Uspořádané množiny

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

42

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

LADISLAV BERAN

Uspořádané množiny

PRAHA 1978
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

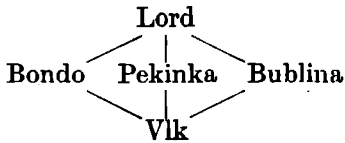
Recenzovali prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., dr. Oldřich Odvárko, CSc.

PŘEDMLUVA

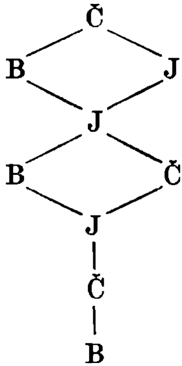
Teorie uspořádaných množin, nejrozpracovanější v teorii svazů, patří mezi moderní matematické disciplíny. Knížka, kterou, milí čtenáři, otevíráte, má být nahlédnutím do jejích pojmů a úvah. Dává vám možnost osvojit si cenné názorné příklady na úlohách a cvičeních. K jejich řešení není třeba takřka žádné zběhlosti v numerických výpočtech. Je to matematika „bez násobilky", má však svá pravidla, své problémy a také své kouzlo. Knížka vám dovolí nahlédnout na některé pojmy středoškolské matematiky trochu jiným způsobem, než jak jste je poznali ve škole.

Během dlouhého historického vývoje se lidé seznamovali s různými speciálními případy uspořádání. Nejprve to byla uspořádání věcí a jevů, se kterými se setkávali každodenně. Později — úměrně s tím, jak si osvojovali návyky a dovednosti — se začlo objevovat uspořádání jednotlivých kroků při některé činnosti, předávalo se jako nabytá zkušenost z pokolení na pokolení. Od prvních vyrobených předmětů, od prvních nesmělých krůčků přicházeli lidé se stále novými nápady na uspořádání předmětů kolem sebe, na uspořádání své činnosti.

Z některých těchto uspořádání se staly tak samozřejmé návyky, že si je často ani neuvědomujeme. Tak je tomu např. se slovosledem, kterým máme upraveno pořadí slov ve větě. Patrně stále uspořádáváme věci podle toho, jak se nám líbí. Například hlasy vybrané skupinky ptáků seřadíme asi v závislosti na tom, jak si ceníme jejich zpěvu. Uveďme si ještě další příklad, který bychom rovněž po krátké úvaze nazvali uspořádáním. Skupinka našich čtyřnohých přátel nechť sestává z pejsků pojmenovaných Bondo, Pekinka, Lord, Vlk, Bublina. Můžeme se ptát, jak je seřadit. Někdo z vás navrhne abecedně, tedy Bondo — Bublina — Lord — Pekinka — Vlk. Jiný je seřadí podle toho, jak se mu líbí, třeba takto: Lord — Bondo — Pekinka — Bublina — Vlk. Jiný se nad tím zamyslí a seřadí chundelatá psiska méně určitěji. — Nejvíc se mu bezesporu také líbí Lord, ale Bondo, Pekinka a Bublina se mu líbí asi tak stejně, zato divoký Vlk v něm nevyvolává moc velkou oblibu. A tak navrhuje takovéto seskupení:



Jiný příklad. Mezi oblíbené hry menších dětí patří sledování aut podle jejich barvy. Při hře se každý z hráčů snaží napočítat co nejvíce aut své barvy. Řekněme, že si takto hrají jen dvě děti. První si přeje, aby co nejdříve přijelo co nejvíce bíle natřených aut (dál je označíme B), a přitom pozorně sleduje i počet červených aut (dále je značíme Č), která znamenají „body“ pro jeho protihráče. Jinak zbarvená auta (dále značená J) oba hráči sledují jen koutkem oka. Ze záznamu



(směr zdola nahoru značí průběh času) zjistíme nejen to, že v daném časovém rozmezí je hra nerozhodná, ale i to, že jelo nejdříve bílé, pak červené auto, pak jinak natřené atd. Dále usuzujeme, že z hlediska obou pozorovatelů se současně míjelo nejdříve bílé auto s červeným a později též bílé s autem, které nebylo ani červené ani bílé.

Obraťme se od těchto příkladů k trochu jiným situacím. Řada z vás si jako koníčka pro volné chvíle vybrala tvořivou činnost, na jejímž začátku je kupa materiálu a na konci, nu, např. hezký model plachetnice, vlastnoručně sestavený tranzistorový přijímač, model moderního domu, model závodní dráhy atp. Víte dobře, že chcete-li být v této své činnosti úspěšní, je třeba, abyste postupovali systematicky, jinými slovy to opět znamená, abyste uspořádali svou činnost. Totéž od vás žádá i studium cizích jazyků. Obdobně je tomu na vyšší úrovni při organizaci každé výrobní činnosti. Zde se jedním z platných pomocníků stávají počítací stroje, od kapesních počítaček až po velké samočinné počítače, které dokáží řídit chod celých podniků. Ne všichni si uvědomují, že princip jejich činnosti se opírá o tzv. booleovský způsob uspořádání.

Vy sami jste životními situacemi vedeni k podobnému způsobu uspořádání svých úvah. Váš denní program může například záviset na tom, zda Jiří půjde nebo nepůjde do kina a zda Ota pojede či nepojede k strýci. Vaše dosavadní zkušenost napovídá, že mohou nastat právě tyto čtyři případy:

I) Jiří — půjde, Ota — pojede;
II) Jiří — půjde, Ota — nepojede;
III) Jiří — nepůjde, Ota — pojede;
IV) Jiří — nepůjde, Ota — nepojede.

Podřídíte-li svou úvahu těmto čtyřem možnostem, lze o vás říci, že jste pro ocenění možných situací užili tzv. klasické logiky booleovského typu.

Při studiu zákonitostí kvantové mechaniky se naproti tomu ukázalo účelným zobecnit tento typ uspořádání na tzv. ortomodulární uspořádání. I zde se tedy člověk opírá o zkušenosti získané tisíciletým pozorováním různých uspořádání a snaží se takto nabytou informaci využít k prohloubení svých znalostí v oblasti mikrosvěta.

Výběr látky této knížky se omezuje na poměrně úzký pás teorie uspořádaných množin s převažující středoškolskou tematikou. Věřím však, že při pozorném přečtení této knížky pozná čtenář užitečnost pojmu uspořádání v elementární matematice a že jistě ocení ten dlouhý kus cesty, který lidstvo urazilo na cestě za poznáním, než se dostalo od poměrně málo zřetelného pojmu uspořádání užívaného v hovorovém jazyce ke zmatematizovanému zpřesnění tohoto pojmu a k jeho nynější úrovni zkoumání.

ÚVOD

Ve škole jste si osvojili např. význam výroku „*číslo a je menší než číslo b*" nebo význam výroku „*množina A je podmnožinou množiny B*". Společné pro takovéto výroky je to, že říkají, že jeden objekt je v jistém vztahu (relaci) k druhému objektu. V dalším nám půjde o studium takovýchto relací. V první řadě proto zpřesníme tento pojem tak, abychom jej mohli podrobovat matematickému vyšetřování.

Pro větší názornost si pro úvahy vedoucí k zpřesnění pojmu relace zvolíme příklad s konečným počtem prvků. Ze školy si jistě pamatujete, že pro dvě celá čísla m, n říkáme, že *m dělí n* a píšeme $m \mid n$ právě tehdy, když existuje celé číslo k takové, že $km = n$.

Nalezněme všechna čísla a, b množiny $\boldsymbol{N}_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, pro něž $a \mid b$. Máme patrně tyto případy:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} 0 \mid 0; \\ 1 \mid 0,\ 1 \mid 1,\ 1 \mid 2,\ 1 \mid 3,\ 1 \mid 4; \\ 2 \mid 0,\ 2 \mid 2,\ 2 \mid 4; \\ 3 \mid 0,\ 3 \mid 3; \\ 4 \mid 0,\ 4 \mid 4. \end{array}\right.$$

Pišme nyní $a\ \delta\ b$ právě tehdy, když $a, b \in \boldsymbol{N}_4$ a když a dělí b. Dostáváme tak další příklad vztahu, který jistě budeme chtít zahrnout pod pojem relace. Předně se bez potíží dohodneme na čtení zápisu $a\ \delta\ b$ slovy „*a je ve* *vztahu δ k b*“ nebo slovy „*a je v relaci δ k b*“ a tato úmluva nás přirozeným způsobem vede k tomu, že uvažovanou relaci nazveme δ. Zůstává však vyjasnit, co relace δ vlastně je. Podle výše uvedeného v (1) můžeme říci, že platí $a\,\delta\,b$ právě tehdy, když (a, b) je jedna z uspořádaných dvojic

$$(2) \qquad \begin{cases} (0, 0); \\ (1, 0),\ (1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4); \\ (2, 0),\ (2, 2),\ (2, 4); \\ (3, 0),\ (3, 3); \\ (4, 0),\ (4, 4). \end{cases}$$

Tato formulace nás přivádí na myšlenku, že bude účelné definovat relaci δ jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (2). Tuto definici doplníme úmluvou, že zápis $a\,\delta\,b$ budeme považovat za ekvivalentní s tím, že (a, b) je prvkem množiny δ, tj. s tím, že $(a, b) \in \delta$.

Přejděme nyní k obecnému případu. Budiž A některá neprázdná množina. *Kartézskou druhou mocninou* množiny A rozumíme množinu A^2 (značenou též $A \times A$), jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (a, b), kde a, b probíhá prvky množiny A. Řekneme, že ϱ je *relace* na množině A právě tehdy, když ϱ je podmnožina množiny A^2. Vztah $(a, b) \in \varrho$ považujeme za ekvivalentní se zápisem $a\,\varrho\,b$.

Příklad 1. Máme nalézt kartézskou druhou mocninu množiny $\boldsymbol{N}_4$.

Řešení. Množina $\boldsymbol{N}_4^2$ je množina o prvcích, které jsou pro přehled uspořádány do následujícího schématu:

$$\begin{array}{ccccc}
(0, 0), & (0, 1), & (0, 2), & (0, 3), & (0, 4), \\
(1, 0), & (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), \\
(2, 0), & (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), \\
(3, 0), & (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), \\
(4, 0), & (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4).
\end{array}$$

Závěrem úvodu připomeňme, že je-li reálné číslo p menší nebo rovno q, píšeme $p \leqq q$ a že pro kterákoli reálná čísla p, q, r platí toto: (i) $p \leqq p$; (ii) je-li $p \leqq q$ a $q \leqq p$, pak $p = q$; (iii) je-li $p \leqq q$ a $q \leqq r$, pak $p \leqq r$. Zde dostáváme další příklad relace $\leqq$ na množině $\boldsymbol{R}$ reálných čísel, kterou bychom mohli ve shodě s předcházejícím chápat jako množinu, jejímiž prvky jsou právě ty uspořádané dvojice (p, q) reálných čísel, pro něž je rozdíl $q - p$ nezáporné číslo.

1. kapitola

USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

Povšimněme si, že relace δ na množině $\boldsymbol{N}_4$, definovaná na str. 7, má některé vlastnosti společné s relací $\leqq$, definovanou na $\boldsymbol{R}$:

$m \, \delta \, m$ pro každé $m \in \boldsymbol{N}_4$; jestliže $m \, \delta \, n$ a $n \, \delta \, m$, pak $m = n$; jestliže $m \, \delta \, n$ a zároveň $n \, \delta \, k$, pak $m \, \delta \, k$.	$m \mid m$ pro každé $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; jestliže $m \mid n$ a $n \mid m$, pak (pro $m, n \in \boldsymbol{N}_4$) $m = n$; jestliže $m \mid n$ a zároveň $n \mid k$, pak $m \mid k$.

Připomeňme názvy základních vlastností relací. Je-li ϱ relace na množině A, tj. $\varrho \subset A^2$, pak definujeme[1]):

Relace ϱ se nazývá *reflexívní*, jestliže

$(a, a) \in \varrho$ pro každé $a \in A$;	$a \, \varrho \, a$ pro každé $a \in A$;

Říkáme, že relace ϱ je *antisymetrická* právě tehdy, když má tuto vlastnost:

Je-li $(a, b) \in \varrho$ a $(b, a) \in \varrho$, pak $a = b$.	Je-li $a \, \varrho \, b$ a je-li $b \, \varrho \, a$, pak $a = b$.

[1]) Pro pohodlí čtenáře rozepisujeme definice v obou druzích zápisu.

Relace ϱ se nazývá *tranzitivní* právě tehdy, když platí toto:

Je-li $(a, b) \in \varrho$ a je-li $(b, c) \in \varrho$, pak $(a, c) \in \varrho$.	Je-li $a \varrho b$ a je-li $b \varrho c$, pak $a \varrho c$.

Relace ϱ se posléze nazývá *symetrická* právě tehdy, když pro ni platí toto:

Je-li $(a, b) \in \varrho$, pak $(b, a) \in \varrho$.	Je-li $a \varrho b$, pak $b \varrho a$.

Příklad 2. Pro dvě reálná čísla a, b pišme $a \sigma b$ právě tehdy, když $a : (a^2 + 1) \leqq b : (b^2 + 1)$. Máme vyšetřit vlastnosti relace definované takto na množině $\boldsymbol{R}$ reálných čísel.

Řešení. Relace σ je reflexívní, neboť pro každé reálné číslo a je podíl $a : (a^2 + 1)$ definován a platí $a : (a^2 + 1) \leqq a : (a^2 + 1)$. Tato relace není antisymetrická, neboť $1/2 \, \sigma \, 2$ a zároveň $2 \, \sigma \, 1/2$, ale $1/2 \neq 2$. Jedná se však o tranzitivní relaci, neboť ze vztahů $a : (a^2 + 1) \leqq b : (b^2 + 1)$, $b : (b^2 + 1) \leqq c : (c^2 + 1)$ plyne, že $a : (a^2 + 1) \leqq c : (c^2 + 1)$. Protože $0 \, \sigma \, 1$, ale $(1, 0)$ není prvkem relace σ, je zřejmé, že tato relace není symetrická.

Pro neprázdnou množinu P, na níž je definována relace ϱ, která je reflexívní, antisymetrická a tranzitivní, zavedeme stručnější název. Přesná formulace vypadá takto: Značí-li $\mathscr{P}$ uspořádanou dvojici (P, ϱ), kde P je neprázdná množina a ϱ je relace, která má uvedené tři vlastnosti, říkáme, že $\mathscr{P}$ je *uspořádaná množina*. Také budeme stručně říkat, že $\mathscr{P}$ je *poset* (název vzniklý zkrácením z anglického partially ordered set). Množina P se nazývá *nosič* posetu $\mathscr{P}$ a relace ϱ se nazývá *uspořádání* množiny P; prvky množiny P se nazývají *prvky uspořádané množiny* $\mathscr{P}$. Pro uspořádání definované na některé množině se někdy užívá symbol $\ll$ (zápis $a \ll b$ se čte „a předchází b“ nebo „b následuje a“) nebo se užívá (pokud nehrozí nebezpečí z nedorozumění) také symbol $\leqq$ (zápis $a \leqq b$ se čte „a je menší nebo rovno b“ nebo se čte stejně jako zápis $a \ll b$). Zápis $a \geqq b$ se považuje za rovnocenný zápisu $b \leqq a$.

Příklad 3. Zvolme za množinu P otevřený interval $(1, \infty)$ a pro dvě reálná čísla p, q pišme $p \ll q$ právě tehdy, když $p \, \sigma \, q$, kde σ bylo definováno v příkladě 2. Máme dokázat, že relace $\ll$ je uspořádání množiny $(1, \infty)$.

Řešení. Vzhledem k úvahám z příkladu 2 stačí zjistit, že relace $\ll$ je antisymetrická. Nechť tedy a, b jsou dvě čísla z intervalu $(1, \infty)$ taková, že $a \ll b$ a zároveň $b \ll a$. Pak ovšem $a : (a^2 + 1) \leqq b : (b^2 + 1) \leqq a : (a^2 + 1)$ má za následek, že $a : (a^2 + 1) = b : (b^2 + 1)$. Odtud plyne nejprve

$$ab^2 + a = ba^2 + b\,,$$

poté

$$ab^2 - ba^2 = b - a$$

a tedy také ekvivalentní podmínka

$$ab(b - a) = b - a\,.$$

Z úvah obvyklých při řešení rovnic s parametrem je čtenáři dobře známo, že bez dalších úvah nelze v těchto situacích podlehnout pokušení a celou rovnici krátit číslem $b - a$. Jak tedy postupovat korektně? Zmíněná zkušenost nám napovídá, že musíme prozkoumat dvě možnosti, a to případ $b - a \neq 0$ a případ $b - a = 0$. Kdyby ale bylo $b - a \neq 0$, pak celou rovnici můžeme dělit nenulovým číslem $b - a$ a dostáváme $ab = 1$, což však pro naše dvě čísla a, b (pro něž $a > 1$ a $b > 1$) zřejmě není možné. Zůstává tedy jako jediná možnost případ $b - a = 0$, tj. $a = b$. Tak jsme dokázali, že $\ll$ je na $(1, \infty)$ antisymetrickou relací.

