Rovinné grafy

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ROVINNÉ GRAFY

41

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

BOHDAN ZELINKA

Rovinné grafy

PRAHA 1977
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali RNDr. Jiří Sedláček, CSc.
a RNDr. Antonín Vrba, CSc.

PŘEDMLUVA

Teorie grafů je poměrně mladou matematickou disciplínou, a přitom dosti netradiční. Často vznikají spory o to, kam má být zařazena; v poslední době se zpravidla považuje za součást kombinatoriky. Má četné aplikace a souvisí i s různými problémy rekreační matematiky. V této knížce bych chtěl podat úvod do jednoho jejího odvětví, a to do teorie rovinných grafů. Je to odvětví, jehož výsledky jsou dosti názorné, a přitom je to odvětví dosti rozpracované (také díky tomu, že do něho spadá proslulý problém čtyř barev).

První kapitola vás seznámí s pojmem grafu, jak se vyvinul jako abstrakce z různých praktických situací. V druhé kapitole si objasníme některé základní pojmy teorie grafů, které budeme při čtení dalšího textu potřebovat. K samotnému pojmu rovinného grafu přikročíme až v třetí kapitole; řekneme si, které grafy jsou rovinné a které nikoliv. Další pojmy související s pojmem rovinného grafu si popíšeme ve čtvrté kapitole. Pátá kapitola je věnována speciálnímu typu rovinných grafů, takzvaným grafům triangulací. Jeden z nejproslulejších matematických problémů, problém čtyř barev, bude náplní šesté kapitoly. V sedmé kapitole si řekneme něco o vnějškově rovinných grafech a konečně v osmé kapitole poznáme, jak teorie rovinných grafů souvisí s teorií konvexních mnohostěnů, a uvidíme, jak vypadají pravidelné konvexní mnohostěny.

Ke studiu této knížky nepotřebujete příliš mnoho předběžných znalostí; stačí vám základní poznatky o množinách a středoškolské učivo geometrie. Snažil jsem se však uvádět definice a věty v přesném matematickém znění a rovněž přesné důkazy. Nepřeskakujte při čtení důkazy; čtěte je a snažte se jim porozumět. Matematika bez důkazů není matematikou. Nepodaří-li se vám však přes všechnu snahu některému důkazu porozumět, pak teprve jej přeskočte, uvěřte mi, že vám nelžu, a čtěte dále. Později se však snažte se k přeskočenému důkazu vrátit a přečíst si jej znova.

Samozřejmě na některých místech se i v důkaze odvolávám na názor; je to v případech, kdy k přesnému dokazování by bylo zapotřebí znalostí z jiné matematické disciplíny, a to topologie. U některých vět vynechávám důkazy vůbec, protože jsou příliš složité; věty však vynechat nechci, protože jsou důležité pro doplnění informace o určité problematice.

Možná, že i některé definice se vám budou zdát složité. Zamýšlejte se však i nad těmito definicemi a snažte se jim porozumět. Pocvičíte se tak v matematickém myšlení, což pro vás bude mít význam při studiu matematiky na vysoké škole.

Na konci knížky uvádím seznam použité literatury. Jsou v něm uvedeny jen knižní publikace; pokud by čtenář chtěl hledat určité výsledky přímo v původních článcích v časopisech, najde potřebné odkazy v citovaných knihách. Tyto knihy rovněž doporučuji k dalšímu studiu; proto také u některých uvádím ruské překlady, které jsou snáze dosažitelné a pro většinu čtenářů asi také lépe jazykově srozumitelné než originály. Z českých publikací uvádím mimo jiné knihu J. Sedláčka [9], která je srozumitelným úvodem do obecné teorie grafů.

Byl bych potěšen, kdyby aspoň některé čtenáře teorie grafů zaujala natolik, aby si ji jednou zvolili za svou vědeckou specializaci.

V Liberci 15. března 1976.

BOHDAN ZELINKA

I. KAPITOLA

GRAFY SVĚTEM VLÁDNOU

„Samozřejmě!" řeknete si a hned se vám vybaví ony známé křivky v soustavě souřadnic, s nimiž se setkáváme nejen v matematice, ale skoro ve všech oborech lidské činnosti. A asi vás překvapí, že se zde bude mluvit o něčem zcela jiném.

V matematice totiž existuje pojem grafu, který nemá nic společného se známými grafy funkcí, až na název, odvozený rovněž z řeckého „grafein", což znamená „psáti". Ze stejného základu jsou odvozena i známá slova „telegrafie" (psaní na dálku), „fotografie" (psaní světlem), „geografie" (zeměpis) a mnohá další. Vidíme tedy, že zde půjde o nějaké psaní či spíše kreslení. Než však uvedeme definici grafu, ukážeme si některé příklady praktického použití tohoto pojmu.

Otevřete-li železniční jízdní řád, padne vám do oka především jistá mapa. Je to mapa poněkud odlišná od těch, které se vyskytují v zeměpisných atlasech. Jsou na ní sice zakresleny státní hranice, avšak nenajdeme na ní hory ani řeky (s výjimkou hor, na kterých jsou stanice lanovek), pouze kroužky znázorňující železniční stanice a úsečky nebo oblouky, které tyto kroužky spojují a znázorňují tak spojení těchto stanic železniční tratí. Je to přirozené; tato mapa nás neučí zeměpisu, ale je pouze pomůckou k tomu, abychom mohli snadno vyhledat v jízdním řádu trať, kterou potřebujeme.

Je tu však ještě něco jiného, čím se tato mapa liší od jiných map. Na leckteré mapě jsou zakresleny železniční tratě. Srovnejte však nákres železniční tratě na běžné mapě s nákresem na mapě v jízdním řádu a vyberte si k tomu nějakou trať v horské oblasti. Co vidíte? Na běžné mapě se trať klikatí, protože je zakreslena tak, jak ve skutečnosti vypadá. Na železniční mapě však místo klikaté křivky vidíme úsečku nebo nanejvýš velmi málo zakřivený oblouk. To samozřejmě také odpovídá účelu této mapy. Jedeme-li někam vlakem, nestaráme se o žádné zatáčky na trati a spoléháme se plně na to, že nás vlak poveze tak, jak je uvedeno v jízdním řádu.

Představme si nyní, že bychom na této mapě vynechali státní hranice a že bychom ani přesně nedbali na to, aby poloha jednotlivých železničních stanic odpovídala jejich skutečné poloze v terénu, spojení jednotlivých stanic by však zůstalo beze změny. Samozřejmě by nám to ztížilo orientaci v mapě; vždyť při vyhledávání stanic se řídíme tím, co víme o jejich zeměpisné poloze. Nicméně při troše námahy bychom si i v tomto případě vyhledali ty stanice, které potřebujeme, a našli bychom železniční spojení mezi nimi. Tedy mapa by i po této deformaci plnila svůj účel. Ovšem nebylo by už tak docela na místě nazývat ji mapou; vždyť charakteristickým znakem mapy je právě to, že poloha zakreslených útvarů odpovídá jejich poloze v terénu. Co to tedy je? Je to graf.

Podobným obrázkem může být ovšem zakreslena i síť silniční, telefonní nebo telegrafní, rozvod elektřiny, vody nebo svítiplynu.

Podívejme se nyní na schéma nějakého elektrotechnického zařízení. Zde nejsou pouhé kroužky jako na železniční mapě, ale ustálené znaky, které značí kondenzátor, cívku, spínač, elektronku určitého typu a podobně. Na tomto schématu je však podstatné to, že tyto předměty se na nám nevyskytují izolovaně, ale je znázorněno jejich spojení vodičem. I zde je situace podobná jako u železniční mapy. Ze schématu nepoznáme, jak je určitý drát ve skutečnosti zprohýbán, a také to nepotřebujeme znát, protože to pro funkci příslušného zařízení není vůbec podstatné. Podstatné je pouze to, které prvky jsou vodičem spojeny a které nikoliv. A elektrotechnické schéma je rovněž graf.

Vidíme tedy, že graf nám znázorňuje určitou skupinu čili množinu předmětů a určitá spojení mezi jednotlivými předměty čili prvky této množiny. Mluvíme-li o spojení, nemusíme si ovšem vždy představovat nějaké koleje, dráty či roury. V molekule chemické sloučeniny jsou atomy jednotlivých prvků spojeny chemickými vazbami. Můžeme si tedy vyznačit symboly jednotlivých atomů (zpravidla jejich chemickými značkami) a úsečkami znázornit vazby mezi těmito atomy. Dostaneme to, co známe pod názvem strukturní vzorce sloučeniny. A tento strukturní vzorec je opět graf.

Jiným příkladem grafu je rodokmen. Znázorníme-li na obrázku členy určité rodiny nějakými symboly a vedeme-li úsečky od rodičů k dětem, dostáváme také graf. Zde však je situace přece jen poněkud jiná. Dosud jsme znázorňovali vztahy (matematicky řečeno relace) mezi předměty, které byly symetrické. O symetrickém vztahu čili symetrické relaci mluvíme tehdy, jestliže pokaždé, když předmět A je v tomto vztahu k předmětu B, je i předmět B v tomto vztahu k předmětu A. Existuje-li například přímé železniční spojení z Liberce do Turnova, je zřejmé, že existuje také přímé železniční spojení z Turnova do Liberce. Podobně tomu bývá i v elektrotechnických schématech a v chemických strukturních vzorcích. Je-li však pan A synem pana B, rozhodně to neznamená, že pan B je synem pana A. Jestliže v rodokmenu spojíme otce se synem pouhou úsečkou, pak nemůžeme nedbat na polohu symbolů jednotlivých osob, jako jsme nedbali na polohu stanic u železniční mapy; musíme vždy kreslit syna nad otce nebo otce nad syna, ale pokaždé stejným způsobem. Můžeme však udělat něco jiného — k úsečce spojující otce se synem přikreslit šipku směřující k synovi; pak bude rodokmen jasný i tehdy, nebudeme-li dbát na polohu jednotlivých symbolů. Dostáváme opět graf, a to tzv. orientovaný graf, na rozdíl od neorientovaných grafů (bez šipek), o nichž jsme hovořili výše.

V přírodovědných odděleních našich muzeí vídáme často tzv. „strom života". Je to schéma, které znázorňuje vývoj života na zeměkouli. Je to v podstatě také rodokmen, nevystupují v něm však jednotlivé osoby, ale celé živočišné a rostlinné rody. I toto je vlastně orientovaný graf.

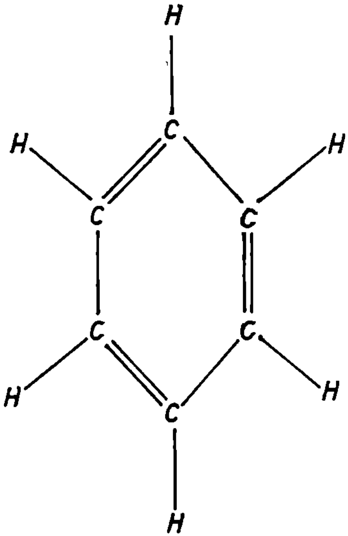
Při programování samočinných počítačů se setkáváme s takzvaným vývojovým diagramem (starší název blokové schéma). Je to nákres, v němž se vyskytují takzvané bloky, které představují jednotlivé početní nebo logické operace potřebné k provedení určitého výpočtu. Mezi těmito bloky jsou šipky, které znázorňují přechod od jedné operace k druhé. Je to zase příklad orientovaného grafu.

Teď, když jsme poznali několik příkladů, provedeme jistý myšlenkový proces, který je nejen v matematice, ale v lidském myšlení vůbec velmi důležitý, a to proces abstrakce. Soustředíme se na to, co je všem uvedeným příkladům společné, a oprostíme se od toho, v čem se odlišují.

V každém příkladě jsme měli určitou množinu prvků. Charakter těchto prvků byl rozličný; jednou to byly železniční stanice, podruhé součástky elektrotechnických zařízení, potom atomy, lidé, živočišné a rostlinné rody, a nakonec početní a logické operace. To však nebylo nikdy podstatné; záleželo pouze na tom, že šlo o množinu nějakých prvků. Těmto prvkům budeme říkat uzly. (Souvisí to například s pojmem železničního uzlu.) Dále jsme měli nějaké úsečky či oblouky spojující jednotlivé dvojice uzlů; znázorňovaly nejrůznější druhy spojení či vazeb. Ani na charakteru těchto spojení nezáleží; záleží pouze na tom, které dvojice uzlů jsou spojeny a které nikoliv. Zmíněným úsečkám nebo obloukům budeme říkat hrany.

Tím však abstrakce nekončí. Vidíme, že nezáleží na poloze jednotlivých uzlů v našem nákresu. Nezáleží ani na tom, zda hranu zakreslíme jako úsečku nebo jako oblouk křivky. Konečně nezáleží ani na délkách těchto úseček nebo oblouků. Víme už, že například v geometrii si nemůžeme přímku nebo křivku představovat pouze jako jakousi vrstvu tuhy na papíře nebo křídy na tabuli, ale jako abstraktní geometrický útvar — zemská osa je přímkou, i když ji nikdo nenakreslil. U grafu můžeme jít v abstrakci ještě dále. Můžeme vlastně vyloučit i veškerou geometrii. Nemusíme si představovat hranu jako úsečku nebo jako oblouk křivky; je to prostě prvek určité množiny. Záleží ovšem na vztahu (relaci) incidence mezi uzly a hranami. Pojem incidence známe už z geometrie. Leží-li bod M na přímce p, řekneme, že bod M je incidentní s přímkou p nebo že přímka p je incidentní s bodem M. Můžeme také říci, že bod M a přímka p jsou spolu incidentní. Každá přímka je ovšem incidentní s nekonečně mnoha body a každý bod je incidentní s nekonečně mnoha přímkami. U grafů (vezměme zatím grafy neorientované) to s incidencí bude vypadat poněkud jinak; každá hrana je incidentní právě s dvěma uzly — s těmi uzly, které spojuje. Uzel může být incidentní s libovolným počtem hran.

Všimněme si ještě jedné věci. Zatím jsme nevylučovali možnost, že některá dvojice uzlů může být spojena více než jednou hranou. A skutečně například u chemických



Obr. I.1

strukturních vzorců tomu tak bývá. Na obr. I.1 vidíme strukturní vzorec benzenu. Některé dvojice atomů uhlíku jsou v něm spojeny dvěma hranami, protože je mezi nimi takzvaná dvojná vazba. Definice grafu tedy může být taková, že připouští tuto možnost. Zpravidla však se studují pouze takové grafy, v nichž libovolná dvojice uzlů může být spojena nejvýše jednou hranou, a jen ty se nazývají grafy, zatím co v opačném případě používáme názvu multigraf. Latinská předpona „multi-" znamená „mnoho-". Známe například slovo „multimilionář"; označuje toho, kdo nemá pouze jeden milión, ale má jich mnoho. Tedy v multigrafu může existovat více hran spojujících tutéž dvojici uzlů, v grafu nikoliv. Toto omezení značně zjednodušuje vyjadřování v teorii grafů. Jsou-li u a v uzly grafu spojené hranou, pak tuto hranu můžeme bez obav z nedorozumění označovat uv; kdyby těchto hran bylo více, museli bychom je mezi sebou rozlišovat. Přitom velmi mnoho tvrzení o grafech je takové povahy, že dokážeme-li je pro grafy, je již velmi jednoduché dokázat je i pro multigrafy, jak ještě uvidíme.

Vyloučíme rovněž tu možnost, že by byl některý uzel spojen hranou se sebou samým. Někdy se i tato možnost připouští a takovéto hraně se říká smyčka. My však se takovýmito grafy (říká se jim někdy pseudografy) nebudeme zabývat.

Můžeme tedy přejít k definici neorientovaného grafu.

Definice I.1. *Neorientovaný graf* je uspořádaná dvojice $\langle U, H \rangle$ takových množin, že prvky množiny H jsou neuspořádané dvojice prvků množiny U. Prvky množiny U se nazývají *uzly grafu*, prvky množiny H se nazývají *hranami grafu*. Je-li $u \in U$, $v \in U$, $h \in H$, $h = \{u, v\}$, říkáme, že hrana h spojuje uzly u a v a že uzly u a v jsou její *koncové uzly*. Říkáme také, že hrana h je *incidentní* (inciduje) s uzlem u a s uzlem v a rovněž uzel u i uzel v jsou incidentní s hranou h.

