami. Při studiu těchto příkladů i při řešení úloh v následujících cvičeních rýsujte příslušné obrazce, abyste se přesvědčili o významu početních metod pro geometrii; jindy zase geometrie vydatně pomáhá početní technice. Poloroviny, které jsou popsány danými nebo nalezenými nerovnicemi, si vyznačte nějakou značkou nebo šrafováním.

Tento článek zakončíme tím, že bez důkazu uvedeme vzorec pro výpočet vzdálenosti v daného bodu $[x_0, y_0]$ od přímky dané rovnicí $ax + by + c = 0$. Platí pro ni

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Příklad 4. Vypočtěme vzdálenosti v_1, v_2 bodů $M_1 \equiv [1; 0]$, $M_2 \equiv [-5; -4]$ od přímky p dané rovnicí

$$12x - 5y + 14 = 0.$$

Snadno provedeme výpočet

$$v_1 = \frac{|12.1 - 5.0 + 14|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|26|}{13} = 2,$$

$$v_2 = \frac{|12(-5) - 5(-4) + 14|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|-26|}{13} = 2.$$

Oba body M_1, M_2 mají od přímky p stejnou vzdálenost $v_1 = v_2 = 2$. Přitom snadno zjistíme, že body M_1, M_2 leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou p.

Cvičení

2.1 Rozhodněte, zda body $A \equiv [2;\ 4]$, $B \equiv [6;\ 2]$, $C \equiv [8;\ 3]$ leží v polorovině dané nerovnicí
a) $x - 2y - 2 \geqq 0$,
b) $3x + 2y - 21 \geqq 0$,
c) $x \geqq 7$.

2.2 Rozhodněte, zda trojúhelník o vrcholech $A \equiv [-2;\ -1]$, $B \equiv [4;\ 2]$, $C \equiv [2;\ 3]$ má společné body s přímkou, která je dána rovnicí a) $3x - 4y + 4 = 0$, b) $x + y = 0$, c) $2x - y - 6 = 0$.

2.3 Narýsujte hraniční přímky polorovin, které jsou popsány nerovnicemi $3x + y \geqq 0$, $x - y \leqq 0$, $y \geqq 3$, a šrafováním vyznačte část roviny, v níž leží body společné všem daným polorovinám.

2.4 S použitím náčrtu charakterizujte body, jejichž souřadnice vyhovují současně třem daným ostrým nerovnicím $x + y > 0$, $x - y < 0$, $x - 3y + 8 > 0$.

Kapitola 3.

MNOŽINY

Pojem množiny je blízký pojmu souhrn nebo soubor. Každá množina se skládá z předmětů, které mohou být jakékoli povahy (konkrétní nebo abstraktní) a jsou od sebe dobře rozlišitelné; nazýváme je prvky množiny. Množina je určena, je-li dán předpis, podle kterého můžeme o každém předmětu jakékoli povahy rozhodnout, zda je nebo není prvkem této množiny. Prvky tvořící množinu mohou být různorodé předměty, neboť předmětem studia v teorii množin nejsou jednotlivé prvky, nýbrž jen vlastnosti příslušných souborů, při nichž se k vlastnostem jeho prvků nepřihlíží. Stanovíme-li například, že prvky jisté množiny jsou planeta Mars, číslo 7 a písmeno A, je tím tato množina určena. My se ovšem budeme zajímat hlavně o množiny složené z takových prvků, s nimiž se setkáváme v aritmetice, v algebře a v geometrii. V matematice se též zavádí tzv. prázdná množina. Tak označujeme množinu, která nemá žádný prvek. Prázdná množina se obvykle označuje znakem $\emptyset$.

Pro označování množin se užívá nejčastěji velkých písmen, pro označování jejich prvků malých písmen. Řekne-li se, že „x je prvkem množiny M“, zaznamená matematik tento vztah mezi množinou M a prvkem x zápisem $x \in M$. Uvedený zápis se čte někdy i jinak, jako např. „x patří do množiny M“ nebo „x náleží do množiny M“ apod. Při užívání takových rčení je však třeba dávat pozor na to, že slovesa patřit a náležet mohou mít i jiný význam. V této knížce nebudeme užívat speciálních značek, které matematikové užívají v teorii množin, neboť nám jde jen o to, abyste se trochu seznámili s pojmy prvek množiny, množina, sjednocení a průnik množin.[1]) Někdy se užívá k zápisu množin takového způsobu, že se do složených závorek zapíší označení všech prvků množiny. Jindy se do takových závorek zapíší takové matematické výrazy, které podle smluvené dohody umožňují zjistit prvky takto označené množiny. S některými zápisy tohoto druhu se v této knížce setkáte. Uveďme nyní několik příkladů množin, přičemž se omezíme jen na množiny čísel reálných:

1. $M_1 = \{0\}$, 2. $M_2 = \{1\}$, 3. $M_3 = \{0, 1, 2\}$, 4. $M_4 = \{2, 0, 1\}$, 5. M_5 označíme množinu všech reálných kořenů rovnice $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$, 6. M_6 označíme množinu všech racionálních kořenů rovnice $x^2 - 2x - 7 = 0$, 7. M_7 označíme množinu všech přirozených čísel, 8. M_8 označíme množinu všech celých čísel, 9. M_9 označíme množinu všech reálných čísel, 10. M_{10} označíme množinu, která nemá žádný prvek.

K uvedených příkladům připojíme tyto poznámky:

a) 1 je prvkem množin M_2, M_3, M_4, M_5, M_7, M_8, M_9. Číslo $1 + 2\sqrt{2}$ je prvkem množiny M_9.

b) Na příkladu množiny M_6 je vidět účelnost pojmu prázdné množiny. Je ovšem třeba rozlišovat mezi množinou M_1 a M_{10}, neboť množina M_1 má jeden prvek, tj. číslo 0, avšak M_6 a M_{10} nemají žádný prvek. Stejně nelze zaměňovat pojem množiny o jednom prvku s pojmem prvku této množiny. Je totiž pravdivý výrok „1 je prvkem $\{1\}$“, ale věta „$\{1\}$ je prvkem 1“ nemá vůbec smysl.

---

[1]) Dnešnímu čtenáři jsou tyto pojmy pravděpodobně běžné.

c) Dvě množiny pokládáme za rovné, jestliže se skládají z týchž prvků. Je tedy např. $M_3 = M_4 = M_5$. Také $M_6 = M_{10} = \emptyset$.

d) Množina všech přirozených čísel je přesné označení určité množiny, tj. v našem případě M_7, kdežto název množina přirozených čísel je označení pro takové množiny, jejichž prvky jsou jen přirozená čísla. Obdobnou poznámku bychom mohli učinit o množinách všech celých čísel nebo všech reálných čísel.

Sjednocením dvou množin A, B nazýváme takovou množinu C, o jejíchž prvcích platí, že každý z nich je prvkem množiny A nebo množiny B. Tak např. sjednocením množin $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\{3, 4, 5\}$ je množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Obdobně se definuje sjednocení libovolného počtu množin. Tak např. sjednocením množin M_1, M_2, M_3 je množina $M_3 = M_4 = M_5$. *Průnikem* dvou množin A, B nazýváme takovou množinu D, jejímiž prvky jsou všechny společné prvky množin A, B. Je tedy průnikem množin $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$ množina $\{3, 4\}$. Obdobně se definuje průnik libovolného počtu množin. Je jistě zřejmé, že průnikem dvou množin, které nemají žádné společné prvky, je prázdná množina. Tak např. průnikem množin M_1 a M_2 je množina M_{10}.

Některých pojmů teorie množin i množinových operací se užívalo již dříve, než vznikl název množiny i jiné odborné názvy s pojmem množiny souvisící. V budování teorie množin učinil první kroky pražský rodák *Bernard Bolzano* (1781—1848), vynikající logik a matematik. O její rozvoj se zasloužil zejména německý matematik *Georg Cantor* (1845—1918). K mohutnému rozvoji teorie množin došlo však teprve ve dvacátém století a velmi se o něj zasloužili matematikové sovětští a polští. V teorii množin a v oborech matematiky, které na ní byly nejdříve budovány, dosáhli významných výsledků též matematikové čeští, zejména akademik *Eduard Čech* (1893 až 1960) a jeho velmi nadaný žák *Bedřich Pospíšil* (1912—1944), který se stal obětí nacistické perzekuce.

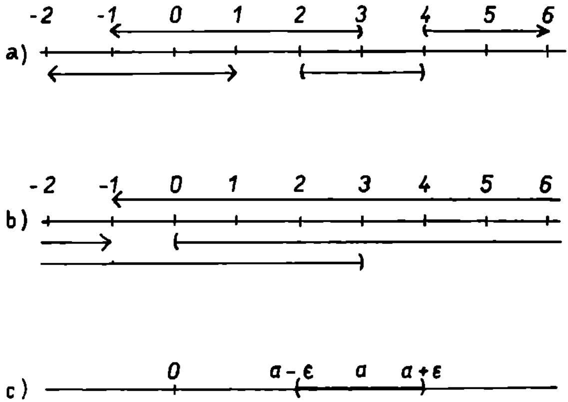
Kapitola 4.

MNOŽINY BODŮ V PŘÍMCE
INTERVALY

Názvem *číselná množina* budeme v této knížce označovat jen takové množiny, jejichž prvky jsou reálná čísla. Z těchto číselných množin užíváme v matematice zejména často takových, jimž na číselné ose odpovídají úsečky nebo polopřímky a celá číselná osa. Nazývají se *intervaly* a v tomto článku pojednáme o nich podle jednotlivých druhů.

Nechť jsou dána dvě čísla a, b, pro něž platí $a < b$. Pak množina všech reálných čísel, pro která platí $x \geqq a$, $x \leqq b$, což zapisujeme stručněji $a \leqq x \leqq b$, se nazývá *uzavřený* interval. Pro takovou množinu budeme užívat též zápisu $\langle a, b \rangle$. Obrazem této množiny bodů na číselné ose je úsečka s krajními body, které odpovídají číslům a, b. Číselnou množinu, pro kterou platí $a < x < b$, nazýváme *otevřený* interval a užíváme pro něj zápisu (a, b). Obrazem této množiny na číselné ose jsou vnitřní body úsečky s krajními body a, b. Liší se tedy $\langle a, b \rangle$ a (a, b) tím, že krajní body intervalu v prvním případě k intervalu patří a v druhém případě nepatří. Symboly $\langle a, b)$ a $(a, b \rangle$ znamenají intervaly (*polouzavřené*), k nimž jeden krajní bod intervalu patří a druhý nepatří.

Při řešení úloh na operace s intervaly si pomáháme někdy tím, že je znázorňujeme buď na číselné ose s vyznačením krajních bodů úhlovými nebo okrouhlými závorkami, nebo při vyznačování většího počtu intervalů pomocnými úsečkami, které rýsujeme rovnoběžně s číselnou osou a blízko ní. Příklady jsou narýsovány v obr. 1a, kde jsou vyznačeny tyto intervaly: $I_1 = \langle -2; 1 \rangle$, $I_2 = (2; 4)$, $I_3 = \langle -1; 3)$, $I_4 = (4; 6 \rangle$. Na obr. 1c je vyznačen též otevřený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, který je množinou všech takových bodů z okolí bodu a, že jejich vzdálenost od bodu a je menší než dané kladné číslo ε. Matematikové nazývají takový interval *epsilonovým okolím* bodu a.



Obr. 1

V matematice užíváme též intervalů *neomezených*. Jsou to číselné množiny, popsané jednou z nerovností tvaru $x \leqq c$, $x \geqq c$, $x < c$, $x > c$, v nichž c je dané číslo. Jim na číselné ose odpovídají polopřímky s krajním bodem c, který k intervalu patří nebo nepatří podle toho, je-li příslušná množina popsána nerovností neostrou nebo ostrou. Chceme-li pro označování neomezených intervalů užít obdobného způsobu jako při intervalech omezených, užijeme symbolů $-\infty$, $+\infty$, které čteme „minus nekonečno" a „plus nekonečno" a které používáme k vyznačení, že interval není zleva nebo zprava omezen. Výše uvedené intervaly označujeme takto: $(-\infty, c\rangle$, $\langle c, +\infty)$, $(-\infty, c)$, $(c, +\infty)$. Celou číselnou osu označujeme někdy jako interval $(-\infty, +\infty)$. Pomocné značky $-\infty$, $+\infty$ jsme tu zavedli jen k úspornému označování neomezených intervalů. Na obr. 1b jsou vyznačeny tyto neomezené intervaly: $I_5 = (-\infty; -1\rangle$, $I_6 = \langle -1; +\infty)$, $I_7 = (-\infty; 3)$, $I_8 = (0; +\infty)$.

Poněvadž intervaly jsou množiny, můžeme tvořit jejich sjednocení nebo průniky, jak to bylo vysvětleno v předchozím článku. Ukážeme to na několika příkladech s výše uvedenými intervaly.

Příklad 1. Sjednocením intervalů I_1 a I_3 je interval $\langle -2; 3)$, jejich průnikem $\langle -1; 1\rangle$. Sjednocením intervalů I_2 a I_3 je interval $\langle -1; 4)$, jejich průnikem $(2; 3)$. Sjednocením intervalů I_5 a I_7 je interval I_7, jejich průnikem je I_5. Sjednocením intervalů I_7 a I_8 je interval $(-\infty, +\infty)$, jejich průnikem je $(0; 3)$. Sjednocením intervalů I_1 a I_6 je interval $\langle -2; +\infty)$, jejich průnikem je $\langle -1; 1\rangle$.

Příklad 2. Sjednocením intervalů I_1 a I_2 je množina právě všech prvků z I_1 a I_2, avšak nelze ji zapsat jako interval; jejich průnikem je prázdná množina, neboť tyto intervaly nemají žádný společný prvek. Sjednocením intervalů I_5 a I_6 je interval $(-\infty, +\infty)$, jejich průnikem je množina mající jen jeden prvek, totiž číslo 1. Sjednocením tří intervalů I_1, I_2, I_3 je interval $\langle -2; 4)$, jejich průnikem je $\emptyset$.

V závěru tohoto článku vás upozorníme na některé zajímavé vlastnosti intervalů a jim odpovídajících geometrických útvarů na číselné ose, tj. přímky, polopřímky a úsečky.