Příklad 4. Pro dvě reálná čísla $a, b > 1$ pišme $a \tau b$ právě tehdy, když obě čísla $\pi a : (a^2 + 1)$, $\pi b : (b^2 + 1)$ patří do oboru funkce $y = \operatorname{tg} x$ a když zároveň

$$\operatorname{tg} \frac{\pi a}{a^2 + 1} \leqq \operatorname{tg} \frac{\pi b}{b^2 + 1} .$$

Máme nalézt ty podmnožiny M množiny $(1, \infty)$, na nichž je takto definováno uspořádání.

Řešení. Předně musí být M neprázdná podmnožina množiny $(1, \infty)$. Relace τ je zřejmě při každém přípustném výběru M reflexívní a tranzitivní. Vyšetřování relace τ nyní na chvíli přerušíme. Pro další úvahy budeme potřebovat tento pomocný výrok:

(3) *Pro každé reálné číslo x platí*

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x}{x^2 + 1} \leqq \frac{1}{2} ,$$

přičemž v první nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když $x = -1$ a v druhé právě tehdy, když $x = 1$.

Důkaz. Protože $0 \leqq (x - 1)^2$ pro každé $x \in \boldsymbol{R}$ (a rovnost zde nastává právě tehdy, když $x = 1$), je $2x \leqq x^2 + 1$ a tedy $x : (x^2 + 1) \leqq 1/2$ (a rovnost nastává právě pro $x = 1$). Při volbě $x = -z$ tedy z právě dokázaného plyne, že pro každé $z \in \boldsymbol{R}$ platí

$$-\frac{z}{z^2+1} \leqq \frac{1}{2}$$

a rovnost nastává právě tehdy, když $x = -z = 1$, takže pro každé $z \in \boldsymbol{R}$ platí

$$\frac{z}{z^2+1} \geqq -\frac{1}{2}$$

a rovnost nastává právě tehdy, když $z = -1$, čímž jsme dokázali platnost první nerovnosti. Čtenáři doporučujeme jako cvičení odvodit si první nerovnost také přímo ze vztahu $0 \leqq (x+1)^2$.

Vraťme se nyní k vyšetření relace τ. Z (3) je zřejmé, že

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi a}{a^2+1} \leqq \frac{\pi}{2},$$

tj. že $\pi a : (a^2 + 1)$ patří do oboru funkce $y = \operatorname{tg} x$, právě tehdy, když $a \neq \pm 1$.

Nyní snadno nahlédneme, že relace τ je na každé podmnožině M množiny $(1, \infty)$ již nutně antisymetrická. Je-li totiž $a \tau b$ a zároveň $b \tau a$, pak

$$\operatorname{tg} \frac{\pi a}{a^2+1} = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{b^2+1}$$

a protože dle (3) a výběru M patří čísla $\pi a : (a^2 + 1)$, $\pi b : (b^2 + 1)$ do intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, je $\pi a : (a^2 + 1) = \pi b : (b^2 + 1)$ a dle řešení příkladu 3 je proto $a = b$.

Podmínkám stanoveným v příkladu 4 vyhovuje tedy každá neprázdná podmnožina množiny $(1, \infty)$.

Úloha 1. Na množině N_0 všech celých nezáporných čísel definujme relaci σ_1 tak, že $(a, b) \in \sigma_1$ právě tehdy, když $a \mid b$. Dokažte, že relace σ_1 je uspořádání množiny $\boldsymbol{N}_0$.

Úloha 2. Množina E nechť je některá pevně zvolená množina. Definujme $(M, N) \in \sigma_2$ právě tehdy, když $M \subset N$ a $N \subset E$. Dokažte, že relace σ_2 je uspořádání množiny všech podmnožin množiny E.

Úloha 3. Relaci σ_3 na množině $\boldsymbol{R}$ reálných čísel definujme tak, že pro dvě reálná čísla a, b je $(a, b) \in \sigma_3$ právě tehdy, když $a \leqq 1$ nebo $b \geqq -1$. Rozhodněte, zda σ_3 je a) reflexívní b) antisymetrická c) tranzitivní d) symetrická relace.

[a) ano, b) c) d) ne.]

Úloha 4. Rozhodněte, zda relace σ, zavedená pro reálná čísla v příkladě 2, definuje uspořádání na množině

a) $\langle 1, \infty)$;
b) $(-1, 1)$;
c) $\langle -1, 1 \rangle$;
d) $(-\infty; -1\rangle$;
e) $(-\infty, 0)$.

[a) — d) ano, e) ne.]

Úloha 5. Dokažte, že vztah $a \, \sigma \, b$ je v případě b), c) z úlohy 4 ekvivalentní s tím, že $a \leqq b$ a v případě a), d) s tím, že $a \geqq b$.

Příklad 5. Pro dvě reálná čísla a, b pišme $a \, \sigma_4 \, b$ právě tehdy, když

$$\log \left[(a - b) + \sqrt{(a - b)^2 + 1}\right] \geqq 0.$$

Máme dokázat, že $a \, \sigma_4 \, b$ právě tehdy, když $a \geqq b$.

Řešení. Protože pro každé reálné číslo x je $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$, je také $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| \geqq 0$ a proto je výraz $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ definován pro každé reálné číslo x. Je-li nejprve $x > 0$, pak $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + 1 > 1$ a proto je $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) > \log 1 = 0$. Je-li posléze $x < 0$, pišme $x = -z$. Dle již dokázaného platí $0 < \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) = \log(-x + \sqrt{x^2 + 1})$. Současně ale je $\log(-x + \sqrt{x^2 + 1}) + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log[(-x + \sqrt{x^2 + 1}).(x + \sqrt{x^2 + 1})] = \log 1 = 0$ a proto $0 < \log(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Odtud (při výchozím předpokladu $x < 0$) plyne $0 > \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Zatím jsme tedy dokázali toto (případ $x = 0$ je zřejmý):

(i) Je-li $x > 0$, pak $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) > 0$.

(ii) Je-li $x < 0$, pak $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) < 0$.

(iii) Je-li $x = 0$, pak $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0$.

Předpokládejme nyní, že číslo t je takové, že $\log(t + \sqrt{t^2 + 1}) > 0$. Podle (ii) je zřejmé, že není $t < 0$ a podle (iii) usuzujeme, že není ani $t = 0$. Zbývá proto jen možnost, že $t > 0$. Odtud (a z podobných úvah pro (ii), (iii)) plyne následující zesílení výroků (i) — (iii):

(i') Vztah $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) > 0$ platí právě tehdy, když $x > 0$.

(ii') Vztah $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) < 0$ platí právě tehdy, když $x < 0$.

(iii') Vztah $\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0$ platí právě tehdy, když $x = 0$.

Nyní je již zřejmé, že

$$\log\left[(a-b)+\sqrt{(a-b)^2+1}\right] \geqq 0$$

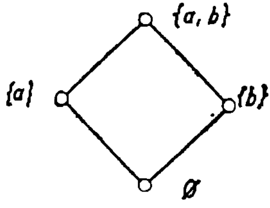
právě tehdy, když $a - b \geqq 0$, tj. právě v případě, je-li $a \geqq b$.

Podle výsledku úlohy 2 usuzujeme, že relace inkluze je uspořádání na množině $P(E)$ všech podmnožin množiny E, řečeno jinými slovy uspořádaná dvojice $(P(E), \subset)$ představuje uspořádanou množinu. Nyní budeme chtít znázornit takovouto uspořádanou množinu — alespoň v nejjednodušších případech — pomocí vhodných diagramů. Za tím účelem předešleme tuto obecně užívanou úmluvu: Je-li $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ uspořádaná množina, která má konečně mnoho prvků a platí-li pro její dva prvky a, b vztah $a \leqq b$, znázorníme oba prvky kroužkem, přičemž a umístíme pod b a spojíme je úsečkou. Pro jednoduchost provádíme takovéto pospojování jen v případě, kdy $a \neq b$ a kdy mezi a a b neleží žádný další prvek uspořádané množiny, tj. pokud $a \neq b$ a pokud z toho, že $z \in P$ a $a \leqq z \leqq b$ již plyne, že buď $a = z$ nebo $z = b$. V tomto případě se říká, že *b pokrývá a*.

Pro $E = \emptyset$ je diagram na obrázku 1, pro $E = \{a\}$ viz

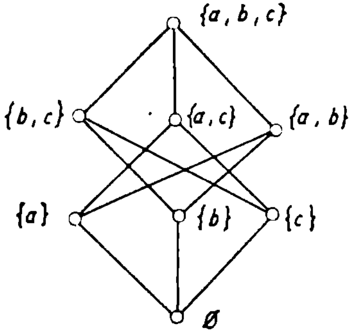
Obr. 1

Obr. 2



Obr. 3

obr. 2, pro $E = \{a, b\}$ viz obr. 3, pro $E = \{a, b, c\}$ viz obr. 4.



Obr. 4

Úloha 6. Budiž π některá rovina, V pevně zvolený bod této roviny. Pro dva body A, B z π píšeme $(A, B) \in \sigma_5$ právě tehdy, když úsečky VA, VB mají touž velikost. Máme tak definovánu relaci σ_5 na množině všech bodů roviny π. Vyšetřete ji. [Relace σ_5 je reflexívní, symetrická a tranzitivní, není antisymetrická.]

Úloha 7. Vyšetřete relaci | („dělí“) na množině $\boldsymbol{Z}$ celých čísel.
[Je reflexívní, tranzitivní, není ani symetrická ani antisymetrická.]

Relace σ_5, | mají obě tu vlastnost, že jsou reflexívní a tranzitivní. Každá relace ϱ na neprázdné množině M, která je reflexívní a tranzitivní, se nazývá *preuspořádání* množiny M. Relace ϱ na neprázdné množině M, která je reflexívní, symetrická a tranzitivní, se nazývá *ekvivalence* na množině M.

Cvičení

1. Nalezněte všechny relace na dvouprvkové množině $\{a, b\}$.
2. Mezi relacemi ze cvičení 1 nalezněte
   a) všechny reflexívní;
   b) všechny symetrické;
   c) všechny antisymetrické;
   d) všechny tranzitivní.
3. Konstruujte příklad relace, která je symetrická a tranzitivní, ale není reflexívní.
4. Mezi relacemi ze cvičení 1 nalezněte
   a) všechna preuspořádání;
   b) všechna uspořádání;
   c) všechny ekvivalence.
5. Nalezněte všechny ekvivalence na
   a) tříprvkové množině $\{a, b, c\}$;
   b) čtyřprvkové množině $\{a, b, c, d\}$.

2. kapitola

SVAZY — ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

V dalším budeme potřebovat pojem infima a suprema podmnožiny nosiče některého posetu.

Budeme říkat, že neprázdná podmnožina M nosiče P posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ má v $\mathscr{P}$

infimum právě tehdy, když existuje prvek i, který má následující tři vlastnosti:

(1i) $i \in P$;

(2i) pro každé $m \in M$ platí

$$i \leqq m;$$

(3i) platí-li pro některý prvek i_1 množiny P pro každé m patřící do M vztah $i_1 \leqq m$, pak již nutně $i_1 \leqq i$. Prvek i se nazývá *infimum* množiny M v posetu $\mathscr{P}$. Přitom zavádíme tuto dohodu: Budeme psát

$$i = \inf_{\mathscr{P}} M$$

právě tehdy, když existuje infimum množiny M v posetu $\mathscr{P}$ a rovná se i.

supremum právě tehdy, když existuje prvek s, který má následující tři vlastnosti:

(1s) $s \in P$;

(2s) pro každé $m \in M$ platí

$$m \leqq s;$$

(3s) platí-li pro některý prvek s_1 množiny P pro každé m patřící do M vztah $s_1 \geqq m$, pak již nutně $s_1 \geqq s$. Prvek s se nazývá *supremum* množiny M v posetu $\mathscr{P}$. Přitom zavádíme tuto dohodu: Budeme psát

$$s = \sup_{\mathscr{P}} M$$

právě tehdy, když existuje supremum množiny M v posetu $\mathscr{P}$ a rovná se s.

K právě podané definici suprema a infima připojme dvě poznámky. Předně pro každou množinu M, $\emptyset \neq \neq M \subset P$, existuje nejvýše jedno infimum a nejvýše jedno supremum. Splňuje-li totiž prvek I rovněž požadavky (1i) — (3i), pak dle (2i) a (3i) musí platit $i_1 = = I \leqq i$ a z těchže podmínek (2i) a (3i) vypsaných pro I plyne, že $i \leqq I$. Protože relace $\leqq$ je antisymetrická, je $i = I$. Podobně lze postupovat pro supremum. Dále uveďme, že je zvykem označovat prvek $d \in P$ takový, že $d \leqq m$ pro každé $m \in M$ názvem *dolní závora* množiny M v posetu $\mathscr{P}$. Obdobně prvek $h \in P$ takový, že $h \geqq m$ pro každé m z množiny M, se nazývá *horní závora* množiny M v posetu $\mathscr{P}$. Při této úmluvě bývají vztahy (2i) a (3i) formulovány stručněji tak, že pro prvek i žádáme, aby to byla dolní závora množiny M (viz (2i)) a aby to byla největší z dolních závor této množiny (viz (3i)). Obdobně lze požadavky (2s) a (3s) shrnout do stručnějšího požadavku, že s má být nejmenší horní závora množiny M v $\mathscr{P}$.

Příklad 6. Nechť $E = \{a, b\}$ a nechť $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ je uspořádaná množina, jejímiž prvky jsou všechny podmnožiny množiny E a v níž je uspořádání dáno inkluzí. Označme $M_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$, tj. M_2 je dvouprvková množina o prvcích $\{a\}$, $\{b\}$ (což jsou jednoprvkové množiny). Máme vyšetřit zda existuje supremum a infimum množiny M_2 v posetu $\mathscr{P}(E)$ a nalezený výsledek zobecnit.

Řešení. Předpokládejme, že existuje supremum množiny M_2 v $\mathscr{P}(E)$ a označme ho S. Podle (1s) je $S \subset E$ a dle (2s) má být $\{a\} \subset S$ a zároveň $\{b\} \subset S$, přičemž dle (3s) to má být nejmenší možná množina. Proto soudíme, že $S = \{a, b\}$ a obdobně, že infimum je prázdná množina $I = \emptyset$. Přitom zřejmě $\{a, b\}$ je sjednocením množin $\{a\}$, $\{b\}$ a $\emptyset$ je průnik množin $\{a\}$, $\{b\}$.

Nalezený výsledek nás vede k tomu, abychom vyslovili tuto domněnku: Je-li E některá množina a M, N dvě její podmnožiny, pak

$$\sup_{(P(E),\subset)}\{M, N\} = M \cup N, \inf_{(P(E),\subset)}\{M, N\} = M \cap N .$$

Tuto domněnku dokážeme, ukážeme-li, že $M \cup N$ (resp. $M \cap N$) splňuje podmínky (1s) — (3s) (resp. (1i) — (3i)). Úvahy provedeme pro $M \cup N$. Protože $M \cup N \subset E$, platí (1s). Protože $M \subset M \cup N$ a $N \subset \subset M \cup N$, platí (2s). Je-li H podmnožina množiny E taková, že $M \subset H$ a $N \subset H$, pak $M \cup N \subset H$, tedy platí také (3s).

Úloha 8. Dokažte, že pro každou jednoprvkovou podmnožinu $\{a\}$ množiny P existuje v kterémkoli posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ $\sup_{\mathscr{P}}\{a\}$ a $\inf_{\mathscr{P}}\{a\}$.
[V obou případech je to prvek a.]

Příklad 7. Nechť a, b jsou dvě přirozená čísla. Máme vyšetřit existenci infima a suprema množiny $\{a, b\}$ v uspořádané množině $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ z úlohy 1.