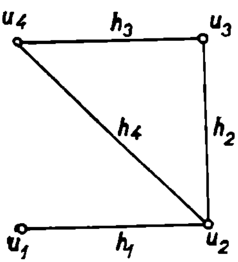
Graf se obvykle označuje písmenem G, případně s indexy, čárkami, hvězdičkami a podobně, tedy například

G_1, G_2, G', G'', G^*. Může se ovšem používat i jiných velkých písmen latinské abecedy. Uzly a hrany značíme malými písmeny latinské abecedy, případně opět s indexy a jinými znaménky, tedy u, v, w, u_1, u_2, v', v'' a podobně. Hranu spojující uzly u a v můžeme zapsat také jako uv.

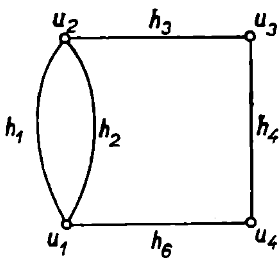
Víme, že množina může být také prázdná, to jest neobsahující žádné prvky. Pokud by množiny U i H byly prázdné, dostali bychom tzv. prázdný graf (někdy se také říká nulový graf.) Na něm není ovšem nic zajímavého, proto se omezíme na grafy, jejichž množina uzlů U je neprázdná. Může být ovšem U neprázdná a H prázdná. Opačný případ — H neprázdná a U prázdná — nastat nemůže, protože každá hrana musí být incidentní se dvěma uzly; tedy existuje-li alespoň jedna hrana, musejí existovat alespoň dva uzly.

Množiny U a H mohou být také nekonečné; pak mluvíme o nekonečném grafu. V této knížce se však omezíme jen na grafy konečné. Pod slovem graf budeme vždy rozumět neprázdný konečný neorientovaný graf.

Při kreslení grafu budeme uzly označovat kroužky, hrany úsečkami nebo oblouky. Na obrázku I.2 vidíme



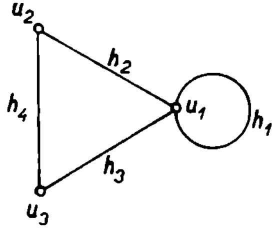
Obr. I.2



Obr. I.3

graf, u něhož $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, hrana h_1 je incidentní s uzly u_1 a u_2, hrana h_2 s uzly u_2 a u_3, hrana h_3 s uzly u_3 a u_4, hrana h_4 s uzly u_2 a u_4.

Na obrázku I.3 je multigraf. Uzly u_1 a u_2 jsou spojeny dvěma hranami h_1 a h_2. Na obrázku I.4 je pseudograf; hrana h_1 je smyčkou. Z obrázku je patrno, proč se užívá názvu smyčka.



Obr. I.4

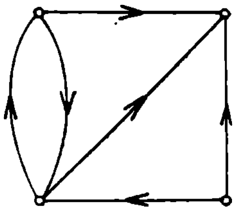
Pro doplnění uvedeme ještě definici orientovaného grafu. Ten se od neorientovaného liší tím, že nestačí u každé hrany určit dva uzly, které jsou s ní incidentní, ale je třeba jeden z nich označit jako počáteční uzel této hrany, druhý jako koncový. I zde rozlišujeme graf a multigraf. U grafu připouštíme dvě různé hrany spojující tutéž dvojici uzlů u, v, ovšem pouze tehdy, jsou-li opačně orientované, to jest je-li pro jednu z nich u počátečním uzlem a v koncovým a pro druhou v počátečním uzlem a u koncovým. Orientovaný graf kreslíme podobně jako neorientovaný, ale u každé hrany kreslíme šipku směřující od jejího počátečního uzlu ke koncovému.

Definice I.2. *Orientovaný graf* je uspořádaná dvojice $\langle U, H\rangle$ takových množin, že prvky množiny H jsou uspořádané dvojice prvků množiny U. Prvky množiny

U se nazývají *uzly*, prvky množiny H se nazývají *hranami* grafu. Je-li $u \in U$, $v \in U$, $h \in H$, $h = \langle u, v \rangle$, říkáme, že hrana h jde z uzlu u do uzlu v, uzel u je jejím *počátečním uzlem* a uzel v je jejím *koncovým uzlem*.

Příklad orientovaného grafu vidíme na obrázku I.5.

Jak jsme viděli, grafy vyjadřují určité vztahy, které se mohou vyskytovat mezi dvěma předměty, matematicky řečeno binární relace. S takovýmito vztahy se setkáváme v mnoha oborech lidské činnosti a také skoro všude se setkáváme s nákresy, které můžeme považovat za grafy, i když je třeba nazýváme jinak (síť, pavouk a podobně). Nadpis této kapitoly tedy není nadsázkou.



Obr. I.5

Cvičení

1. Neorientovaný graf G má množinu uzlů $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, množinu hran $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. Hrana h_1 je incidentní s uzly u_1 a u_2, hrana h_2 s uzly u_2 a u_3, hrana h_3 s uzly u_3 a u_4, hrana h_4 s uzly u_1 a u_4. Nakreslete tento graf.

2. Orientovaný graf G má množinu uzlů $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, množinu hran $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$. Uzel u_1 je počátečním uzlem hran h_2, h_3 a h_5 a koncovým uzlem hrany h_1. Uzel u_2 je počátečním uzlem hran h_1 a h_4 a koncovým uzlem hrany h_2. Uzel u_3 je koncovým uzlem hran h_3 a h_4. Uzel u_4 je koncovým uzlem hrany h_5. Nakreslete tento graf.

3. Sestrojte všechny možné neorientované grafy o čtyřech uzlech.

4. Sestrojte všechny možné neorientované grafy o pěti uzlech a pěti hranách.

5. Nechť M je množina složená z prvků a, b, c. Sestrojte graf G, jehož uzly vzájemně jednoznačně odpovídají všem neprázdným podmnožinám množiny M a v němž dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, mají-li odpovídající podmnožiny množiny M neprázdný průnik. (Je to tzv. průnikový graf systému neprázdných podmnožin množiny M.)

II. KAPITOLA

ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE GRAFŮ

V předešlé kapitole jsme se seznámili s pojmem grafu. Nyní si povíme o některých základních pojmech teorie grafů.

Definice II.1. Je-li u uzel grafu G, pak *stupněm* uzlu u v grafu G nazýváme počet hran grafu G incidentních s uzlem u.

Stupeň uzlu u v grafu G budeme označovat $\varrho_G(u)$ nebo jen $\varrho(u)$. Vidíme, že v grafu na obrázku I.2 je $\varrho(u_1) = 1$, $\varrho(u_2) = 3$, $\varrho(u_3) = 2$, $\varrho(u_4) = 2$.

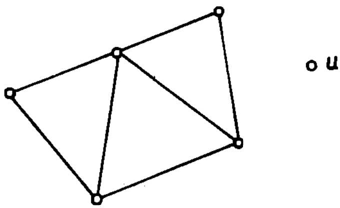
V grafu železniční sítě stupeň uzlu představuje počet směrů, jimiž může vyjet vlak z příslušné stanice. V chemickém strukturním vzorci představuje mocenství neboli valenci příslušného atomu. Proto se také někdy i v teorii grafů užívá názvu valence místo stupeň uzlu.

Sečteme-li stupně všech uzlů daného grafu, dostaneme dvojnásobek počtu hran. Je to zřejmé z toho, že vlastně sčítáme počty hran incidentních s jednotlivými uzly, přitom však každou hranu počítáme dvakrát — u každého z jejích koncových uzlů zvlášť.

Věta II.1. *V každém konečném grafu je počet uzlů lichého stupně sudý.*

Důkaz. Součet stupňů všech uzlů je dvojnásobkem počtu hran. Protože počet hran je číslo celé, jeho dvojnásobek je číslo sudé. Počet uzlů lichého stupně tedy nemůže být lichý, protože pak by součet stupňů všech uzlů byl rovněž lichý.

Definice II.2. Je-li u uzel grafu G a je-li jeho stupeň roven nule (to znamená, že u není incidentní se žádnou hranou), říkáme, že u je *izolovaný uzel* grafu G.



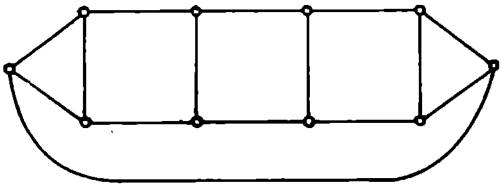
Obr. II.1

Na obrázku II.1 vidíme graf, v němž uzel u je izolovaný.

Na grafu železniční sítě se izolované uzly nevyskytují; musely by to být stanice, z nichž nevychází žádná trať, což není možné. Mohli bychom však vzít graf, jehož uzly by byla všechna města určitého okresu a v němž by dva uzly byly spojeny hranou právě tehdy, kdyby existoval mezi odpovídajícími městy úsek železniční trati neprocházející žádným dalším městem. V takovém grafu by mohly být izolované uzly; odpovídaly by městům bez železničního spojení. Taková města jsou například Český Dub a Kostelec nad Černými lesy.

Definice II.3. Graf G, v němž všechny uzly mají tentýž stupeň r, se nazývá *pravidelný graf* stupně r.

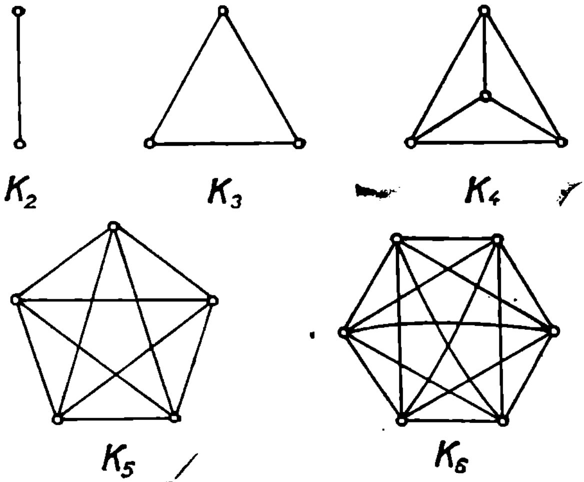
Na obrázku II.2 vidíme pravidelný graf stupně 3.



Obr. II.2

Definice II.4. Nechť G je graf, v němž každá dvojice různých uzlů je spojena hranou. Pak se graf G nazývá *úplný graf*. Úplný graf o n uzlech značíme symbolem K_n.

Na obrázku II.3 vidíme grafy K_2, K_3, K_4, K_5, K_6.

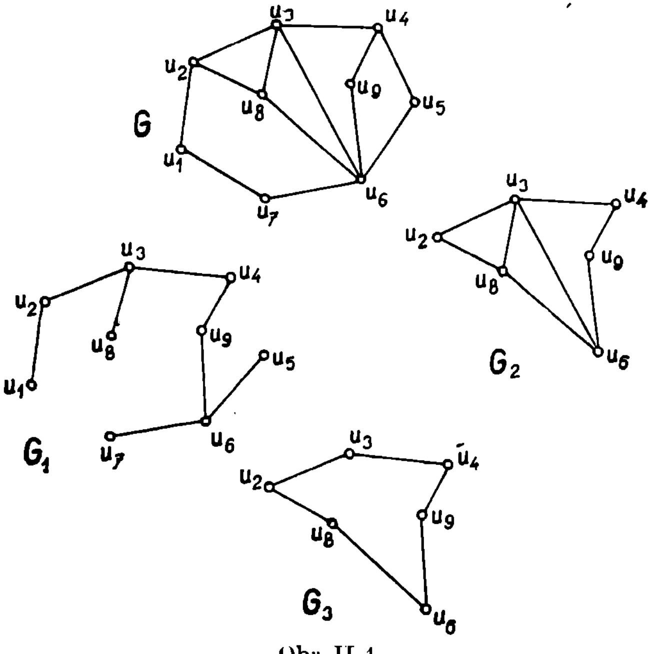


Obr. II.3

Každý uzel grafu K_n má stupeň $n - 1$ (je spojen hranami se všemi uzly grafu kromě sama sebe), součet stupňů všech uzlů je tedy $n(n - 1)$, což je dvojnásobek počtu hran (viz důkaz věty II.1). Počet hran grafu K_n je tedy $\frac{1}{2} n(n - 1)$.

Důležitý je i pojem podgrafu.

Definice II.5. Graf G' se nazývá *podgrafem* grafu G, jestliže jeho množina uzlů je podmnožinou množiny



Obr. II.4

uzlů grafu G a jeho množina hran je podmnožinou množiny hran grafu G.

Na obrázku II.4 vidíme graf G a tři jeho podgrafy G_1, G_2, G_3. Množina uzlů grafu G_1 je tatáž jako množina uzlů grafu G, jeho množina hran je vlastní podmnožinou množiny hran grafu G. Takovémuto podgrafu se někdy říká faktor grafu G. Množiny uzlů podgrafů G_2 a G_3 jsou vlastními podmnožinami množiny uzlů grafu G. Podgraf G_2 má tu vlastnost, že každá hrana grafu G, která je incidentní se dvěma uzly grafu G_2, patří do G_2. Takovémuto podgrafu se říká indukovaný podgraf. Podgraf G_3 tuto vlastnost nemá.

Je-li G graf železniční sítě a G' je graf složený ze stanic a úseků trati, jimiž projíždějí rychlíky, je G' podgrafem grafu G.

Nyní přistoupíme k pojmu souvislosti:

Definice II.6. Budiž G graf a u, v dva uzly grafu G. *Sledem* z uzlu u do uzlu v v grafu G se nazývá konečná posloupnost

$$u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, h_n, u_n = v,$$

kde $u_0, u_1, \ldots, u_n$ jsou uzly, $h_1, \ldots, h_n$ hrany grafu G a hrana h_i je incidentní s uzly u_{i-1} a u_i pro $i = 1, \ldots, n$. Existuje-li sled z u do v v grafu G, říkáme, že uzly u a v spolu souvisí v grafu G.

Posloupnost složenou z jediného uzlu a žádné hrany považujeme také za sled. Tedy každý uzel souvisí sám se sebou.

Mějme nyní uzel u grafu G a označme symbolem $S(u)$ množinu všech uzlů, které souvisí s uzlem u v grafu G. Je-li $v \in S(u)$, pak každý uzel w, který souvisí s v, souvisí také s u; stačí vzít sled z w do v a k němu připojit sled z v do u. Stejně však můžeme dokázat, že každý uzel, který souvisí s u, souvisí také s v a tedy $S(u) = S(v)$. Jestliže $v \notin S(u)$, máme $S(u) \cap S(v) = 0$; kdyby totiž existoval uzel $w \in S(u) \cap S(v)$, znamenalo by to, že existuje sled z u do w a sled z w do v a tedy by musel existovat i sled z u do v, což by byl spor.

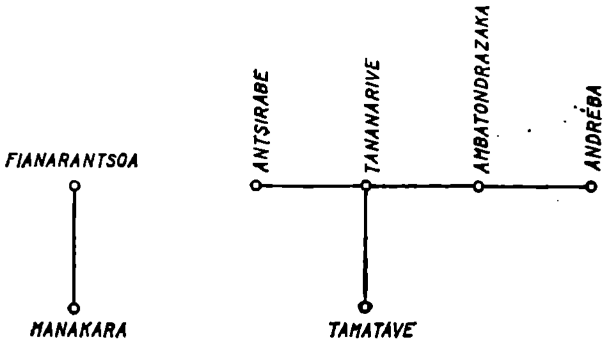
Množiny $S(u)$ pro jednotlivé uzly u tedy tvoří systém podmnožin množiny uzlů grafu G, který má tu vlastnost, že každá z těchto množin je neprázdná a každý uzel patří právě do jedné z nich (pro každé u máme $u \in S(u)$, tedy u patří alespoň do jedné z těchto množin; přitom do dvou různých množin patřit nemůže, jak jsme ukázali výše). Takovémuto systému podmnožin říkáme rozklad množiny uzlů grafu G.

Jsou-li dva uzly grafu G spojeny hranou, zřejmě spolu souvisí. Každá hrana tedy spojuje dva uzly patřící do téže množiny. Budiž nyní $C(u)$ podgraf grafu G, jehož množinou uzlů je $S(u)$ a jehož množinou hran je množina všech hran, které incidují s uzly z $S(u)$. Podgraf $C(u)$ nazýváme komponentou grafu G.