1. Geometrický útvar se nazývá *konvexní*, jestliže pro každé dva jeho body X, Y platí, že všechny body úsečky XY jsou body tohoto útvaru. Je zřejmé, že přímka, polopřímka i úsečka jsou konvexní útvary. Pro konvexní útvary platí věta, že jejich průnik je opět konvexní útvar. Můžete si to ověřit na úsečce, která je průnikem dvou polopřímek.

2. Jestliže k intervalu patří levý krajní bod, existuje v něm číslo nejmenší, a jestliže k němu patří pravý krajní bod, existuje v něm číslo největší. V uzavřeném intervalu existuje nejmenší i největší číslo, v otevřeném intervalu neexistuje ani nejmenší, ani největší číslo.

Cvičení

4.1 Určete sjednocení a průniky dvojic neomezených intervalů v těchto případech: a) $(-\infty; 2)$, $(-\infty; 4)$, b) $\langle 1; +\infty)$, $(5; +\infty)$, c) $(-\infty; 3)$, $\langle -3; +\infty)$, d) $(-\infty; 2{,}4\rangle$, $\langle 2{,}4; +\infty)$, e) $(-\infty; 1)$, $\langle 1; +\infty)$.

4.2 Určete sjednocení a průniky dvojic omezených intervalů a) $\langle -2; 1\rangle$, $\langle -1; 3\rangle$, b) $(-2; 1)$, $(-1; 3)$, c) $\langle -2; 1\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$, d) $(-2; 1)$, $(1; 2)$, e) $\langle -2; 1)$, $(1; 4)$.

4.3 Určete sjednocení a průniky intervalů v těchto případech: a) $(-\infty; 1)$, $(-1; 3)$, b) $(-2; 1)$, $\langle -1; 1\rangle$, c) $\langle -3; +\infty)$, $(3; 5\rangle$.

4.4 Určete sjednocení a průniky tří daných intervalů: a) $(-\infty; 2)$, $(-2; +\infty)$, $\langle -1; 1\rangle$, b) $\langle -2; 4\rangle$, $\langle 0; 5\rangle$, $\langle 1; 3\rangle$.

Kapitola 5.

ZÁKLADNÍ VĚTY O NEROVNOSTECH

V matematice užíváme velmi často vztahů označovaných značkami $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$. Je užitečné přehledně připomenout vlastnosti těchto vztahů a jejich vzájemnou souvislost. Písmena budou označovat reálná čísla. Vztah rovnosti ($=$) má tyto vlastnosti: Platí vždy $a = a$. Současně platí $a = b$, $b = a$. Z platnosti $a = b$, $b = c$ plyne $a = c$. Vztah různosti ($\neq$) má tyto vlastnosti: Nikdy neplatí $a \neq a$. Současně platí $a \neq b$, $b \neq a$. Z platnosti $a \neq b$, $b \neq c$ nelze nic soudit o vztahu a, c. Ze vztahů $=$ a $\neq$ mezi dvěma čísly platí právě jeden. Jestliže tedy jeden z těchto vztahů popíráme, musíme uznat platnost druhého. Vztah $a \neq b$ souvisí s ostatními vztahy tak, že při jeho platnosti musí platit jeden ze vztahů $a < b$ nebo $b < a$.

Společným názvem *nerovnosti* označujeme ty vztahy mezi čísly, které v matematice zapisujeme značkami $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$. (Vyspělejší čtenář patrně ví, že se nyní zabýváme relacemi.) Vztahy zapsané značkami $<$, $>$ se často nazývají nerovnosti *ostré*, vztahy zapsané značkami $\leqq$, $\geqq$ nerovnosti *neostré*. Vztahy $a < b$, $b > a$, o nichž říkáme, že jsou navzájem *obrácené (konverzní)*, současně platí nebo současně neplatí. Také nerovnosti $a \leqq b$, $b \geqq a$ jsou navzájem obrácené. Dvojice nerovností $a < b$, $a \geqq b$ a také dvojice $a > b$, $a \leqq b$ mají tu vlastnost, že z každé dvojice platí právě jedna nerovnost. Z popření (negace) platnosti kterékoli z těchto nerovností vyplývá platnost druhé nerovnosti v téže dvojici. Říkáme též, že nerovnosti v těchto dvojicích jsou navzájem *protikladné (kontradiktorické)*.

Nyní uvedeme několik definic:
1. Platí-li $a > 0$, říkáme, že číslo a je *kladné*, platí-li $a < 0$, říkáme, že číslo a je *záporné*. 2. Jsou-li dvě čísla obě kladná nebo obě záporná, říkáme, že jsou *souhlasná*. Je-li ze dvou čísel jedno kladné a jedno záporné, říkáme, že jsou *nesouhlasná*. 3. Souhlasné nerovnosti jsou takové, v jejichž zápisu je stejná značka nerovnosti. 4. Zápis soustavy nerovností $a < b$, $b < c$ provádíme stručněji $a < b < c$ a takto zapsanou soustavu nerovností nazýváme *postupná* nerovnost a čísla a, b, c její členy.

Ostré a neostré nerovnosti mají tyto vlastnosti:

N Nikdy neplatí $a < a$ ani $a > a$.
P Vždy platí $a \leqq a$ a také $a \geqq a$.
R Ze současné platnosti $a \leqq b$, $a \geqq b$ plyne $a = b$.
$\mathbf{S_1}$ Platí-li $a < b$, pak platí též $a \leqq b$.
$\mathbf{S_2}$ Platí-li $a > b$, pak platí též $a \geqq b$.

Nyní uvedeme nejdůležitější věty o nerovnostech mezi reálnými čísly a, b, c.

$\mathbf{T_1}$ Platí právě jeden ze vztahů $a < b$ nebo $a = b$ nebo $a > b$.
$\mathbf{T_2}$ a) Je-li $a < b$, $b < c$, pak platí $a < c$.
b) Je-li $a > b$, $b > c$, pak platí $a > c$.
Platí obdobně též pro nerovnosti neostré.
$\mathbf{T_3}$ Přičteme-li k číslům na obou stranách nerovnosti totéž číslo, zůstane nerovnost zachována.
$\mathbf{T_4}$ Znásobíme-li čísla na obou stranách nerovnosti týmž kladným číslem, zůstane nerovnost zachována.
$\mathbf{T_5}$ Znásobíme-li čísla na obou stranách nerovnosti

týmž záporným číslem, musíme nahradit značku $>$ ($\geqq$, $<$, $\leqq$) značkou $<$ ($\leqq$, $>$, $\geqq$).

$\mathbf{T_6}$ Součin dvou čísel souhlasných je kladný, nesouhlasných záporný.

$\mathbf{T_7}$ Vždy platí $a^2 \geqq 0$; je-li $a \neq 0$, pak $a^2 > 0$.

$\mathbf{T_8}$ Každé číslo $a \neq 0$ je souhlasné s číslem k němu převráceným.

$\mathbf{T_9}$ Souhlasné nerovnosti je dovoleno sčítat.

Pro nerovnosti mezi kladnými čísly platí ještě tyto další věty:

$\mathbf{K_1}$ Souhlasné nerovnosti mezi kladnými čísly je dovoleno spolu znásobit.

$\mathbf{K_2}$ Nerovnost mezi kladnými čísly je dovoleno umocnit nebo odmocnit.

$\mathbf{K_3}$ Platí-li mezi dvěma kladnými čísly nerovnost, pak mezi čísly k nim převrácenými platí nerovnost obrácená.

$\mathbf{K_4}$ Pro kladné číslo a a pro přirozená čísla $m < n$ platí:
a) je-li $a < 1$, pak $a^m > a^n$;
b) je-li $a = 1$, pak $a^m = a^n = 1$;
c) je-li $a > 1$, pak $a^m < a^n$.

Pro absolutní hodnoty reálných čísel platí:

$\mathbf{A_1}$ $|a| = a$, je-li $a \geqq 0$; $|a| = -a$, je-li $a \leqq 0$.

$\mathbf{A_2}$ $-|a| \leqq a \leqq |a|$.

$\mathbf{A_3}$ $|a| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ znamená totéž jako $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

$\mathbf{A_4}$ $||a| - |b|| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|$.

Všechny věty uvedené v tomto přehledu nejsou na sobě nezávislé. Dá se dokonce ukázat, že užitím vět $\mathbf{T_1}$,

T_2, T_3, T_4 bylo by možno dokázat všechny další věty v tomto přehledu za nimi uvedené. Z toho je zřejmá velká důležitost vět T_1—T_4, které byste si měli především dobře zapamatovat. Budete-li však znát i věty za nimi následující, urychlíte tím svou práci při řešení mnohých úloh.

Příklad 1. Na ukázku toho, jak se dokazují věty výše uvedené, dokážeme větu T_5 za předpokladu správnosti vět T_1 až T_4.

Větu T_5 dokážeme nejprve pro nerovnost $a < b$. Záporné číslo, jímž chceme nerovnost znásobit, označíme c; platí tedy $c < 0$. Jestliže k číslům na obou stranách této nerovnosti přičteme $-c$ podle věty T_3, dostaneme $0 < -c$, čili přechodem k obrácené nerovnosti $-c > 0$, což znamená, že číslo $-c$ je číslo kladné. Jestliže tímto číslem znásobíme nerovnost $a < b$, což je dovoleno podle věty T_4, dostaneme $-ca < -cb$. Jestliže na obou stranách této nerovnosti přičteme číslo $ca + cb$, dostaneme $bc < ac$. Přechodem k zápisu s obrácenou nerovností dostaneme $ac > bc$. Tím je dokázána již podstatná část naší poučky T_5. Je nyní třeba dokázat větu o násobení nerovnosti $a > b$ číslem $c < 0$. To je snadné, a to třeba tak, že užijeme obdobného postupu jako v případě předcházejícím. Je však možno také nerovnost $a > b$ přepsat na tvar $b < a$ a provést násobení této nerovnosti kladným číslem $-c > 0$ a postupovat dále stejně jako v případě předchozím. Zjistíme přitom, že poslední krok nebude nutné provádět již tak jako v případě předchozím. Tím je již věta dokázána pro obě ostré nerovnosti. Poněvadž však rovnost $a = b$ smíme násobit číslem c, ať je jakékoli, vede nás toto zjištění k tomu, že věta T_5 platí i pro nerovnosti neostré.

Příklad 2. Dokažme, že pro kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2 .$$

Jestliže danou nerovnost znásobíme číslem $ab > 0$, dostaneme

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab . \tag{5.1}$$

Přičteme-li k číslům na obou stranách nerovnosti (5.1) číslo $-2ab$, pak po jednoduché úpravě dostaneme $(a - b)^2 \geqq 0$. Nerovnost platí tehdy a jen tehdy, platí-li $(a - b)^2 \geqq 0$. Tento vztah však platí podle $\mathbf{T}_7$. Důkaz je proveden.

Jestliže z dané nerovnosti dostaneme úpravou druhou nerovnost takovou, že obě nerovnosti současně platí nebo současně neplatí při jakémkoli dosazení určitých čísel do početních výrazů, z nichž se nerovnosti skládají, pak takové nerovnosti nazýváme *ekvivalentní* a příslušnou úpravu *ekvivalentní úpravou*. Důkaz platnosti dané nerovnosti můžeme proto provádět tak, že ji ekvivalentními úpravami převedeme na nerovnost, jejíž platnost je již dokázána.

Příklad 3. Dokažme, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + ac + bc .$$

Uvedeme dvě řešení tohoto příkladu.

1. Znásobíme danou nerovnost číslem 2 a všechny členy převedeme na levou stranu, pak výraz na levé straně upravíme tak, že dostaneme $(a - b)^2 + (b - c)^2 +$

$+ (c - a)^2 \geqq 0$. Tento vztah však platí, neboť podle T_7 je čtverec každého dvojčlenu na levé straně nezáporný, a proto je nezáporný i jejich součet. Poněvadž jsme od původní nerovnosti k nerovnosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$ dospěli ekvivalentními úpravami, je důkaz proveden.

2. Má-li někdo v paměti vztah (5.1), pak ho snad napadne, aby k němu připsal další nerovnosti z něho plynoucí záměnou písmen, tj. $b^2 + c^2 \geqq 2bc$, $c^2 + a^2 \geqq 2ac$; všechny platí pro libovolná reálná čísla. Sečteme-li tyto nerovnosti podle věty T_9, pak po zkrácení číslem 2 dostaneme hned nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Příklad 4. Dokažme, že pro libovolná reálná čísla a, b platí nerovnost

$$a + b \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}\,.$$

Podle znění dané úlohy může být na levé straně dané nerovnosti i číslo záporné a danou nerovnost nelze umocnit, neboť umocňování je podle věty K_2 ekvivalentní úpravou jen pro nerovnosti mezi kladnými čísly. Rozpomeneme-li se však na větu A_2, pak podle nerovnosti, kterou představuje druhý a třetí člen postupné nerovnosti A_2, můžeme psát $a + b \leqq |a + b|$. Kdybychom k ní připsali další nerovnost $|a + b| \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, pak by z této dvojice nerovností plynula podle věty T_2 nerovnost, kterou máme dokázat, ovšem za předpokladu, že nerovnost $|a + b| \leqq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ platí. Důkaz její platnosti je však nyní snadný, když ji jako nerovnost mezi nezápornými čísly můžeme umocnit a dalšími ekvivalentními úpravami uvést na tvar $(a - b)^2 \geqq 0$ Proveďte podrobně sami.

Cvičení

5.1 Jsou-li a, b libovolná kladná čísla taková, že $a > b$, platí tato tvrzení: a) zlomek $\frac{a}{b}$ se zmenší, když jeho čitatele i jmenovatele zvětšíme o stejné kladné číslo; b) zlomek $\frac{b}{a}$ se zvětší, když jeho čitatele i jmenovatele zvětšíme o stejné kladné číslo. Dokažte.

5.2 Do třídy, do níž chodí chlapci i děvčata, přistoupil stejný počet chlapců i děvčat. Co lze usoudit o vztahu mezi původním počtem chlapců i děvčat, ví-li se, že po přistoupení nových žáků a žákyň původní počet % chlapců a) se zvýšil, b) se nezměnil, c) klesl?

5.3 Dokažte, že geometrický půměr dvou nezáporných čísel se nejvýš rovná jejich aritmetickému průměru. Kdy nastane rovnost?

5.4 Dokažte, že pro kladná čísla a, b platí:

a) $a + \frac{1}{a} \geqq 2$,

b) $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4$.