Řešení. Označme n (resp. d) nejmenší společný násobek (resp. největší společný dělitel) čísel a, b. Tvrdíme, že

$$n = \sup_{(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)}\{a, b\}, \quad d = \inf_{(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)}\{a, b\} .$$

Dokážeme první vztah, druhý ponecháme čtenáři jako cvičení. Předně platí (1s), neboť pro dvě přirozená čísla existuje vždy přirozené číslo, které je jejich nejmenším společným násobkem. Dále platí (2s), neboť $a \mid n$ a také $b \mid n$. Konečně platí i (3s), neboť je-li s_1 celé nezáporné číslo takové, že $a \mid s_1$ a $b \mid s_1$, pak s_1 je společným násobkem čísel a, b a proto $n \mid s_1$.

Úloha 9. Dokažte, že supremum a infimum v $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ existuje pro každou dvouprvkovou množinu $\{a, b\}$, kde a, b jsou celá nezáporná čísla.
[Pozor, platí $\sup_{(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)} \{0, a\} = 0, \inf_{(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)} \{0, a\} = a$.]

Množina $\boldsymbol{Z}$ nemá v uspořádané množině $(\boldsymbol{Z}, \leqq)$ ani infimum ani supremum, neboť v $\boldsymbol{Z}$ neexistuje ani největší ani nejmenší číslo. Méně snadnější je nahlédnout takovouto neexistenci suprema či infima v některých jiných situacích. Jedna z nich je předmětem následujícího příkladu. Čtenáři doporučujeme, aby příklad při prvním čtení této knížky probral jen orientačně a vrátil se k němu podrobněji až při druhém čtení.

Příklad 8. Nechť D značí množinu těch kladných racionálních čísel q, pro něž $q^2 > 2$. Máme dokázat, že v uspořádané množině $(\boldsymbol{Q}, \leqq)$, kde $\boldsymbol{Q}$ značí množinu racionálních čísel, neexistuje infimum množiny D.

Řešení. Především ukážeme, že (i) *pro každý prvek q patřící do D existuje prvek q_1 patřící do D a takový, že* $q_1 < q$. Abychom to nahlédli, vyjdeme z předpokladu, že prvek q_1 lze hledat ve tvaru $q_1 = q - \varepsilon$, kde ε je vhodné „malé" kladné racionální číslo. Prvek q_1 má patřit do D, má tedy být splněn vztah $2 < (q - \varepsilon)^2$, který snadno přepíšeme na požadavek $2\varepsilon q - \varepsilon^2 < q^2 - 2$. Tuto podmínku bychom potřebovali splnit vhodným kladným racionálním číslem ε. Budeme se proto snažit zjednodušit tento vztah účelným obratem tak, aby se v příslušné podmínce již nevyskytovalo ε^2. To je možné provést takto: Určíme-li $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $2\varepsilon q \leqq q^2 - 2$, pak — protože $2\varepsilon q - \varepsilon^2 < 2\varepsilon q$ — jistě platí i výchozí požadavek na ε. Nyní je další postup snadný: Zvolíme $\varepsilon = (q^2 - 2) : (2q)$. Je to kladné racionální číslo (ověřte), neboť dle předpokladu je q racionální.

Jím určené číslo $q_1 = q - \varepsilon = (q^2 + 2) : (2q)$ patří do D, neboť „obrácení“ předchozího postupu dává

$$q_1^2 = (q - \varepsilon)^2 = q^2 - 2q\varepsilon + \varepsilon^2 =$$
$$= q^2 - (q^2 - 2) + \varepsilon^2 = 2 + \varepsilon^2 > 2\,.$$

Dále ukážeme, že (ii) *je-li $d \geqq 1$ takové racionální číslo, že $d^2 < 2$, pak existuje takové racionální číslo d_1, že $d < d_1$ a $d_1^2 < 2$.* Pro důkaz tohoto výroku uvažme, že $2 < 4 \leqq (d + 1)^2$ a že proto $0 < \varepsilon_1 = (2 - d^2) : (2d + 1) < 1$. Poslední nerovnost pro ε_1 dává $\varepsilon_1^2 < \varepsilon_1$ a tedy platí $2d\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 < 2d\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2 - d^2$. Pro $d_1 = d + \varepsilon_1$ v důsledku toho máme $d_1^2 = (d + \varepsilon_1)^2 < 2$. (Čtenář, který se poprvé seznamuje s úvahami tohoto druhu, by si měl důkaz výroku (ii) zpětně rozebrat podrobněji tak, aby viděl, jakou úvahou (obdobnou důkazu (i)) se dojde k uvedenému tvaru pro ε_1.)

Ukážeme posléze, že (iii) *předpoklad existence infima množiny D v $(\mathbf{Q}, \leqq)$ vede ke sporu.* Vskutku, kdyby d byl prvek s vlastnostmi (1i) až (3i), pak — protože pro každý prvek $q \in D$ je $q > 1$ — je 1 dolní závorou množiny D a proto by d nutně splňovalo $d \geqq 1$. Kdyby nejprve platilo $d^2 > 2$, pak by bylo $d \in D$ a dle (i) by existoval takový prvek $q_1 \in D$, že $q_1 < d$, což je ale spor s (2i). Kdyby platilo, že $d^2 = 2$, bylo by $d = \sqrt{2}$ a současně by d mělo být racionální číslo. To je spor s dobře známým faktem, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. Zůstává případ $d^2 < 2$. Podle (ii) ale existuje d_1 tak, že $d < d_1$ a $d_1^2 < 2$, takže tím spíše je $d_1^2 < q^2$ pro $q \in D$ a tedy i $d_1 < q$ pro každé $q \in D$. Číslo d_1 by tak bylo rovněž racionální dolní závorou množiny D a přitom by bylo větší než největší dolní závora této množiny. To je spor s (3i). Předpoklad existence infima množiny D v $(\mathbf{Q}, \leqq)$ vedl v každém případě ke sporu a proto uvedené infimum neexistuje.

Poznamenejme, že v množině $\boldsymbol{R}$ reálných čísel existuje $\inf_{(\boldsymbol{R}, \leqq)} D$ a rovná se $\sqrt{2}$.

Úloha 10. Dokažte: a) Neexistuje takové racionální číslo s/t, kde $s, t \in \boldsymbol{Z}$, aby platilo

$$10^{s/t} = 2 .$$

b) Pro každé přirozené číslo n platí vztah

$$0 < 10^{1/n} - 1 \leqq \frac{9}{n} .$$

c) Je-li q takové číslo, že $10^q > 2$, pak pro každé přirozené číslo $n > 18 : (10^q - 2)$ je $2 : 10^q < 10^{-1/n} < 1$.

d) Je-li q takové racionální číslo, že $10^q > 2$, pak existuje takové racionální číslo q_1, že $q_1 < q$ a zároveň $10^{q_1} > 2$.

e) Je-li d racionální číslo s vlastností $10^d < 2$, pak existuje takové racionální číslo d_1, že $d < d_1$ a současně $10^{d_1} < 2$.

f) Budiž E množina, jejímiž prvky jsou právě ta racionální čísla q, pro něž platí $10^q > 2$. Dokažte, že v posetu $(\boldsymbol{Q}, \leqq)$ neexistuje infimum množiny E.

g) Ověřte, že $\inf_{(\boldsymbol{R}, \leqq)} E = \log 2$.

[Návod: a) Vyšetřete vztah $5^s = 2^{t-s}$, kde s, t patří do množiny $\boldsymbol{N}$ přirozených čísel. b) Užijte binomickou poučku na výraz $\left(1 + \frac{9}{n}\right)^n$. c) Ukažte, že $\frac{10^q}{2} - 1 > \frac{9}{n}$. d) Položte $q_1 = q - \frac{1}{n}$, kde $n > 18 : (10^q - 2)$. e) Položte $d_1 = d + \frac{1}{m}$, kde $m > 9 . 10^d : (2 - 10^d)$ a ukažte, že pak $10^{1/m} \leqq 1 + (9 : m) < 2 . 10^{-d}$.]

V uspořádaných množinách definujeme pojem největšího (nejmenšího) prvku následovně: Řekneme, že

prvek $\iota \in P$ je *největší prvek* posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ právě tehdy, když pro každé $p \in P$ platí $p \leqq \iota$. Největší prvek posetu $\mathscr{P}$ bývá rovněž nazýván *jednotkový prvek* posetu $\mathscr{P}$ a značí se zpravidla 1.

prvek $\omega \in$ P je *nejmenší prvek* posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ právě tehdy, když pro každé $p \in P$ platí $p \geqq \omega$. Nejmenší prvek posetu $\mathscr{P}$ bývá rovněž nazýván *nulový prvek* posetu $\mathscr{P}$ a značí se zpravidla 0.

Úloha 11. Rozhodněte, zda existuje nulový či jednotkový prvek a) v posetu $(\boldsymbol{N}, \leqq)$ b) v posetu $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ (srovn. úlohu 1).
[a) existuje nulový prvek a neexistuje jednotkový prvek. b) existuje nulový i jednotkový prvek.]

Existuje-li pro každé dva různé prvky a, b uspořádané množiny $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ jak $\sup_{\mathscr{P}} \{a, b\}$ tak i $\inf_{\mathscr{P}} \{a, b\}$, nazývá se $\mathscr{P}$ *svaz.* Existuje-li pro každou neprázdnou podmnožinu M nosiče P posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ jak $\sup_{\mathscr{P}} M$ tak i $\inf_{\mathscr{P}} M$, nazývá se $\mathscr{P}$ *úplný svaz.*

Podle této definice je zřejmé, že každý úplný svaz je svazem. Z řešení příkladu 6 plyne, že uspořádaná množina $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ je příkladem svazu. Výsledek úlohy 9 říká, že $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ je svaz. Z poznámky za úlohou 9 usuzujeme, že poset $(\boldsymbol{Z}, \leqq)$ není úplný svaz. Je to však svaz, což vyplyne nejrychleji z následujících obecnějších úvah.

Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ je některá uspořádaná množina a pro dva její prvky a, b nechť platí $a \leqq b$. V tomto případě píšeme

$$\max_{\mathscr{P}} (a, b) = b \quad \text{a} \quad \min_{\mathscr{P}} (a, b) = a$$

a oba zápisy čteme po řadě „maximum (resp. minimum) prvků a, b je rovno b (resp. a)". *Řetězcem* se rozumí uspořádaná množina $(R, \leqq)$, v níž pro každé dva prvky r, s platí buď $r \leqq s$ nebo $s \leqq r$. Posety $(\boldsymbol{N}, \leqq)$, $(\boldsymbol{Z}, \leqq)$, $(\boldsymbol{Q}, \leqq)$, $(\boldsymbol{R}, \leqq)$ jsou příklady řetězců, poset $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ není řetězec, neboť neplatí ani $2 \; \sigma_1 \; 3$ ani $3 \; \sigma_1 \; 2$.

Příklad 9. Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ je poset a pro dva jeho prvky a, b nechť platí $a \leqq b$. Máme dokázat, že

$$\inf_{\mathscr{P}} \{a, b\} = \min_{\mathscr{P}} (a, b)$$

a

$$\sup_{\mathscr{P}} \{a, b\} = \max_{\mathscr{P}} (a, b).$$

Řešení. Provedeme příslušné úvahy pouze pro první z obou vztahů, ověření druhého ponecháváme čtenáři.

Předně je $a = \min_{\mathscr{P}} (a, b)$. Stačí tedy ukázat, že prvek a má vlastnosti infima množiny $\{a, b\}$. Platnost (1i) je zřejmá. Protože relace $\leqq$ je reflexivní, platí $a \leqq a$ a dle předpokladu je též $a \leqq b$, takže platí (2i). Je-li $a_1 \in P$ dolní závora množiny $\{a, b\}$, pak tím spíše $a_1 \leqq a$ a proto platí i (3i).

Věta 1. *Každý řetězec je svaz.*

Důkaz. Protože pro každé dva prvky a, b řetězce platí $a \leqq b$ nebo $b \leqq a$, existuje podle příkladu 9 jak infimum tak i supremum každé dvouprvkové podmnožiny nosiče řetězce a tedy řetězec je svaz.

Z věty 1 usuzujeme, že posety $(\boldsymbol{N}, \leqq)$, $(\boldsymbol{Z}, \leqq)$, $(\boldsymbol{Q}, \leqq)$, $(\boldsymbol{R}, \leqq)$ jsou svazy. Právě tak je svazem poset $(D, \leqq)$ z příkladu 8 a poset $(E, \leqq)$ z úlohy 10. Žádný z těchto svazů však není úplný, neboť neexistuje supremum jeho nosiče.

K snadnému rozpoznání, zda daný poset je či není úplný svaz, slouží následující poučka.

Věta 2. *Poset $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ je úplný svaz právě tehdy, když pro každou neprázdnou množinu $M \subset P$ existuje* $\inf_{\mathscr{P}} M$ *a když poset $\mathscr{P}$ má největší prvek.*

Důkaz. 1) Předpokládejme, že je splněna podmínka této věty. Nejprve dokážeme, že pro každou neprázdnou podmnožinu $M \subset P$ existuje $\sup_{\mathscr{P}} M$. Označme H množinu těch prvků $h \in P$, pro něž platí $m \leqq h$ pro každé $m \in M$ (takže do H dáváme právě všechny horní závory množiny M). Množina H je neprázdná, neboť největší prvek posetu $\mathscr{P}$ zřejmě patří do H. Podle předpokladu existuje $\inf_{\mathscr{P}} H$. Označme toto infimum i_0. Zvolíme-li $m \in M$, pak $m \leqq h$ platí pro každé $h \in H$. Podle (3i) tedy platí $m \leqq i_0$. Vidíme tak, že prvek $i_0 \in P$ má vlastnost (1s) a (2s). Ukážeme, že má i vlastnost (3s): Je-li totiž $m \leqq i_1$ pro každé $m \in M$, je $i_1 \in H$ a protože i_0 je infimum množiny H, je dle (2i) $i_0 \leqq i_1$, což ukazuje platnost vztahu (3s). Dokázali jsme tak, že $i_0 = \sup_{\mathscr{P}} M$.

2) Je-li $\mathscr{P}$ úplný svaz, pak přímo z definice plyne existence zmíněných infim. Protože existuje $\iota = \sup_{\mathscr{P}} P$ a protože je to dle (2s) prvek takový, že $p \leqq \iota$ pro každé $p \in P$, je zřejmé, že $\mathscr{P}$ má největší prvek.

Příklad 10. Máme dokázat, že poset $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ z příkladu 6 je úplný svaz.

Řešení. K řešení užijeme větu 2. Největším prvkem posetu $\mathscr{P}(E)$ je zřejmě E. Je-li M neprázdná množina podmnožin $A, B, \ldots$ množiny E, pak $I = \inf_{\mathscr{P}(E)} M$ má být podmnožina množiny E, která je obsažena ve všech podmnožinách $A, B, \ldots$ (to žádá přepis podmínky (2i)) a je-li I_1 podmnožina množiny E, která je obsažena ve všech podmnožinách $A, B, \ldots$, pak I_1 má být podmnožinou množiny I (to žádá přepis podmínky (3i)). Těmto požadavkům patrně vyhovuje množina, jejímiž prvky jsou právě ty prvky množiny E, které patří do všech podmnožin $A, B, \ldots$, tj. *průnik* všech těchto podmnožin.