Definice II.7. Graf, v němž libovolné dva uzly spolu souvisí, se nazývá *souvislý*.

Znamená to, že každá komponenta grafu je souvislým grafem. Je-li graf souvislý, pak má pouze jednu komponentu.

Představíme-li si graf jako znázornění železniční sítě, pak dva uzly spolu souvisí právě tehdy, můžeme-li se dostat vlakem ze stanice odpovídající jednomu z nich do stanice odpovídající druhému. Je-li takovýto graf nesouvislý a vezmeme-li dva uzly (stanice) patřící různým komponentám, pak k tomu, abychom se dostali z jednoho uzlu do druhého, nestačí vlak, ale musíme použít jiného dopravního prostředku. Ve většině států, včetně Československa, tvoří železniční síť souvislý graf (nepočítáme-li ovšem lanovky). Železniční síť s nesouvislým grafem má například Malgašská republika; tento graf je na obrázku II.5. Vidíme, že z Ambatondrazaky do Fianarantsoy se vlakem nedostaneme.



Obr. II.5

Definice II.8. Nechť

$$u = u_0,\ h_1,\ u_1,\ h_2,\ u_2, \ldots,\ h_n,\ u_n = v$$

je sled z uzlu u do uzlu v v grafu G. Je-li $h_i \neq h_j$ pro každé i a j takové, že $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$, pak se tento sled nazývá *tah* z u do v. Je-li navíc ještě $u_i \neq u_j$ pro každé i a j takové, že $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$, tento sled se nazývá *cesta* z u do v.

Jinými slovy, v tahu se nesmějí opakovat hrany, v cestě se nesmějí opakovat hrany ani uzly. Opakují-li se hrany, pak se samozřejmě opakují i uzly; tedy ve sledu, který není tahem, se opakují i uzly.

Věta II.2. *Nechť v grafu G uzly u a v spolu souvisí. Pak existuje cesta z u do v v grafu G.*

Důkaz. Jestliže u a v spolu souvisí, pak existuje sled

$$u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, h_n, u_n = v.$$

Použijeme matematické indukce podle n. Je-li $n = 0$, pak $u = v$ a sled je cestou, protože se skládá z jediného uzlu a žádné hrany. Nechť nyní $k \geqq 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \leqq k - 1$. Mějme nyní $n = k$; máme tedy sled

$$u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, h_k, u_k = v.$$

Je-li tento sled cestou, pak věta platí. Není-li cestou, pak existují uzly, které se opakují. Nechť tedy $u_l = u_m$ pro nějaké l a m takové, že $0 \leqq l < m \leqq k$. Pak existuje sled

$$u = u_0, h_1, u_1, \ldots, h_l, u_l = u_m, h_{m+1}, u_{m+1}, \ldots, h_k, u_k = v$$

z u do v, který obsahuje $k - m + l$ hran. Protože $l < m$, je $k - m + l < k$ a tedy podle indukčního předpokladu existuje cesta z u do v.

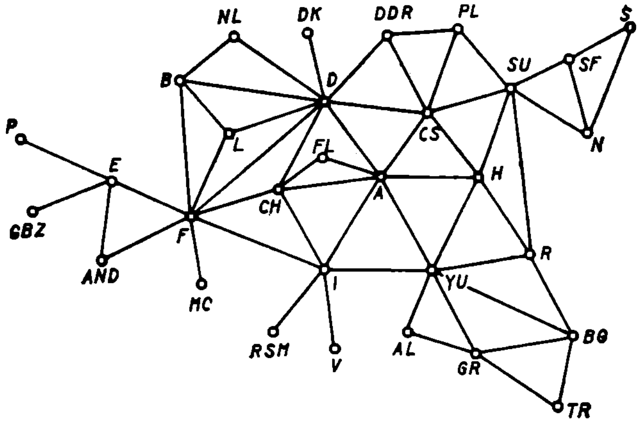
Tohle také známe z praxe. Můžeme-li se z jedné železniční stanice dostat do druhé vlakem, můžeme se tam dostat tak, že každou stanicí a každým úsekem trati projedeme nejvýše jednou. A tak také skutečně jezdíme.

Definice II.9. Je-li C cesta v grafu G, pak počet hran cesty C se nazývá *délka cesty C*.

Pochopitelně počet uzlů cesty C je vždy o jednu větší než její délka.

Definice II.10. Nechť u a v jsou dva uzly grafu G. Jestliže uzly u a v spolu souvisí, pak symbolem $d(u, v)$ označujeme délku nejkratší cesty z u do v. Jestliže u a v spolu nesouvisí, pak položíme $d(u, v) = \infty$. Výraz $d(u, v)$ nazýváme *vzdálenost uzlů* u a v v grafu G.

Vidíme, že $d(u, v) = d(v, u)$ pro každé dva uzly u a v grafu G. Dále $d(u, v) = 0$ právě tehdy, je-li $u = v$, a $d(u, v) = 1$ právě tehdy, jsou-li uzly u a v spojeny hranou.

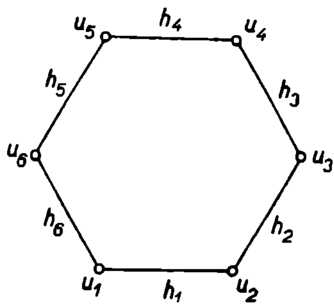


Obr. II.6

Pojem vzdálenosti si můžeme ilustrovat na příkladě grafu, jehož uzly jsou státy evropské pevniny a v němž dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, mají-li odpovídající státy společnou hranici (vedoucí po pevnině). Tento graf je na obrázku II.6. Jednotlivé státy jsou označeny příslušnými poznávacími značkami motorových vozidel. Vzdálenost dvou uzlů nám zde představuje počet přechodů hranice, kterých je třeba při cestě z jednoho státu do druhého pozemským dopravním prostředkem. Vidíme například, že vzdálenost Československa a Portugalska je v takovémto grafu rovna čtyřem.

Dalším důležitým pojmem je pojem kružnice. Je to něco jiného než kružnice v geometrickém smyslu; pro značnou podobnost s touto kružnicí se však používá stejného názvu.

Definice II.11. Souvislý pravidelný graf stupně 2 se nazývá *kružnice*. Počet hran kružnice se nazývá délka kružnice.



Obr. II.7

Na obrázku II.7 vidíme kružnici délky 6. Vidíme, že uzly a hrany kružnice délky n se dají srovnat v posloupnost

$$u_1,\ h_1,\ u_2,\ h_2, \ldots,\ u_n,\ h_n,\ u_1,$$

v níž pouze první a poslední člen se sobě rovnají, ostatní jsou navzájem různé, $u_1, \ldots, u_n$ jsou uzly, $h_1, \ldots, h_n$ jsou hrany, hrana h_i je incidentní s uzly u_i a u_{i+1} pro $i = 1, \ldots, n - 1$ a hrana h_n je incidentní s uzly u_n a u_1.

Nás budou především zajímat kružnice, které jsou podgrafy daných grafů.

Definice II.12. Nechť h je hrana grafu G a nechť h nepatří žádné kružnici, která je podgrafem grafu G. Pak hrana h se nazývá *acyklická hrana* grafu G.

Místo „kružnice, která je podgrafem grafu G“ budeme krátce říkat „kružnice v grafu G“.

Definice II.13. Graf, který neobsahuje kružnice (jakožto podgrafy), se nazývá *les*.

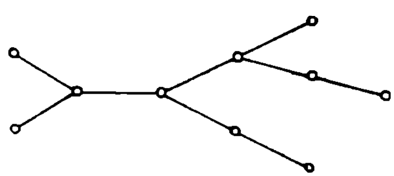
Proč se tomuto grafu říká les, poznáme z další definice.

Definice II.14. Souvislý les se nazývá *strom*.

Víme, že každá komponenta grafu je souvislým grafem. Každá komponenta lesa je rovněž lesem, tedy je to strom. Les se tedy skládá ze stromů; to je také důvod, proč se užívá termínu les.

Slovo „acyklický“ je řeckého původu. Slovo „kyklos“ znamená „kruh“; v polatinštěné podobě je to „cyklus“, což je slovo známé z běžného života. Předpona „a-“ znamená zápor.

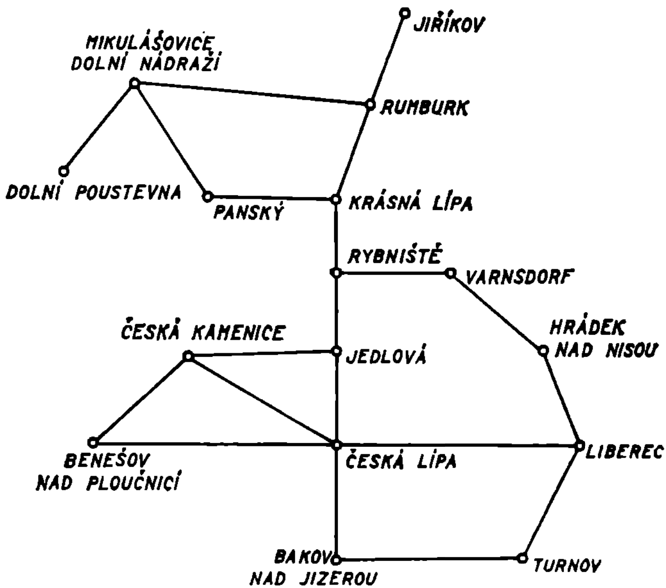
Příklad stromu je na obrázku II.8.



Obr. II.8

Věta II.3. *Budiž h hrana grafu G, buďtež u a v její koncové uzly. Budiž G' graf, který vznikne z G odstraněním hrany h. Hrana h je acyklická právě tehdy, jestliže uzly u a v spolu nesouvisí v grafu G'.*

Důkaz. Předpokládejme, že h je acyklická hrana v grafu G. Kdyby uzly u a v spolu souvisely v grafu G', existovala by cesta C z u do v v grafu G'. Přidáním hrany h k této cestě bychom dostali kružnici v grafu G obsahující hranu h, což by byl spor. Nechť nyní h není acyklická. Pak existuje kružnice K v grafu G, která obsahuje hranu



Obr. II.9

h. Odstraněním hrany h z kružnice K vznikne cesta z u do v, která neobsahuje h a tedy je cestou i v G'. Uzly u a v tedy spolu souvisí v G'.

Jsou-li tedy dvě stanice v grafu železniční sítě spojeny acyklickou hranou, existuje jediná možnost, jak z jedné do druhé jet vlakem. Pokud by tato hrana nebyla acyklická, bylo by těchto možností více. Na obrázku II.9 vidíme graf železniční sítě v určité oblasti severních Čech. Acyklickými hranami jsou spojeny dvojice stanic Rybniště — Krásná Lípa, Rumburk — Jiříkov, Mikulášovice-dolní nádraží — Dolní Poustevna.

Na tomto obrázku si můžeme všimnout i toho, že hrana incidentní s uzlem stupně 1 je vždy acyklická. Takovéto hraně říkáme koncová hrana grafu. Jestliže acyklická hrana není koncovou hranou grafu, říkáme jí most. Na obrázku je tedy mostem hrana spojující Rybniště s Krásnou Lípou. Proč se takové hraně říká most, je zřejmé z obrázku.

Věta II.4. *Nechť graf G je stromem. Pak ke každým dvěma uzlům u a v grafu G existuje právě jedna cesta z u do v.*

Důkaz. Strom je souvislý graf, tedy alespoň jedna cesta z u do v v něm existuje. Předpokládejme, že existují dvě různé cesty C_1 a C_2 z u do v. Nechť C_1 je

$$u = u_0, h_1, u_1, \ldots, h_m, u_m = v$$

a cesta C_2 je

$$u = u'_0, h'_1, u'_1, \ldots, h'_n, u'_n = v.$$

Vidíme, že $u_0 = u'_0$. Může být $u_i = u'_i$ i pro některá další čísla i, ale nikoliv pro všechna, protože pak by obě cesty splývaly. Nechť tedy p je nejmenší číslo takové, že $u_p \neq u'_p$; je ovšem $p \geqq 1$. Nechť dále q je nejmenší číslo takové, že $q > p$ a uzel u_q patří cestě C_2; pak ovšem $u_q = u'_r$, kde r je nějaké číslo takové, že $p \leqq r \leqq n$. Označme C'_1 část (neboli úsek) cesty C_1 tvaru

$$u_p,\ h_{p+1},\ u_{p+1}, \ldots,\ h_q,\ u_q$$

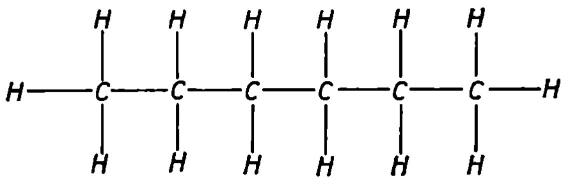
a C'_2 úsek cesty C_2 tvaru

$$u'_p,\ h'_{p+1},\ u'_{p+1}, \ldots,\ h'_r,\ u'_r.$$

Úseky C'_1 a C'_2 jsou cestami z $u_p = u'_p$ do $u_q = u'_r$. Kdyby měly společný uzel různý od těchto dvou, byl by to uzel u_s pro nějaké s takové, že $p < s < q$; potom by však u_s byl uzlem cesty C_2, což je ve sporu s minimalitou čísla q. Tedy C'_1 a C'_2 nemají ani společnou hranu. Uzly a hrany cest C'_1 a C'_2 tvoří kružnici, což je spor.

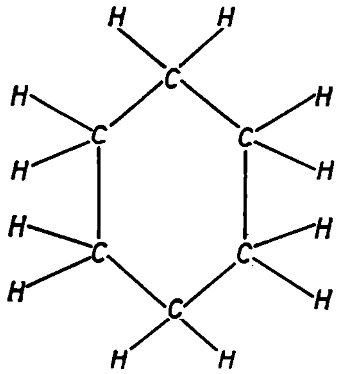
S názvem „acyklický" se setkáváme i v chemii. Acyklický uhlovodík je takový, jehož strukturní vzorec je lesem. V opačném případě se uhlovodík nazývá cyklický. Na obrázku II.10 vidíme acyklický uhlovodík hexan, na obrázku II.11 cyklický uhlovodík cyklohexan.

Budeme nyní mluvit o odstraňování určitých množin uzlů z grafu. Je-li R nějaká podmnožina množiny uzlů



Obr. II.10

grafu G a řekneme-li, že odstraníme z grafu G množinu R, znamená to, že odstraníme současně i všechny hrany incidentní s uzly množiny R. Graf získaný z grafu G odstraněním množiny R je tedy podgraf grafu G, jehož množinou uzlů je $U - R$, kde U je množina uzlů grafu G, a jehož množinou hran je množina všech hran grafu G, jejichž oba koncové uzly patří do $U - R$.



Obr. II.11

Definice II.15. Budiž G souvislý graf, budiž R vlastní podmnožina jeho množiny uzlů. Budiž G' graf, který získáme z G odstraněním množiny R. Je-li G' nesouvislý graf, pak množina R se nazývá *řez grafu* G. Jestliže navíc graf získaný z G odstraněním libovolné vlastní podmnožiny množiny R je souvislý, říkáme, že R je *minimální řez grafu* G.

Je-li graf G nesouvislý, pak prázdná množina je jeho řezem. Protože každá množina obsahuje prázdnou podmnožinu, je prázdná množina jediným minimálním řezem tohoto grafu. Naproti tomu v úplném grafu řezy neexistují, protože graf vzniklý z úplného grafu odstraněním libovolné vlastní podmnožiny jeho množiny uzlů je opět úplný graf, a tedy je souvislý. Jestliže graf není úplný, existuje v něm dvojice uzlů u, v, které nejsou spojeny hranou. Potom množina $U - \{u, v\}$ je řezem takového grafu; jejím odstraněním dostaneme nesouvislý graf složený ze dvou izolovaných uzlů u a v.

Definice II.16. Budiž G graf, který není úplným grafem. Nejmenší počet uzlů řezu grafu G se nazývá *uzlový stupeň souvislosti grafu G* a značí se $\omega(G)$.

Mluvíme o uzlovém stupni souvislosti, protože existuje také hranový stupeň souvislosti; tím se zde nebudeme zabývat. Zřejmě $\omega(G) \leqq n - 2$, kde n je počet uzlů grafu G. Někdy se také definuje uzlový stupeň souvislosti úplného grafu o n uzlech jako $n - 1$. Uzlový stupeň souvislosti nesouvislého grafu je roven nule.