5.5 Dokažte, že pro reálná čísla a taková, že $|a| < 1$, platí:

a) $\frac{1}{1 - a} \geqq 1 + a$,

b) $\frac{1}{1 + a} \geqq 1 - a$.

Kdy nastane rovnost?

5.6 Jsou-li a, b velikosti odvěsen a c velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, pak o nich platí: a) $a + b \leqq c\sqrt{2}$, b) $c > \frac{2}{3}(a + b)$. Dokažte tato tvrzení.

5.7 Dokažte, že pro libovolné reálné číslo a platí nerovnost

$$\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqq \frac{1}{2}.$$

5.8 Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnosti

$$\text{a)}\ (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9\,,$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \geqq \frac{9}{2(a + b + c)}.$$

Rozhodněte též, kdy platí rovnost.

Kapitola 6.

ALGEBRAICKÉ NEROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

Uvažujme vztah

$$2x + 3 > 0. \qquad (6.1)$$

Dosadíme-li za x číslo 2, přejde tento vztah v nerovnost $2.2 + 3 = 7 > 0$. Dosadíme-li za x číslo -2, dostaneme nerovnost $-1 < 0$, která neplatí.

Velmi často se v matematice setkáváme s úlohou nalézt všechna taková čísla x, pro která platí nějaký vztah, např. $2x + 3 = 0$. V tomto případě existuje takové číslo právě jedno. Při vyšetřování vztahu (6.1) je však situace jiná. Pokusme se řešit úlohu: Nalezněte všechna reálná čísla x, pro něž platí $2x + 3 > 0$.

Představme si, že dosazením nějakého čísla — označme je a — přejde (6.1) v platnou nerovnost $2a + 3 > 0$. Přičteme k oběma stranám této nerovnosti číslo -3. To, co jsme provedli, lze též popsat slovy „převedli jsme sčítanec 3 na druhou stranu nerovnosti s opačným znaménkem". Dále vynásobíme obě strany nerovnosti číslem 0,5. Dostaneme tak nerovnost $a > -1{,}5$. Od původní nerovnosti $2a + 3 > 0$ jsme přešli ekvivalentními úpravami podle vět T_3, T_4 k nerovnosti $a > -1{,}5$. Tato nerovnost je však jednodušší než nerovnost původní. Snadno z ní vidíme, že nejen číslo a, ale každé číslo z intervalu $(-1{,}5; +\infty)$ dává po dosazení do (6.1) platnou nerovnost; vidíme dokonce více: ta reálná čísla x, pro něž platí (6.1), jsou právě všechna čísla z množiny $(-1{,}5; +\infty)$.

Vztah (6.1) nazýváme *nerovnice* (podrobněji: *lineární nerovnice o jedné neznámé*). Kdybychom chtěli hovořit učeněji, jsou nerovnice výrokové formy a úloha řešit nerovnici neznamená nic jiného než určit obor pravdivosti této výrokové formy. Jinak řečeno: hledáme všechny hodnoty proměnné x, pro něž vyšetřovaný vztah přechází dosazením v platnou nerovnost. Říkáme pak stručněji, že „tato x vyhovují nerovnici" nebo že „jsou řešeními nerovnice". Při této příležitosti je vhodné upozornit na jedno úskalí. Názvem řešení označujeme nejen všechna čísla, která nerovnici vyhovují, ale i postup, který při hledání těchto čísel užíváme.

Vrátíme-li se ještě jednou k našemu řešení nerovnice (6.1), můžeme užitý postup též interpretovat takto: Nejprve jsme nahradili (6.1) jednoduššími nerovnicemi se stejnými množinami všech řešení ($2x + 3 > 0$, $2x > -3$, $x > -1{,}5$) a pak jsme z poslední nerovnice přímo „vyčetli" řešení úlohy (interval $(-1{,}5; +\infty)$ je množinou právě všech řešení). Přitom jsme užívali úprav obdobných úpravám nerovností podle vět z předcházejícího článku. Připomeňme ještě, že kdybychom měli zjistit, zda je číslo -1 řešením nerovnice (6.1), nepotřebovali bychom provádět žádné ekvivalentní úpravy a prostě bychom jen za x dosadili číslo -1.

Pro řešení nerovnic mají základní význam ty věty, které popisují jejich ekvivalentní úpravy, tj. úpravy, při nichž se nemění množina všech jejich řešení. Tyto věty jsou obdobné větám, které jsme uvedli pro nerovnosti. Tak např. místo $\mathbf{T}_3$ pro úpravu nerovností užíváme větu:

$\mathbf{T}_3'$ Přičteme-li k oběma stranám nerovnice totéž číslo, množina jejích řešení se nezmění.

Věříme, že čtenář snadno zformuluje další věty o úpravách nerovnic podle vět z předcházející kapitoly.

Nejčastěji používáme těch, které odpovídají tvrzením K_2, T_3, T_4 a T_5. Dříve, kdy se nerozlišovalo mezi nerovnostmi a nerovnicemi (každý chápal, že se slova nerovnost užívá ve dvou významech), odpadla tato starost s formulováním „nových" vět. Ostatně nerovnici (6.1) jsme úspěšně rozřešili jen se znalostí vět o nerovnostech. Lze tedy stručně říci, že s nerovnicemi lze zacházet jako s nerovnostmi a že jediné, nač při jejich řešení musíme dávat pozor, je to, aby se úpravami nezměnila množina jejich řešení. Je však vhodné připomenout, že i úpravy, kterými se eventuálně změní (např. zvětší) množina všech řešení, mají pro řešení nerovnic význam.

Poněvadž řešení lineárních nerovnic tvaru $ax + b > 0$, kde $a \neq 0$, b jsou daná reálná čísla a x je neznámá (stejně tak řešení lineárních nerovnic se značkami $\geqq$, $<$, $\leqq$), je vám dobře známo, omezíme se jen na několik poznámek o soustavách lineárních nerovnic o jedné neznámé a všimneme si takových nelineárních nerovnic, jejichž řešení se snadno převede na řešení nerovnic lineárních.

Často se stává, že je dána soustava dvou nebo několika nerovnic, které je třeba rozřešit a pak vybrat taková řešení, která jsou vázána jistými podmínkami mezi danými nerovnicemi. Pro jednoduchost předpokládejme, že je dána soustava dvou nerovnic s neznámou x a že je dovedeme rozřešit. Pak si můžeme klást tyto otázky:

1. Která čísla x vyhovují oběma daným nerovnicím?
2. Která čísla x vyhovují první nerovnici a nevyhovují druhé?
3. Která čísla x nevyhovují nerovnici první a vyhovují přitom nerovnici druhé?
4. Která čísla x vyhovují aspoň jedné z daných nerovnic?
5. Která čísla x nevyhovují žádné z daných nerovnic?

6. Která čísla x vyhovují nejvýš jedné z daných nerovnic?
7. Která čísla x vyhovují právě jedné z daných nerovnic?

Nejčastěji nás ovšem zajímá otázka, která čísla x vyhovují oběma daným nerovnicím. Odpověď najdeme, když dovedeme najít průnik množin (intervalů), z nichž každá je množinou všech řešení jedné z daných nerovnic. Řešení takových úloh je příležitostí k dobrému výcviku v logickém myšlení. Přitom jistě dáte pozor na význam slov „aspoň jeden", „nejvýš jeden" a „právě jeden", což má velký význam. Přitom se upevní váš poznatek, že popřít platnost některé z nerovností $x \geqq a$, $y \leqq b$, $z > c$, $u < d$ znamená totéž jako uznat platnost nerovnosti protikladné jí odpovídající podle předcházejícího pořadí $x < a$, $y > b$, $z \leqq c$, $u \geqq d$.

Soustava nerovnic bývá někdy dána tak, že je stručně zapsána postupnou nerovnicí. Nejčastěji to bývá trojčlenná postupná nerovnice tvaru $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ (resp. s jednou nebo oběma značkami $<$), kde jsme symboly $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ naznačili, že jde o početní výrazy, v nichž se vyskytuje písmeno x ve významu neznámého čísla. V tom případě můžeme přepsat tento zápis na zápis dvou nerovnic $f(x) \leqq g(x)$, $g(x) \leqq h(x)$. Snadno lze dokázat, že lze provádět ekvivalentní úpravy postupných nerovnic tím, že ke všem členům stejné číslo přičteme nebo každý člen stejným kladným číslem znásobíme. Jestliže každý člen znásobíme stejným číslem záporným, musíme značky $<$, $\leqq$, $>$, $\geqq$ po znásobení nahradit značkami $>$, $\geqq$, $<$, $\leqq$. Těchto vět využijeme při řešení některých nerovností.

Všechny mocniny z^{2k-1}, kde z je reálné číslo a k číslo přirozené, tedy mocniny s lichým přirozeným mocnitelem, nabývají všechny současně hodnot kladných pro $z > 0$, hodnoty 0 pro $z = 0$ a hodnot záporných pro

$z < 0$. Jsou proto všechny nerovnice tvaru $z^{2k-1} < 0$ navzájem ekvivalentní, a tedy i ekvivalentní s nerovnicí $z < 0$. Vyloučíme-li případ $z = 0$, jsou všechny mocniny s lichým záporným exponentem též čísly souhlasnými, neboť jsou převrácenými čísly k mocninám s lichým kladným mocnitelem. Při vyloučení $z = 0$ jsou také všechny mocniny z^{2k} a z^{-2k} čísly souhlasnými, a proto nerovnice $z^{2k} > 0$, $z^{-2k} > 0$ jsou všechny ekvivalentní, tedy ekvivalentní s nerovnicí $z^2 > 0$. Všechna tato tvrzení platí obdobně i pro ostatní nerovnice. Dosadíme-li $z = ax + b$ nebo $z = x - x_1$ do nerovnic výše uvedených, ukáže se, že řešení nerovnic $(ax + b)^n < 0$, resp. $(x - x_1)^n < 0$ lze převést na řešení jednoduchých lineárních nebo kvadratických nerovnic, což ukážeme na příkladech.

Nežli začneme řešit příklady, připojme ještě jednu poznámku. Představme si, že máme řešit nerovnici

$$\frac{2x + 3}{2} - \frac{3x + 1}{3} \geqq 0. \tag{6.2}$$

Pomocí ekvivalentních úprav ji převedeme postupně na nerovnice

$$\frac{6x + 9 - 6x - 2}{6} \geqq 0,$$

$$6x + 9 - 6x - 2 \geqq 0, \tag{6.3}$$

$$7 \geqq 0.$$

Poslední nerovnici vyhovuje každé $x \in (-\infty, +\infty)$, neboli řešením nerovnice (6.2) je každé reálné číslo.

Někdo jiný by mohl postupovat takto: Zapamatoval by si, že řeší nerovnici (6.2), a upravoval by nerovnost

(6.2) s blíže neurčeným reálným číslem x. Obdržel by postupně

$$\frac{6x + 9 - 6x - 2}{6} \geqq 0,$$

$$6x + 9 - 6x - 2 \geqq 0, \tag{6.4}$$

$$7 \geqq 0.$$

Všechny tyto nerovnosti jsou ekvivalentní podle vět z článku 5. Platí-li poslední nerovnost pro každé reálné číslo, platí pro ně i (6.2). Uvážíme-li odlišnost obou postupů, není příliš podstatné, zda pracujeme s nerovnicemi nebo nerovnostmi. Ostatně ze zápisu

$$\sqrt{x^2} \leqq |x| \tag{6.5}$$

budete stěží rozhodovat, zda jde o nerovnost nebo o nerovnici. Proto až budete při sledování příkladů eventuálně na rozpacích, zda ten či onen vztah je nerovnicí nebo nerovností, uvědomte si, že to není někdy ta nejdůležitější otázka — tou pro nás zůstává správné řešení zadané úlohy.

Příklad 1. Řešme nerovnici

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0.$$

Tuto algebraickou nerovnici třetího stupně snadno rozřešíme, když ji převedeme na tvar

$$(x - 1)^3 > 0;$$

tato nerovnice je ekvivalentní s nerovnicí $x - 1 > 0$. Hledané řešení popisuje nerovnice

$$x > 1.$$

Příklad 2. Řešme nerovnici

$$\frac{5}{x^2 - 6x + 9} \leqq 0 .$$

Poněvadž $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, nemá zlomek na levé straně smysl pro $x = 3$. Obě strany nerovnice dělíme číslem 5 a pak přejdeme k nerovnici $(x - 3)^2 \leqq 0$. Pro $x \neq 3$ jsou obě nerovnice ekvivalentní. Avšak pro $x \neq 3$ nemá nalezená nerovnice řešení. Tedy původní nerovnice nemá řešení.

Příklad 3. Řešme soustavu nerovnic

$$-1 < \frac{2 - 5x}{3} \leqq 2 .$$

Všechny členy této postupné nerovnice znásobíme kladným číslem 3 a pak od nich odečteme číslo 2. Tak dostaneme postupnou nerovnici $-5 < -5x \leqq 4$. Všechny její členy znásobíme záporným číslem $-\frac{1}{5}$, přičemž znaménka mezi jednotlivými členy obrátíme a dostaneme tak nerovnici $1 > x \geqq -\frac{4}{5}$, kterou můžeme psát též ve tvaru $-\frac{4}{5} \leqq x < 1$. Každá z těchto postupných nerovnic udává, která čísla x dané soustavě nerovnic vyhovují. Jsou to právě všechna čísla x z intervalu $\left\langle -\frac{4}{5}; 1 \right)$.

Příklad 4. Hledejme na číselné ose všechny body x, které mají od bodu a vzdálenost menší než $\varepsilon > 0$ (viz obr. 1c).

Ekvivalentní zápis této úlohy je: řešte nerovnici $|x - a| < \varepsilon$. Podle věty A_3 ji můžeme napsat ve tvaru $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$. Jestliže ke všem členům této postupné nerovnice přičteme číslo a, dostaneme již řešení naší úlohy ve tvaru $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Hledané body x leží zřejmě v otevřeném intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Poznámka. Při studiu matematické analýzy se setkáte s nerovnicemi v tomto příkladě uvedenými tak často, že je užitečné, když se vám při pohledu na ně vybaví ihned představa okolí bodu a. Znamenají tedy např. $|x - 7| < 2$ otevřený interval $(5; 9)$ nebo $|x + 3| < 0{,}2$ otevřený interval $(-3{,}2; -2{,}8)$.