Příklad 11. Nechť $E(N)$ značí množinu všech ekvivalencí na množině $N \neq \emptyset$. Máme dokázat, že uspořádaná množina $(E(N), \subset)$ je úplný svaz.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 2. Největším prvkem je taková ekvivalence ϱ_0, že pro každé dva prvky $n_1, n_2 \in N$ je $n_1 \varrho_0 n_2$ (takže $\varrho_0 = N \times \times N$). Je-li M neprázdná množina ekvivalencí $\varrho, \sigma, \ldots$ na množině N, pak existuje $\inf_{(E(N), \subset)} M$. Vskutku, definujeme-li relaci τ na M tak, že $n_1 \tau n_2$ platí právě tehdy, když pro všechny ekvivalence $\varrho, \sigma, \ldots$ z M platí $n_1 \varrho n_2, n_1 \sigma n_2, \ldots$, snadno nahlédneme, že τ je ekvivalence. Například tranzitivita relace τ plyne takto: Je-li $n_1 \tau n_2$ a $n_2 \tau n_3$, pak pro každé $\varrho, \sigma, \ldots$ je $n_1 \varrho n_2$, $n_2 \varrho n_3$, $n_1 \sigma n_2$, $n_2 \sigma n_3, \ldots$ a protože $\varrho, \sigma, \ldots$ jsou tranzitivní relace, je také $n_1 \varrho n_3$, $n_1 \sigma n_3, \ldots$, tj. vidíme, že $n_1 \tau n_3$. Požadavek (2i) se pro τ přepisuje takto: Má být $\tau \subset \varrho, \tau \subset \sigma, \ldots$. Co ale znamená například požadavek $\tau \subset \varrho$? Znamená, že ze vztahu $(n_1, n_2) \in \tau$ plyne vždy vztah $(n_1, n_2) \in \varrho$. Přejdeme-li k ekvivalentnímu přepisu, jedná se o ověření toho, že z $n_1 \tau n_2$ plyne $n_1 \varrho n_2$. To je ale okamžitě patrné přímo z definice relace τ. Podívejme se dále na přepis požadavku (3i). Platí-li současně $\tau_1 \subset \varrho, \tau_1 \subset \sigma, \ldots$, pak má být $\tau_1 \subset \tau$. Zvolme proto $n_3, n_4 \in N$ tak, že $(n_3, n_4) \in \tau_1$. Potřebujeme ukázat, že nutně $(n_3, n_4) \in \tau$. Ale $(n_3, n_4) \in \tau_1$ a $\tau_1 \subset \varrho$ dává $(n_3, n_4) \in \varrho$, tj. $n_3\, \varrho\, n_4$ a podobně najdeme i $n_3\, \sigma\, n_4, \ldots,$ tj. $n_3\, \tau\, n_4$. Ukázali jsme tak, že τ je infimum množiny M v posetu $(E(N), \subset)$.

Cvičení

1. Nakreslete diagram posetu $(\boldsymbol{N}_4, \delta)$ (srovn. str. 7).

2. Užitím výsledku cvičení 1 z 1. kapitoly nalezněte diagram posetu, který má za nosič množinu všech relací na dvouprvkové množině $\{a, b\}$ a jehož uspořádání je dáno inkluzí.

3. Dokažte, že všechny relace na množině M tvoří při uspořádání daném inkluzí úplný svaz.

4. Rozhodněte, zda
  a) všechny reflexívní;
  b) všechny symetrické;
  c) všechny antisymetrické;
  d) všechny tranzitivní
relace na dané množině M tvoří při uspořádání daném inkluzí úplný svaz.

5. Vyšetřete, zda
  a) všechna preuspořádání;
  b) všechna uspořádání
na dané množině tvoří při uspořádání inkluzí úplný svaz.

6. Užitím výsledků cvičení 5 z první kapitoly nalezněte diagram svazu $(E(N), \subset)$ v případě, že
  a) $N = \{a, b, c\}$;
  b) $N = \{a, b, c, d\}$.

7. Nechť I značí množinu všech racionálních čísel z uzavřeného intervalu $\langle 1, 2 \rangle$. Poset $(I, \leqq)$ není úplný svaz. Dokažte.

3. kapitola

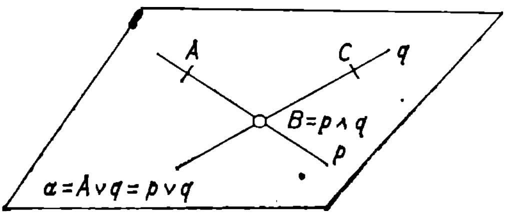
PŘÍKLADY SVAZŮ

V této kapitole doplníme základní poznatky o svazech a uvedeme některé příklady svazů, které lze situovat do středoškolské matematiky.

V předchozí kapitole jsme definovali svaz jako uspořádanou množinu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$, v níž pro každé dva prvky $a, b \in P$ existuje $\sup_{\mathscr{P}} \{a, b\}$ a $\inf_{\mathscr{P}} \{a, b\}$. Oba tyto zápisy vystihují dostatečně výrazně, které prvky jsou dvojici a, b po řadě přiřazeny. Mají však tu nevýhodu, že jsou poměrně málo stručné. Proto se v teorii svazů zavádí úmluva, že místo $\sup_{\mathscr{P}} \{a, b\}$ se píše jen $a \vee b$ a místo $\inf_{\mathscr{P}} \{a, b\}$ se píše jen $a \wedge b$. Pokud $a = b$, rozšiřujeme tuto definici tak, že klademe: $a \vee a = a \wedge a = a$. Zápis $c = a \vee b$ (resp. $d = a \wedge b$) čteme „c je rovno spojení a s b" (resp. „d je rovno průseku a s b"). Prvek c se nazývá *spojení* prvků a, b, prvek d se nazývá jejich *průsekem*.

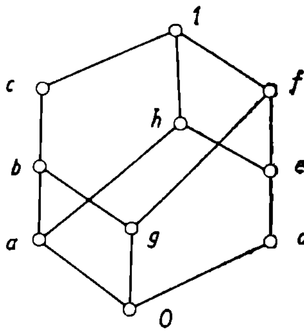
Příklad 12. Nechť E značí daný trojrozměrný prostor a $L(E)$ nechť je množina, jejímiž prvky jsou E, $\emptyset$ a všechny roviny, přímky a body prostoru E. Přitom přímku, rovinu i prostor chápeme jako množiny bodů, bod jako jednoprvkovou množinu bodů. Máme dokázat, že $(L(E), \subset)$ je úplný svaz.

Řešení. Užijeme opět větu 2. Zřejmě je E největší prvek tohoto posetu. Je-li M některá množina zmíněných geometrických útvarů z E, označme Δ množinu všech bodů, které patří do všech množin z M. Chceme ukázat, že $\Delta \in L(E)$. To je zřejmé, pokud $\Delta = \emptyset$ nebo pokud Δ obsahuje jediný bod. Obsahuje-li Δ dva různé body A, B, pak body A, B obsahuje každý útvar z M a proto každý takovýto útvar obsahuje i přímku p jimi určenou. Obsahuje-li Δ ještě další bod C, který neleží na p, obsahuje — jak bychom nahlédli obdobnou úvahou — i všechny body roviny α určené bodem C a přímkou p. Leží-li v Δ bod D, který nepatří do roviny α, obsahuje Δ i všechny body prostoru E. V každém případě je proto $\Delta \in L(E)$ a snadno nahlédneme, že $\Delta = \inf_{(L(E), \subset)} M$. Podle věty 2 je proto $(L(E), \subset)$ úplný svaz.



Obr. 5

V právě zkoumaném příkladě si povšimněme, že spojení $A \vee B$ bodů A, B (srovn. obr. 5) je přímka p, průsek přímek p, q je bod B atd. Tento příklad ilustruje geometrický obsah užité terminologie.



Obr. 6

Ve svazu s diagramem na obrázku 6 platí například $c \wedge f = g, b \vee h = 1$. Souhrn průseků a spojení zachycují tyto tabulky:

$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
0	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
a	a	a	b	c	h	h	1	b	h	1
b	b	b	b	c	1	1	1	b	1	1
c	c	c	c	c	1	1	1	c	1	1
d	d	h	1	1	d	e	f	f	h	1
e	e	h	1	1	e	e	f	f	h	1
f	f	1	1	1	f	f	f	f	1	1
g	g	b	b	c	f	f	f	g	1	1
h	h	h	1	1	h	h	1	1	h	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	0	0	0	0	a	a
b	0	a	b	b	0	0	g	g	a	b
c	0	a	b	c	0	0	g	g	a	c
d	0	0	0	0	d	d	d	0	d	d
e	0	0	0	0	d	e	e	0	e	e
f	0	0	g	g	d	e	f	g	e	f
g	0	0	g	g	0	0	g	g	0	g
h	0	a	a	a	d	e	e	0	h	h
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1

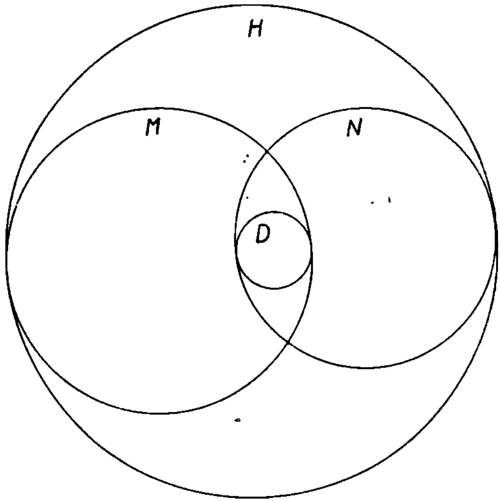
Úloha 12. V každém svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ pro každé $a, b, c \in P$ platí

a) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;
b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;
c) $a \wedge b = a$ a také $b = a \vee b$, jakmile $a \leqq b$;
d) $a \wedge b \leqq a$, $a \leqq a \vee b$;
e) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

[Návod. K důkazu e) použijte d) a c).]

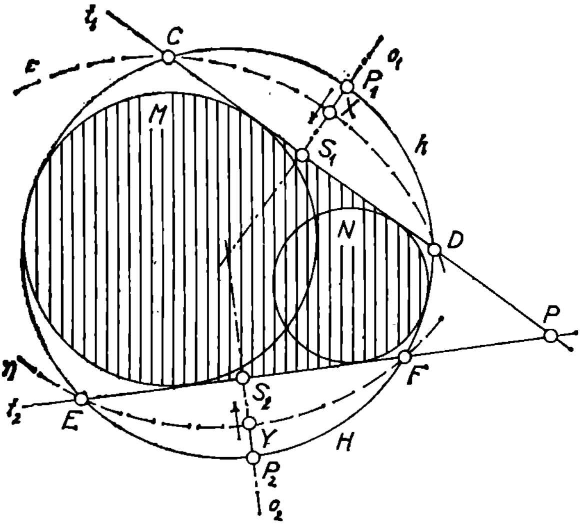
Příklad 13. Budiž $C(\varrho)$ množina všech otevřených kruhů některé dané roviny ϱ. Přitom mezi kruhy počítáme také prázdnou množinu. Máme vyšetřit, zda poset $(C(\varrho), \subset)$ je svaz.

Řešení. Vlastnímu řešení předešleme nejprve tuto úvahu: Nechť M, N značí dva kruhy (srovn. obr. 7) a nechť H, D značí kruhy určené tečnými kružnicemi obvodových kružnic zadaných kruhů M, N. Zřejmě



Obr. 7

platí, že $N \subset H$ a $M \subset H$; podobně $D \subset M$ a $D \subset N$. Odtud plyne, že H je horní závora množiny $\{M, N\}$ a D je dolní závora této množiny. Připojený obrázek má na první pohled natolik sugestivní charakter, že bychom se mohli domnívat, že H je nejmenší horní závora této množiny a že D je největší dolní závora množiny $\{M, N\}$, tj. mohli bychom se domnívat, že poset $(C(\varrho), \subset)$ je svaz. Takovéto mýlce podlehl i známý popularizátor moderní matematiky profesor G. Papy [3; str. 130, cvičení 5]. Ukažme, že pro vyznačené kruhy M, N supremum množiny $\{M, N\}$ v posetu $(C(\varrho), \subset)$ neexistuje. Kdyby S byl kruh, který by byl supremem množiny $\{M, N\}$, pak by předně každý jeho bod musel ležet uvnitř



Obr. 8

ostrého úhlu určeného tečnami t_1, t_2. Abychom to nahlédli, označme C, D průsečíky tečny t_1 s obvodovou kružnicí h kruhu H a E, F průsečíky tečny t_2 s touto kružnicí. Nechť o_1 (resp. o_2) značí osu úsečky CD (resp. EF), P_1 (resp. P_2) průsečík kružnice h s osou o_1 (resp. o_2), S_1 (resp. S_2) střed úsečky CD (resp. EF). Zvolme bod X (resp. Y) na úsečce P_1S_1 (resp. P_2S_2). Kružnice ε určená body C, X, D (resp. kružnice η určená body E, Y, F) omezuje kruh, který obsahuje M i N a obsahoval by proto i kruh S. Necháme-li X (resp. Y) blížit bodu S_1 (resp. bodu S_2), dospějeme k závěru, že S by měl být kruh ležící v ostrém úhlu $CDPFE$ a současně by měl obsahovat jak M tak i N. To zřejmě není možné.

Úloha 13. Popište množinu bodů, které patří do všech kruhů obsahujících oba kruhy M, N z obrázku 8. [Jsou to právě ty body, které leží ve vyšrafovaném obrazci].

Příklad 14. Budiž nyní znovu ϱ některá daná rovina, kterou chápeme jako množinu bodů. Podmnožina M roviny ϱ se nazývá *konvexní* právě tehdy, když pro každou dvojici bodů X, Y z M leží celá úsečka XY v M.[2]) Označme $K(\varrho)$ množinu všech konvexních podmnožin bodů roviny ϱ. Máme dokázat, že $(K(\varrho), \subset)$ je úplný svaz.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 2. Největším prvkem posetu $(K(\varrho), \subset)$ je patrně celá rovina ϱ. Je-li M některá neprázdná množina konvexních podmnožin A, B, ..., pak jejich průnik sestává z těch bodů roviny ϱ, které patří do všech podmnožin A, B, ... a to je konvexní podmnožina, neboť patří-li X, Y do tohoto průniku, patří celá úsečka XY do všech podmnožin A, B, ... a tedy tím spíše i do jejich průniku. Odtud již snadno vyvodíme, že zmíněný průnik je infimem množiny M.

Příklad 15. Máme dokázat, že poset $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ z úlohy 1 je úplný svaz.

Řešení. Užijeme větu 2. Při uspořádání σ_1 je číslo 0 největším prvkem posetu $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$. Nechť M je některá neprázdná podmnožina množiny $\boldsymbol{N}_0$ a nechť C značí množinu všech těch čísel z $\boldsymbol{N}_0$, která dělí všechna čísla z M. Zřejmě je $C \neq \emptyset$, neboť $1 \in C$. Je-li $M = \{0\}$,

---

[2]) K podrobnějšímu studiu pojmu konvexní množiny odkazuji čtenáře na zajímavou knížku J. Vyšína [4].

označme písmenem d číslo 0. Je-li M podmnožina, která obsahuje alespoň jedno přirozené číslo, označme písmenem d největší z čísel patřících do C (největší při obvyklém uspořádání $\leqq$); d existuje, neboť jej vybíráme z konečného počtu dělitelů zmíněného nenulového čísla patřícího do M. Tvrdíme, že d je infimem množiny M při uspořádání σ_1. Předně je dle výběru d vždy $d\ \sigma_1\ m$ pro každé $m \in M$. Je-li pro některé d_1 rovněž $d_1\ \sigma_1\ m$ pro každé $m \in M$, je každé $m \in M$ násobkem nejmenšího společného násobku $n(d, d_1)$ čísel d a d_1. Protože platí $d \leqq n(d, d_1)$ a právě jsme viděli, že $n(d, d_1) \in C$, je dle výběru d nutně $d = n(d, d_1)$. Vzhledem k tomu, že vždy je $d_1\ \sigma_1\ n(d, d_1)$, je $d_1\ \sigma_1\ d$ a platí proto (3i), což končí důkaz toho, že v $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ existuje infimum množiny M.

Vyšetříme nyní dva způsoby, jak lze danou rovinu opatřit strukturou uspořádané množiny. Přitom předpokládáme, že v této rovině máme dán pravoúhlý systém souřadnic. Každý bod roviny je pak určen uspořádanou dvojicí $[r_1, r_2]$ sestavenou ze souřadnic r_1, r_2.

Příklad 16. Pro dvě dvojice $[r_1, r_2]$, $[s_1, s_2]$ reálných čísel pišme $[r_1, r_2] \ll [s_1, s_2]$ právě tehdy, když nastane jedna z těchto situací:

(i) $[r_1, r_2] = [s_1, s_2]$[3]);
(ii) $r_1 < s_1$;
(iii) $r_1 = s_1$ a $r_2 < s_2$.

Máme vyšetřit relaci $\ll$ právě definovanou.

Řešení. Podle (i) je $\ll$ reflexivní. Tato relace je antisymetrická, neboť je-li $[r_1, r_2] \ll [s_1, s_2]$ a zároveň $[s_1, s_2] \ll [r_1, r_2]$, pak — ať nastane kterákoli ze situací

[3]) Tento požadavek znamená, že $r_1 = s_1$ a zároveň $r_2 = s_2$.