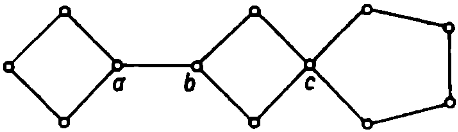
Je-li G graf železniční sítě a známe-li jeho uzlový stupeň souvislosti $\omega(G)$, pak víme, že i když $\omega(G) - 1$ železničních stanic bude vyřazeno z provozu, bude přesto existovat spojení mezi libovolnými dvěma ze zbývajících stanic.

Je-li $\omega(G) = 1$, pak graf G je souvislý, ale obsahuje řez R složený z jediného uzlu.

Definice II.17. Nechť v grafu G existuje řez složený z jediného uzlu. Pak se tento uzel nazývá *artikulace grafu G*.

Na obrázku II.12 vidíme graf s třemi artikulacemi a, b, c.

Je-li $\omega(G) \geqq 2$, artikulace v grafu G neexistují. Mluvíme-li tedy o souvislém grafu bez artikulací, myslíme tím graf, jehož uzlový stupeň souvislosti je alespoň dvě. Takovýto graf má například tu vlastnost, že v něm ke každým dvěma jeho hranám existuje kružnice, která je obě obsahuje. Toto tvrzení zde nebudeme dokazovat.



Obr. II.12

Věta II.5. *Každý uzel stromu G, který nemá stupeň* 0 *ani* 1, *je artikulací stromu G.*

Důkaz. Pro strom o jediném uzlu platí tvrzení triviálně. Nechť tedy G obsahuje alespoň dva uzly. Nechť u je uzel stupně alespoň dvě. Pak existují dva různé uzly v a w, které jsou spojeny hranami s uzlem u. Z toho vyplývá, že existuje cesta z v do w (délky 2) procházející uzlem u. Podle věty II.4 tato cesta je jedinou cestou spojující v a w v grafu G, tedy po odstranění uzlu u dostaneme graf, v němž uzly v a w spolu nesouvisí. Uzel u je tedy artikulací.

Věta II.6. *Nechť G je graf, který není úplný, nechť U je jeho množina uzlů. Potom*

$$\omega(G) \leq \min_{u \in U} \varrho_G(u).$$

Poznámka. Jak jsme uvedli výše, $\varrho_G(u)$ značí stupeň uzlu u v grafu G. Výraz $\min\limits_{u \in U} \varrho_G(u)$ tedy znamená minimum stupňů všech uzlů u z množiny U, to jest nejmenší stupeň uzlu v grafu G.

Důkaz. Nechť n je počet uzlů grafu G a budiž u_0 uzel grafu G, jehož stupeň je minimální, to jest $\varrho_G(u_0) = \min_{u \in U} \varrho_G(u)$. Stupeň uzlu u_0 nemůže být $n - 1$, protože pak by všechny uzly grafu G měly stupeň $n - 1$ a graf G by byl úplný. Existuje tedy alespoň jeden uzel v v grafu G, který není spojen hranou s u_0. Odstraňme nyní z G všechny uzly spojené hranami s u_0. V grafu takto získaném uzly u_0 a v spolu zřejmě nesouvisí. Tedy množina uzlů spojených hranami s u_0 je řezem grafu G. Znamená to, že minimální počet uzlů řezu grafu G je menší nebo roven počtu uzlů tohoto řezu, to jest $\omega(G) \leqq \varrho_G(u_0)$.

Ještě se vrátíme ke stromům.

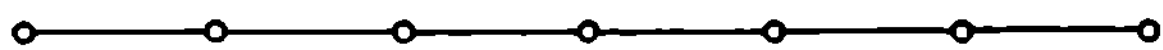
Věta II.7. *Nechť S je strom o n uzlech. Pak počet hran stromu S je $n - 1$.*

Důkaz. Použijeme matematické indukce podle n. Je-li $n = 1$, pak S je graf sestávající z jediného uzlu a žádné hrany, tedy tvrzení pro něj platí. Budiž nyní $k \geqq 2$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \leqq k - 1$. Budiž S strom o k uzlech. Budiž u uzel stromu S; označme $p = \varrho(u)$. Uzel u je spojen hranami s uzly $u_1, \ldots, u_p$. Podobně jako v důkaze věty II.6 můžeme ukázat, že v grafu S' vzniklém odstraněním uzlu u z S žádné dva z uzlů $u_1, \ldots, u_p$ spolu nesouvisí. Označíme-li C_i komponentu grafu S', která obsahuje uzel u_i pro $i = 1, \ldots, p$, vidíme, že komponenty $C_1, \ldots, C_p$ jsou navzájem různé. Dále zřejmě S' neobsahuje žádnou komponentu, která by neobsahovala žádný z uzlů $u_1, \ldots, u_p$. Komponenty

$C_1, \ldots, C_p$ jsou souvislé acyklické grafy, tedy stromy. Budiž n_i počet uzlů komponenty C_i pro $i = 1, \ldots, p$. Je zřejmě $n_i \leqq n - 1$ pro každé i, tedy podle indukčního předpokladu počet hran komponenty C_i je $n_i - 1$. Počet hran grafu S' dostaneme sečtením počtů hran komponent C_i pro $i = 1, \ldots, p$, je to tedy součet všech n_i minus p. Avšak součet všech n_i je $k - 1$, tedy počet hran grafu S' je $k - 1 - p$. Počet hran grafu S dostaneme, přičteme-li k počtu hran grafu S' číslo p, které je počtem všech hran incidentních s u. Tedy tento počet je $k - 1$, což jsme měli dokázat.

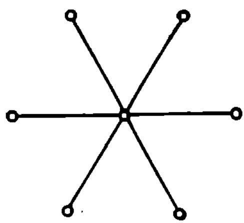
Budeme ještě definovat dva speciální případy stromu.

Definice II.18. Strom, který se skládá ze dvou uzlů stupně 1 a z uzlů a hran cesty spojující tyto uzly, se nazývá *had* (obr. II.13).



Obr. II.13

Definice II.19. Strom, v němž jeden uzel je spojen hranami se všemi ostatními a který neobsahuje žádné další hrany, se nazývá *hvězda* (obr. II.14).



Obr. II.14

Nyní budeme definovat pojem kostry grafu.

Definice II.20. Nechť G je souvislý graf. Nechť S je strom, který je podgrafem grafu G a obsahuje všechny uzly grafu G. Pak S se nazývá ***kostra grafu** G*.

Věta II.8. *Nechť G je souvislý graf. Pak existuje alespoň jedna kostra grafu G.*

Důkaz. Je-li G stromem, pak je kostrou sama sebe. Není-li G stromem, pak obsahuje alespoň jednu hranu h, která není acyklická. Odstraníme-li tuto hranu, dostáváme opět souvislý graf; hrana h náleží některé kružnici K v grafu G a i po odstranění hrany h existuje cesta spojující její koncové uzly — tato cesta je tvořena uzly a hranami hada získaného z K odstraněním h. Je-li získaný graf stromem, pak je kostrou grafu G a tvrzení platí. Není-li stromem, obsahuje hranu, která není acyklická, a postup můžeme opakovat. Postupujeme tedy dále tímto způsobem. Nemůžeme takto pokračovat do nekonečna, protože graf G má konečný počet hran. Musíme tedy po konečném počtu kroků získat strom, a tento strom je hledanou kostrou grafu G.

Věta II.9. *Počet hran souvislého grafu je větší nebo roven $n - 1$, kde n je počet jeho uzlů.*

Důkaz. Podle věty II.8 souvislý graf G obsahuje kostru. Tato kostra má tutéž množinu uzlů jako graf G; je-li n počet uzlů grafu G, pak tato kostra má podle věty II.7 počet hran rovný $n = 1$. Počet hran grafu G tedy musí být větší nebo roven tomuto číslu.

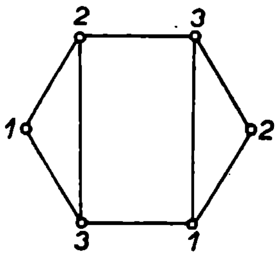
Nakonec si řekneme něco o chromatickém čísle grafu.

Definice II.21. Nechť G je graf, nechť B je neprázdná množina, jejíž prvky se nazývají barvy. Přiřaďme každému uzlu grafu G některou barvu z množiny B. Pak říkáme, že jsme tento uzel touto barvou *obarvili* a celé přiřazení se nazývá *obarvení uzlů grafu* G barvami z množiny B.

Samozřejmě mohou existovat různá obarvení grafu G, například i obarvení takové, které všem uzlům přiřazuje tutéž barvu. V dalším se omezíme na tzv. přípustná obarvení.

Definice II.22. Nechť G je graf, B množina barev. Obarvení uzlů grafu G barvami z množiny B se nazývá *přípustné*, jestliže v grafu G neexistuje hrana spojující uzly téže barvy.

Na obrázku II.15 je příklad přípustného obarvení grafu třemi barvami.



Obr. II.15

Samozřejmě i přípustných obarvení téhož grafu můžeme mít mnoho; například takové, při němž žádné dva uzly nemají tutéž barvu. Nás však budou zajímat taková přípustná obarvení, při nichž je počet barev minimální.

Definice II.23. Nechť G je graf. Nejmenší počet barev potřebný k přípustnému obarvení uzlů grafu G se nazývá *chromatické číslo grafu* G a značí se $\chi(G)$.

Zřejmě pokud G obsahuje alespoň jednu hranu, je $\chi(G) \geqq 2$, protože koncovým uzlům této hrany musí být přiřazeny různé barvy. Dále $\chi(K_n) = n$, protože každé dva uzly grafu K_n jsou spojeny hranou, a tudíž žádné dva z nich nemohou mít tutéž barvu. Vidíme tedy, že ať zvolíme n jakkoliv velké, vždy existuje graf, jehož chromatické číslo je rovno n. Je-li dále G graf o n uzlech, který není úplný, je $\chi(G) \leqq n - 1$. Uzly takového grafu lze obarvit $n - 1$ barvami tak, že zvolíme dvojici uzlů, které nejsou spojeny hranou, oba uzly této dvojice obarvíme toutéž barvou a zbývajících $n - 2$ uzlů obarvíme dalšími $n - 2$ barvami.

Řekneme si ještě něco o grafech, jejichž chromatické číslo je 2.

Definice II.24. Nechť G je graf takový, že $\chi(G) = 2$. Pak se graf G nazývá *sudý*.

Proč se užívá názvu „sudý", objasní další věta.

Věta II.10. *Graf G je sudý právě tehdy, neexistuje-li v něm kružnice liché délky.*

Důkaz. Předpokládejme, že v G existuje kružnice K délky k, kde k je liché číslo. Uzly a hrany kružnice K tvoří posloupnost

$$u_1,\ h_1,\ u_2,\ h_2, \ldots,\ u_k,\ h_k,\ u_1$$

v níž $u_1, \ldots, u_k$ jsou uzly, $h_1, \ldots, h_k$ jsou hrany a sousední členy posloupnosti jsou spolu incidentní. Nechť $B = \{1, 2\}$ a předpokládejme, že existuje přípustné obarvení uzlů grafu G barvami z množiny B. Je-li uzel u_1

obarven barvou 1, pak u_2 musí být obarven barvou 2, protože je spojen hranou s u_1. Pak ovšem je uzel u_3 obarven barvou 1, uzel u_4 barvou 2 a tak dále; obecně uzel u_i je obarven barvou 1 pro i liché a barvou 2 pro i sudé. Potom však u_k je obarven barvou 1, protože k je liché, a je spojen hranou s uzlem u_1 obarveným toutéž barvou, což je spor. Je-li u_1 obarven barvou 2, dojdeme ovšem analogickým způsobem rovněž ke sporu. Nechť nyní G neobsahuje kružnici liché délky. Zvolme uzel u v G. Všechny uzly grafu G, jejichž vzdálenost od u je konečná a sudá, obarvíme barvou 2 a všechny uzly v G, jejichž vzdálenost od u je konečná a lichá, obarvíme barvou 1. Tím obarvíme všechny uzly komponenty C grafu G, která obsahuje u. Dokážeme, že toto obarvení je přípustným obarvením komponenty C. Předpokládejme, že tomu tak není a že existují dva uzly v a w obarvené touž barvou a spojené hranou. Nechť $d(u, v) = a$, $d(u, w) = b$. Potom čísla a a b jsou buď obě sudá, nebo obě lichá. Budiž C_1 cesta délky a z v do u, budiž C_2 cesta délky b z w do u. Cesty C_1 a C_2 mají alespoň jeden společný uzel u. Nechť cesta C_1 má tvar

$$v = u_0,\ h_1,\ u_1, \ldots,\ h_a,\ u_a = u$$

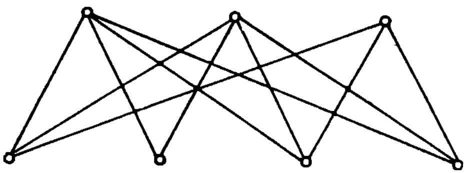
a nechť j je nejmenší takové číslo, že u_j patří cestě C_2. Zřejmě $d(u_j, u) = a - j$; kdyby tato vzdálenost byla menší, mohli bychom úsek cesty C_1 z u_j do u nahradit cestou délky menší než $a - j$ a tím bychom dostali cestu z v do u délky menší než a, což by byl spor s tím, že $d(u, v) = a$. Rovněž úsek cesty C_2 z u_j do u musí mít délku $a - j$; kdyby byla menší, mohli bychom nahradit úsek cesty C_1 z u_j do u tímto úsekem cesty C_2 a dostali bychom cestu z v do u délky menší než a. Kdyby byla větší, mohli bychom opět nahradit úsek cesty C_2 z u_j do u úsekem cesty C_1 a dostali bychom cestu z w do u

délky menší než b. Tedy úsek C'_1 cesty C_1 z v do u_j má délku j, úsek C'_2 cesty C_2 z w do u_j má délku $b - a + j$. Cesty C'_1 a C'_2 nemají společný uzel kromě u_j, což plyne z toho, jak bylo určeno j. Budiž nyní K kružnice sestávající z cest C'_1 a C'_2 a z hrany spojující v a w. Její délka je $b - a + 2j + 1$. Protože a a b jsou buď obě sudá, nebo obě lichá, je $b - a$ sudé; $2j$ je rovněž sudé, tedy $b - a + 2j + 1$ je liché a existuje kružnice liché délky v grafu G, což je spor. Popsané obarvení je tedy přípustným obarvením komponenty C. Má-li graf G více komponent, pak ostatní komponenty obarvíme stejným způsobem.

Množina U uzlů sudého grafu G je tedy sjednocením takových dvou disjunktních množin U_1 a U_2, že každá hrana grafu G je incidentní právě s jedním uzlem množiny U_1 a právě s jedním uzlem množiny U_2.

Definice II.25. Nechť G je sudý graf, jehož množinou uzlů je $U = U_1 \cup U_2$, kde $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ a každý uzel z U_1 je spojen hranou s každým uzlem z U_2. Pak se graf G nazývá *úplný sudý graf*. Je-li m počet uzlů množiny U_1 a n počet uzlů množiny U_2, značíme tento graf $K_{m,n}$.

Na obrázku II.16 vidíme úplný sudý graf $K_{3,4}$. Zdůrazněme, že úplný sudý graf (kromě triviálního případu $K_{1,1}$) není úplným grafem.



Obr. II.16

Možná, že vám připadá zvláštní, že se v matematice užívá takového termínu jako barva nebo obarvení. Proč tomu tak je, uvidíme v kapitole VI.

Popsali jsme si některé základní pojmy teorie grafů. Omezili jsme se ovšem jen na takové pojmy, které budeme potřebovat při studiu dalších kapitol. Další základní pojmy a poznatky z teorie grafů může čtenář najít v [9].

Cvičení

1. Dokažte, že neexistuje pravidelný graf stupně 5 o 35 uzlech.

2. Je-li $d(u, v) = k$ pro dva uzly u a v grafu G a je-li C cesta délky k z u do v, pak žádné dva uzly cesty C nejsou v G spojeny hranou nepatřící do C. Dokažte.

3. Jsou-li u, v, w tři uzly grafu G, pak pro jejich vzdálenosti v grafu G platí takzvaná trojúhelníková nerovnost:

$$d(u, v) + d(v, w) \geqq d(u, w).$$

Dokažte. Co vám to připomíná z geometrie?