Příklad 5. Jak musíme volit číslo m, aby soustava rovnic $3x + 2y = 15$, $x + 2y = m$ měla řešení x, y, která jsou a) nezáporná, b) kladná. Která řešení soustavy mají tu vlastnost, že číslo m je při uvedených podmínkách 1) co nejmenší, 2) co největší?

Řešíme-li tuto soustavu rovnic, dostaneme pro neznámé

$$x = \frac{15 - m}{2}, \quad y = \frac{3m - 15}{4}.$$

a) Mají-li být čísla x, y nezáporná, musí platit nerovnosti $\frac{15 - m}{2} \geqq 0, \frac{3m - 15}{4} \geqq 0$. To znamená, že číslo m musí být prvkem uzavřeného intervalu $\langle 5; 15 \rangle$.

b) Mají-li být čísla x, y kladná, musí platit ostré nerovnosti $\frac{15 - m}{2} > 0, \frac{3m - 15}{4} > 0$. Jejich úpravou dostaneme, že číslo m musí být prvkem otevřeného intervalu $(5; 15)$.

1. Při řešení v oboru nezáporných čísel můžeme vybrat nejmenší hodnotu $m = 5$ z intervalu $\langle 5;\ 15\rangle$. Této hodnotě m odpovídá řešení $x = 5$, $y = 0$. Při řešení v oboru kladných čísel nemůžeme z intervalu $(5;\ 15)$ vybrat nejmenší hodnotu. I když zvolíme pro m číslo hodně blízké číslu 5, jako např. 5,000 001, pak v otevřeném intervalu $(5;\ 15)$ najdeme snadno další číslo, které je menší než 5,000 001. Nejmenší číslo v tomto otevřeném intervalu neexistuje.

2. Při řešení v oboru nezáporných čísel můžeme vybrat největší $m = 15$, jemuž odpovídá řešení $x = 0$, $y = 7{,}5$. Při řešení v oboru kladných čísel neexistuje žádná dvojice čísel x, y, pro něž by bylo m největší.

Příklad 6. Řešme nerovnici $\sqrt{x^2 + 5} < x - 3$.

Nejprve zjistíme, že početní výrazy na levé i na pravé straně nerovnice mají smysl pro libovolná reálná čísla x. Poněvadž druhá odmocnina z nezáporného čísla je nezáporné číslo, musí platit $x - 3 \geqq 0$ čili $x \geqq 3$. S touto podmínkou můžeme nerovnici umocnit a pak řešením lineární nerovnice dostaneme $x < \frac{2}{3}$. Tento neomezený interval nemá však žádný společný prvek s neomezeným intervalem $x \geqq 3$. Dané nerovnici nevyhovuje tedy žádné reálné číslo x.

Cvičení

6.1 Národní podnik musí vynakládat m Kčs na jednu výrobní jednotku ke krytí nákladů závislých na velikosti výroby (suroviny, polotovary, mzdy apod.) a mimoto s Kčs ročně na krytí stálých výdajů nezávislých na velikosti výroby. Kolik výrobků musí ročně produkovat, má-li celkový zisk podniku být z Kčs při prodejní ceně c Kčs na jednotku produkce? Proveďte diskusi řešení.

6.2 Osazenstvo dolu má vytěžit a tun uhlí denně a těží denně b tun. Tím plní plán na p procent. Když se plánovaná denní těžba i skutečná denní těžba zvýšily o d tun, změnil se tím procentový ukazatel plnění plánu na p' procent. Porovnejte rozdílem procentové ukazatele p, p' a proveďte diskusi řešení.

6.3 Řešte nerovnice:

a) $x^2 + 10x + 25 > 0$, b) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2 \leqq 0$,

c) $(4x^2 - 4x + 1)^{-3} > 0$, d) $(4x + 3)^{-5} \leqq 0$.

6.4 Která čísla x vyhovují všem nerovnicím dané soustavy:

a) $2x + 1 < 0$, $2x + 5 > 0$, $0 < x + 2 < 3$,

b) $5x + 3 > 0$, $|x| < 0{,}5$, $|x - 1| < 0{,}6$,

c) $3 < 2x + 5 < 7$, $2x - 1 \leqq 4x + 2 \leqq 2x + 1$,

d) $\sqrt{2x - 1} < \sqrt{4x - 1}$, $0 < 3 - x < 0{,}5$.

6.5 Pro která čísla m má soustava rovnic $x - 2y + 4 = 0$, $4x + 3y + m = 0$ taková řešení, že x, y jsou čísla nezáporná. Zvolte pak největší možnou hodnotu čísla m a určete k němu příslušné řešení dané soustavy rovnic. Přitom si všimněte, že neexistuje žádné řešení soustavy, při němž by bylo číslo m nejmenší.

Nyní se naučíme řešit algebraické nerovnice tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \gtreqless 0, \quad (6.6),$$

v nichž levá strana je součinem lineárních činitelů tvaru $x - x_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Přitom se má rozhodnout, zda a pro která x platí mezi tímto součinem a číslem 0 ostrá nebo neostrá nerovnost. Při dalších úvahách budeme nejprve předpokládat, že čísla x_i jsou navzájem různá a že jejich označení bylo zvoleno tak, aby platilo $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < x_n$. Součin lineárních činitelů v nerovnici (6.6) bude rovný nule právě jen pro tato čísla $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Jejich součin bude různý od nuly jen ve vnitřních bodech intervalů, jejichž krajními body na číselné ose jsou čísla x_i. Znaménko součinu je třeba určit jen pro body zmíněných intervalů, což vás pro větší názornost i stručnost naučíme na vhodně zvolených příkladech. Přitom budeme předpokládat, že umíte rozložit kvadratický trojčlen v součin reálných lineárních činitelů, což je vždy možné, když diskriminant kvadratického trojčlenu není záporný.

Příklad 7. Řešme nerovnici

$$x(x^2 - 4)(x^2 - 4x - 5) \geqq 0.$$

Po rozkladu $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2), x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$, po dosazení do dané nerovnice a po uspořádání lineárních činitelů dostaneme

$$(x + 2)(x + 1)(x - 0)(x - 2)(x - 5) \geqq 0. \qquad (6.7)$$

Platí tedy rovnost pro body $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$. Vyznačte si tyto body na náčrtu číselné osy, abyste mohli dobře sledovat další výklad. Pět bodů $-2, -1, 0, 2, 5$ rozděluje číselnou osu na šest částí a naším úkolem nyní je zjistit znaménko součinu lineárních činitelů z nerovnice (6.7) pro čísla x v otevřených intervalech $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 5)$, $(5; +\infty)$. Předpokládejme nejprve, že jsme zvolili číslo x z posledního intervalu, takže platí $x + 2 > 0$, $x + 1 > 0$, $x - 0 > 0$, $x - 2 > 0$, $x - 5 > 0$. Součin všech pěti činitelů bude pro čísla x z posledního neomezeného intervalu kladný, a proto tato x jsou řešeními dané nerovnice. Zvolme nyní x z předposledního intervalu $(2; 5)$. Pro body z tohoto intervalu platí $x + 2 > 0$, $x + 1 > 0$, $x > 0$, $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$. Součin čtyř kladných činitelů s jedním záporným bude záporný, a proto body intervalu $(2; 5)$ nebudou dané nerovnici vyhovovat. Zvolíme-li nyní x z intervalu $(0; 2)$, budou tři činitelé kladní, dva záporní. Součin všech pěti činitelů bude kladný a všechny body intervalu $(0; 2)$ budou řešeními dané nerovnice. Tak postupujeme dále od jednoho intervalu k druhému, až dojdeme konečně do prvního neomezeného intervalu $(-\infty; -2)$. Při tomto zkoumání součinu lineárních činitelů v nerovnici (6.7) se střídaly otevřené intervaly, jejichž prvky patřily k řešení, s intervaly, jejichž prvky k řešení nepatřily. Shrneme-li výsledky zkoumání dané nerovnice v otevřených intervalech se zjištěním, že v krajních bodech intervalů platí v dané nerovnici rovnost, dostaneme tento výsledek: Nerovnice (6.7) platí právě pro všechny body z intervalů $\langle -2; -1 \rangle$, $\langle 0; 2 \rangle$, $\langle 5; +\infty)$.

Poznámka. Vyšetřování dané nerovnice jsme mohli provádět při libovolném pořadí intervalů. Výhodné je ovšem, když je probíráme v pořadí odleva doprava nebo odprava doleva.

Příklad 8. Řešme algebraickou nerovnici 6. stupně

$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x - 5) \leqq 0 .$$

První z kvadratických trojčlenů má záporný diskriminant a nelze jej rozložit na součin reálných lineárních činitelů. Poněvadž pro něj platí $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$ pro libovolné x, můžeme kladným číslem, které tento trojčlen představuje, krátit a po rozkladu zbývajících kvadratických trojčlenů dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$(x - 2)^2 (x + 1) (x - 5) \leqq 0 .$$

Rovnost bude platit v této nerovnosti pro čísla $x = 2$, $x = -1$ a pro $x = 5$. Čtverec prvního dvojčlenu má mimo výjimečný bod $x = 2$ stále kladnou hodnotu, takže tímto čtvercem můžeme krátit a hledat nyní jen řešení ostré nerovnice (kvadratické)

$$(x + 1) (x - 5) < 0 ,$$

kterou vyšetříme podle vzoru z předcházející úlohy pro hodnoty x ve třech otevřených intervalech $(-\infty; -1)$, $(-1; 5)$, $(5; +\infty)$. Jen v prostředním z těchto intervalů jsou lineární činitelé čísly nesouhlasnými, jejichž součin je záporný. Čísla x z tohoto intervalu dané nerovnici vyhovují. Shrneme-li výsledky našeho zkoumání, dostaneme: Dané nerovnici vyhovuje číslo $x = 2$ a všechna čísla z intervalu $\langle -1; 5 \rangle$. Tedy nerovnice je splněna právě pro všechna čísla z intervalu $\langle -1; 5 \rangle$.

Příklad 9. Řešme nerovnici

$$\frac{x - 2}{x - 3} - \frac{5}{x - 1} \leqq 1 .$$

Výrazy na levé straně nerovnosti mají smysl, jen když $x \neq 1$, $x \neq 3$. Převedeme-li všechny výrazy na zlomky se společným jmenovatelem, dostaneme po sečtení a po zkrácení nerovnici

$$\frac{x - 3{,}5}{(x - 1) (x - 3)} \geqq 0 .$$

Výraz na levé straně poslední nerovnice nabývá nulové hodnoty jen pro $x = 3{,}5$. Poněvadž případ, kdy nastává v této nerovnici rovnost, jsme již vyšetřili, můžeme vyšetřovat již jen ostrou nerovnici

$$(x - 1)^{-1} (x - 3)^{-1} (x - 3{,}5) > 0,$$

která je však (za předpokladu $x \neq 1$, $x \neq 3$) ekvivalentní s nerovnicí

$$(x - 1) (x - 3) (x - 3{,}5) > 0.$$

Tato nerovnice je splněna pro x z intervalů $(1; 3)$, $(3{,}5; +\infty)$.

Shrnutí. Dané nerovnici vyhovují právě všechna x z intervalů $(1; 3)$, $\langle 3{,}5; +\infty)$.

Příklad 10. Řešme nerovnici

$$(x + 2)^3 (x + 1)^{-1} (x - 1)^{-2} (x - 3)^5 (x - 5)^4 \leqq 0.$$

Výraz na levé straně má smysl, jen když $x \neq -1$, $x \neq 1$. Rovnost nastane pro $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Po vyšetření případů, kdy nastává rovnost, můžeme vyšetřovat ostrou nerovnici, kterou z nerovnice dostaneme vynecháním znaménka $=$. Přitom vynecháme lineární dvojčleny se sudými exponenty, neboť představují kladná čísla v intervalech, které budeme vyšetřovat, a všechny dvojčleny s lichými exponenty nahradíme dvojčleny s exponentem 1, takže dostaneme nerovnici

$$(x + 2) (x + 1) (x - 3) < 0.$$

Tato nerovnice má řešení, a to čísla x z intervalů $(-\infty; -2)$, $(-1; 3)$.

Shrnutí. Dané nerovnici vyhovuje číslo 5 a všechna čísla z intervalů $(-\infty; -2\rangle$, $(-1; 3\rangle$.

Nerovnice, které se dají převést na tvar

$$k_1|x - x_1| + k_2|x - x_2| + k_3|x - x_3| + \ldots + \\ + k_n|x - x_n| \leqq k_0x + q,$$

řešíme tak, že je vyšetřujeme v intervalech, jejichž krajními body jsou čísla $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, přesněji v intervalech $(-\infty; x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_2, x_3\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$, $\langle x_n, +\infty)$.

Příklad 11. Řešme nerovnici

$$|x| - |x - 2| + |x - 5| \leqq 4.$$

Dělicí body $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ jsou krajními body intervalů $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 2)$, $\langle 2; 5)$, $\langle 5; +\infty)$. V každém z těchto intervalů se dá daná nerovnice nahradit jednodušší nerovnicí, která již neobsahuje absolutní hodnoty. Má-li v takovém intervalu zjednodušená nerovnice řešení, je toto řešení současně i řešením nerovnice původní. Pořadí, v němž bereme jednotlivé intervaly, nemá na řešení vliv, zachování určitého systému je však vhodné, neboť to zmenšuje nebezpečí vzniku chyb. Berme tedy intervaly např. v pořadí zprava doleva.

a) Zkoumání v intervalu $\langle 5; +\infty)$. Když $x \geqq 5$, pak platí $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$, $|x - 5| = x - 5$. Po dosazení do dané nerovnice dostaneme

$$x - (x - 2) + (x - 5) \leqq 4.$$

Po úpravě dostaneme $x \leqq 7$. Ve zkoumaném intervalu popisuje množinu řešení vztah $5 \leqq x \leqq 7$.

b) Zkoumání v intervalu $\langle 2; 5)$. V tomto intervalu je již $x - 5 \leqq 0$, zatímco ostatní výrazy, a to x, $x - 2$, zůstávají ještě nezáporné. Proto platí v tomto intervalu $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Po dosazení do dané nerovnice a po krátké úpravě dostaneme $x \geqq 3$. Ve zkoumaném intervalu má tedy daná nerovnice řešení $3 \leqq x \leqq 5$.

c) Zkoumání v intervalu $\langle 0; 2 \rangle$. V tomto intervalu platí $|x| = x$, $|x - 2| = -(x - 2)$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme $x \leqq 1$. V tomto intervalu má tedy daná nerovnice řešení $0 \leqq x \leqq 1$.

d) Zkoumání v intervalu $(-\infty; 0 \rangle$. V tomto intervalu platí $|x| = -x$, $|x - 2| = -(x - 2)$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Po dosazení a úpravě dostaneme $x \geqq -1$. V tomto intervalu má tedy daná nerovnice řešení $-1 \leqq x \leqq 0$.