(i) až (iii) — je $r_1 \leqq s_1$ a $s_1 \leqq r_1$, takže $s_1 = r_1$ a v obou uvažovaných situacích nemůže nastat případ (iii), neboť pak by bylo $r_2 < s_2$ a také $s_2 < r_2$, což představuje spor. Zbývá tedy — jako jediná možná — situace (i). Relace $\ll$ je také tranzitivní, neboť je-li $[r_1, r_2] \ll$ $\ll [s_1, s_2]$ a $[s_1, s_2] \ll [t_1, t_2]$, pak je-li buď $[r_1, r_2] =$ $= [s_1, s_2]$ nebo $[s_1, s_2] = [t_1, t_2]$, je jistě $[r_1, r_2] \ll [t_1, t_2]$. Je-li ale $[r_1, r_2] \neq [s_1, s_2]$ a $[s_1, s_2] \neq [t_1, t_2]$, pak buď je alespoň jedno z čísel $t_1 - s_1$, $s_1 - r_1$ kladné a tedy také $t_1 - r_1 = (t_1 - s_1) + (s_1 - r_1) > 0$, což dává dle (ii) $[r_1, r_2] \ll [t_1, t_2]$, nebo jsou obě tato čísla rovna nule, takže $t_1 = r_1$, ale pak nutně $t_2 - r_2 = (t_2 - s_2) + (s_2 -$ $- r_2)$ je součet dvou kladných čísel, tj. $t_2 > r_2$ a proto $[r_1, r_2] \ll [t_1, t_2]$. Protože dle (i) — (iii) při kterékoli volbě $[r_1, r_2]$, $[s_1, s_2]$ nastane vždy buď $[r_1, r_2] \ll [s_1, s_2]$ nebo $[s_2, s_1] \ll [r_1, r_2]$, jedná se o řetězec a je to proto podle věty 1 svaz.

Uspořádání $\ll$ se nazývá *lexikografické.*

Úloha 14. Nechť $\ll$ značí lexikografické uspořádání bodů roviny a nechť $A = [a, b]$ je některý bod této roviny. Určete množinu těchto bodů $X = [x, y]$, které splňují $A \ll X$.
[Jsou to body X, pro něž $a < x$ a body polopřímky $x = a$, $b \leqq y$.]

Úloha 15. Popište množinu bodů X, které zároveň splňují podmínky $A \ll X$ a $X \ll B$, kde $A = [a, b]$, $B = [c, d]$ jsou dva pevně zvolené body.
[Návod: Rozlište případy $a = c$, $a < c$.]

Úloha 16. Nechť $A = [a, b]$ je daný bod roviny ϱ. Určete všechny ty přímky p roviny ϱ, které mají tu vlastnost, že pro kterýkoli jejich bod B platí $B \ll A$.

[Jsou to právě všechny rovnoběžky s osou y o rovnici $x = e$, kde $e < a$.]

Úloha 17. Pro dvě dvojice $[r_1, r_2]$, $[s_1, s_2]$ reálných čísel definujeme $[r_1, r_2] \leqq [s_1, s_2]$ právě tehdy, když $r_1 \leqq s_1$ a současně $r_2 \leqq s_2$. Dokažte, že relace $\leqq$ určuje na množině všech dvojic $[r_1, r_2]$ uspořádání a že příslušný poset je svaz, v němž platí

$$[r_1, r_2] \vee [s_1, s_2] = [\max(r_1, s_1), \max(r_2, s_2)],$$

$$[r_1, r_2] \wedge [s_1, s_2] = [\min(r_1, s_1), \min(r_2, s_2)].$$

Příklad 17. Označme Q množinu všech kvadratických trojčlenů $x^2 + px + q$, kde $p, q \in \boldsymbol{R}$, pro něž je diskriminant $\Delta = p^2 - 4q$ nezáporný. Pro dva kvadratické trojčleny $x^2 + p_i x + q_i$, $i = 1, 2$, patřící do Q, pišme

$$x^2 + p_2 x + q_2 \ll x^2 + p_1 x + q_1$$

právě tehdy, když

$$p_1 - p_2 \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|,$$

kde $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i$. Našim úkolem má být vyšetření relace $\ll$.

Řešení. Ukážeme nejprve, že relace $\ll$ je uspořádání množiny Q. Přitom je nejdříve ihned patrné, že tato relace je reflexívní. Je to ale i antisymetrická relace, neboť je-li $p_1 - p_2 \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ a $p_2 - p_1 \geqq |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_1}|$, je $p_1 - p_2 \geqq 0$ a $p_2 - p_1 \geqq 0$, takže $p_1 = p_2$ a proto $\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} = 0$, což má za následek, že $q_1 = q_2$. Relace $\ll$ je tranzitivní, neboť z $p_1 - p_2 \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ a $p_2 - p_3 \geqq |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_3}|$ plyne $p_1 - p_3 = (p_1 - p_2) +$

$+ (p_2 - p_3) \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}| + |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_3}| \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_3}|$, přičemž poslední nerovnost plyne užitím trojúhelníkové nerovnosti.

Dokážeme ještě tuto názornou charakterizaci relace $\ll$: Vztah $x^2 + p_2x + q_2 \ll x^2 + p_1x + q_1$ platí právě tehdy, když pro kořeny $\alpha_1 \leqq \beta_1$ polynomu $x^2 + p_1x + q_1$ a kořeny $\alpha_2 \leqq \beta_2$ polynomu $x^2 + p_2x + q_2$ platí $\alpha_2 \geqq \alpha_1$ a $\beta_2 \geqq \beta_1$. Abychom to nahlédli, uvažme, že vztah $p_1 - p_2 \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ je ekvivalentní se současnou platností vztahů

$$p_1 - p_2 \geqq \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} \text{ a } p_1 - p_2 \geqq \sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_1}$$

a je tedy i ekvivalentní s tím, že současně platí

$$\alpha_1 = \frac{-p_1 - \sqrt{\Delta_1}}{2} \leqq \frac{-p_2 - \sqrt{\Delta_2}}{2} = \alpha_2$$

a

$$\beta_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2} \leqq \frac{-p_2 + \sqrt{\Delta_2}}{2} = \beta_2.$$

Užitím výsledku úlohy 17 usuzujeme, že i zde se jedná o svaz, v němž pro trojčleny $x^2 + p_3x + q_3$, $x^2 + p_4x + q_4$ s kořeny po řadě $\alpha_3 \leqq \beta_3$ a $\alpha_4 \leqq \beta_4$ je

$$x^2 + p_3x + q_3 \vee x^2 + p_4x + q_4$$

(resp. $x^2 + p_3x + q_3 \wedge x^2 + p_4x + q_4$) trojčlen $x^2 + p_5x + q_5$ (resp. $x^2 + p_6x + q_6$) s kořeny $\alpha_5 = \max(\alpha_3, \alpha_4) \leqq \beta_5 = \max(\beta_3, \beta_4)$ (resp. s kořeny $\alpha_6 = \min(\alpha_3, \alpha_4) \leqq \beta_6 = \min(\beta_3, \beta_4)$). Zejména tedy máme

$$p_5 = -\left[\max\left(\frac{-p_3 - \sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4 - \sqrt{\Delta_4}}{2}\right) + \right.$$

$$+ \max\left(\frac{-p_3+\sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4+\sqrt{\Delta_4}}{2}\right)\Bigg],$$

$$q_5 = \max\left(\frac{-p_3-\sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4-\sqrt{\Delta_4}}{2}\right).$$

$$\cdot \max\left(\frac{-p_3+\sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4+\sqrt{\Delta_4}}{2}\right)$$

a nahradíme-li v těchto formulích symbol max symbolem min, získáváme formule pro p_6, q_6.

Cvičení

1. Pro kruhy M, N z obrázku 7 neexistuje v posetu $(C(\varrho), \subset)$ infimum množiny $\{M, N\}$.

2. Dokažte, že jsou-li K_1, K_2 dva kruhy ve smyslu příkladu 13, přičemž $K_1 \neq \emptyset$ a $K_2 \neq \emptyset$, pak existuje právě jeden kruh K, který obsahuje K_1 i K_2 a který má nejmenší poloměr.

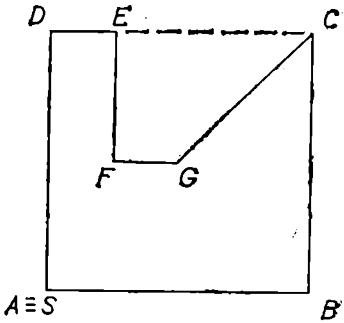
3. Dokažte: Jsou-li K_1, K_2 dva kruhy ve smyslu příkladu 13, přičemž jejich průnik je neprázdný, pak existuje právě jeden kruh K, který je obsažen v K_1 i v K_2 a který má největší poloměr.

4. Rozhodněte, zda omezíme-li se v příkladu 13 pouze na ty otevřené kruhy, jejichž střed leží na dané přímce p (včetně prázdné množiny), tvoří množina $C(\varrho; p)$ takovýchto kruhů při uspořádání inkluzí svaz (resp. úplný svaz).

5. Podmnožinu M některé roviny nazveme *hvězdovitou* právě tehdy, když platí toto (srovn. obr. 9): V M existuje alespoň jeden bod S takový, že pro každý bod X z M

leží v M i každý bod úsečky SX. Např. obrazec $ABCGFED$ určuje hvězdovitou množinu. Označme $H(\varrho)$ množinu všech hvězdovitých množin bodů roviny ϱ. Rozhodněte, zda $(H(\varrho), \subset)$ je a) poset b) svaz c) úplný svaz.

6. Označme $F(\mathbf{R})$ množinu, jejímiž prvky jsou všechny posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ reálných čísel (stručný zápis posloupnosti: $\{a_i\}$). Pro dvě posloupnosti $a = \{a_i\}$, $b = \{b_i\}$ pišme $a \ll b$ právě tehdy, když $a_i \leqq b_i$ pro každé $i \in \mathbf{N}$. Rozhodněte, zda $(F(\mathbf{R}), \ll)$ je a) poset b) svaz c) úplný svaz.



Obr. 9

7. Dokažte, že v každém svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ platí toto:

a) Je-li $k \leqq h$ a $n \leqq m$, pak $k \vee n \leqq h \vee m$.
b) Je-li $d_1 \leqq h$ a $d_2 \leqq h$, pak $d_1 \vee d_2 \leqq h$.
c) Je-li $c \leqq d$, pak pro každé $g \in P$ platí $c \vee g \leqq d \vee \vee g$.
d) Je-li $k \leqq h$ a $n \leqq m$, pak $k \wedge n \leqq h \wedge m$.
e) Je-li $d \leqq h_1$ a $d \leqq h_2$, pak $d \leqq h_1 \wedge h_2$.
f) Je-li $c \leqq d$, pak pro každé $g \in P$ platí $c \wedge g \leqq d \wedge g$.

8. Dokažte, že v každém svazu $\mathscr{P}$ platí pro kterékoli $a, b, c \in P$

a) $a \vee (b \wedge c) \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
b) $a \wedge (b \vee c) \geqq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
c) je-li $a \leqq c$, pak $a \vee (b \wedge c) \leqq (a \vee b) \wedge c$.

4. kapitola

ZÁKLADNÍ TŘÍDY SVAZŮ

V úloze 12 jsme konstatovali, že v každém svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ pro každé a, b, c z P platí podmínky

(S 1) $a \vee b = b \vee a$;

(S 2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;

(S 3) $a \vee (a \wedge b) = a$;

(P 1) $a \wedge b = b \wedge a$;

(P 2) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;

(P 3) $a \wedge (a \vee b) = a$.

Lze dokázat[4]), že jsou-li obráceně na některé neprázdné množině P definovány dvě operace $\vee$, $\wedge$ tak, že platí (S 1) — (S 3) a (P 1) — (P(3) a definujeme-li relaci $\leqq$ předpisem $a \leqq b$ právě tehdy, když $a \wedge b = a$, je relace $\leqq$ uspořádání množiny P a $(P, \leqq)$ je svaz. Z tohoto důvodu se často místo o svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ mluví o svazu $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$. Např. svaz $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ má za operace $\cup$, $\cap$ (sjednocení a průnik) a bývá zapisován též jako uspořádaná trojice $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$.

Bereme-li ve svazu $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$ tři množiny A, B, C patřící do $P(E)$, pak platí

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

a také

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

---

[4]) Srovn. L. Beran [1; str. 36].

(Připomeňme stručně např. důkaz prvního vztahu: Prvek x patří do množiny $A \cap (B \cup C)$ právě tehdy, když patří do A a současně buď do B či do C, tj. patří-li buď do $A \cap B$ či do $A \cap C$. V dalším nahlédneme, že druhý vztah je důsledkem prvního a toho, že $\mathscr{P}(E)$ je svaz.)

Svaz $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ se nazývá *distributivní* právě tehdy, když v $\mathscr{P}$ platí pro každé $a, b, c \in P$

$$(4) \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

a také

$$(5) \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Podle této definice je tedy $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$ distributivní svaz.

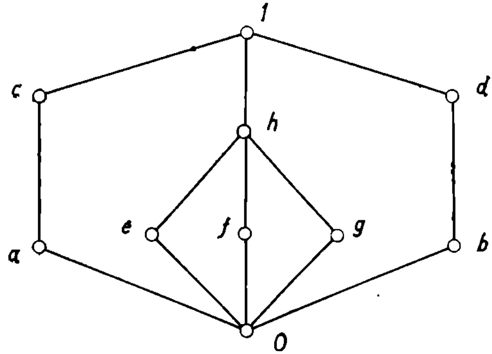
Budeme říkat, že neprázdná podmnožina M nosiče P svazu $\mathscr{P}$ je *uzavřená* vůči operacím $\vee$ a $\wedge$ právě tehdy, když pro každé m, n patřící do M patří do M také $m \vee n$ a $m \wedge n$. Uspořádanou trojici $(M, \vee, \wedge)$ v tomto případě nazýváme *podsvazem* svazu $(P, \vee, \wedge)$ (nebo svazu $(P, \leqq)$). Množina M se nazývá *nosič* tohoto podsvazu. Protože pro každé tři prvky a, b, c z M platí (S 1) — — (S 3) a (P 1) — (P 3), je každý podsvaz i svazem.

Příklad 18. Nechť E značí některou neprázdnou množinu. Označme $F(E)$ množinu všech těch podmnožin množiny E, které mají konečný počet prvků. Máme dokázat, že $(F(E), \cup, \cap)$ je podsvaz svazu $\mathscr{P}(E)$.

Řešení. Zřejmě $\emptyset \in F(E)$ a $F(E)$ je proto neprázdná množina. Jsou-li F_1, F_2 dvě množiny patřící do $F(E)$, pak také množiny $F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2$ mají konečný počet prvků, tj. patří do $F(E)$.

Úloha 18. Nechť $\mathscr{P}$ je svaz s diagramem na obr. 10. Rozhodněte, zda množina

a) $M_1 = \{0, e, f, g, h\}$;
b) $M_2 = \{0, a, b, c, d, 1\}$;
c) $M_3 = \{0, e, f, 1\}$

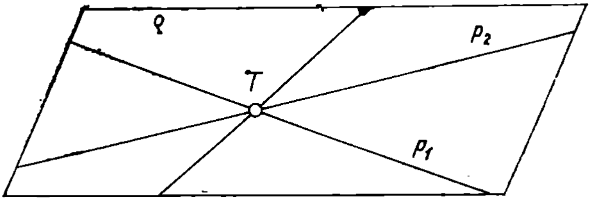


Obr. 10

je nosičem některého podsvazu svazu $\mathscr{P}$.
[a), b) ano, c) ne, neboť $h = e \vee f \notin M_3$.]

Příklad 19. Nechť ϱ je některá rovina z trojrozměrného prostoru E (srovn. příklad 12) a nechť $R(\varrho; T)$ značí množinu, jejímiž prvky jsou — v obdobném smyslu jako u příkladu 12 — rovina ϱ, pevně daný bod T roviny ϱ a všechny ty přímky p roviny ϱ, které procházejí bodem T. Máme dokázat, že $R(\varrho; T)$ je nosičem podsvazu svazu $(L(E), \subset)$.

Řešení. Tvoříme-li průsek a spojení prvků patřících do neprázdné množiny $R(\varrho; T)$, je to opět prvek této množiny.