4. Dokažte, že odstraněním jedné hrany (při ponechání jejích koncových uzlů) se sníží uzlový stupeň souvislosti nejvýše o jednu.

5. Dokažte, že každý strom obsahující alespoň jednu hranu má alespoň dva uzly stupně 1.

6. Dokažte, že každý koncový uzel mostu je artikulací.

7. Dokažte, že chromatické číslo grafu je rovno maximu chromatických čísel jeho komponent.

8. Dokažte, že odstraněním jedné hrany grafu se jeho chromatické číslo sníží nejvýše o jednu.

9. Dokažte, že každý souvislý graf, jehož počet hran je o jednu menší než počet uzlů, je stromem (obrácené tvrzení k větě II.7).

III. KAPITOLA

TŘI DOMY, TŘI STUDNĚ A MUŘÍ NOHA ANEB VĚTA KURATOWSKÉHO

Možná, že jste se už někdy setkali se známou úlohou rekreační matematiky o třech domech a třech studních.

Jsou tři domy a tři studně. Obyvatelé všech tří domů mohou používat všech tří studní. Každý z nich by chtěl mít od svého domu cesty ke všem třem studním, nikdo však nechce, aby se některá jeho cesta křižovala se sousedovou. Jak to zařídit?

Než odpovíme na tuto otázku, budeme si definovat rovinnou representaci grafu.

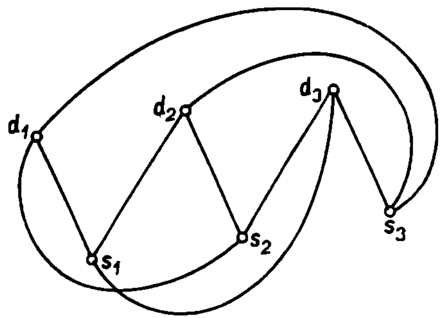
Definice III.1. Nechť G je graf. *Rovinnou representací grafu* G nazýváme množinu bodů $\mathscr{R}(G)$ v rovině složenou jednak z takzvaných uzlových bodů vzájemně jednoznačně přiřazených uzlům grafu G, jednak z oblouků spojujících ty dvojice uzlových bodů, které odpovídají dvojicím uzlů spojených hranou v grafu G, přičemž žádné dva z těchto oblouků nemají společný bod, který by byl vnitřním bodem některého z nich.

Tato definice se zdá na první pohled složitá, není to však nic jiného než matematické vyjádření toho, co známe už z dřívějška. Už v první kapitole jsme mluvili o tom, jak kreslíme grafy. Zde místo kroužků máme pouhé body, což není tak podstatný rozdíl; ve skutečnosti můžeme nadále kreslit kroužky, pokud budou dostatečně malé. Nové je na této definici to, že nepřipouštíme, aby některé dva oblouky měly společný bod, který by byl vnitřním bodem některého z nich. Tedy žádné dva z oblouků (znázorňujících hrany) se nesmějí protínat a žádný z nich nesmí procházet uzlovým bodem různým od těch dvou, které spojuje. Jedině tehdy považujeme nákres určitého grafu za jeho rovinnou representaci.

Uvidíme, že ne každý graf má rovinnou representaci.

Definice III.2. Graf G, k němuž existuje rovinná representace $\mathcal{R}(G)$, se nazývá *rovinný* graf.

Vraťme se nyní k úloze o třech domech a třech studních. Mějme graf, jehož množina uzlů se skládá z uzlů d_1, d_2, d_3, s_1, s_2, s_3 a v němž každý z uzlů d_1, d_2, d_3 je spojen hranami s uzly s_1, s_2, s_3. Uzly d_1, d_2, d_3 představují domy, uzly s_1, s_2, s_3 představují studně. Hrany grafu představují cesty od domů ke studním. Jde o úplný sudý graf $K_{3,3}$. Úloha je řešitelná právě tehdy, jestliže existuje rovinná representace tohoto grafu (ta nám

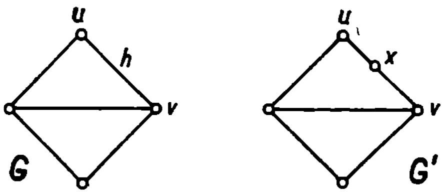


Obr. III.1

představuje mapu příslušných cest), to jest je-li graf $K_{3,3}$ rovinný.

Řekněme si nyní rovnou, že graf $K_{3,3}$ rovinný není a že tedy úloha není řešitelná. Dokazovat to nebudeme; v důkaze bychom nevystačili s teorií grafů, ale museli bychom použít prostředků topologie, což je rovněž jeden z oborů moderní matematiky. Na obrázku III.1 vidíme nákres grafu $K_{3,3}$, v němž právě dva oblouky znázorňující hrany se protínají. Vidíme tedy, že nezbývá, než aby se jeden z obyvatel domů uskromnil a spokojil se s cestami pouze ke dvěma studním.

Definice III.3. Nechť G je graf, h jeho hrana s koncovými uzly u a v. Nechť G' je graf získaný z G odstraněním hrany h, přidáním nového uzlu x a spojením tohoto uzlu hranami s uzly u a v. Pak řekneme, že G' je graf získaný z G *rozpůlením* hrany h.



Obr. III.2

Na obrázku III.2 vidíme graf G a graf G' získaný z G rozpůlením hrany h.

Definice III.4. Nechť G a G' jsou dva grafy a nechť existuje konečná posloupnost grafů

$$G_1, \; G_2, \ldots, \; G_n$$

taková, že graf G_{i+1} je získán z grafu G_i rozpůlením některé jeho hrany pro $i = 1, \ldots, n - 1$, graf G_1 splývá s grafem G a graf G_n splývá s grafem G'. Pak říkáme, že graf G' je graf získaný z grafu G postupným půlením hran.

Věta III.1. *Nechť graf G není rovinný, nechť G' je graf získaný z grafu G postupným půlením hran. Pak graf G' není rovinný.*

Důkaz. Uvažujme posloupnost grafů z definice III.4. Předpokládejme, že graf G', což je G_n, je rovinný. Budiž $\mathscr{R}(G')$ jeho rovinná representace. Graf G_n je získán z grafu G_{n-1} rozpůlením některé hrany h o koncových uzlech u a v, to jest odstraněním hrany h, přidáním nového uzlu x a spojením uzlu x hranami s uzly u a v. Vezměme v representaci $\mathscr{R}(G')$ oblouky odpovídající hranám ux a vx. Pak oblouk, který je sjednocením těchto oblouků, můžeme považovat za oblouk representace $\mathscr{R}(G_{n-1})$ grafu G_{n-1} odpovídající hraně h (bod odpovídající uzlu x přestaneme považovat za uzlový bod). Dostaneme tak rovinnou representaci $\mathscr{R}(G_{n-1})$ grafu G_{n-1} a tedy graf G_{n-1} je rovinný. Stejným způsobem pro $i = 1, \ldots, n - 1$ můžeme dokázat, že je-li G_{i+1} rovinný, je i G_i rovinný. Tedy i graf G_1, což je graf G, je rovinný, a to je spor.

Věta III.2. *Nechť G' je podgraf grafu G a nechť G' není rovinný. Pak G není rovinný.*

Důkaz je zřejmý.

Vidíme tedy, že žádný graf, který obsahuje graf $K_{3,3}$ nebo graf získaný z něho postupným půlením hran jako podgraf, není rovinný.

Teď si ukážeme, že i v klasické literatuře můžeme objevit matematické zajímavosti. Možná, že jste četli nebo viděli v divadle dramatickou báseň J. W. Goetha „Faust". Uvedeme dialog Fausta s ďáblem Mefistofelem, který právě vnikl do jeho pracovny v podobě pudla:*)

MEFISTOFELES

Víš, rád bych na vzduch, ale věř mi,
já malou překážkou tu držán jsem.
Tam — muří noha na prahu je.

FAUST

Nemůžeš přes ten pentagram?
Pak, synu pekel, problém tu je:
Jaks mohl vejít, se tě ptám.
Což démon moh být ošálen?

MEFISTOFELES

Jen podívejte, není dotažen.
Ten jeden úhel, ten, co míří ven,
vidíš, je trochu otevřen.

FAUST

Nu, tohle výborná je věc.
Ty tedy jsi můj zajatec?
Běh náhody se divně stočil.

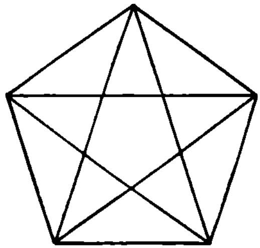
Ponechme teď Fausta jeho osudu a všimněme si jen jedné věci. V dialogu se mluví o jistém magickém zna-

---

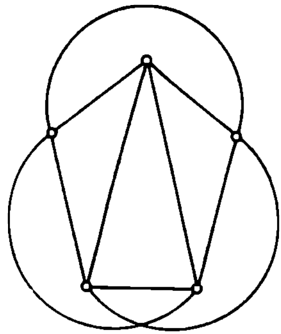
*) Překlad Otokara Fischera. Vydala Mladá fronta, Praha 1973.

mení, které podle středověkých představ dovedlo ochránit člověka před nečistými silami. Tomuto znamení se říká „muří noha“ nebo také „pentagram“. Co to asi je?

■ Řecká předpona „penta-“ nám říká, že to souvisí s číslem 5. A skutečně, jde o pětiúhelník se všemi jeho úhlopříčkami; vidíme jej na obrázku III.3.



Obr. III.3



Obr. III.4

Proč se mu říká „muří noha“, to vám nevysvětlím; na to byste se museli zeptat historika. Stejně těžké by bylo asi vysvětlit, proč se tomuto symbolu připisoval magický význam. Snad proto, že pětiúhelník je jediným mnohoúhelníkem, který má stejný počet úhlopříček jako stran. Možná však to bude i tím, že si lidé všimli jisté jeho vlastnosti, která souvisí s teorií grafů (i když samozřejmě tehdy ještě teorie grafů neexistovala). Bereme-li „muří nohu“ jako graf, to jest považujeme-li vrcholy pětiúhelníka za uzly grafu a jeho strany i úhlopříčky za hrany grafu, je to úplný graf K_5. A ten má podobnou vlastnost jako $K_{3,3}$. Není to rovinný graf, kdybychom však z něho odstranili jednu hranu, dostali bychom rovinný graf. Na obrázku III.4 je nákres grafu K_5, v němž se jediné dvě hrany protínají.

Samozřejmě také každý graf, který obsahuje graf K_5 nebo graf získaný z tohoto grafu postupným půlením hran jako podgraf, není rovinný.

Máme už tedy velkou řadu grafů, o nichž víme, že nejsou rovinné. Jsou to všechny grafy obsahující podgraf, který je grafem K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo je z některého z těchto grafů získán postupným půlením hran. Následující věta nás ujistí o tom, že další nerovinné grafy už neexistují.

Věta III.3. (věta Kuratowského). *Graf je rovinný právě tehdy, jestliže neobsahuje podgraf, který by byl grafem K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo grafem získaným z některého z těchto grafů postupným půlením hran.*

Tuto větu nebudeme dokazovat; je to výsledek, který spadá opět do topologie, a k jeho důkazu jsou potřebné topologické úvahy. Jeho autorem je významný polský matematik Kazimierz Kuratowski, který vynikl především právě v topologii.

Věta Kuratowského má v teorii rovinných grafů především ten význam, že její pomocí lze z této teorie odstranit všechny pojmy, které nepatří do čisté teorie grafů. Umožňuje nám podat novou definici rovinného grafu.

Definice III.5. Nechť G je graf neobsahující žádný podgraf, který by byl grafem K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo grafem získaným z některého z těchto grafů postupným půlením hran. Pak se graf G nazývá *rovinný.*

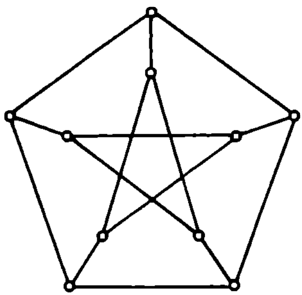
Věta Kuratowského nám zaručuje ekvivalenci této definice s definicí III.2. Znamená to, že každý konečný graf, který je rovinný podle definice III.2, je rovinný i podle definice III.5 a obráceně. Přitom v definici III.5 se vůbec nevyskytují takové pojmy jako rovina, bod a oblouk. Mluví se v ní pouze o podgrafech, půlení hran a o grafech K_5 a $K_{3,3}$, a to jsou pojmy teorie grafů.

Mohli bychom tedy vybudovat teorii rovinných grafů zcela bez geometrických (respektive topologických) pojmů. Nicméně v dalších kapitolách se budeme stále opírat o pojem rovinné representace grafu, protože to bude výhodné s hlediska názornosti.

Cvičení

1. Najděte rovinnou representaci úplného sudého grafu $K_{2,n}$ pro libovolné n.

2. Na obrázku III.5 je takzvaný Petersenův graf. Dokažte podle věty Kuratowského, že tento graf není rovinný.



Obr. III.5

3. Dokažte, že každý graf obsahující nejvýše jednu kružnici je rovinný.

4. Dokažte, že pro libovolně velké přirozené číslo n existuje sudý graf, který má více než n uzlů a není rovinný.

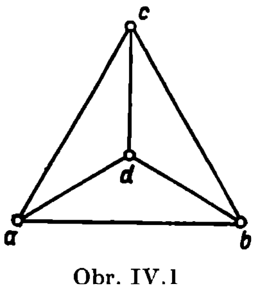
IV. KAPITOLA

OBLASTI ROVINNÉHO GRAFU, DUÁLNÍ GRAF

Vraťme se zase k pojmu rovinné representace grafu.

Definice IV.1. Nechť G je rovinný graf, $\mathscr{R}(G)$ jeho rovinná representace v některé rovině σ. Nechť f je množina bodů v rovině taková, že libovolné dva body množiny f lze spojit spojitou křivkou ležící v σ a nemající společný bod s representací $\mathscr{R}(G)$ a žádná množina v rovině σ, která obsahuje f jako vlastní podmnožinu, tuto vlastnost nemá. Pak f nazýváme *oblastí rovinné representace* $\mathscr{R}(G)$ grafu G.

Oblast značíme malým písmenem, ačkoliv jde o množinu bodů. V teorii grafů je však zvykem takto značit oblasti, stejně jako uzly a hrany. Co je spojitá křivka, je zřejmé z názoru; přesná definice je příliš složitá.



Obr. IV.1

Představme si, že rovinnou representaci $\mathscr{R}(G)$ grafu G máme nakreslenu na papíře a že rozstříháme tento papír podél všech oblouků této representace. Jednotlivé kusy papíru, které nám po tomto rozstříhání vzniknou, představují oblasti representace $\mathscr{R}(G)$.

Na obrázku IV.1 vidíme rovinnou representaci grafu K_4. Má čtyři oblasti. Jednu tvoří vnitřek trojúhelníka o vrcholech a, b, d, druhou vnitřek trojúhelníka o vrcholech b, c, d, třetí vnitřek trojúhelníka o vrcholech a, c, d, čtvrtou vnějšek trojúhelníka o vrcholech a, b, c.

Nyní uvedeme dvě další definice.

Definice IV.2. Budiž G rovinný graf, budiž $\mathscr{R}(G)$ jeho rovinné representace. Nechť f je oblast representace $\mathscr{R}(G)$, nechť h je hrana grafu G. Říkáme, že hrana h je v representaci $\mathscr{R}(G)$ incidentní s oblastí f (a oblast f je incidentní s hranou h), jestliže oblouk odpovídající hraně h v representaci $\mathscr{R}(G)$ přiléhá k oblasti f. Je-li u uzel incidentní s hranou h, která je v representaci $\mathscr{R}(G)$ incidentní s oblastí f, říkáme, že uzel u je incidentní s oblastí f (a oblast f je incidentní s uzlem u).

Definice IV.3. Budiž G rovinný graf, budiž $\mathscr{R}(G)$ jeho rovinná representace. Nechť f je oblast representace $\mathscr{R}(G)$. Podmnožina representace $\mathscr{R}(G)$ složená z oblouků odpovídajících hranám incidentním s oblastí f a z uzlových bodů odpovídajících uzlům grafu G incidentním s oblastí f se nazývá hranicí oblasti f.