Shrnutí. Daná nerovnice má za řešení právě všechna x z intervalů $\langle -1; 1 \rangle$, $\langle 3; 7 \rangle$.

Příklad 12. Řešme nerovnici

$$|4(x^2 + 2x)| < 3$$

a rozhodněme pak, zda existuje nějaké okolí bodu 0, jehož prvky vyhovují dané nerovnici.

Přepíšeme-li nerovnost podle věty A_3 na tvar $-3 < 4(x^2 + 2x) < 3$, zjistíme, že je třeba nalézt všechna čísla x, která vyhovují současně dvěma kvadratickým nerovnostem:

$$1.\quad 4x^2 + 8x + 3 > 0, \qquad 2.\quad 4x^2 + 8x - 3 < 0.$$

Násobíme-li tyto nerovnosti kladným číslem 1/4 a provedeme-li rozklad kvadratických trojčlenů na součin lineárních kořenových činitelů, dostaneme místo nich ekvivalentní nerovnice:

$$1. \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0,$$

$$2.\ \left(x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\left(x + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right) < 0.$$

Kvadratické nerovnice tohoto typu, v nichž levou stranu tvoří součin dvou lineárních činitelů $(x - x_1)(x - x_2)$, můžeme podle vzoru předcházejících úvah tohoto článku rozřešit zkoumáním znamení hodnot tohoto součinu v intervalech $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$. Snadno se ukáže, že kvadratický trojčlen $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ je kladný v prvním i třetím z těchto intervalů a záporný v druhém z nich. Je účelné pamatovat si tento výsledek pro rychlé řešení kvadratických nerovnic; k zapamatování vám bude jistě napomáhat poznatek, že graf funkce $y = x^2 + px + q$, která v bodech x_1, x_2 nabývá nulových hodnot, leží v (neomezeném) prvním i třetím intervalu nad osou x a v druhém intervalu (x_1, x_2) pod osou x (načrtněte si příslušný graf, jímž je parabola protínající osu x v bodech x_1, x_2). Tak zjistíme, že výše uvedeným nerovnicím vyhovují čísla x v intervalech

$$1.\ \left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right),$$

$$2.\ \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7};\ -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right).$$

Dále zjistíme, že oběma nerovnicím vyhovují čísla x z intervalů

$$\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7};\ -\frac{3}{2}\right);\ \left(-\frac{1}{2};\ -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right).$$

Na dodatkovou otázku dané úlohy můžeme nyní odpovědět, že okolí bodu 0 vyhovující dané podmínce existuje a je částí druhého z těchto intervalů. Jeho částmi jsou např. intervaly $(-0{,}3; +0{,}3)$ nebo $(-0{,}25; +0{,}25)$ apod.

Poznámka. Při studiu matematické analýzy se setkáte s řešením úloh typu, který byl v tomto příkladě naznačen. Zpravidla však stačí nalézt odpověď na otázku toho druhu, která byla uvedena jako dodatková otázka v naší úloze. Ukážeme, že řešení lze pak nalézt rychle užitím vět $\mathbf{K}_4$ a $\mathbf{A}_4$. Budeme-li předpokládat pro řešení naší úlohy $|x| < 1$, pak platí $|x^2| \leqq |x|$. Za tohoto předpokladu lze však danou nerovnici upravit tak, že existence řešení se snadno prokáže. Podle věty $\mathbf{A}_4$ můžete psát

$$|4x^2 + 8x| \leqq |4x^2| + |8x| = 4|x^2| + 8|x| \leqq$$
$$\leqq 4|x| + 8|x| = 12|x|.$$

Odtud plyne: je-li $|x| < \frac{1}{4}$, tj. $-0{,}25 < x < 0{,}25$, potom je $12|x| < 3$ a původní nerovnost je splněna. Tento příklad ukazuje též užitečnost věty $\mathbf{A}_4$ která se často nazývá *trojúhelníková nerovnost*.

Cvičení

6.6 Řešte soustavy nerovnic:

a) $x^2 - x - 2 \leqq 0, \quad 4x^2 - 12x + 5 \leqq 0;$

b) $x^2 + x - 2 > 0, \quad x^2 - 2x - 3 < 0;$

c) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 4) < 0, \ (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 1) > 0;$

d) $|x^2 - 3x| < 2;$

e) $|6x^2 - 5x| < 6.$

6.7 Řešte nerovnice:

a) $\dfrac{2x - 5}{3 - 2x} \geqq 2$; b) $\dfrac{x - 2}{2x + 3} \leqq 0$;

c) $\dfrac{x + 3}{x - 3} + \dfrac{x + 4}{x - 4} \geqq 2$;

d) $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x + 2} < 0$;

e) $\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leqq 2$; f) $\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| \geqq 1$.

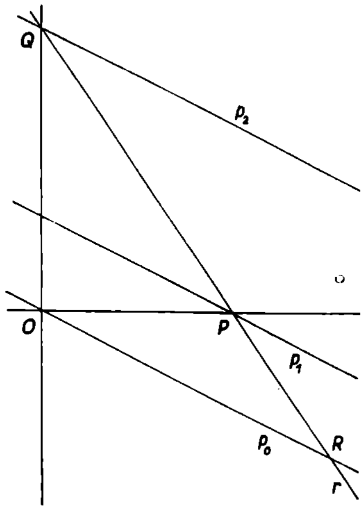
Kapitola 7.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC A NEROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH

Ve škole jste řešili soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, přičemž grafické znázornění rovnic vám usnadnilo jejich řešení. Vaše vědomosti v tomto oboru chceme nyní osvěžit a trochu rozšířit, a to zejména tím, že budeme uvažovat též soustavy lineárních rovnic i nerovnic o dvou neznámých. Nerovnicím o dvou neznámých odpovídají při geometrickém znázornění poloroviny, jak jste se o tom poučili již v kap. 2, kterou si před studiem této kapitoly znovu přečtěte. Pro omezený rozsah této knížky vás na příkladech seznámíme hlavně s těmi novými poznatky, které budete potřebovat ke studiu dalšího článku. Pro úsporu místa nejsou v této knížce otištěny takové obrázky, které si sami snadno narýsujete podle znění textu.

Jedna lineární rovnice o dvou neznámých, např. $3x + 2y - 15 = 0$, má nekonečný počet řešení. Každému z nich odpovídá bod $[x, y]$ přímky, která je grafickým znázorněním příslušné rovnice. V případě námi zvoleném je to přímka $r \equiv PQ$ v obr. 2. Body $P \equiv [5; 0]$, $Q \equiv \left[0; \frac{15}{2}\right]$ najdete snadno jako průsečníky dané přímky se souřadnicovými osami.

Rýsujete-li obraz přímky na čtverečkovaném papíře, pak někdy velmi snadno postřehnete, že přímka prochází několika *mřížovými body* roviny, tj. takovými body, jejichž obě souřadnice jsou čísla celá. Souřadnice těchto bodů pak představují řešení dané rovnice v oboru celých čísel. Tak např. u přímky r snadno najdete mřížové body



Obr. 2

[—1; 9], [1; 6], [3; 3], [5; 0], [7; —3] atd. Všimnete-li si dobře zápisu těchto po sobě jdoucích mřížových bodů na přímce, pak snadno objevíte, že při přechodu od jednoho bodu k druhému za ním následujícímu se první souřadnice zvětší o 2, druhá se zmenší o 3. Zvolíme-li některý bod z této množiny za základní, pak můžeme všechna celočíselná řešení dané rovnice zapsat jednoduchým způsobem. Zvolíme-li např. bod [1; 6] za základní, pak pro všechny mřížové body roviny na přímce r platí: $x = 1 + 2t$, $y = 6 — 3t$, kde t je libovolné celé číslo.

Snadno lze dokázat, že na každé přímce souřadnicové roviny leží buď nekonečně mnoho mřížových bodů, nebo jen jeden, nebo žádný. Řešení rovnic v oboru celých čísel, patří k velmi starým oborům aritmetiky. Jejich řešením se zabýval mimo jiné též řecký matematik *Diofantos* (žil koncem 3. stol. n. l.). Proto se někdy též užívá názvu diofantické rovnice. Poznámky tohoto odstavce nesměřovaly k tomu, abyste se naučili řešit diofantické rovnice, nýbrž jen k tomu, abyste něco věděli o existenci těchto problémů, které patří do číselné teorie.

Je-li dána soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad (7.1)$$

v nichž koeficienty při obou neznámých nejsou současně rovné nule, pak při řešení této soustavy mohou nastat tyto případy:

a) Je $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ a platí $a_2 = ra_1$, $b_2 = rb_1$, $c_2 = rc_1$, kde r je reálné číslo různé od nuly. Po dosazení do druhé rovnice soustavy (7.1) a po vytknutí r dostaneme $r(a_1x + b_1y + c_1) = 0$, což ukazuje, že tato rovnice je ekvivalentní s první rovnicí soustavy. Soustava rovnic, která je v tomto případě znázorněna dvěma splývajícími přímkami, má nekonečný počet řešení.

b) Je $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$, avšak $a_1 : c_1 \neq a_2 : c_2$, resp. též $b_1 : c_1 \neq b_2 : c_2$, pak jde o tzv. sporné rovnice, které nemají společné řešení. Dvě rovnice soustavy (7.1) jsou v tomto případě znázorněny různými rovnoběžnými přímkami, které nemají žádný společný bod.

c) Nenastane-li žádný z předcházejících výjimečných případů, soustava rovnic (7.1) má pak jediné řešení. V tomto případě jsou rovnice znázorněny dvěma různoběžnými přímkami a souřadnice x, y jejich průsečíku udávají řešení dané soustavy.

Je-li dána soustava n lineárních rovnic o dvou neznámých

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{7.2}$$

kde pro všechna i platí $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, pak má jediné řešení jen tehdy, když všechny přímky odpovídající jednotlivým rovnicím soustavy (7.2) procházejí jedním bodem. Neexistuje-li bod, jímž všechny přímky procházejí, nemá soustava (7.2) žádné řešení. Nekonečný počet řešení by měla soustava (7.2) v tom případě, kdyby všechny přímky odpovídající jednotlivým rovnicím splynuly v jedinou. V tom případě by všechny rovnice byly nenulovými násobky jedné z nich.

Jestliže v dané soustavě rovnic je některá rovnice nenulovým násobkem jiné rovnice soustavy, můžeme jednu z těchto navzájem ekvivalentních rovnic ze soustavy vypustit, čímž si vyšetřování soustavy rovnic zjednodušíme. O tom, jak lze početní cestou vyšetřit řešitelnost soustavy rovnic a vzájemné vztahy mezi jednotlivými rovnicemi, vás poučí následující příklady.

Příklad 1. Vyšetřeme řešitelnost soustavy lineárních rovnic

$$x - 3y - 4 = 0,$$

$$2x + y - 8 = 0,$$

$$2x + 5y - 16 = 0,$$

$$-2x + y - 2 = 0.$$

Označme p_1, p_2, p_3, p_4 přímky, jež odpovídají daným rovnicím v pořadí, v němž jsou v úloze uvedeny, a hledejme průsečíky všech dvojic přímek. Abychom měli přehled o postupu výpočtu a nezapomněli vypočíst průsečík některé dvojice přímek, zapišme získané výsledky do tabulky (7.3). Souřadnice průsečíku přímek $p_1 p_2$ jsou uvedeny v tabulce tam, kde se protíná řádek označený záhlavím p_1 se sloupcem se záhlavím p_2 a obdobně pro všechny ostatní dvojice přímek. Tabulka je ,,čtvercová", neboť má stejný počet řádek i sloupců. Ze zřejmých důvodů je souměrná podle úhlopříčky jdoucí z levého horního rohu do pravého dolního a místa na úhlopříčce zůstanou nezaplněna.

	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	*	[4; 0]	$\left[\frac{68}{11}; \frac{8}{11}\right]$	[—2; —2]
p_2	[4; 0]	*	[3; 2]	$\left[\frac{3}{2}; 5\right]$
p_3	$\left[\frac{68}{11}; \frac{8}{11}\right]$	[3; 2]	*	$\left[\frac{1}{2}; 3\right]$
p_4	[—2; —2]	$\left[\frac{3}{2}; 5\right]$	$\left[\frac{1}{2}; 3\right]$	*

(7.3)

Prohlédneme-li si tabulku (7.3), zjistíme, že všechny průsečíky různých dvojic přímek jsou různé, takže daná soustava nemá řešení. Všechny čtyři přímky odpovídající daným rovnicím se protínají po dvou v šesti bodech.

K tomu, abychom zjistili, že daná soustava nemá řešení, stačilo ovšem zjistit, že pouze dva body v tabulce (7.3) jsou různé. Užitečnost tabulky (7.3) poznáme ještě později při jiné příležitosti. Kdybychom však chtěli dokázat, že soustava má řešení, museli bychom zjistit, že všecky body v tabulce (7.3) splývají.

Příklad 2. Vyšetřeme řešitelnost soustavy lineárních rovnic

$$x - 3y - 4 = 0,$$

$$-2x + y + 8 = 0,$$

$$6x + 7y - 24 = 0,$$

$$-2x + y - 2 = 0.$$

Označme q_1, q_2, q_3, q_4 přímky odpovídající rovnicím dané soustavy a sestavme příslušnou tabulku pro průsečíky dvojic přímek.

	q_1	q_2	q_3	q_4	
q_1	*	[4; 0]	[4; 0]	[—2; —2]	
q_2		*	[4; 0]	$\parallel$	(7.4)
q_3			*	$\left[\frac{1}{2}3;\right]$	
q_4				*	

V tabulce (7.4) jsou zapsány průsečíky jednotlivých dvojic přímek již jen v horní části čtvercové tabulky, a to nad její úhlopříčkou vyznačenou hvězdičkami. (Kdybychom označení v záhlaví jednotlivých řádek přesunuli doprava až na místo příslušných hvězdiček, dostali bychom snad ještě přehlednější „trojúhelníkovou“ tabulku.) Ze zápisů v tabulce je zřejmé, že průsečíky přímek q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3 splývají, což znamená, že přímky q_1, q_2, q_3 procházejí bodem [4; 0]; přímky q_2 a q_4 jsou navzájem rovnoběžné, což bylo na příslušném místě tabulky vyznačeno značkou užívanou v geometrii pro rovnoběžnost. Z hlediska algebraického to znamená, že soustava rovnic utvořená z prvních tří rovnic dané soustavy má řešení a že čtvrtá rovnice je ve sporu s druhou rovnicí dané soustavy.