Obr. 11

Příklad 20. Máme dokázat toto: Platí-li ve svazu $\mathscr{P}$ identita (4) pro každé $a, b, c \in P$, pak v $\mathscr{P}$ platí i (5).

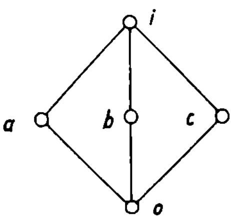
Řešení. Platí

$$
\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] && \text{dle (4)}\\
&= a \vee [(a \vee b) \wedge c] && \text{dle (P 3) a (P 1)}\\
&= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] && \text{dle (4)}\\
&= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) && \text{dle (S 2)}\\
&= a \vee (b \wedge c) && \text{dle (S 3)}
\end{aligned}
$$

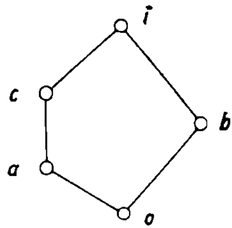
Poznámka. Zaměníme-li v požadavcích (S 1) — (S 3) a (P 1) — (P 3) symbol $\vee$ za $\wedge$ a obráceně, dostaneme tytéž požadavky. To má za následek, že provedeme-li na některý výrok platný pro svazy tuto záměnu, dostaneme opět platný výrok. Této záměně říkáme *dualizování* uvažovaného výroku. Dualizováním výroku z příkladu 20 dostáváme např. výrok, že v každém svazu je identita (4) důsledkem identity (5).

Příklad 21. Máme dokázat, že obsahuje-li svaz $\mathscr{P}$ podsvaz s diagramem shodným s jedním z obou diagramů na obr. 12a a 12b, pak $\mathscr{P}$ není distributivní.

Řešení. Platí $a \vee (b \wedge c) = a \vee o = a$, ale $(a \vee b) \wedge \wedge (a \vee c) = i \wedge (a \vee c) = a \vee c \neq a$.



Obr. 12a

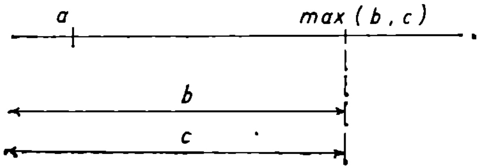


Obr. 12b

Poznámka. Lze dokázat[5]), že není-li svaz $\mathscr{P}$ distributivní, obsahuje podsvaz s diagramem shodným s jedním z obou diagramů z obr. 12ab.

Příklad 22. Máme dokázat, že každý řetězec je distributivním svazem.

Řešení. Podle věty 1 je to svaz. Vzhledem k příkladu



Obr. 13

[5]) Srovn. L. Beran [1; str. 168].

20 stačí ukázat, že platí $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ pro každé tři prvky a, b, c řetězce. Podle příkladu 9 máme tedy ukázat, že prvek $l = \min(a, \max(b, c))$ se rovná prvku $p = \max(\min(a b), \min(a, c))$. Přitom podle definice minima a maxima je zřejmé, že l je jeden z prvků a, b, c. Pokud $l = a$, je $a \leqq \max(b, c)$ (srovn. obr. 13) a tedy platí buď $a \leqq b$ nebo $a \leqq c$. V obou případech je však alespoň jeden z prvků $\min(a, b)$, $\min(a, c)$ roven a a druhý je menší nebo roven a, tj. $p = a$.

Pokud $l = b$, pak buď $b = a$ a $p = \max(b, \min(b, c)) = b$, nebo je $b = \max(b, c)$ a současně $b \leqq a$. To ale znamená, že $c \leqq b \leqq a$ a tedy $p = \max(b, c) = b$. Obdobně postupujeme v případě $l = c$.

Úloha 19. Dva prvky a, b svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ se nazývají *srovnatelné* právě tehdy, když platí buď $a \leqq b$ nebo $b \leqq a$. Bez užití příkladu 22 dokažte, že je-li jeden ze tří prvků a, b, c svazu $\mathscr{P}$ srovnatelný s každým z obou zbývajících prvků, pak platí $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee$ $\vee (a \wedge c)$ a také $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
[Návod: Uvažte, že nejmenší podsvaz svazu $\mathscr{P}$, který obsahuje prvky a, b, c, má buď diagram stejný jako $\mathscr{P}(\{a, b\}) = (P(\{a, b\}), \subset)$ nebo je to řetězec a má diagram stejný jako podsvaz svazu $\mathscr{P}(\{a, b\})$ s nosičem $\{0, \{a\}, \{a, b\}\}$. Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.]

Úloha 20. Pomocí výsledku úlohy 19 podejte jiný důkaz výroku z příkladu 22.

Příklad 23. Máme vyšetřit, zda svaz $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ z úlohy 1 je distributivní.

Řešení. V příkladě 7 jsme ukázali, že supremum resp.

infimum dvouprvkové množiny a, b čísel z $\boldsymbol{N}$ je dáno jejich nejmenším společným násobkem resp. jejich největším společným dělitelem. Pro důkaz distributivity stačí dle příkladu 20 ověřit, že platí (4). Nadto můžeme předpokládat, že kterékoli z čísel a, b, c je různé od nuly. (Přípustnost tohoto předpokladu plyne z toho, že číslo 0 je největší prvek posetu $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ a že je tedy srovnatelným s každým z prvků z $\boldsymbol{N}_0$, takže (4) dle úlohy 19 platí, pokud jedno z čísel a, b, c se rovná 0.) Označme $l = a \wedge (b \vee c)$, $p = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ a pišme[6])

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{kde } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \boldsymbol{N}_0;$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \quad \text{kde } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \boldsymbol{N}_0;$$

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}, \quad \text{kde } \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \boldsymbol{N}_0.$$

Jak známo, je největší společný dělitel $a \wedge b$ čísel a, b číslo se zápisem $p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}$, kde $\delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ pro $i = 1, 2, \dots, k$ a podobně je nejmenší společný násobek $a \vee b$ čísel a, b číslo se zápisem $p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$, kde $\nu_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. Je tedy l číslo se zápisem $p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_k^{\lambda_k}$, kde $\lambda_i = \min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i))$ a p je číslo se zápisem $p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_k^{\pi_k}$, kde $\pi_i = \max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))$. Uvažme nyní ale, že exponenty $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ jsou prvky řetězce $(\boldsymbol{N}_0, \leqq)$. Odtud a z řešení příkladu 22 plyne, že $\lambda_i = \pi_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$, tj. $l = p$.

Příklad 24. Máme dokázat, že svaz $(R(\varrho; T), \subset)$ z příkladu 19

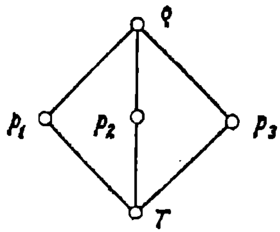
a) není distributivní;

---

[6]) V těchto vyjádřeních můžeme psát tatáž prvočísla $p_1, p_2, \dots, p_k$, neboť připouštíme i mocniny s exponentem 0.

b) splňuje pro každé a, b, $c \in R(\varrho; T)$ tento vztah: Je-li $a \leqq c$, pak $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Řešení. a) Jsou-li p_1, p_2, p_3 tři různé přímky z $R(\varrho; T)$, je množina $\{T, p_1, p_2, p_3, \varrho\}$ nosičem podsvazu s diagramem na obr. 14. Podle příkladu 21 není svaz $(R(\varrho; T), \subset)$ distributivní.



Obr. 14

b) Pro důkaz uvedeného vztahu nejprve konstatujeme, že platí vždy tehdy, můžeme-li použít identity (5), neboť $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$ jak plyne z toho, že pro $a \leqq c$ je $a \vee c = c$. Je-li $a = c$, pak $a \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge a) = a$ dle (P 1) a (S 3). Na druhé straně je $(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge a = a$ dle (P 3) a (P 1). Pro další můžeme proto předpokládat, že $a < c$. To ovšem znamená, že buď (i) a je bod T a c je některá přímka z $R(\varrho; T)$ nebo (ii) a je přímka z $R(\varrho; T)$ a c je ϱ. V obou případech je jeden ze tří prvků buď nejmenší či největší z prvků posetu $R(\varrho; T)$ a je proto srovnatelný s kterýmkoli z prvků z $R(\varrho; T)$. Podle úvodního konstatování soudíme dle úlohy 19, že i v těchto případech dokazovaný vztah platí.

Svaz $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$, pro který — pro každé $a, b, c \in P$ — platí, že je-li $a \leqq c$, pak vždy $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$, se nazývá *modulární*.

Úloha 21. Každý distributivní svaz je modulární.

Příklad 25. Máme dokázat, že obsahuje-li svaz $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ podsvaz s diagramem shodným s diagramem na obr. 12b, pak to není modulární svaz.

Řešení. Platí $a \vee (b \wedge c) = a$, ale $(a \vee b) \wedge c = c \neq a$.

Poznámka. Dá se dokázat[7]), že není-li svaz modulární, obsahuje podsvaz s diagramem shodným s diagramem z obrázku 12b.

V dalším si odvodíme — jako typickou ukázku pracovních metod v teorii svazů — charakterizaci distributivních a modulárních svazů. Nejprve zavedeme některé další nové pojmy.

Jsou-li $a \leqq c$ dva prvky některého posetu $\mathscr{P}$, pak množinu těch prvků x z P, pro něž platí současně $a \leqq x$ a $x \leqq c$, značíme $[a, c]$ a nazýváme ji *interval* svazu $\mathscr{P}$. *Relativním komplementem* prvku $b \in [a, c]$ v intervalu $[a, c]$ rozumíme každý prvek b_1 takový, že $b \wedge b_1 = a$ a zároveň $b \vee b_1 = c$. Má-li svaz $\mathscr{P}$ největší prvek 1 a nejmenší prvek 0, nazýváme relativní komplement prvku a v intervalu $[0, 1]$ stručněji jen *komplement* prvku a.

Příklad 26. Ve svazu s diagramem na obrázku 10 určete $[0, h]$ a nalezněte všechny komplementy prvku a.

Řešení. Je $[0, h] = \{0, e, f, g, h\}$. Prvky e, f, g, h, b, d jsou všemi komplementy prvku a.

Úloha 22. Je-li b_1 relativní komplement prvku $b \in [a, c]$ v intervalu $[a, c]$ takový, že $b_1 = c$, pak $a = b$. Dokažte.

---

[7]) Srovn. L. Beran [1; str. 167].

Úloha 23. Dokažte, že je-li $[a, c]$ interval distributivního svazu $\mathscr{S}$ a je-li $b \in [a, c]$, pak existuje nejvýše jeden relativní komplement prvku b v intervalu $[a, c]$. [Návod: Jsou-li b_1, b_2 relativními komplementy prvku b a jsou-li $i \neq j$ čísla 1, 2, pak $b_j = b_j \wedge (b \vee b_i) = b_j \wedge \wedge b_i \leqq b_i$.]

Úloha 24. Nechť $\mathscr{S}$ je modulární svaz. a) Pak platí toto (srovn. obr. 15):

(6) Pro prvky a, b, c, A, B, C takové, že

$$A \leqq a \leqq b \leqq c \leqq C,$$

$$A \leqq B \leqq C$$

s vlastností

$$b \vee B = C \quad \text{a} \quad b \wedge B = A$$

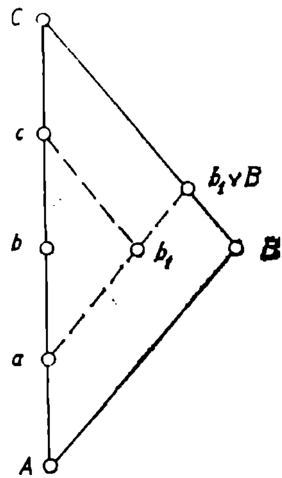
existuje relativní komplement b_1 prvku b v intervalu $[a, c]$ takový, že $c \wedge (b_1 \vee B) = b_1$.

b) Je-li $c = C$, pak $b_1 \geqq B$.

[Návod:

a) Položte $b_1 = (a \vee B) \wedge c$ a dokažte, že $b_1 = a \vee (B \wedge c)$

b) Užijte úlohu 22.]

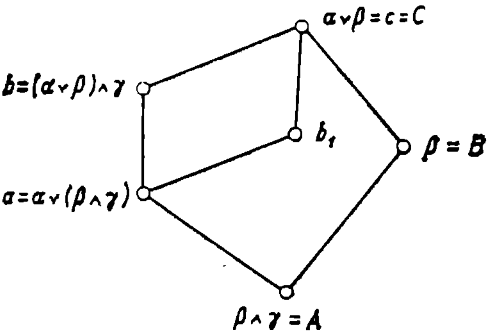


Obr. 15

Věta 3. *Svaz $\mathscr{S}$ je modulární právě tehdy, když splňuje podmínku* (6).

Důkaz. 1) Modulární svaz splňuje podmínku (6) dle úlohy 24. 2) Nechť $\mathscr{S}$ je svaz splňující podmínku (6);

ukážeme, že pak je to nutně modulární svaz. Za tím účelem berme prvky $\alpha, \beta, \gamma \in P$ takové, že $\alpha \leqq \gamma$. Podle cvičení 8c) z třetí kapitoly je $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leqq (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$. Označme tyto prvky po řadě a, b (srovn. obr. 16).



Obr. 16

Označme dále $\beta \wedge \gamma = A$, $\beta = B$, $\alpha \vee \beta = C = c$ a ověřme, že prvky a, b, c, A, B, C splňují předpoklady z podmínky (6). Předně je zřejmě $A \leqq a \leqq b \leqq C$ a proto také

$$\beta \wedge \gamma = A \wedge \beta \leqq a \wedge \beta \leqq b \wedge \beta =$$

$$= [(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma] \wedge \beta = \beta \wedge \gamma$$

a podobně

$$\alpha \vee \beta = [\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)] \vee \beta =$$

$$= a \vee \beta \leqq b \vee \beta \leqq C \vee \beta = \alpha \vee \beta .$$

Z toho získáváme $a \vee B = b \vee B = C$ a $b \wedge B = A$. V důsledku předpokladu platnosti podmínky (6) existuje proto relativní komplement b_1 prvku b v intervalu

$[a, C]$. Podle úlohy 24b) je $b_1 \geqq B$ a tak $b_1 \geqq a \vee B = C$, takže $b_1 = C$. Z výsledku úlohy 22 plyne, že pak $a = b$, tj. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$, takže svaz $\mathscr{P}$ je vskutku modulární.

Úloha 25. Nechť $\mathscr{P}$ je distributivní svaz. Pak platí toto:

(7) Pro prvky a, b, c, A, B, C takové, že

$$A \leqq a \leqq b \leqq c \leqq C, \qquad A \leqq B \leqq C$$

s vlastností

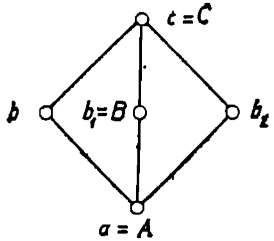
$$b \vee B = C \quad \text{a} \quad b \wedge B = A$$

existuje právě jeden relativní komplement b_1 prvku b v intervalu $[a, c]$.

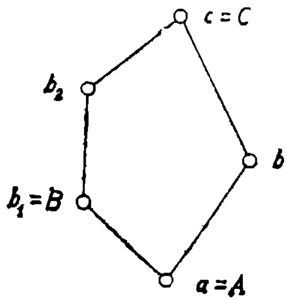
[Návod: Užijte úlohu 21, 23 a 24.]

Věta 4. *Svaz $\mathscr{P}$ je distributivní právě tehdy, když splňuje podmínku* (7).

Důkaz. 1) Podle úlohy 25 splňuje každý distributivní svaz podmínku (7).



Obr. 17



Obr. 18

2) Předpokládejme, že $\mathscr{P}$ je svaz splňující podmínku (7). Protože přímý důkaz je poměrně dlouhý (srovn. cvičení 8—12 této kapitoly), použijeme výrok z poznámky za příkladem 21. Kdyby $\mathscr{P}$ obsahoval jako podsvaz svaz s diagramem z obr. 12a či 12b, označme si prvky těchto svazů ve shodě s označením z (7): Pro prvek b by v obou případech existovaly dva různé relativní komplementy b_1, b_2 v intervalu $[a, c]$. To je spor s předpokladem platnosti (7) a tento spor dokazuje, že svaz $\mathscr{P}$ je distributivní.