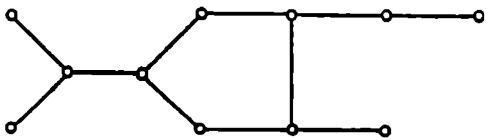
V definici IV.2 mluvíme o tom, že hrana h přiléhá k oblasti f. Co to znamená, je zřejmé z názoru. Bylo by možné hranici oblasti a incidenci mezi hranami a oblastmi definovat formálněji pomocí pojmu hranice množiny, který je důležitým pojmem v topologii. To by však bylo příliš složité, proto od toho upouštíme a odvoláváme se na názor.

Zdůrazníme ještě, že bod náležící hranici některé oblasti representace $\mathscr{R}(G)$ není bodem této oblasti.

Věta IV.1. *Nechť G je rovinný graf, $\mathscr{R}(G)$ jeho rovinná representace. Nechť h je hrana grafu G. Vnitřek oblouku representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající hraně h patří hranicím dvou různých oblastí representace $\mathscr{R}(G)$ právě tehdy, není-li hrana h acyklická.*

Důkaz. Je zřejmé, že zmíněný vnitřek oblouku nemůže patřit hranicím tří různých oblastí representace $\mathscr{R}(G)$. Nechť tedy h není acyklická. V grafu G existuje kružnice K, která obsahuje hranu h. Sjednocením oblouků representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídajících hranám kružnice K je jednoduchá uzavřená křivka. (Jednoduchá křivka je taková, která neprotíná sebe samu.) Zřejmě každá oblast representace $\mathscr{R}(G)$ leží buď celá vně této křivky, nebo celá uvnitř křivky. Tedy oblouk odpovídající hraně h patří hranicím dvou různých oblastí representace $\mathscr{R}(G)$. Nechť nyní hrana h je acyklická. Každá jednoduchá uzavřená křivka, která je podmnožinou representace $\mathscr{R}(G)$, je zřejmě tvořena oblouky odpovídajícími hranám některé kružnice v grafu G. Vnitřek oblouku odpovídajícího hraně h tedy nepatří žádné jednoduché uzavřené křivce a zřejmě vůbec žádné uzavřené křivce, která by byla podmnožinou representace $\mathscr{R}(G)$, a náleží tudíž hranici pouze jedné oblasti (zde se opět musíme odvolat na geometrický názor, přesný důkaz by byl příliš složitý).

Vysvětleme si názorně, co to znamená, že některý oblouk odpovídající hraně náleží hranici pouze jedné oblasti. Mějme opět onen papír s nakreslenou representací $\mathscr{R}(G)$ a rozstříhejme jej tak, jak bylo popsáno výše. Není-li h acyklická, pak příslušný oblouk bude ležet na okrajích dvou různých kousků papíru, které nám rozstříháním vzniknou. Je-li h acyklická hrana, pak na místě oblouku, který jí odpovídá, budeme mít pouze zástřih do jednoho kousku papíru (papír se podél tohoto zástřihu nerozpadá). Kdybychom stříhali pouze podél oblouků odpovídajících hranám, které nejsou acyklické, dostali bychom stejný počet kousků papíru, jako když jsme stříhali podél všech oblouků. Zkuste si obkreslit rovinnou representaci grafu na obrázku IV.2 a rozstříhejte ji. Které hrany jsou acyklické?



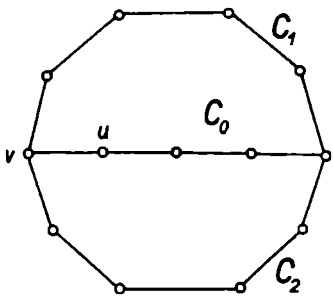
Obr. IV.2

Můžete namítnout, že náleží-li vnitřek nějakého oblouku hranici pouze jedné oblasti, neměli bychom vůbec říkat, že náleží této hranici. Z praxe známe hranice mezi dvěma státy nebo hranici mezi nějakým státem a mořem, ale nikoliv hranici pouze jednoho státu a ničeho jiného. Z toho, co jsme uvedli, však plyne, že každý bod roviny s výjimkou bodů representace $\mathscr{R}(G)$ patří právě do jedné z oblastí této representace, body representace $\mathscr{R}(G)$ nepatří do žádné oblasti. Je tedy vhodné definovat hranici oblasti tak, aby každý bod roviny patřil buď některé oblasti, nebo hranici některé oblasti.

Nyní dokážeme další větu.

Věta IV.2. *Nechť G je rovinný graf, $\omega(G) \geqq 2$. Budiž $\mathscr{R}(G)$ rovinná representace grafu G. Pak hranice každé oblasti representace $\mathscr{R}(G)$ je uzavřená křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám některé kružnice grafu G.*

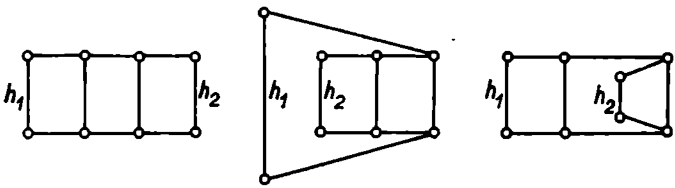
Důkaz. Je-li $\omega(G) \geqq 2$, pak G obsahuje alespoň jednu kružnici a jeho representace $\mathscr{R}(G)$ obsahuje alespoň dvě oblasti. Budiž f oblast této representace. Hranice oblasti f musí obsahovat uzavřenou křivku; jinak by f byla jedinou oblastí representace $\mathscr{R}(G)$. Tato uzavřená křivka je tvořena oblouky odpovídajícími hranám některé kružnice K grafu G. Nechť hranice oblasti f obsahuje oblouk odpovídající některé hraně nepatřící do K. Protože tato hranice je souvislá křivka, existuje hrana h nepatřící do K a incidentní s některým uzlem u kružnice K taková, že oblouk jí odpovídající patří hranici oblasti f. Budiž v koncový uzel hrany h různý od u. Protože $\omega(G) \geqq 2$, graf G' vzniklý z G odstraněním uzlu u je souvislý a existuje cesta C v G' z v do některého uzlu w kružnice K různého od u. Tato cesta ovšem existuje i v G a neobsahuje uzel u. Pro jednoduchost předpokládejme,



Obr. IV.3

že C neobsahuje jiný uzel kružnice K než w; kdyby takovéto uzly obsahovala, mohli bychom místo C uvažovat úsek této cesty z v do nejbližšího takového uzlu. Budiž C_0 cesta z u do w vzniklá z C přidáním uzlu u a hrany uv. Existují dále dvě různé cesty C_1 a C_2 z u do w, které jsou podgrafy kružnice K. Na obrázku IV.3 je jasně vidět, že zvolíme-li na každé z cest C_1, C_2 jeden uzel různý od u a w, pak nemůže existovat oblast, která by byla incidentní s oběma těmito uzly a s uzlem u současně, což je spor s předpokladem, že všechny tyto uzly jsou incidentní s oblastí f.

Definice IV.4. Budiž G rovinný graf, buďtež $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ dvě rovinné representace grafu G. Representace $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ se nazývají *ekvivalentní*, jestliže pro každé dvě hrany h_1 a h_2 grafu G platí, že v representaci $\mathscr{R}_1(G)$ existuje oblast incidentní s h_1 i s h_2 právě tehdy, jestliže takováto oblast existuje v $\mathscr{R}_2(G)$.



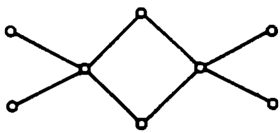
Obr. IV.4

Na obrázku IV.4 vidíme tři rovinné representace téhož grafu G. První dvě z nich jsou spolu ekvivalentní, třetí s nimi ekvivalentní není. Vidíme, že hrany h_1 a h_2 jsou incidentní s touž oblastí v prvních dvou representacích, ve třetí nikoli.

Věta IV.3. *Jestliže K je kružnice v rovinném grafu G a existuje-li rovinná representace $\mathscr{R}(G)$ grafu G taková, že křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám této kružnice není hranicí oblasti této representace, pak množina uzlů této kružnice je řezem grafu G.*

Důkaz. Pokud by neexistoval uzlový bod representace $\mathscr{R}(G)$ uvnitř zmíněné křivky, zřejmě vnitřek této křivky by byl oblastí representace $\mathscr{R}(G)$. Kdyby neexistoval uzlový bod vně této křivky, byl by její vnějšek oblastí representace $\mathscr{R}(G)$. V obou případech by tato křivka byla hranicí oblasti representace $\mathscr{R}(G)$. Existuje tedy alespoň jeden uzlový bod uvnitř této křivky, který odpovídá některému uzlu u grafu G, a alespoň jeden uzlový bod vně této křivky, který odpovídá některému uzlu v. Každá cesta z u do v v grafu G zřejmě obsahuje uzel kružnice K, a tedy po odstranění všech uzlů kružnice K z grafu G vznikne graf, v němž uzly u a v spolu nesouvisí a který je tedy nesouvislý.

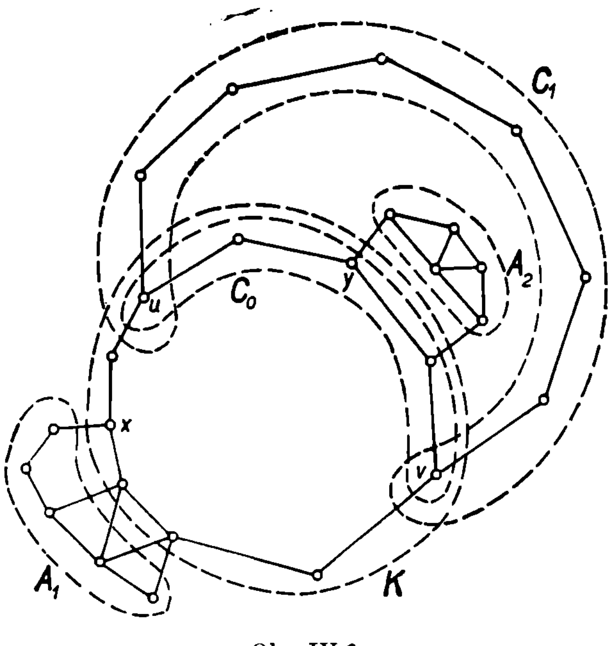
Obrácené tvrzení obecně neplatí (viz obr. IV.5), ale platí pro grafy, jejichž uzlový stupeň souvislosti je větší nebo roven třem a pro graf K_4.



Obr. IV.5

Věta IV.4. *Nechť G je rovinný graf, nechť $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Nechť $\mathscr{R}(G)$ je rovinná representace grafu G. Budiž K kružnice v grafu G. Množina* *uzlů kružnice K je řezem grafu G právě tehdy, jestliže křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám kružnice K v representaci $\mathcal{R}(G)$ je hranicí oblasti representace $\mathcal{R}(G)$.*

Důkaz. Vzhledem k větě IV.3 stačí dokázat, že existuje-li v grafu G kružnice K taková, že množina jejích uzlů je řezem grafu G a křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám kružnice K v representaci $\mathcal{R}(G)$ je hranicí oblasti této representace, pak $\omega(G) \leqq 2$. Uvažujme komponenty grafu G' vzniklého z G odstraněním všech uzlů kružnice K. Ke každé takovéto komponentě A existuje alespoň jedna cesta, která je podgrafem kružnice K a má tu vlastnost, že každý uzel kružnice K spojený hranou s uzlem komponenty A patří této cestě (přinejmenším takovouto cestou může být libovolná cesta vzniklá z K odstraněním jedné hrany). Budiž nyní $q(A)$ délka nejkratší takovéto cesty pro komponentu A. Dále budiž A_0 taková komponenta, že $q(A_0)$ je nejmenší ze všech čísel $q(A)$. Předpokládejme nejprve, že $q(A_0) < k - 1$, kde k je délka kružnice K. Budiž C_0 cesta délky $q(A_0)$ taková, že každý uzel kružnice K spojený hranou s uzlem komponenty A_0 patří do C_0 a C_0 je podgrafem kružnice K. Nechž u a v jsou koncové uzly cesty C_0 (tedy C_0 je cesta z u do v). Každý z uzlů u a v je spojen hranou s některým uzlem komponenty A_0; jinak by existovala kratší cesta s požadovanou vlastností. Existuje tedy cesta C_1 z u do v, jejíž všechny uzly kromě u a v patří do A_0. Budiž K' kružnice, která je sjednocením cest C_0 a C_1. Kružnici K' v representaci $\mathcal{R}(G)$ grafu G odpovídá jednoduchá uzavřená křivka. Protože $q(A_0) < k - 1$, existuje alespoň jeden uzel x kružnice K, který neleží na C_0. Je-li $q(A_0) \leqq 2$, pak C_0 neobsahuje žádný uzel kromě u a v, a tedy nejvýše dva uzly kružnice K jsou spojeny s uzly komponenty A_0 (připouštíme i případ $u = v$), což znamená, že v grafu vzniklém odstraněním uzlů u a v z grafu G neexistuje cesta z x do žádného uzlu z A_0 a tedy $\omega(G) \leqq 2$. Je-li $q(A_0) \geqq 3$, existuje alespoň jeden uzel y cesty C_0 různý od u a v. Nechť A_1 je komponenta grafu G' různá od A_0 taková, že některý její uzel je spojen hranou s x, a nechť A_2 je komponenta grafu G' různá od A_0 taková, že některý její uzel je spojen hranou s y. Uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům z A_1 leží buď všechny uvnitř křivky odpovídající kružnici K', nebo všechny vně této křivky; jinak by A_1



Obr. IV.6

musela mít společný uzel s K nebo s A_0. Podobné tvrzení platí i pro A_2. Leží-li nyní uzly komponenty A_1 uvnitř křivky, leží uzly komponenty A_2 vně křivky a obráceně. Je to vidět na obrázku IV.6. Z toho plyne, že neexistuje cesta z x do y, která by neobsahovala u ani v. V grafu G'' vzniklém z G odstraněním uzlů u a v uzly x a y spolu nesouvisí, tedy množina $\{u, v\}$ je řezem grafu G a $\omega(G) \leqq 2$. Nechť nyní $q(A_0) = k - 1$. Znamená to, že všechny uzly kružnice K jsou spojeny hranami s uzly komponenty A_0. Protože $q(A_0)$ je nejmenší ze všech $q(A)$, musí být $q(A) = k - 1$ pro každou komponentu A grafu G' a tedy každý uzel kružnice K je spojen hranami s uzly všech těchto komponent. Buďtež u_1, u_2, u_3 uzly kružnice K takové, že u_2 je spojen hranami s uzly u_1 a u_3. Budiž A' komponenta grafu G' různá od A_0. Existují cesty C_1, C_2 z u_1 do u_3 takové, že všechny uzly cesty C_1 kromě u_1 a u_3 leží v A_0 a všechny uzly cesty C_2 kromě u_1 a u_3 leží v A'. Budiž K_1 kružnice vzniklá z C_1 přidáním uzlu u_2 a hran u_1u_2 a u_2u_3, budiž K_2 kružnice vzniklá z C_2 týmž způsobem. Potom buď všechny uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům z C_1 leží vně křivky odpovídající kružnici K_2, nebo obráceně všechny uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům z C_2 leží vně křivky odpovídající kružnici K_1. V prvním případě všechny uzlové body representace $\mathscr{R}(G)$ odpovídající uzlům komponenty A_0 leží vně křivky odpovídající kružnici K_2 a tedy žádný z nich nemůže být spojen s u_2, což je spor. V druhém případě bychom došli ke sporu analogickou úvahou. Případ $q(A_0) = k - 1$ tedy nemůže nastat, musí platit $q(A_0) < k - 1$ a pro tento případ jsme větu dokázali výše.

V předpokladu věty se mluví o tom, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Formulovali jsme to takto, protože pro úplný graf jsme uzlový stupeň souvislosti nedefinovali. Jak však bylo poznamenáno v kapitole II, někdy se definuje uzlový stupeň souvislosti úplného grafu o n uzlech jako $n - 1$; v tom případě by ovšem bylo $\omega(K_4) = 3$ a stačilo by uvést předpoklad $\omega(G) \geqq 3$. Úplné grafy o více než čtyřech uzlech neuvažujeme, protože již víme, že nejsou rovinné.

Z věty IV.4 nyní odvodíme jednu důležitou větu.