Příklad 3. Vyšetřeme soustavu přímek, které jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ x &= 0, \\ x + 2y - 2 &= 0, \\ x + 4y - 20 &= 0, \\ 2x + y - 12 &= 0, \end{aligned}$$

a vyhledejme všechny body, v nichž se protínají aspoň dvě přímky této soustavy.

Označme r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 přímky v tom pořadí, jak jsou dány rovnicemi. Ze zkušenosti z předcházející tabulky víme, že do první řádky tabulky máme zapsat průsečíky přímek r_1r_2, r_1r_3, r_1r_4, r_1r_5, do druhé řádky průsečíky přímek r_2r_3, r_2r_4, r_2r_5, do třetí řádky průsečíky přímek r_3r_4, r_3r_5 a do čtvrté řádky průsečík přímek r_4r_5. Jestliže tento výpočet provedeme a zapíšeme průsečíky v uvedeném pořadí, dostaneme celkem 10 různých bodů, v nichž se protínají přímky dané soustavy, a to: [0; 0], [2; 0], [20; 0], [6; 0], [0; 1], [0; 5], [0; 12], [—16; 9], $\left[\frac{22}{3};\ -\frac{8}{3}\right]$, [4; 4].

I když tabulkové metody nebudeme již mnoho používat, vyvodíme jejím užitím vzorec pro nejvyšší možný počet všech bodů, v nichž se protínají přímky dané soustavy. Čtvercová tabulka n-řadová obsahuje celkem n^2 polí, z nichž je třeba vyplnit jen $n^2 - n$ polí, avšak jen polovina z nich stačí pro zápis nejvyššího možného počtu bodů. Je jich tedy $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ čili $\frac{1}{2}n(n - 1)$.

Co se týká soustav lineárních nerovnic o dvou neznámých, je dobře mít stále na paměti, že nerovnicím

$$ax + by + c \geqq 0, \quad -ax - by - c \geqq 0 \qquad (7.5)$$

vyhovují souřadnice bodů ve dvou navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou o rovnici $ax + by + c = 0$. Sjednocením množin bodů těchto dvou polorovin je množina všech bodů celé roviny, jejich průnikem hraniční přímka. V 2. kapitole jsme se též naučili pravidlu, podle něhož lze rychle rozhodnout, kterou polorovinu daná nerovnice popisuje. Další úvahy o geometrických útvarech popsaných dvěma nebo několika nerovnicemi ukážeme na příkladech, v nichž místo písmen a, b, c v nerovnicích tvaru (7.5) budou zvolena určitá čísla. Přitom budeme pamatovat na to, že množina všech bodů, které vyhovují aspoň jedné nerovnici dané soustavy, je sjednocením množin, z nichž každá je popsána jednou nerovnicí. Množinu všech bodů, které vyhovují současně všem nerovnicím dané soustavy, najdeme, když vyhledáme průnik, tj. společné body množin, které jsou popsány jednotlivými nerovnicemi. Vyhledávání průniku několika polorovin budeme častěji potřebovat, a proto je budeme více procvičovat.

Příklad 4. Vyšetřeme, které poloroviny jsou popsány nerovnicemi

1. $x + 2y \geqq 0$,
2. $x + 2y - 5 \geqq 0$,
3. $-x - 2y + 15 \geqq 0$,

$$4.\ -3x - 2y + 15 \geqq 0,$$

a popišme sjednocení a průniky některých těchto polorovin.

Hraniční přímky těchto polorovin označíme p_0, p_1, p_2, r v tom pořadí, v jakém byly uvedeny poloroviny jimi vyťaté. Tyto přímky jsou zobrazeny na obr. 2. Po označení hraničních přímek polorovin můžeme dané poloroviny podle úmluvy v kapitole 2 zapsat stručně takto: 1. $\bar{\varrho}(p_0)$; 2. $\bar{\varrho}(p_1)$; 3. $\varrho(p_2)$; 4. $\varrho(r)$. V prvních dvou případech jde o poloroviny nad přímkou p_0, resp. p_1, neboť koeficient při y je kladný, ve druhých dvou případech o poloroviny pod přímkou p_2, resp. r, neboť koeficient při y je v posledních dvou nerovnicích záporný.

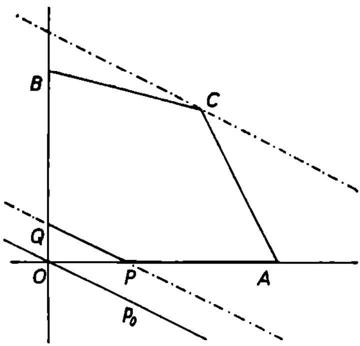
Sjednocením $\bar{\varrho}(p_0)$ a $\bar{\varrho}(p_1)$ je $\bar{\varrho}(p_0)$, jejich průnikem je $\bar{\varrho}(p_1)$. Sjednocením polorovin $\bar{\varrho}(p_1)$ a $\varrho(p_2)$ je množina všech bodů celé roviny, jejich průnikem množina bodů, které tvoří pás ohraničený rovnoběžkami p_1, p_2; stejné sjednocení i průnik mají množiny bodů tří polorovin $\bar{\varrho}(p_0)$, $\bar{\varrho}(p_1)$, $\varrho(p_2)$.

Průnikem $\bar{\varrho}(p_0)$ a $\varrho(r)$ je část roviny tvořící ostrý úhel ORQ. Jejich sjednocením je množina právě těch bodů roviny, které v ní zůstanou po vynětí vnitřních bodů průniku polorovin opačných k polorovinám $\bar{\varrho}(p_0)$ a $\varrho(r)$, tj. tedy průniku polorovin $\varrho(p_0)$, $\bar{\varrho}(r)$. Pokud nejste ještě vycvičeni v určování sjednocení a průniku dvou polorovin, můžete použít této pomůcky: Vyšrafujte polorovinu $\bar{\varrho}(p_0)$ šrafy rovnoběžnými s hraniční přímkou p_0 a polorovinu $\varrho(r)$ šrafy rovnoběžnými s hraniční přímkou r. Do sjednocení množin všech bodů obou polorovin patří pak právě všechny body z těch částí roviny, které jsou šrafovány jakkoli, do průniku body té části roviny, která má šrafy obojího směru.

Příklad 5. Vyhledejme množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice vyhovují současně nerovnicím:

$$y \geqq 0,$$
$$x \geqq 0,$$
$$x + 2y - 2 \geqq 0,$$
$$x + 4y - 20 \leqq 0,$$
$$2x + y - 12 \leqq 0.$$

Hraničními přímkami polorovin popsaných těmito nerovnicemi jsou přímky, které jsme v příkladu 3 tohoto článku označili písmeny r_1, r_2, r_3, r_4, r_5. Jde tedy o to najít průnik polorovin $\bar{\varrho}(r_1)$, $\bar{\varrho}(r_2)$, $\bar{\varrho}(r_3)$, $\varrho(r_4)$, $\varrho(r_5)$. Snad jste si povšimli, že v posledních dvou nerovnicích tohoto příkladu jsou značky $\leqq$, a že je tedy nutné znásobit



Obr. 3

tyto nerovnice číslem -1 nebo jiným záporným číslem, aby všechny nerovnice měly souhlasnou značku $\geqq$; v tom případě je pak koeficient při y záporný, a podle pravidla v kapitole 2 je hned zřejmé, že poslední dvě nerovnice popisují poloroviny pod přímkami r_4, r_5. Do množiny všech bodů, které vyhovují prvním dvěma nerovnicím této úlohy, patří právě ty body souřadnicové roviny, které vyplňují pravý úhel s vrcholem v počátku O; jeho rameny jsou kladné části os x, y, a je to tedy neomezená část roviny (sledujte obr. 3). Průnikem tohoto pravého úhlu s třetí polorovinou $\bar{\varrho}(r_3)$ je opět neomezená část roviny v kvadrantu I, která je ohraničena polopřímkami PA, QB a úsečkou PQ. Do množiny všech bodů, které vyhovují jen posledním dvěma nerovnicím, patří právě všechny body neomezené části roviny, kterou tvoří tupý úhel ACB. Průnikem všech pěti polorovin je pak pětiúhelník $PACBQ$.

Rozmyslíme si obecně, jaké rovinné útvary vznikají jako průnik dvou polorovin v závislosti na jejich vzájemné poloze. Jsou-li hraniční přímky polorovin totožné, je průnikem polorovina nebo přímka; jsou-li hraniční přímky rovnoběžné, ale různé, je průnikem polorovina, nekonečný pás nebo prázdná množina. Konečně jsou-li hraniční přímky různoběžné, je průnikem úhel.

Podobně pro tři poloroviny mohou vzniknout stejné útvary jako v případě dvou polorovin (rozmyslete si kdy) a ještě útvary další. Jsou-li např. hraniční přímky navzájem různoběžné, může být průnikem omezený útvar (trojúhelník, bod nebo prázdná množina) nebo neomezený útvar ohraničený dvěma polopřímkami a jednou úsečkou. Sami si již dovedete promyslit a načrtnout různé příklady průniku několika daných polorovin. Ty body, které jsou krajními body úseček nebo polopřímek ohraničujících geometrický útvar vzniklý průnikem několika polorovin, budeme v dalším textu nazývat vrcholy tohoto útvaru, ať jde o útvar omezený nebo neomezený.

V závěru kap. 4 jste se seznámili s pojmem konvexní geometrický útvar a s poznatkem, že průnik konvexních útvarů je též konvexní útvar. Poněvadž polorovina je útvar konvexní, jsou všechny útvary vzniklé průnikem několika polorovin konvexní. Přitom vrcholy těchto útvarů mají zvláštní postavení mezi ostatními body útvarů, které jsou průnikem několika polorovin, a to tím, že kterýkoli z nich můžete z útvaru vyjmout, přičemž útvar zůstane konvexní. Vynětím vnitřního bodu hraniční úsečky nebo polopřímky se konvexita útvaru poruší. Zůstala by však zachována, kdybychom z útvaru vyňali všechny body některé hraniční úsečky nebo polopřímky.

Nakonec rozhodneme ještě otázku, zda lze vrcholy konvexního útvaru, který je průnikem několika polorovin popsaných nerovnicemi, určit početní cestou. Uvažme, že vrcholem takového konvexního útvaru může být jen takový bod, v němž se protínají aspoň dvě hraniční přímky daných polorovin. Ty dovedeme určit tak, jak jsme to ukázali v příkladech 1, 2, 3 tohoto článku. Obecně při n daných polorovinách existuje nejvýše

$\frac{1}{2}n(n - 1)$ takových bodů, které přicházejí v úvahu

jako hledané vrcholy. Musíme z nich vybrat však jen ty, které leží ve všech polorovinách, tj. vyhovují všem daným nerovnostem. Body, které jsou průsečíky hraničních přímek polorovin z příkladu 5, byly nalezeny již v příkladu 3. Prvním z nich je bod [0; 0], který vyhovuje všem daným nerovnostem s výjimkou třetí; není tedy hledaným vrcholem. Bod [2; 0] vyhovuje všem daným nerovnostem, a patří tedy k hledaným vrcholům. Takovou početní cestou určíme mezi 10 body nalezenými v příkladu 3 všechny vrcholy konvexního pětiúhelníku $PACBQ$ bez pomocných náčrtů.

Cvičení

7.1 Dokažte, že na každé z daných přímek

a) $x\sqrt{2} + y = 0$, b) $x - x\sqrt{3} + 1 = 0$

leží právě jeden mřížový bod roviny.

7.2 Jsou dány čtyři lineární rovnice o dvou neznámých:

$$5x + 3y - 8 = 0, \qquad 2x - 4y - 11 = 0,$$
$$4x + 18y + 17 = 0, \qquad x + 11y + 14 = 0.$$

Sestavte tabulku řešení všech dvojic rovnic vybraných z daných čtyř rovnic a z výsledku vyvoďte závěr o vlastnostech dané soustavy rovnic i přímek jim odpovídajících.

7.3 Z daných pěti rovnic vyberte co největší počet takových rovnic, které tvoří řešitelnou soustavu:

$$x + 2y - 4 = 0, \qquad x - y - 1 = 0,$$
$$4x - y + 11 = 0, \qquad 2x - y - 19 = 0,$$
$$x + 5y - 13 = 0.$$

7.4 Na grafu dané přímky vyhledejte několik mřížových bodů roviny a určete pak početní výrazy, které parametricky udávají celočíselná řešení dané rovnice:

a) $5x - 3y - 2 = 0$, b) $4x + 3y - 8 = 0$.

7.5 Jsou-li $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ dva mřížové body na přímce p, pak $[x, y]$ je rovněž mřížový bod roviny na přímce p, jestliže pro něj platí

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t, \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t,$$

kde t je libovolné celé číslo. Jsou-li $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ dva sousední mřížové body roviny na přímce p, pak uvedené vzorce zahrnují všechny mřížové body roviny na přímce p. Dokažte.

7.6 Početně určete vrcholy geometrického útvaru, jehož body $[x, y]$ vyhovují nerovnicím:

$$y - 2 \leqq 0, \qquad x + y - 7 \leqq 0,$$
$$-3x + 2y - 4 \leqq 0, \qquad x - 4y - 2 \leqq 0.$$

Po výpočtu proveďte kontrolu s užitím náčrtu.

7.7 Řešte předcházející úlohu s tou obměnou, že první nerovnici nahradíte nerovnicí $y - 2 \geqq 0$.

7.8 Které geometrické útvary v rovině jsou popsány nerovnicemi: a) $|x| < 5$, b) $|y| < 3$, c) $|x| > 5$, d) $|y| > 3$, e) $|x| < 5$, $|y| > 3$, f) $|x| \geqq 5$, $|y| \geqq 3$, g) $3 < |x| < 5$, $1 < |y| < 2$?

7.9 Načrtněte obrazy geometrických útvarů, jejichž body $[x, y]$ vyhovují nerovnicím: a) $|x - 3| < 2$, b) $|y + 2| < 1$, c) $|x - 3| < 2$, $|y + 2| < 1$, d) $|x + y| < 2$, $|x - y| < 2$.