Svaz $\mathscr{P}$, který má nejmenší prvek 0 a největší prvek 1 a který je takový, že v něm pro každý prvek existuje alespoň jeden jeho komplement, se nazývá *komplementární svaz*. Svaz, který je komplementární a současně distributivní, se nazývá *Booleův svaz*.

Úloha 26. Dokažte, že v každém Booleově svazu existuje pro každý prvek $b \in [a, c]$ právě jeden jeho relativní komplement v intervalu $[a, c]$.

[Návod: Užijte úlohu 25.]

Věta 5. *Nechť $\mathscr{P}$ je svaz s nejmenším a největším prvkem. Pak $\mathscr{P}$ je Booleův svaz právě tehdy, když pro kterékoli prvky a, b, c s vlastností $a \leqq b \leqq c$ existuje právě jeden relativní komplement prvku b v intervalu $[a, c]$.*

Důkaz. Dle úlohy 26 stačí dokázat, že svaz $\mathscr{P}$ s uvedenou vlastností je distributivní (to ale plyne z věty 4) a že je komplementární, což plyne přímo z uvedené podmínky, volíme-li za a nejmenší a za c největší prvek svazu $\mathscr{P}$.

Úloha 27. Dokažte, že svaz $\mathscr{P}(E)$ podmnožin množiny E s uspořádáním inkluzí je Booleův svaz.

[Návod: Pro $M \subset E$ je komplementem množina $E \setminus M$, jejímiž prvky jsou právě ty prvky z E, které nepatří do M.]

Z úlohy 26 plyne, že pro každý prvek a Booleova svazu $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ existuje právě jeden jeho komplement, zpravidla značený a'. To dovoluje definovat na P další operaci „komplement", která každému prvku a přiřazuje jeho komplement. Uspořádaná čtveřice $(P, \vee, \wedge, ')$ se pak nazývá *Booleova algebra.* Čtenáři zajímajícímu se o jejich studium doporučujeme moderně napsanou knížku O. Odvárky [2].

Cvičení

1. Nalezněte všechny množiny, které ve svazu ze cvičení 6a) druhé kapitoly jsou nosičem podsvazu.

2. Dokažte, že nosiče všech podsvazů daného svazu $\mathscr{P}$ spolu s prázdnou množinou tvoří při uspořádání daném inkluzí úplný svaz a nalezněte diagram tohoto svazu v případě svazu $\mathscr{M}_5$ ze cvičení 6a) druhé kapitoly. Určuje tento diagram modulární svaz?

3. Svaz $(F(\mathbf{R}), \ll)$ ze cvičení 6 třetí kapitoly je distributivní. Dokažte.

4. Dokažte, že svaz $\mathscr{P}$ je modulární právě tehdy, když pro každé $a, b, c \in P$ platí

$$(a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)] = [(a \wedge c) \vee b] \wedge (a \vee c).$$

5. Rozhodněte, zda svaz $(C(\varrho; p), \subset)$ ze cvičení 4 třetí kapitoly je a) distributivní b) modulární.

6. Vyšetřete, zda svaz $(K(\varrho), \subset)$ z příkladu 14 je a) distributivní b) modulární.

7. Platí-li v některém svazu $\mathscr{P}$ vztahy $A \leqq a \leqq b \leqq$

$\leqq c \leqq C$, je-li b_1 relativní komplement prvku b v intervalu $[a, c]$, c^+ relativní komplement prvku c v intervalu $[b_1, C]$ a je-li a^+ relativní komplement prvku a v intervalu $[A, c^+]$, je a^+ relativním komplementem prvku b v intervalu $[A, C]$.

8. Splňuje-li svaz $\mathscr{P}$ podmínku (7) a jsou-li $A \leqq a \leqq b \leqq \leqq c \leqq C$, B, b_1 prvky s vlastnostmi z (7), pak a) $c \wedge (b_1 \vee B) = b_1$ b) $\mathscr{P}$ je modulární svaz.
[Návod: Užijte větu 3.]

9. Dokažte, že pro každé tři prvky a, b, c distributivního svazu $\mathscr{P}$ platí

$$(8) \quad [b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = [c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b).$$

10. Svaz $\mathscr{P}$ je distributivní právě tehdy, když pro každé $a, b, c \in P$ platí (8). Dokažte.

11. a) Nechť $\mathscr{P}$ je modulární svaz. Pro $a, b, c \in P$ označme $d = a \wedge (b \vee c)$, $\beta = [b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c)$, $\gamma = [c \vee \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b)$.
Pak platí

$$d \wedge \beta = d \wedge \gamma = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$d \vee \beta = d \vee \gamma = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c);$$

$$\beta = [b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c).$$

b) Je-li $\mathscr{P}$ modulární svaz, v němž platí (7), pak — v označení z a) — je $\beta = \gamma$.

12. Bez použití poznámky za příkladem 21 dokažte, že svaz splňující (7) je distributivní.

13. a) Ukažte, že ve svazu $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ z úlohy 1 nemusí pro tři čísla z $\boldsymbol{N}_0$ splňující $a \,\sigma_1\, b$, $b \,\sigma_1\, c$ existovat relativní komplement prvku b v intervalu $[a, c]$.

b) Ukažte, že svaz $(R(\varrho; T), \subset)$ z příkladu 19 je komplementární, ale není to Booleův svaz.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. kapitola

1. Jedná se o všechny podmnožiny kartézského součinu $\{a, b\} \times \{a, b\}$, tj. nacházíme právě tyto relace: $\varrho_1 = \emptyset$, $\varrho_2 = \{(a, a)\}$, $\varrho_3 = \{(a, b)\}$, $\varrho_4 = \{(b, a)\}$, $\varrho_5 = \{(b, b)\}$, $\varrho_6 = \{(a, a), (a, b)\}$, $\varrho_7 = \{(a, a), (b, a)\}$, $\varrho_8 = \{(a, a), (b, b)\}$, $\varrho_9 = \{(a, b), (b, a)\}$, $\varrho_{10} = \{(a, b), (b, b)\}$, $\varrho_{11} = \{(b, a), (b, b)\}$, $\varrho_{12} = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$, $\varrho_{13} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, $\varrho_{14} = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$, $\varrho_{15} = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$, $\varrho_{16} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

2. a) $\varrho_8, \varrho_{13}, \varrho_{14}, \varrho_{16}$. b) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_5, \varrho_8, \varrho_9, \varrho_{12}, \varrho_{15}, \varrho_{16}$. c) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \varrho_6, \varrho_7, \varrho_8, \varrho_{10}, \varrho_{11}, \varrho_{13}, \varrho_{14}$. d) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \varrho_6, \varrho_7, \varrho_8, \varrho_{10}, \varrho_{11}, \varrho_{13}, \varrho_{14}, \varrho_{16}$.

3. Např. $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_5$.

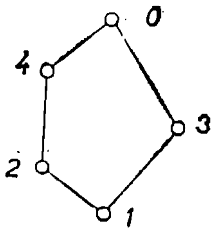
4. a) $\varrho_8, \varrho_{13}, \varrho_{14}, \varrho_{16}$. b) $\varrho_8, \varrho_{13}, \varrho_{14}$. c) ϱ_8, ϱ_{16}.

5. a) $\varepsilon_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_2 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_3 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$, $\varepsilon_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_5 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\} = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$. b) $\eta_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_3 = \{(a, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_4 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_5 = \{(a, a), (a, d), (b, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$, $\eta_6 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_7 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_8 = \{(a, a),$

$(a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_9 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_{10} = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$, $\eta_{11} = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_{12} = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_{13} = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, a), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_{14} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_{15} = \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$.

2. kapitola

1. Jedná se diagram na obr. 19.



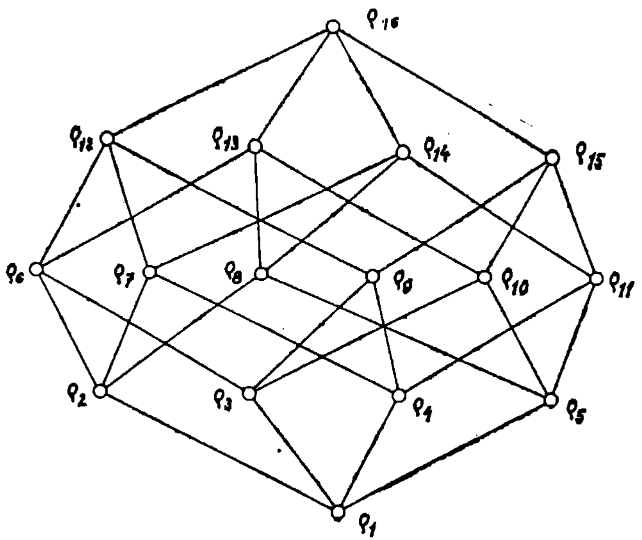
Obr. 19

2. Při označení z řešení cvičení 1 z první kapitoly je to diagram na obr. 20.

3. Zde se jedná o poset $(P(M \times M), \subset)$, což je podle příkladu 10 úplný svaz.

4. Z věty 2 plyne kladná odpověď v případech a), b), d). Protože podle výsledku cvičení 2 této kapitoly a cvičení 2 c) první kapitoly neexistuje supremum množiny $\{\varrho_6, \varrho_7\}$ v posetu všech antisymetrických relací na $\{a, b\}$, netvoří takovéto relace v obecném případě při uspořádání daném inklúzí dokonce ani svaz.

5. a) Pomocí věty 2 dostáváme kladnou odpověď. b) Užitím cvičení 4b) z první kapitoly plyne, že neexistuje supremum množiny $\{\varrho_{13}, \varrho_{14}\}$ v posetu všech uspořádání na dvouprvkové množině $\{a, b\}$ při uspořádání inklúzí; nejedná se tedy obecně ani o svaz.

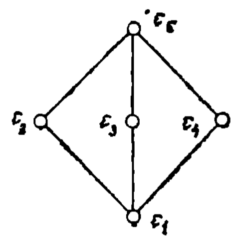


Obr. 20

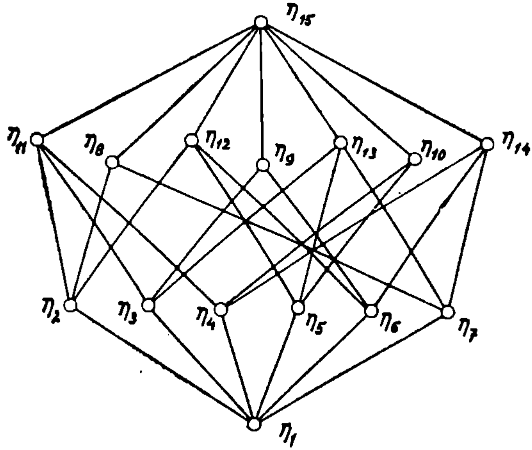
6. a) Při označení z řešení cvičení 5a) první kapitoly máme diagram svazu $\mathcal{M}_5$ na obr. 21.

b) Při označení z řešení cvičení 5b) první kapitoly nacházíme diagram z obr. 22.

7. Označme $D_0 = D \cap I$ (srovn. příklad 8). Kdyby existovalo $\inf_{(I,\leq)} D_0$, existovalo by i $\inf_{(Q,\leq)} D$, což — jak již víme — není pravda.



Obr. 21



Obr. 22

3. kapitola

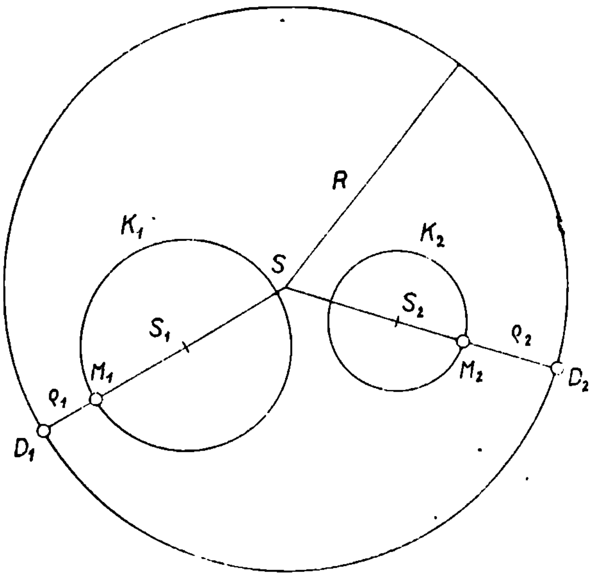
1. Kterýkoli kruh, který je dolní závorou pro $\{M, N\}$, by musel být obsažen v průniku obou kruhů M, N. Kdyby mezi těmito dolními závorami existovala největší, musela by obsahovat každý kruh, který je obsažen v průniku obou kruhů M, N a proto by toto infimum obsahovalo každý vnitřní bod průniku a samo by mělo být — dle prvního konstatování — podmnožinou průniku. To pro žádný kruh není možné.

2. Označme R poloměr a S střed některého kruhu, který obsahuje oba kruhy K_1, K_2 určené kružnicemi $k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$. Označme M_i (resp. D_i) průsečík polopřímky SS_i s kružnicí k_i (resp. s kružnicí $(S; R)$)

(obr. 23). Označme $M_iD_i = \varrho_i$, takže $\varrho_i \geqq 0$. Pak pro $i = 1, 2$ platí $R = \varrho_i + r_i + SS_i$ a odtud

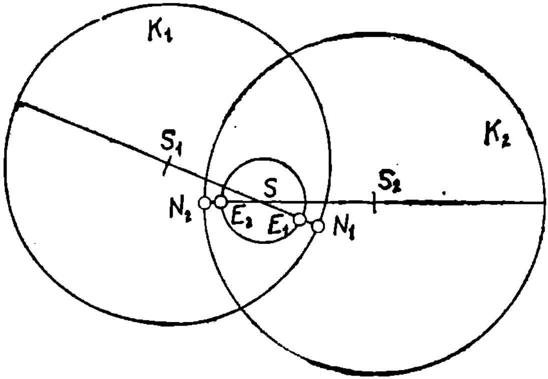
$$R = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{SS_1 + SS_2}{2} + \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

Výraz vpravo není menší než $R_0 = \dfrac{r_1 + r_2}{2} + \dfrac{S_1S_2}{2}$. (To plyne z toho, že $\varrho_1 + \varrho_2 \geqq 0$ a z trojúhelníkové nerovnosti $SS_1 + SS_2 \geqq S_1S_2$.) Přitom $R = R_0$ právě tehdy, když $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ a když zároveň S leží na spojnici S_1 a S_2. To ale říká, že v tomto případě se jedná o vnější tečnou kružnici obou kružnic k_1, k_2.



Obr. 23

3. Označme r poloměr a S střed některého kruhu, který je obsažen v kruzích K_1, K_2 určených kružnicemi $k_i = (S_i, r_i)$. Označme N_i (resp. E_i) průsečík polopřímky



Obr. 24

S_iS s kružnicí k_i (resp. s kružnicí (S, r)) (obr. 24). Nechť ϱ_i značí délku úsečky E_iN_i. Pak platí $r_i = \varrho_i + r + SS_i$ a odtud

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{SS_1 + SS_2}{2}.$$

Obdobnou úvahou jako v předchozím příkladě nahlédneme, že

$$r \leqq r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{S_1S_2}{2}$$

a že rovnost $r = r_0$ nastane právě tehdy, když $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ a když současně S leží na spojnici S_1 a S_2. To znovu říká, že se jedná o kruh omezený vnitřní společnou tečnou kružnicí obou kružnic k_1, k_2.

4. Protože $\emptyset$ je nejmenším prvkem posetu $C(\varrho; p)$, je patrná existence suprema a infima každé dvouprvkové množiny $\{K_1, K_2\}$, jejíž alespoň jeden prvek je roven prázdné množině. Rovněž je patrné, že $\emptyset$ je infimum množiny $\{K_1, K_2\}$ v případě, že $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Jsou-li ale K_1, K_2 takové kruhy, že jejich průnik $K_1 \cap K_2$ je neprázdný, pak berme jim příslušný kruh K ze cvičení 3. Kterýkoli další kruh K_3, který je obsažen jak v K_1 tak i v K_2 a jehož střed leží na přímce p, určuje na p průsečíky C_1, C_2 takové, že úsečka C_1C_2 je částí úsečky určené dotykovými body obvodových kružnic kruhů K_1, K_2, K a tedy i celý kruh K_3 je obsažen v kruhu K. Obdobně lze užít cvičení 2 k odvození existence suprema množiny $\{K_1, K_2\}$, kde K_1, $K_2 \in C(\varrho; p)$ jsou neprázdné kruhy. Je proto $(C(\varrho; p), \subset)$ svaz. Není to však úplný svaz, neboť např. množina všech kruhů z $C(\varrho; p)$ nemá v tomto posetu supremum.