Věta IV.5. *Nechť G je rovinný graf a nechť $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Pak všechny rovinné representace grafu G jsou spolu ekvivalentní.*

Důkaz. Nechť $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ jsou dvě rovinné representace grafu G. Nechť h_1 a h_2 jsou dvě hrany grafu G. Předpokládejme, že v representaci $\mathscr{R}_1(G)$ existuje oblast f_1 incidentní s oběma hranami h_1 a h_2. Hranice oblasti f_1 v $\mathscr{R}_1(G)$ je jednoduchá uzavřená křivka, která je tvořena oblouky odpovídajícími hranám některé kružnice K grafu G (graf G zřejmě neobsahuje acyklické hrany). Podle věty IV.3 množina uzlů kružnice K není řezem grafu G, tedy i v $\mathscr{R}_2(G)$ musí existovat oblast f_2 taková, že její hranice je uzavřená křivka tvořená oblouky odpovídajícími hranám kružnice K. Potom ovšem h_1 a h_2 jsou incidentní s f_2 v representaci $\mathscr{R}_2(G)$. Protože h_1 a h_2 byly libovolně zvoleny, jsou representace $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ ekvivalentní. A poněvadž i $\mathscr{R}_1(G)$ a $\mathscr{R}_2(G)$ byly dvě libovolně zvolené rovinné representace grafu G, dokázali jsme, že všechny rovinné representace grafu G jsou spolu ekvivalentní.

Je-li G rovinný graf takový, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech, budeme uvažovat určitou množinu $F(G)$ přiřazenou grafu G. Prvky této množiny jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny kružnicím grafu G, jejichž množiny uzlů nejsou řezy grafu G, a nazývají se oblasti grafu G. Je-li oblast $f \in F(G)$ přiřazena takto kružnici K, pak o uzlu u řekneme, že je incidentní s oblastí f (a oblast f je incidentní s uzlem u) právě tehdy, náleží-li u do K. Podobně definujeme i incidenci mezi hranou h a oblastí f. Pak v každé rovinné representaci $\mathscr{R}(G)$ grafu G každé oblasti $f \in F(G)$ vzájemně jednoznačně odpovídá oblast representace $\mathscr{R}(G)$ tak, že tato incidence je zachována.

Vidíme tedy, že věta IV.4 nám umožňuje podstatně zjednodušit vyjadřování. Splňuje-li graf předpoklady této věty, nemusíme již mluvit o oblastech rovinné representace tohoto grafu, ale pouze o oblastech grafu G.

Dokážeme ještě další větu o těchto grafech.

Věta IV.6. *Nechť G je rovinný graf takový, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Nechť f_1, f_2 jsou oblasti grafu G. Pak existuje nejvýše jedna hrana grafu G, která je incidentní současně s f_1 i s f_2.*

Důkaz. Budiž $\mathscr{R}(G)$ rovinná representace grafu G. Předpokládejme, že existují oblasti f_1, f_2 a hrany h_1, h_2 grafu G tak, že $f_1 \neq f_2$, $h_1 \neq h_2$ a každá z hran h_1, h_2 je incidentní s f_1 i s f_2. V representaci $\mathscr{R}(G)$ oblastem f_1 a f_2 odpovídají oblasti této representace, které budeme značit také f_1 a f_2. Nechť G' je graf vzniklý z G odstraněním hrany h_1. Odstraníme-li z $\mathscr{R}(G)$ oblouk odpovídající hraně h_1 (s výjimkou uzlových bodů, které spojuje), dostaneme rovinnou representaci $\mathscr{R}(G')$ grafu G'. V $\mathscr{R}(G')$ hrana h_2 je incidentní pouze s jednou oblastí; tato oblast se skládá ze všech bodů oblasti f_1, ze všech bodů oblasti f_2 a ze všech vnitřních bodů oblouku odpovídajícího hraně h_1 (tento oblouk už v $\mathscr{R}(G')$ není). Z toho plyne podle věty IV.1, že h_2 je acyklická hrana grafu G'. Odstraněním hrany h_2 z G' tedy vznikne nesouvislý graf G''. Graf G'' vznikne z G odstraněním hran h_1 a h_2. Existuje tedy řez grafu G složený z uzlu u_1 incidentního s h_1 a uzlu u_2 incidentního s h_2; při odstraňování uzlů u_1 a u_2 se odstraní rovněž hrany h_1 a h_2. Je tedy $\omega(G) \leqq 2$, což je spor.

Všimněme si nyní blíže incidence hran a oblastí rovinného grafu G, pro nějž $\omega(G) \geqq 3$ nebo který je úplným grafem o čtyřech uzlech. Každá hrana je incidentní právě s dvěma oblastmi podle věty IV.1 a ke každým dvěma oblastem existuje nejvýše jedna hrana incidentní s oběma současně podle věty IV.5. Vidíme, že incidence mezi hranami a oblastmi v grafu G má tytéž vlastnosti jako incidence mezi hranami a uzly. Můžeme tedy vyslovit další definici.

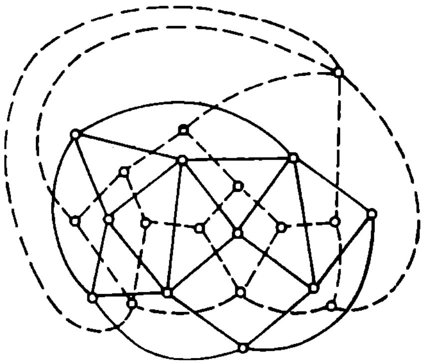
Definice IV.5. Nechť G je rovinný graf takový, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Nechť $F(G)$ je množina oblastí grafu G. Sestrojíme graf G^* tak, že každé oblasti z $F(G)$ přiřadíme uzel grafu G^* a dva uzly grafu G^* spojíme hranou právě tehdy, existuje-li v G hrana, která je incidentní s oběma oblastmi odpovídajícími těmto uzlům. Pak graf G^* nazýváme *duálním grafem* ke grafu G.

Dokážeme větu o duálních grafech.

Věta IV.7. *Nechť G je rovinný graf takový, že $\omega(G) \geqq 3$ nebo G je úplný graf o čtyřech uzlech. Budiž G^* duální graf ke grafu G. Pak graf G^* je rovinný.*

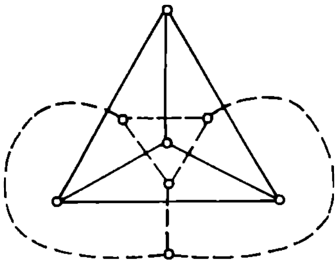
Důkaz. Nebudeme větu dokazovat podle věty Kuratowského, ale opřeme se o názor. Mějme rovinnou representaci $\mathcal{R}(G)$ grafu G. V každé oblasti representace $\mathcal{R}(G)$ zvolíme jeden bod; tento bod bude uzlovým bodem rovinné representace $\mathcal{R}(G^*)$ grafu G^* odpovídajícím uzlu grafu G^*, který je příslušnou oblastí grafu G. Jsou-li f_1 a f_2 dvě oblasti grafu G takové, že existuje hrana h incidentní s f_1 i s f_2, pak spojíme bod zvolený v oblasti f_1 s bodem zvoleným v oblasti f_2 obloukem jednoduché spojité křivky tak, aby tento oblouk protínal oblouk representace $\mathcal{R}(G)$ odpovídající hraně h v některém jeho vnitřním bodě a neměl společný bod se žádným jiným obloukem representace $\mathcal{R}(G)$. Učiníme-li to pro každou dvojici f_1, f_2 oblastí s uvedenou vlastností, dostaneme rovinnou representaci grafu G^*.

Je to vidět na obrázku IV.7. Hrany grafu G jsou nakresleny plnými čarami, hrany grafu G^* čárkovaně.



Obr. IV.7

Vidíme rovněž, že duální graf ke grafu G^* je opět G. Přesně vzato, abychom toto mohli tvrdit, museli bychom vědět, zda duální graf ke grafu G^* je vůbec definován, to jest zda G^* splňuje předpoklady definice IV.5. Řekněme si bez důkazu, že tomu tak skutečně je.

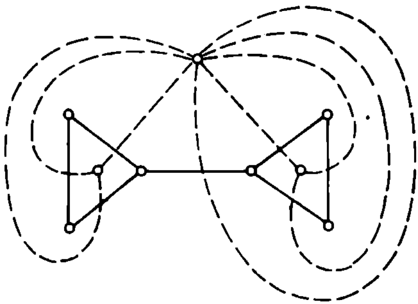


Obr. IV.8

Na obrázku IV.8 vidíme duální graf ke grafu K_4. Je to opět úplný graf o čtyřech uzlech. Proto graf K_4 nazýváme autoduální. Předpona „auto-" značí „samo-".

Duální grafy by bylo možno definovat i pro grafy o uzlovém stupni souvislosti menším než 3. Protože však takovéto grafy mohou mít neekvivalentní representace, museli bychom vždy mluvit o duálním grafu vzhledem k dané rovinné representaci. Dále by se v duálním grafu mohly vyskytovat i dvojice uzlů spojené více než jednou hranou (pokud by existovala více než jedna hrana incidentní s týmiž dvěma oblastmi v representaci původního grafu) a smyčky (pokud by původní graf obsahoval acyklické hrany). Pro zajímavost ukážeme takovýto graf na obrázku IV.9. V každém případě platí, že počet hran duálního grafu je roven počtu hran původního grafu.

Nyní ukážeme, že počet oblastí rovinné representace grafu je jednoznačně určen počtem uzlů a hran tohoto grafu. Plyne z toho samozřejmě, že všechny rovinné representace téhož grafu mají tentýž počet oblastí.



Obr. IV.9

Věta IV.8. (Eulerův vzorec). *Budiž G souvislý rovinný graf o n uzlech a m hranách. Budiž $\mathscr{R}(G)$ rovinná representace grafu G a nechť $\mathscr{R}(G)$ má p oblastí. Pak platí*

$$n - m + p = 2.$$

Důkaz. Jsou-li všechny hrany grafu G acyklické, pak graf G je stromem. Tedy $m = n - 1$ podle věty II.7. Dále každá hrana grafu G patří hranici pouze jediné oblasti representace $\mathscr{R}(G)$ (podle věty IV.1) a tedy $p = 1$; kdyby existovaly dvě různé oblasti, musela by existovat hrana incidentní se dvěma oblastmi v representaci $\mathscr{R}(G)$. Máme

$$n - m + p = n - (n - 1) + 1 = 2.$$

Nechť nyní G obsahuje hranu h, která není acyklická. Budiž G' graf získaný z grafu G odstraněním hrany h.

Vezměme rovinnou representaci $\mathcal{R}(G)$ grafu G a odstraňme z ní oblouk odpovídající hraně h (s výjimkou uzlových bodů, které spojuje). Dostaneme tak rovinnou representaci $\mathcal{R}(G')$ grafu G'. Hrana h je v $\mathcal{R}(G)$ incidentní se dvěma různými oblastmi f_1 a f_2 (protože není acyklická). V representaci $\mathcal{R}(G')$ máme oblast f, která se skládá ze všech bodů oblasti f_1, všech bodů oblasti f_2 a všech vnitřních bodů oblouku odpovídajícího hraně h v $\mathcal{R}(G)$. Všechny oblasti representace $\mathcal{R}(G)$ různé od f_1 a f_2 jsou zřejmě oblastmi i v $\mathcal{R}(G')$. Je-li nyní n' počet uzlů a m' počet hran grafu G' a je-li p' počet oblastí representace $\mathcal{R}(G')$, pak $n' = n$, $m' = m - 1$, $p' = p - 1$. Máme

$$n' - m' + p' = n - (m - 1) + (p - 1) =$$
$$= n - m + p.$$

Odstraněním hrany, která není acyklická, se tedy hodnota výrazu $n - m + p$ nemění. Jak jsme však viděli v důkaze věty II.8, postupným opakováním této operace dostaneme kostru grafu G, která je stromem, a tedy pro ni tato hodnota je rovna 2. Musí být tedy rovna 2 i pro původní graf G.

Vzorec se nazývá Eulerův podle slavného matematika Leonharda Eulera, o kterém jste jistě už slyšeli.

Nakonec se ještě zmíníme o možnostech representací grafu na jiné ploše, než je rovina. Representace grafu na libovolné ploše se definuje analogicky jako rovinná representace.

Věta IV.9. *Nechť G je graf. Representace grafu G na kulové ploše existuje právě tehdy, je-li graf G rovinný.*

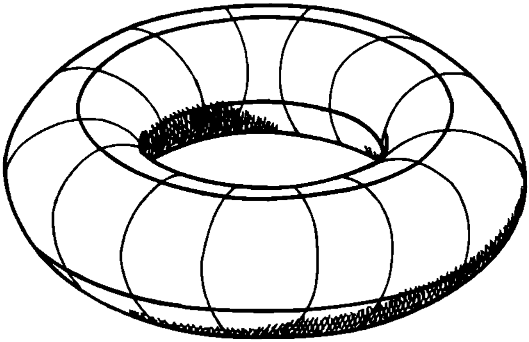
Důkaz. Nechž graf G je rovinný. Pak existuje jeho rovinná representace $\mathcal{R}(G)$ v nějaké rovině π. Uvažujme kulovou plochu $\varkappa$ která se dotýká roviny π v některém bodě T. Budiž S bod plochy $\varkappa$ protilehlý bodu T. Body roviny π budeme promítat na plochu $\varkappa$ středovým promítáním o středu S. Znamená to, že je-li A bod roviny π, pak jeho průmětem bude bod A', který je průsečíkem přímky AS s plochou $\varkappa$ různým od S. Takto každému bodu roviny π je přiřazen právě jeden bod plochy $\varkappa$, přičemž různým bodům roviny jsou přiřazeny různé body kulové plochy. Průmětem rovinné representace $\mathscr{R}(G)$ bude representace grafu G na kulové ploše $\varkappa$. Obráceně, existuje-li representace grafu G na kulové ploše $\varkappa$, můžeme ji opět promítnout na tečnou rovinu π této plochy; pouze bod dotyku T musí být zvolen tak, aby bod S k němu protilehlý nebyl bodem této representace; to však lze snadno provést. Průmětem této representace je rovinná representace grafu G.

Promítání, kterého jsme užili, je takzvaná azimutální projekce. Používá se jí v kartografii. Máme-li nějakou mapu nakreslenou na globu, pomocí této projekce ji promítneme do roviny a dostaneme tak mapu v rovině. Středem promítání bývá obvykle buď některý zeměpisný pól, nebo některý bod na rovníku. Názorně si tuto projekci můžeme představit tak, že kulová plocha $\varkappa$ je ze skla, rovina π je projekční plátno, na němž kulová plocha leží, a v nejvyšším bodě kulové plochy máme bodový světelný zdroj. Takto se nám kresba na kulové ploše promítne na rovinu.

Závěrem uvedeme bez důkazu větu, kterou nezávisle na sobě dokázali I. Fáry, S. K. Stein a K. Wagner.

Věta IV.10. *Nechť G je rovinný graf. Pak existuje rovinná representace grafu G, v níž všem hranám grafu G odpovídají úsečky.*

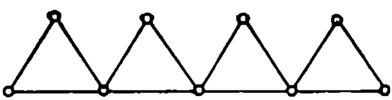
Studují se ovšem representace grafů i na jiných plochách. Tak například na anuloidu (plocha připomínající pneumatiku, viz obr. IV.10) existuje representace každého rovinného grafu, existují však i nerovinné grafy, které mají takovouto representaci (například K_7).



Obr. IV.10

Cvičení

1. Na obrázku IV.11 je rovinná representace určitého grafu. Najděte rovinnou representaci téhož grafu, která s ní není ekvivalentní.



Obr. IV.11

2. Nakreslete rovinnou representaci souvislého rovinného grafu, který obsahuje pouze jednu kružnici (sám však není kružnicí). Kolik oblastí má jeho rovinná reprèsentace? Kolik má tento graf hran, má-li n uzlů?

3. Nakreslete rovinnou representaci grafu získaného z K_5 odstraněním jedné hrany a sestrojte příslušný duální graf.

4. Kolik oblastí má rovinná representace rovinného pravidelného grafu stupně 4 o n uzlech?

5. Nechť graf G sestává z kružnice K, uzlu u nepatřícího této kružnici a všech hran spojujících uzel u se všemi uzly kružnice K (takovému grafu se říká kolo). Jaký je duální graf k takovémuto grafu?