7.10 Je-li $[x_1, y_1]$ daný bod v rovině a ε libovolné kladné číslo, pak množina všech bodů, které vyhovují podmínce

a) $|x - x_1| < \varepsilon$, $|y - y_1| < \varepsilon$, se nazývá *čtvercové (kvadratické) okolí bodu* $[x_1, y_1]$,

b) $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < \varepsilon$, se nazývá *kruhové (cyklické) okolí bodu* $[x_1, y_1]$.

Zdůvodněte tyto názvy množin.

Kapitola 8.

LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Poměrně malé rozšíření středoškolského učiva o lineárních rovnicích a nerovnicích nám umožňuje, abychom v tomto článku ukázali na společné vlastnosti i metody řešení některých matematických úloh, které jsou spjaty s aktuálními problémy současného společenského života. Jejich podstatu je možno charakterizovat takto:

I. Daná úloha vede k sestavení lineárních rovnic nebo nerovnic o n neznámých, pro něž se mají nalézt řešení v oboru nezáporných čísel. Pro taková řešení budeme užívat názvu *přípustná řešení.*

II. V množině přípustných řešení mají být nalezena taková, pro něž veličina stanovená lineárním početním výrazem vzhledem k neznámým nabývá hodnoty co nejmenší nebo co největší, a to podle účelu, který má řešení úlohy sledovat. Předpis pro stanovení této nejmenší (minimální) nebo největší (maximální) hodnoty veličiny, kterou v našich úlohách budeme označovat písmenem m, nazveme *účelovou funkcí.*

Řešení úloh tohoto druhu objasníme na jednoduchých příkladech, při nichž přístup k němu ukážeme nejprve geomericky, a pak teprve vyložíme početní postup. Pro omezený rozsah této knížky budou příklady voleny tak, aby zahrnovaly vždy několik úloh.

Příklad 1. Hledejme takové řešení rovnice $3x + 2y - 15 = 0$, pro které platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ a pro které je číslo $m = x + 2y$ a) co nejmenší, b) co největší.

I. Množinu všech přípustných řešení této úlohy jsme již hledali početně v příkladu 5 kapitoly 6. Geometricky jí odpovídá množina všech bodů úsečky PQ na přímce r v obr. 2.

II. Rovnici $x + 2y = 0$ odpovídá přímka OR, označená p_0 v obr. 2. Body $[x, y]$, které jsou obrazy přípustných řešení, leží v $\bar{\varrho}(p_0)$, a platí pro ně tedy $x + 2y = m > 0$. Pro vzdálenost v bodu $[x, y]$ v polorovině $\bar{\varrho}(p_0)$ od přímky p_0 platí:

$$v = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{5}} = \frac{m}{\sqrt{5}}.$$

Bude-li m nejmenší, bude též v nejmenší a obráceně; z bodů úsečky PQ má od přímky p_0 nejmenší vzdálenost bod $P \equiv [5; 0]$ a v tom případě $m = 5$. Bude-li m největší, bude též v největší a obráceně; z bodů úsečky PQ má od přímky p_0 největší vzdálenost bod $Q \equiv [0; 7,5]$ a v tom případě $m = 15$.

Hledaná řešení daných úloh v tomto příkladě jsou: a) $x = 5$, $y = 0$, $m = 5$, b) $x = 0$, $y = 7,5$, $m = 15$.

Poznámka. Kdybychom úlohy řešené v předcházejícím příkladu obměnili tak, že bychom požadovali řešení v oboru celých čísel, pak by přípustná řešení byla zobrazena jen třemi body [5; 0], [3; 3], [1; 6] na úsečce PQ (viz třetí odstavec předcházející kapitoly). V tomto případě by bylo nejmenší $m = 5$ pro $x = 5$, $y = 0$ a největší m pro $x = 1$, $y = 6$.

Příklad 2. Hledejme taková řešení nerovnic

$$\begin{aligned} y &\geqq 0, \\ x &\geqq 0, \\ x + 2y - 2 &\geqq 0, \\ x + 4y - 20 &\leqq 0, \\ 2x + y - 12 &\leqq 0, \end{aligned}$$

pro která $m = x + 2y$ nabývá hodnoty a) nejmenší, b) největší.

I. Všechna přípustná řešení daných úloh jsou zobrazena body konvexního pětiúhelníku $PACBQ$ (viz příklad 5 předcházející kapitoly), jehož vrcholy dovedeme určit geometrickými konstrukcemi i analyticky.

II. Označíme-li p_0 přímku o rovnici $x + 2y = 0$, pak obrazy všech bodů, jejichž souřadnice udávají přípustná řešení dané úlohy, leží opět v $\bar{\varrho}(p_0)$. Obdobnou úvahou jako v předcházejícím příkladě dostaneme tyto výsledky:

a) Nejmenší hodnoty $m = 2$ nabývá m pro taková přípustná řešení x, y, jejichž obrazy $[x, y]$ leží na úsečce PQ. V tomto případě má úloha nekonečný počet řešení.

b) Největší hodnoty $m = 12$ nabývá m pro řešení $x = 4$, $y = 4$, jehož obrazem je bod C, který je nejvzdálenější od přímky p_0. V tomto případě má úloha jediné řešení.

Při různých účelových funkcích můžeme pochopitelně dostat různá řešení, i když přípustná řešení zůstanou stejná. Z geometrického názoru je zřejmé, že číslo m nabude některé krajní hodnoty, ať již minimální či maximální, buď jen v jednom vrcholu konvexního geometrického útvaru, jehož body jsou obrazy přípustných řešení, nebo v jeho dvou vrcholech, přičemž má pak úloha nekonečný počet řešení, jež odpovídají bodům na spojnici příslušných dvou sousedních vrcholů. Tento poznatek (který přijmeme za správný bez důkazu) nám umožní, abychom celou úlohu řešili početně. Určíme-li totiž početně všechny vrcholy konvexního pětiúhelníku $PACBQ$ postupem, který jsme vyložili v příkladu 5 předcházející kapitoly, je možno souřadnice těchto vrcholů dosadit do účelové funkce a zjistit pak příslušné řešení. Snadným výpočtem najdeme $P \equiv [2; 0]$, $A \equiv [6; 0]$, $C \equiv [4; 4]$, $B \equiv [0; 5]$, $Q \equiv [0; 1]$. Dosadíme-li souřadnice těchto vrcholů do účelové funkce, dostaneme pro ně čísla $m = 2, 6, 12, 10, 2$. Tak najdeme dva vrcholy P, Q, v nichž m nabývá minimální hodnoty 2, a bod C, v němž m nabývá maximální hodnoty 12.

Příklad 3. Výrobní podnik má 100 strojů druhu S_1 a 150 strojů druhu S_2, jež slouží k výrobě několika typů výrobků pro tuzemskou potřebu i pro vývoz do zahraničí. Z nich jen výrobky typu A a typu B jsou exportovány do SSSR a přinášejí našemu národnímu hospodářství zisk 5 rublů za 1 výrobek typu A a 4 ruble za 1 výrobek typu B. Ke zhotovení jednoho výrobku typu A je třeba 2 pracovních hodin na stroji S_1 a 4 pracovních hodin na stroji S_2, zatímco pro zhotovení jednoho výrobku typu B je třeba 2 pracovních hodin na stroji S_1 a 2 pracovních hodin na stroji S_2. Výrobní podnik je vázán státním plánem, aby zajistil denně zisk 1000 rublů pro naše socialistické hospodářství. Z provozních důvodů mohou pro export do SSSR pracovat stroje S_1 nejvýš ve 2 směnách po 8 hodinách a stroje S_2 nejvýš v 1 směně 8 hodin denně. Za těchto podmínek máme nalézt řešení tří úloh na stanovení pracovního plánu určujícího počet exportních výrobků typu A a typu B, aby byl splněn tento účel:

1. aby výrobní podnik zajistil co největší zisk z exportu do SSSR,

2. aby vyráběl co největší celkový počet výrobků pro export do SSSR,
3. aby byla co nejmenší spotřeba určité suroviny za předpokladu, že se jí spotřebuje 1 kg na jeden výrobek typu A nebo B.

I. Podmínky omezující výrobu exportních předmětů typu A nebo B jsou ve všech třech úlohách stejné. Označíme-li x plánovaný počet výrobků typu A a y plánovaný počet výrobků typu B, pak snadno sestavíme nerovnosti

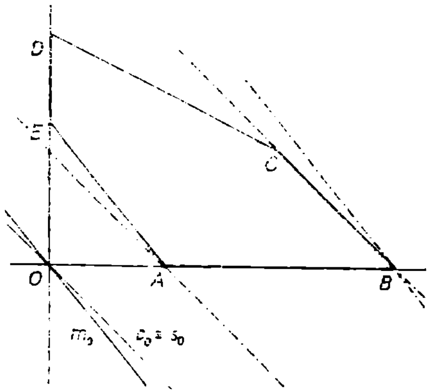
$$\begin{aligned} 2x + 4y &\leqq 100.8.2, \\ 2x + 2y &\leqq 150.8.1, \\ 5x + 4y &\geqq 1000. \end{aligned}$$

První dvě z nich vyjadřují, že počet pracovních hodin na strojích druhu S_1 nemůže překročit 100.8.2 pracovních hodin (100 strojů pracujících nejvýš ve dvou osmihodinových směnách) a na strojích druhu S_2 nemůže překročit 150.8 pracovních hodin (150 strojů pracujících nejvýš 8 hodin denně). Třetí nerovnost vyjadřuje, že zisk z exportu musí být aspoň 1000 rublů denně. Úpravou těchto tří nerovností a připojením podmínek, že čísla x, y nemohou být záporná, dostaneme tuto soustavu nerovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leqq 800, \\ x + y &\leqq 600, \\ 5x + 4y &\geqq 1000, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Grafickou metodou nebo početně určíme vrcholy konvexního pětiúhelníka $ABCDE$, v němž leží obrazy všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice představují přípustná řešení všech tří úloh.

Pětiúhelník $ABCDE$ je znázorněn ve vhodném měřítku na obr. 4. Chce-li vedení výrobního podniku přihlédnout ke všem podmínkám, které byly uvedeny ve znění úloh, musí při stanovení výrobního plánu volit taková celá čísla x, y, aby vyhovovala podmínkám v nerovnicích



Obr. 4

(8.1), tj. aby body $[x, y]$ ležely v pětiúhelníku $ABCDE$. Rozhodne-li vedení podniku například, že se denně bude vyrábět 300 výrobků typu A a 200 výrobků typu B, bude vyhověno všem daným podmínkám, neboť stroje druhu S_1 budou pracovat 1400 hodin, stroje druhu S_2 1000 hodin a celkový zisk z vývozu do SSSR bude 2300 rublů denně. Snadno se přesvědčíte, že bod [300; 200] je bodem pětiúhelníka $ABCDE$.

Každému řešení nerovnic (8.1) odpovídá bod pětiúhelníka $ABCDE$, avšak není pravda, že by každému bodu pětiúhelníka odpovídalo řešení nerovnic (8.1), které lze ve výrobě realizovat. Musíme totiž v úlohách tohoto příkladu pamatovat na to, že plánovaný počet výrobků typu A i B musí být dán celým nezáporným číslem. Proto nás z bodů pětiúhelníka $ABCDE$ zajímají jen ty body, které jsou mřížovými body roviny.

II. Z množiny všech celočíselných přípustných řešení, která je pro všechny tři úlohy tohoto příkladu společná, musíme nyní vybrat taková řešení, aby jistá veličina, určená účelovou funkcí, nabývala maximální nebo minimální hodnoty. Nyní ukážeme postup při dalším řešení daných úloh.

Úloha 1. Označíme-li m celkový zisk z exportu do SSSR, který podnik denně zajišťuje, pak účelová funkce má tvar $m = 5x + 4y$. Přitom se má z přípustných celočíselných řešení vybrat takové, pro které je m největší. Označíme-li m_0 (viz obr. 4) přímku danou rovnicí $5x + 4y = 0$, pak všechna přípustná řešení mají obrazy v $\bar{\varrho}(m_0)$, takže pro ně platí $5x + 4y = m \geqq 0$. Veličina m bude největší pro ty body pětiúhelníka, které mají od přímky m_0 největší vzdálenost. Tuto vlastnost má jediný bod B pětiúhelníka $ABCDE$. Poněvadž $B \equiv [600; 0]$, plyne odtud odpověď na položenou otázku: Má-li podnik za daných podmínek dosahovat maximálního zisku z exportu do SSSR, musí vyrábět denně 600 výrobků typu A a zastavit výrobu typu B pro export; denní zisk podniku z exportu bude 3000 rublů.

Úloha 2. Označíme-li p celkový počet denně vyráběných výrobků typu A i B, pak má účelová funkce tvar $p = x + y$, přičemž hledáme z přípustných celočíselných řešení takové, pro které je p největší. Označíme p_0 přímku danou rovnicí $x + y = 0$ a opět vyhledáme v pětiúhelníku $ABCDE$ takové body, které mají od přímky p_0 vzdálenost co největší. Snadno zjistíme, že jsou to vrcholy B, C a s nimi všechny body na straně BC. Z nich nás zajímají jen ty body, které jsou mřížovými body roviny. Jsou to body [400; 200], [401; 199], [402; 198], ..., [599; 1], [600; 0]. V tomto případě má tedy úloha 201 řešení, z nichž si vedení podniku může vybrat kterékoli; přitom bude celkový počet denně vyráběných exportních výrobků 600.

Poznámka. Kdyby se požadovalo, aby celkový počet výrobků byl maximální, a současně též maximální zisk, pak by existovalo jediné řešení ($x = 600$, $y = 0$, $p = 600$, $m = 3000$).

Úloha 3. Označíme-li s velikost množství spotřebované suroviny, pak má účelová funkce tvar $s = x + y$, přičemž však požadujeme, aby s bylo co možná nejmenší. Snadno se ukáže, že obrazem příslušného řešení je bod $A \equiv [200; 0]$, který je nejméně vzdálen od přímky $s_0 \equiv p_0$. V tomto případě bude podnik vyrábět 200 výrobků typu A denně, spotřebuje 200 kg suroviny a bude přitom plnit závazný plán zisku 1000 rublů denně.