5. Ověřením reflexivity, tranzitivity a antisymetrie dostáváme, že $(H(\varrho), \subset)$ je poset. Není to však svaz — a tím spíše ani úplný svaz — neboť obrazec $ABCGFED$ i obrazec $EFGC$ jsou hvězdovité množiny, ale jejich průnik sestává z úseček EF, FG a GC a to není hvězdovitá množina. Odtud je patrné, že množina utvořená z obou zmíněných obrazců má v $(H(\varrho), \subset)$ jak EFG tak i FGC za dolní závoru a že neexistuje největší dolní závora této množiny (patřící do $H(\varrho)$). Pro tuto dvouprvkovou množinu $\{ABCGFED, EFGC\}$ proto v $(H(\varrho), \subset)$ neexistuje infimum.

6. Jedná se o poset, který je dokonce svazem, v němž $\{a_i\} \vee \{b_i\} = \{c_i\}$, kde $c_i = \max(a_i, b_i)$, $\{a_i\} \wedge \{b_i\} = \{d_i\}$, kde $d_i = \min(a_i, b_i)$. Není to však úplný svaz, neboť bereme-li za M množinu všech posloupností tvaru $n, n, n, \ldots$ (postupně pro $n = 1, 2, \ldots$), je zřejmé, že ve svazu $(F(\boldsymbol{R}), \ll)$ neexistuje supremum množiny M.

7. a) Protože $k \leqq h$ a $n \leqq m$ a protože $h \vee m$ je horní závorou množiny $\{h, m\}$, je $h \leqq h \vee m$ a podobně $m \leqq \leqq h \vee m$. V důsledku tranzitivity relace $\leqq$ je proto také $k \leqq h \vee m$ a $n \leqq h \vee m$, takže $h \vee m$ je horní závora množiny $\{k, n\}$; dle (3s) je tedy $k \vee n \leqq h \vee m$. b) V a) položte $k = d_1$, $m = h$, $n = d_2$ a uvažte, že $h \vee h = = h$. c) V a) položte $h = d$, $k = c$ a $m = n = g$. d)—f) se odvodí obdobně.

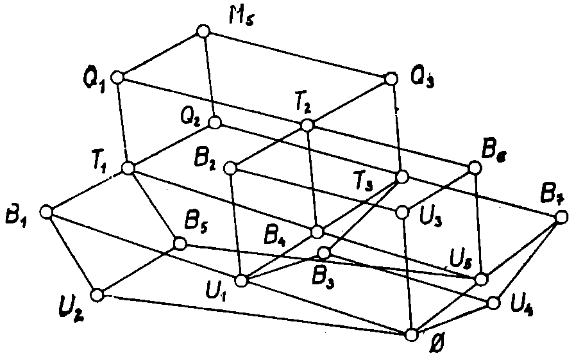
8. a) Je $a \leqq a \vee b$ a $a \leqq a \vee c$. Proto dle cvičení 7e) platí $a \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Dále platí $b \wedge c \leqq b \leqq a \vee b$ a podobně $b \wedge c \leqq c \leqq a \vee c$. Podle téhož cvičení je proto $b \wedge c \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Z cvičení 7b) plyne, že $a \vee (b \wedge c) \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. b) Vyjdeme ze vztahů $a \geqq a \wedge b$, $a \geqq a \wedge c$ a postupujeme obdobně jako v a). c) Je-li $a \leqq c$, je $a \vee c = c$ a výrok z c) je proto důsledkem a).

4. kapitola

1. Kterákoli jednoprvková množina $U_i = \{\varepsilon_i\}$ je nosičem podsvazu. Z dvouprvkových určují podsvaz právě tyto (srovn. obr. 21): $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $B_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$, $B_3 = = \{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}$, $B_4 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_5\}$, $B_5 = \{\varepsilon_2, \varepsilon_5\}$, $B_6 = \{\varepsilon_3, \varepsilon_5\}$, $B_7 = = \{\varepsilon_4, \varepsilon_5\}$. Tříprvkové: $T_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5\}$, $T_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5\}$, $T_3 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$. Čtyřprvkové: $Q_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_5\}$, $Q_2 = = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$, $Q_3 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$. Rovněž množina $M_5 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$ je nosičem podsvazu.

2. Užijeme větu 2: P je největší prvek tohoto posetu a je-li M některá neprázdná množina nosičů podsvazů svazu $\mathscr{P}$, je jejich průnik buď prázdná množina nebo nosič podsvazu.

Diagram tohoto svazu pro svaz $\mathscr{M}_5$:



Obr. 25

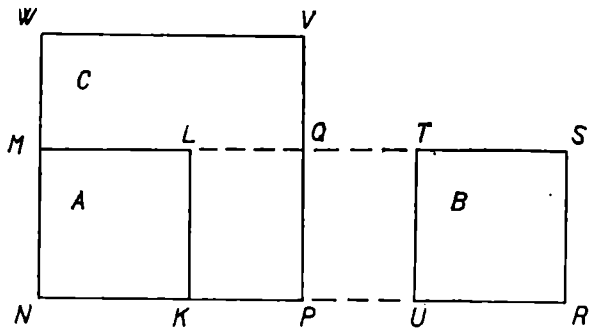
Tento diagram není podle příkladu 25 modulární, neboť $\{\emptyset, U_4, B_7, B_1, Q_2\}$ je nosič podsvazu s diagramem shodným s obr. 12b.

3. Užitím popisu průseku a spojení dvou prvků svazu $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}), \ll)$ daného ve cvičení 6 z třetí kapitoly a z řešení příkladu 22 usuzujeme, že platí identita (4), což dle příkladu 20 znamená, že platí též (5) a tento svaz je proto distributivní.

4. 1) Je-li $a \leqq c$ a platí-li uvedená podmínka, pak nejprve $a \wedge c = a$ a $a \vee c = c$. Odtud je zřejmé, že přepis podmínky ze cvičení 4 vede na požadavek modularity svazu $\mathscr{P}$. 2) Je-li obráceně $\mathscr{P}$ modulární svaz, stačí si uvědomit, že v každém svazu je $a \wedge c \leqq c \leqq a \vee c$ a tedy tím spíše $a \wedge c \leqq a \vee c$. Užití definice modulárního svazu dává ve cvičení uvedenou podmínku.

5. Tento svaz není modulární a tedy tím spíše dle úlohy 21 není distributivní. Abychom nahlédli, že tento svaz není modulární, berme v rovině ϱ pravoúhlý souřadný systém a za přímku p berme osu x. Značí-li A otevřený kruh omezený kružnicí se středem v bodě [0,75; 0] a poloměrem 0,25, C kruh určený kružnicí se středem v bodě [0,5; 0] a poloměrem 0,5 a je-li B kruh omezený kružnicí se středem v bodě [—0,5; 0] a s poloměrem 0,5, je $B \vee C = B \vee A = I$, kde I značí kruh určený kružnicí se středem v počátku a s poloměrem rovným 1 a $B \wedge C = B \wedge A = \emptyset$. Protože $A \subset C$, určují $A, B, C, I, \emptyset$ nosič podsvazu s diagramem z obrázku 12b a tedy podle příkladu 25 není tento svaz modulární.

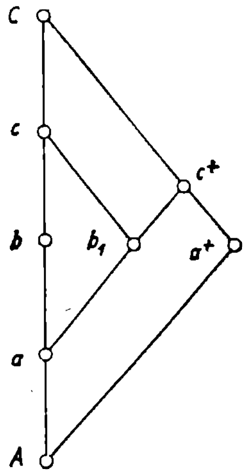
6. Tento svaz není distributivní, neboť není dokonce ani modulární. Abychom to nahlédli, podívejme se na připojený obrázek 26. Za konvexní množiny A, B, C volme po řadě čtverce $KLMN$, $RSTU$, $PVWN$. Patrně $A \subset C$. Ve svazu $(K(\varrho), \subset)$ je $A \vee B$ nejmenší konvexní množina, která obsahuje jak A tak i B. To je patrně obdélník $NRSM$. Jsou-li K_1, K_2 dvě konvexní podmnožiny roviny ϱ, pak dle úvahy z řešení příkladu 14 je $K_1 \wedge K_2 =$



Obr. 26

$= K_1 \cap K_2$. Je tedy $(A \vee B) \wedge C$ rovno průniku obdélníku $NRSM$ se čtvercem $NPVW$, tj. je to obdélník $MNPQ$. Vyšetříme posléze výraz $A \vee (B \wedge C)$. Zde ale je $B \wedge C = B \cap C = \emptyset$ a nejmenší konvexní množina, která obsahuje jak A tak i prázdnou množinu, je množina A. To znamená, že $A \vee (B \wedge C) = A$.

7. Platí (srovn. obr. 27) $b \wedge a^+ \leqq c \wedge c^+ = b_1$ a proto



Obr. 27

$b \wedge a^+ \leqq b \wedge b_1 = a$. Odtud dále $b \wedge a^+ \leqq a \wedge a^+ = A$ a ježto $A \leqq b$ a $A \leqq a^+$, je současně $A \leqq b \wedge a^+$, takže $A = b \wedge a^+$. Dále je $b \vee a^+ \geqq a \vee a^+ = c^+ \geqq b_1$ a proto $b \vee a^+ \geqq b \vee b_1 = c$. Máme rovněž $b \vee a^+ \geqq c^+$ a na základě toho též $b \vee a^+ \geqq c \vee c^+ = C$. Protože $b \leqq C$ a $a^+ \leqq c^+ \leqq C$, je $b \vee a^+ \leqq C$ a nutně proto $b \vee a^+ = C$.

8. a) Užijeme-li (7) na $A_3 = a_3 = B \wedge c$, $b_3 = B$, $c_3 = C_3 = C$, $B_3' = c \geqq B_3'' = b \vee (B \wedge c)$ a na $A_4 = a_4 = A$,

$b_4 = B \wedge c$, $c_4 = C_4 = a \vee (B \wedge c)$, $B_4' = b \wedge [a \vee (B \wedge c)] \geqq B_4'' = a$, máme $b_1 = a \vee (B \wedge c)$ a podobně $b_1 = c \wedge (B \vee a)$. Proto $c \wedge (b_1 \vee B) = c \wedge \{[a \vee (B \wedge c)] \vee B\} = c \wedge (a \vee B) = b_1$. b)Podle a) je splněna podmínka (6), načež stačí užít větu 3.

9. Platí (užitím distributivity): $[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \vee (a \wedge c)$; $[c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b) =$
$= [c \wedge (a \vee b)] \vee [(a \wedge b) \wedge (a \vee b)] =$
$= [(c \wedge a) \vee (c \wedge b)] \vee (a \wedge b) =$
$= [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \vee (a \wedge c)$.

10. Předpokládejme, že v (8) je $b \leqq c$; přepisem pak dostáváme $[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = b \vee (a \wedge c)$, $[c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b) = c \wedge (a \vee b)$ a svaz $\mathscr{P}$ je proto modulární. V důsledku modularity platí $V = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge [b \vee (a \wedge c)] = a \wedge (a \vee c) \wedge [b \vee (a \wedge c)]$. Užitím modularity nejprve máme $[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = [b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c)$ a dle (8) tedy platí $[b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) = [c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b)$. Provedeme-li dále záměnu a za c, c za a a b za b, dostaneme odtud $[b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) = [a \vee (c \wedge b)] \wedge (c \vee b)$ a proto $V = a \wedge [a \vee (c \wedge b)] \wedge (c \vee b) = a \wedge (c \vee b)$.

11. a) Platí (užitím modularity a toho, že $b \vee c \geqq b \vee (a \wedge c)$) $d \wedge \beta = a \wedge (b \vee c) \wedge [b \wedge (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) = a \wedge (a \vee c) \wedge [b \vee (a \wedge c)] = a \wedge [b \vee (a \wedge c)] = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $d \vee \beta = [a \wedge (b \vee c)] \vee \{[b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c)\} = [a \wedge (b \vee c)] \vee [b \wedge (a \vee c)] \vee [(a \wedge c) \wedge (a \vee c)]$. Protože $a \wedge (b \vee c) \geqq a \wedge c = (a \wedge c) \wedge (a \vee c)$, máme dále $d \vee \beta = [a \wedge (b \vee c)] \vee [b \wedge (a \vee c)] = \{[a \wedge (b \vee c)] \vee b\} \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee c)$. Obdobné vztahy pro γ plynou záměnou c za b, b za c a a za a. Poslední výraz pro β jsme odvodili v řešení příkladu 10. b) Podle a) jsou β a γ dva relativní komplementy prvku d a podle (7) je proto $\beta = \gamma$.

12. Podle cvičení 8b) je $\mathscr{P}$ modulární svaz, podle cvičení 11b) a cvičení 10 je distributivní.

13. a) Stačí např. volit $a = 3$, $b = 6$, $c = 12$ b) V příkladě 24a) jsme ukázali, že tento svaz není distributivní, takže tím spíš to není Booleův svaz. Je to však komplementární svaz: K bodu T je komplementem rovina ϱ a obráceně. K dané přímce p procházející bodem T je komplementem kterákoli přímka p_1 procházející bodem T a různá od p.

LITERATURA

[1] L. Beran: Grupy a svazy (SNTL, Praha 1974)
[2] O. Odvárko: Booleova algebra (Škola mladých matematiků, sv. 31, Praha 1973)
[3] G. Papy: Mathématique moderne 5 (Arithmétique) (Didier, Paris 1966)
[4] J. Vyšín: Konvexní útvary (Škola mladých matematiků, sv. 9, Praha 1964)

REJSTŘÍK*)

*) Číslo značí stranu, kde je pojem zaveden

OBSAH

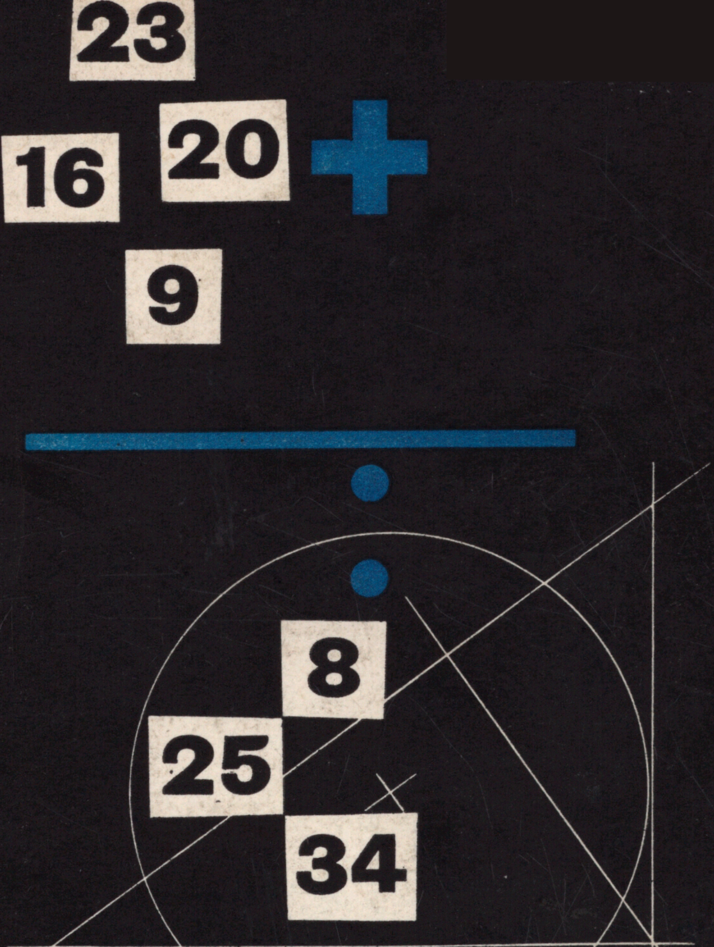
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

LADISLAV BERAN

Uspořádané množiny

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 3926
Edice Škola mladých matematiků, svazek 42
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
2,44 AA, 3,13 VA. 80 stran
Náklad 8000 výtisků. 1. vydání
Praha 1978. 508/21/81.5

23-063-78 03/2 Cena brož. výt. Kčs 5,—



23-063 78
03/2
Cena brož.
Kčs 5,—