Sami si jistě rozřešíte všechny tři úlohy tohoto příkladu analyticky a bez pomoci jakýchkoli náčrtů. Přitom budete postupovat takto:

a) Najdete průsečíky všech dvojic hraničních přímek polorovin (8.1).

b) Určíte, které z nalezených bodů vyhovují všem nerovnicím (8.1), tj. najdete ty body, které jsou vrcholy geometrického útvaru popsaného nerovnicemi (8.1).

c) Určíte pro všechny vrcholy hodnoty té veličiny, která je mírou účelu sledovaného řešením, a rozhodnete, v kterých vrcholech nabývá požadované krajní hodnoty (maximální nebo minimální).

d) Nabývá-li tato veličina krajní hodnoty ve dvou vrcholech, což mohou být jen dva sousední vrcholy, pak mají tuto vlastnost též všechna přípustná řešení na spojnici obou vrcholů.

Různé otázky hospodářského života, strategické otázky vojenské i mnohé problémy průmyslové či zemědělské výroby vedou k podobným matematickým úlohám, s jakými jsme se setkali a které jsme řešili v této kapitole. Poněvadž při matematickém řešení těchto otázek jde o řešení lineárních rovnic a nerovnic s vedlejší podmínkou, která je vymezena rovněž lineární rovnicí vzhledem k neznámým, dostal tento obor matematiky název *lineární programování*. Je to jeden z nejmladších oborů aplikované matematiky, který začal vyrůstat v době, kdy matematikové za druhé světové války musili řešit některé otázky vojenských operací. Dnes se ho využívá k řešení nejrozmanitějších problémů civilního společenského života. Při řešení takových problémů ze skutečného života nejde však o jednoduché úlohy se dvěma neznámými, nýbrž o řešení úloh s velkým počtem neznámých, přičemž vztahy mezi nimi jsou určeny velkým počtem lineárních nerovnic nebo rovnic. Řešení takových úloh by však bylo velmi zdlouhavé a nákladné, kdyby k jejich řešení nebyla nalezena řada mnohem účinnějších metod (s kterými se ovšem zde nemůžeme seznamovat) a kdyby se pro jejich provádění nemohlo používat moderních, rychle pracujících samočinných počítačů. Naše úlohy vám zatím ukázaly jen pohled na podstatu úloh lineárního programování.

Poněvadž texty úloh z oboru lineárního programování jsou zpravidla dlouhé, neuvádíme tu další jednoduché příklady úloh se dvěma neznámými. Místo toho ukážeme řešení úlohy, v níž při sestavení příslušných rovnic a nerovnic zavedeme šest neznámých, avšak vztahy mezi nimi nám dovolí vyloučit čtyři z nich tak, že se pak řešení úlohy dá provést metodami nám již známými.

Příklad 4. Důl D_1 těží denně 800 tun, důl D_2 600 tun uhlí. Vytěžené uhlí se má dopravovat do tří spotřebních středisek S_1, S_2, S_3, z nichž S_1 potřebuje 500 tun, S_2 500 tun, S_3 400 tun denně. Jak je třeba rozvrhnout dodávky uhlí z dolů do spotřebních středisek, aby dopravní náklady byly minimální, jestliže dopravné za 1 tunu z dolu D_1 do S_1, S_2, S_3 stojí 16 Kčs, 10 Kčs, 15 Kčs a z dolu D_2 do S_1, S_2, S_3 stojí 10 Kčs, 12 Kčs, 10 Kčs.

Řešení úlohy se stane přehlednějším užitím těchto tabulek:

	S_1	S_2	S_3
D_1	16	10	15
D_2	10	12	10

	S_1	S_2	S_3
D_1	x	y	z
D_2	u	v	w

První z těchto tabulek udává dopravné za 1 tunu uhlí z obou dolů do spotřebních středisek S_1, S_2, S_3; druhá tabulka obsahuje proměnné, jimiž budou označena množství uhlí přepravovaného z obou dolů do spotřebních středisek S_1, S_2, S_3, přičemž za jednotku zvolíme 100 tun. Celkové dopravní náklady označíme písmenem m a za jejich jednotku zvolíme 100 Kčs. Nyní sestavíme 3 skupiny lineárních rovnic a nerovnic, jejichž smysl sami poznáte:

$$x + u = 5, \quad y + v = 5, \quad z + w = 4, \tag{8.2}$$

$$x + y + z = 8, \quad u + v + w = 6, \tag{8.3}$$

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0, \quad u \geqq 0, \tag{8.4}$$

$$v \geqq 0, \quad w \geqq 0.$$

Pro celkové dopravní náklady sestavme účelovou funkci

$$m = 16x + 10y + 15z + 10u + 12v + 10w\,. \quad (8.5)$$

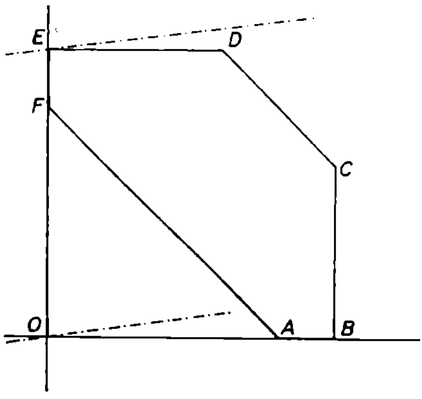
Z rovnic (8.2) a (8.3) vypočteme

$$u = 5 - x, \quad v = 5 - y, \quad w = 4 - z,$$
$$z = 8 - x - y$$

a po dosazení do (8.4) a (8.5) dostaneme po snadné úpravě

$$\begin{gathered} x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 8,\ x \leqq 5,\ y \leqq 5, \\ x + y \geqq 4, \end{gathered} \quad (8.6)$$

$$m = x - 7y + 190\,. \quad (8.7)$$



Obr. 5

Množina všech přípustných řešení, která vyhovují nerovnicím (8.6), je zobrazena body konvexního šestiúhelníka *ABCDEF* (viz obr. 5). Z přípustných řešení se má vybrat takové, pro které m, určené rovnicí (8.7), nabývá hodnoty minimální. Rovnici $x - 7y + 190 = 0$ by odpovídala na obr. 5 přímka protínající souřadnicové osy x, y v bodech $P \equiv [-190; 0]$, $G \equiv \left[0; \frac{190}{7}\right]$, kterou si jen představíme. Je rovnoběžná s přímkou o rovnici $x - 7y = 0$, která prochází počátkem a je v obr. 5 zobrazena. Všechny body šestiúhelníka $ABCDEF$ leží v polorovině $x - 7y + 190 \geq 0$ a číslo $m = x - 7y + 190$ bude nejmenší pro bod $E \equiv [0; 5]$, pro který $m = 155$. Dopravní náklady ve výši 15 500 Kčs budou tedy nejmenší, když distribuce dodávek uhlí bude provedena tak, jak je zřejmé z následující tabulky:

	S_1	S_2	S_3
D_1	0	5	3
D_2	5	0	1

V této tabulce znamená ovšem jednotka dodávku 100 tun uhlí.

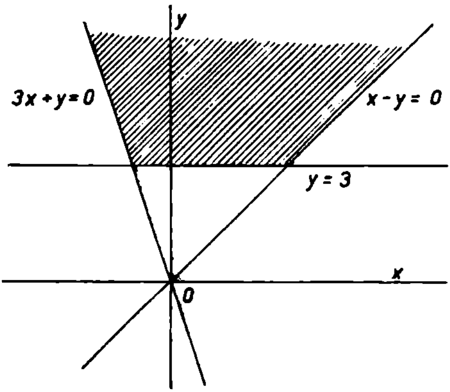
Analytické řešení této úlohy si provedete jistě sami jako cvičení. Přitom se jednoduchým výpočtem můžeme přesvědčit, že roční úspora na dopravném při nejlepším rozvržení může přesahovat milión Kčs proti jinému, nepříznivějšímu rozvržení dodávek, ač jsme zvolili pro náš příklad jen dva doly s nízkou těžbou. Proto si jistě dovedete udělat správnou představu o úsporách, jichž je možno dosáhnout, když se pro celostátní distribuci uhlí ze všech dolů použije nejvýhodnějšího řešení, které získáme pracovními metodami lineárního programování. Obdobně je možné dosáhnout velkých úspor při rozvrhování dodávek cihel z různých cihelen na početná staveniště, dodávek mouky z velkomlýnů do velkých pekáren apod. Z těchto příkladů vybraných z jediného oboru užité matematiky si můžete udělat představu o významu celé matematiky, která umožňuje ve státě socialisticky organizovaném hospodárné využití energie i pracovních sil k prospěchu všeho lidu.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

2.1 a) A ne, B ano, C ano
b) A ne, B ano, C ano
c) A ne, B ne, C ano

2.2 a) ano, b) ano, c) ano

2.3 viz obr. 6

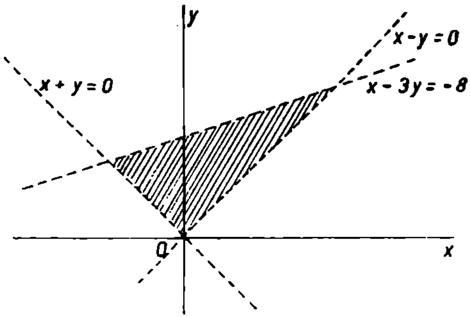


Obr. 6

2.4 viz obr. 7

4.1 a) sjednocení: $(-\infty; 4)$, průnik: $(-\infty; 2)$
b) $\langle 1; +\infty)$, $\langle 5; +\infty)$
c) $(-\infty; +\infty)$, $\langle -3; 3)$

d) $(-\infty; +\infty)$, $\{2,4\}$
e) $(-\infty; +\infty)$, $\emptyset$



Obr. 7

4.2 a) $\langle -2; 3\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$
b) $(-2; 3)$, $(-1; 1)$
c) $\langle -2; 2\rangle$, $\{1\}$
d) Sjednocením je množina právě všech prvků z $(-2; 1)$ a $(1; 2)$, $\emptyset$
e) Sjednocením je množina právě všech prvků z $\langle -2; 1)$ a $(1; 4)$, $\emptyset$

4.3 a) $(-\infty; 3)$, $(-1; 1)$
b) $(-2; 1\rangle$, $\langle -1; 1)$
c) $\langle -3; +\infty)$, $(3; 5\rangle$

4.4 a) $(-\infty; +\infty)$, $\langle -1; 1\rangle$
b) $\langle -2; 5\rangle$, $\langle 1; 3\rangle$

5.2 a) původní počet chlapců byl menší než původní počet dívek
b) původní počet chlapců a dívek byl stejný
c) původní počet chlapců byl větší než původní počet dívek

5.3 Použijte nerovnost (5,1). Rovnost nastane, právě když $a = b$.

5.4 a) Převeďte ekvivalentními úpravami na nerovnost $(a - 1)^2 \geqq 0$.
b) Převeďte ekvivalentními úpravami na nerovnost $(a - b)^2 \geqq 0$.

5.5 Použijte nerovnosti $1 \geqq 1 - a^2 > 0$, která platí pro libovolné $|a| < 1$.

5.6 a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leqq 2(a^2 + b^2) = 2c^2$
b) $4(a + b)^2 \leqq 8(a^2 + b^2) < 9(a^2 + b^2) = 9c^2$

5.7 Převeďte ekvivalentními úpravami na nerovnost $(a^2 - 1)^2 \geqq 0$.

5.8 a) Použijte výsledku příkladu 2. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$.
b) Použijte výsledku cvičení 5.8a. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

6.3 a) $x \neq -5$
b) $x = 1$
c) $x \neq 0{,}5$
d) $x < -0{,}75$

6.4 a) $x \in (-2; -0{,}5)$
b) $x \in (0{,}4; 0{,}5)$
c) $x \in (-1; -0{,}5\rangle$
d) $x \in (2{,}5; 3)$

6.5 $m \leqq -6$. Pro $m = -6$ je $x = 0$, $y = 2$

6.6 a) $x \in \langle 0{,}5; 2\rangle$
b) $x \in (1; 3)$
c) $x \in (1; 2)$
d) Řešením jsou právě všechna x z intervalů $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}; 1\right)$

a $\left(2; \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

e) $x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$

6.7 a) $x \in \left(\frac{3}{2}; \frac{11}{6}\right\rangle$

b) $x \in (-1{,}5;\ 2\rangle$

c) Řešením jsou právě všechna x z intervalů $\left(3; \frac{24}{7}\right\rangle$ a $(4, +\infty)$

d) $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$

e) $x \in (-\infty; +\infty)$

f) $x \in (-1{,}0\rangle$ a $x < -1$

7.1 a) bod $[0; 0]$

b) $[-1; 0]$

7.2 Všechny přímky procházejí bodem $\left[\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$ a každé dvě jsou různé.

7.3 Bodem $[-2, 3]$ procházejí přímky dané rovnicemi: $x + 2y - 4 = 0$, $4x - y + 11 = 0$ a $x + 5y - 13 = 0$.

7.4 a) $x = 1 + 3t$, $y = 1 + 5t$, t libovolné celé číslo

b) $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, t libovolné celé číslo

7.6 Čtyřúhelník $[-2; -1]$, $[6; 1]$, $[5; 2]$, $[0, 2]$

7.7 Trojúhelník $[0; 2]$, $[2; 5]$, $[5, 2]$

7.9 c) Vnitřek obdélníku $[1; -3]$, $[1; -1]$, $[5; -3]$, $[5; -1]$

d) Vnitřek obdélníku $[0; 2]$, $[2; 0]$, $[0; -2]$, $[-2; 0]$

Seznam dosud vydaných svazků edice ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ v nakladatelství Mladá fronta

---

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler - Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler - Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967
20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969

23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial - Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Beloslav Riečan - Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980
46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *František Veselý:* O nerovnostech a nerovnicích, 1982
49. *Pavel Vít:* Řetězové zlomky, 1982
50. *Adam Plocki:* O náhodě a pravděpodobnosti, 1982
51. *N. B. Vasiljev, V. L. Gutenmacher:* Přímky a křivky, 1982
52. *Alois Kufner:* Symetrické funkce, 1982

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

FRANTIŠEK VESELÝ

O nerovnostech a nerovnicích

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4492
Edice Škola mladých matematiků, svazek 48
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
3,55 AA, 4,08 VA, 88 stran
Náklad 6 000 výtisků. 2. vydání
Praha 1982. 508/21/82.5

23-098-82 03/2 Cena brož. výt. 5 Kčs

23-098-82
03/2
Cena brož.
5 Kčs