6. Nakreslete rovinnou representaci grafu vzniklého z grafu $K_{3,3}$ odstraněním jedné hrany.

7. Rovinný graf má 30 hran a jeho počet uzlů je roven počtu oblastí. Kolik má uzlů?

V. KAPITOLA

TRIANGULACE ROVINY

V předešlé kapitole jsme zavedli pojem incidence mezi hranami grafu a oblastmi jeho rovinné representace. Můžeme tedy také definovat stupeň oblasti, podobně jako jsme definovali stupeň uzlu.

Definice V.1. Nechť G je rovinný graf, nechť $\mathscr{R}(G)$ je jeho rovinná representace. Nechť f je oblast representace $\mathscr{R}(G)$. *Stupněm oblasti* f nazýváme počet hran grafu G incidentních s oblastí f v representaci $\mathscr{R}(G)$.

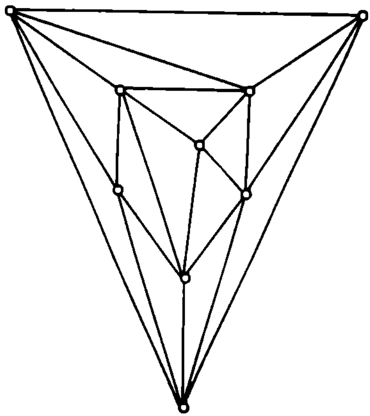
Nyní se budeme zabývat určitým speciálním typem rovinných representací a grafy, které mají tyto representace.

Definice V.2. Nechť G je souvislý rovinný graf bez acyklických hran, nechť $\mathscr{R}(G)$ je jeho rovinná representace. Je-li stupeň každé oblasti representace $\mathscr{R}(G)$ roven třem, nazýváme representaci $\mathscr{R}(G)$ *triangulací roviny* a graf G nazýváme *grafem triangulace roviny*.

Místo „triangulace roviny" budeme v dalším říkat stručně „triangulace", protože triangulacemi jiných ploch se zabývat nebudeme. Rovněž budeme říkat, že hranicí určité oblasti je kružnice, místo abychom říkali, že její hranicí je uzavřená křivka tvořená oblouky rovinné representace odpovídajícími hranám kružnice.

Příklad triangulace je na obrázku V.1.
Dokážeme některé věty o triangulacích.

Věta V.1. *Budiž G graf triangulace. Budiž u libovolný uzel grafu G. Pak existuje kružnice $K(u)$ v grafu G, jejíž množinou uzlů je množina všech uzlů grafu G spojených hranami s uzlem u.*



Obr. V.1

Důkaz. Budiž v_1 uzel spojený hranou s uzlem u. Hrana uv_1 je incidentní právě s dvěma oblastmi representace $\mathcal{R}(G)$; budiž f_1 jedna z těchto oblastí. Oblast f_1 má stupeň 3, tedy její hranicí je kružnice délky 3 obsahující hranu uv_1. Budiž v_2 uzel této kružnice různý od u a v_1; zřejmě existují hrany uv_2 a v_1v_2. Hrana uv_2 je incidentní rovněž se dvěma oblastmi; jedna z nich je f_1, druhou označíme f_2. Oblast f_2 má rovněž stupeň 3; budiž tedy v_3 uzel hranice oblasti f_2 různý od u a v_2. Je $v_3 \neq v_1$, protože jinak by oblasti f_1, f_2 byly obě incidentní s uzly u, v_1, v_2, a poněvadž obě mají stupeň 3, musely by být totožné, a tedy hrana uv_2 by byla incidentní pouze s jednou oblastí a byla by acyklická, což by byl spor. Nechť f_3 je oblast incidentní s hranou uv_3 a různá od f_2. Uzel hranice oblasti f_3 různý od u a v_3 může být v_1; v tom případě existuje kružnice sestávající z uzlů v_1, v_2, v_3 a hran v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1. V opačném případě tento uzel označíme v_4 a pokračujeme dále stejným způsobem. Po konečném počtu kroků získáme uzly $v_1, \ldots, v_r$ a oblasti $f_1, \ldots, f_r$ tak, že hranice oblasti f_i pro $i = 1, \ldots, r - 1$ je kružnice délky 3 obsahující uzly u, v_i, v_{i+1} a hranice oblasti f_r je kružnice délky 3 obsahující uzly u, v_r, v_1. Nechť $K(u)$ je kružnice sestávající z uzlů $v_1, \ldots, v_r$ a hran $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{r-1}v_r, v_rv_1$; tyto hrany existují, jak jsme ukázali. Všechny uzly kružnice $K(u)$ jsou spojeny hranami s uzlem u. Dále uzel u není incidentní se žádnou oblastí různou od $f_1, \ldots, f_r$, tedy ani se žádnou hranou různou od $uv_1, \ldots, uv_r$ (takováto hrana by musela být acyklická), tedy množina uzlů spojených hranami s uzlem u je $\{v_1, \ldots, v_r\}$.

Věta V.2. *Nechť G je graf triangulace o n uzlech. Je-li $n = 4$, pak G je úplný graf o čtyřech uzlech. Je-li $n \geqq 5$, pak $\omega(G) \geqq 3$.*

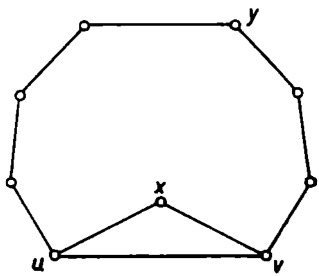
Důkaz. Budiž $n = 4$. Nechť u je uzel grafu G. Podle věty V.1 existuje kružnice $K(u)$ v grafu G, jejíž množinou uzlů je množina všech uzlů spojených hranami s uzlem u. Délka kružnice $K(u)$ je 3; menší délku kružnice mít nemůže, při větší délce by bylo $n > 4$. Jsou-li v_1, v_2, v_3 uzly této kružnice, pak existují hrany uv_1, uv_2, uv_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, a tedy u, v_1, v_2, v_3 jsou uzly úplného grafu o čtyřech uzlech. Protože G má pouze čtyři uzly, tento úplný graf je celý graf G. Budiž nyní $n \geqq 5$. Graf G není úplný, protože jinak by nebyl rovinný. Existují v něm tedy řezy. Budiž R řez grafu G o minimálním počtu uzlů; tento počet uzlů je $\omega(G)$. Budiž $u \in R$. Budiž G' graf vzniklý z G odstraněním všech uzlů řezu R. Uzel u je v G spojen hranami s uzly alespoň dvou komponent grafu G'; jinak by $R - \{u\}$ byl řezem grafu G a řez R by neměl minimální počet uzlů. Uzel u je tedy spojen s některým uzlem w_1 komponenty A_1 a s některým uzlem w_2 komponenty A_2 grafu G', kde $A_1 \neq A_2$. Budiž $K(u)$ kružnice z věty V.1. Uzly w_1 a w_2 jsou uzly kružnice $K(u)$. Kružnice $K(u)$ je sjednocením dvou cest C_1 a C_2, které obě spojují uzly w_1 a w_2 a nemají kromě w_1 a w_2 společný uzel. Na každé z cest C_1 a C_2 musí ležet některý uzel řezu R; nechť x_1 je uzel řezu R obsažený v C_1 a x_2 uzel řezu R obsažený v C_2. Uzly u, x_1, x_2 jsou tři navzájem různé uzly řezu R, a tedy $\omega(G) \geqq 3$.

Z této věty a z věty IV. 4 plyne, že je-li graf G o $n \geqq 4$ uzlech grafem triangulace, pak všechny jeho rovinné representace jsou triangulacemi.

V čem spočívá hlavní význam triangulací, poznáme z další věty.

Věta V.3. *Každý rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech je podgrafem některého grafu triangulace s toutéž množinou uzlů.*

Důkaz. Nechť G je souvislý rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech, nechť $\mathscr{R}(G)$ je jeho rovinná representace. (Kdyby graf G byl nesouvislý, byl by samozřejmě podgrafem některého souvislého rovinného grafu.) Je-li G grafem triangulace, pak pro něj věta platí. Není-li grafem triangulace, pak existuje oblast f representace $\mathcal{R}(G)$, jejíž hranicí není kružnice délky 3. Existují tedy uzly u, v incidentní s f, které nejsou spojeny hranou patřící hranici oblasti f. Nejsou-li vůbec spojeny hranou, pak je spojíme a dostaneme tak graf G'. Rovinnou representaci $\mathcal{R}(G')$ grafu G' dostaneme tak, že uzlové body representace $\mathcal{R}(G)$ odpovídající uzlům u a v spojíme obloukem jednoduché rovinné křivky, jehož vnitřní body náleží



Obr. V.2

oblasti f. Tedy G' je rovněž rovinný graf, má tutéž množinu uzlů jako G a graf G je jeho podgrafem. Předpokládejme nyní, že uzly u a v jsou spojeny hranou (která ovšem nepatří hranici oblasti f). Existuje cesta C z u do v patřící hranici oblasti f (uzly a hrany incidentní s f tvoří zřejmě souvislý podgraf grafu G); tato cesta má délku větší než jedna, protože u a v nejsou spojeny hranou patřící hranici oblasti f. Existuje tedy uzel x cesty C různý od u a v a zřejmě existuje i uzel y hranice oblasti f, který nepatří do C. Kdyby byly uzly x a y spojeny hranou, pak by oblouk representace $\mathcal{R}(G)$ odpovídající této hraně musel protínat oblouk odpovídající hraně uv

nebo procházet vnitřkem oblasti f, což ovšem není možné. Je to znázorněno na obrázku V.2; je třeba poznámenat, že to platí i v případě, kdy hranice oblasti f není kružnicí. Místo uzlů u a v tedy spojíme hranou uzly x a y. Dostaneme tak graf G', pro nějž platí to, co bylo uvedeno výše. Je-li graf G_1 grafem triangulace, věta platí. Není-li, opakujeme tento postup tak dlouho, až dostaneme graf s takovou rovinnou representací, že každé dva uzly incidentní s touž oblastí jsou spojeny hranou. Pak hranice každé oblasti je kružnice délky 3 a získaný graf je grafem triangulace o stejné množině uzlů jako graf G a takový, že G je jeho podgrafem.

Nyní určíme, kolik hran a kolik oblastí má graf triangulace o daném počtu uzlů. (Vzhledem k větě V.2 můžeme mluvit o oblastech grafu.)

Věta V.4. *Nechť G je graf triangulace o $n \geqq 4$ uzlech. Pak počet hran grafu G je $3n - 6$ a počet oblastí grafu G* je $2n - 4$.

Důkaz. Počet uzlů grafu G označme m, počet jeho oblastí označme p. Každá oblast grafu G je incidentní s třemi hranami, každá hrana se dvěma oblastmi. Trojnásobek počtu oblastí je tedy roven dvojnásobku počtu hran, to jest

$$3p = 2m$$

a z toho

$$p = \frac{2}{3} m .$$

Použijeme nyní Eulerova vzorce (věta IV.7). Máme

$$n - m + p = n - \frac{1}{3} m = 2 ,$$

z čehož plyne

$$m = 3n - 6\,, \quad p = \frac{2}{3}\,m = 2n - 4\,.$$

Všechny grafy triangulací, které mají stejný počet uzlů, mají tedy i stejný počet hran a stejný počet oblastí.

Věta V.5. *Budiž G graf triangulace. Pak neexistuje rovinný graf s toutéž množinou uzlů jako G takový, aby G byl jeho vlastním podgrafem.*

Poznámka. Graf G je vlastním podgrafem grafu G', je-li G podgrafem grafu G' a přitom nesplývá s grafem G'.

Důkaz. Předpokládejme, že existuje rovinný graf G', který má stejnou množinu uzlů jako G a je takový, že G je jeho vlastním podgrafem. Podle věty V.3 existuje graf triangulace G'' s toutéž množinou uzlů jako G' (a tedy i jako G), jehož podgrafem (ne nutně vlastním) je graf G'. Je-li n počet uzlů grafu G'' (a tedy i grafů G a G'), pak G'' má $3n - 6$ hran (podle věty V.4) a počet hran grafu G' je menší nebo roven $3n - 6$. Poněvadž však G je vlastním podgrafem grafu G', musí být jeho počet hran menší než $3n - 6$, což je spor s předpokladem, že G je graf triangulace.

Grafům triangulací se také někdy říká maximální rovinné grafy. Z vět V.3 a V.5 je zřejmé, proč se jim tak říká.

Z věty V.4 plynou ještě další důsledky.

Věta V.6. *Počet hran rovinného grafu o n uzlech je menší nebo roven $3n - 6$.*

Důkaz. Pro $n \geqq 4$ to plyne přímo z vět V.3 a V.4, pro $n = 3$ je to zřejmé.

Věta V.7. *Nechť G je rovinný graf. Pak existuje alespoň jeden uzel u grafu G, pro nějž $\varrho(u) \leqq 5$.*

Důkaz. U grafů s méně než třemi uzly je to zřejmé. Předpokládejme tedy, že graf má $n \geqq 3$ uzlů. Jak jsme ukázali v kapitole II, součet všech stupňů uzlů grafu G je roven dvojnásobku jeho počtu hran. Kdyby věta neplatila, bylo by $\varrho(u) \geqq 6$ pro každý uzel u, zmíněný součet by byl větší nebo roven $6n$ a počet hran grafu G by byl větší nebo roven $3n$ a tedy větší než $3n - 6$, což by odporovalo větě V.6.

Věta V.8. *Nechť G je rovinný graf, který není úplným grafem. Pak $\omega(G) \leqq 5$.*

Tvrzení plyne přímo z vět II.6 a V.7.

Cvičení

1. Vysvětlete, jak pojem triangulace v teorii grafů souvisí s pojmem triangulace v geodézii.

2. Nakreslete libovolnou triangulaci o 10 uzlech.

3. Nakreslete triangulaci o 6 uzlech, která obsahuje jako podgraf graf vzniklý z $K_{3,3}$ odstraněním jedné hrany.

4. Čím se vyznačuje duální graf k libovolnému grafu triangulace?

5. Nechť G je nerovinný graf, nechť G' je graf vzniklý z G odstraněním jedné hrany. Je pravda, že je-li G' rovinný, je grafem triangulace?

VI. KAPITOLA

PROBLÉM ČTYŘ BAREV

S rovinnými grafy souvisí jistý problém, který bez nadsázky můžeme označit jako nejproslulejší problém teorie grafů a jeden z nejproslulejších problémů matematiky vůbec. Je to problém čtyř barev.

Problém čtyř barev vznikl někdy v polovině minulého století. Není zcela jasno, kdo první přišel na tento problém. V různých publikacích se uvádějí různá jména autorů problému čtyř barev; zde tedy se otázkou autorství tohoto problému nebudeme zabývat a žádné jméno neuvedeme. Je jen třeba poznamenat, že v době vzniku tohoto problému neexistovala ještě teorie grafů jako samostatná vědecká disciplína; šlo tedy spíše o to, čemu říkáme rekreační problém. V původním znění problému čtyř barev se tedy nemluví o grafech, nýbrž o mapách. Jak známo, na politických mapách se území jednotlivých států vybarvují různými barvami, přičemž se dbá na to, aby státy, které spolu sousedí, nebyly vybarveny toutéž barvou. Představme si nějakou takovou mapu, ať už na glóbu nebo na listu papíru. Vůbec nám nebude záležet na tom, zda odpovídá skutečnému politickému rozdělení zeměkoule; můžeme si představovat, že jde o státy na některé jiné planetě osídlené rozumnými bytostmi ve fantazii nějakého spisovatele vědeckofantastických knih. Tuto mapu bychom měli vybarvit žádaným způsobem. Kolik různých barev budeme potřebovat k tomu, abychom takto mohli vybarvit libovolnou mapu? (Státy, které spolu hraničí jen v jednom bodě, nepokládáme za sousedící a můžeme je barvit stejnou barvou. V Evropě bychom příklad takovýchto států nenašli, ale existují takové dvojice mezi státy USA, například Arizona a Colorado.)

Takovouto mapu můžeme považovat za rovinnou representaci (případně za representaci na kulové ploše, pokud jde o glóbus) nějakého rovinného grafu G. Uzlovými body této representace budou body, v nichž se stýkají alespoň tři hranice; tyto body odpovídají uzlům grafu G. Oblouky representace budou úseky hranic, které spojují dva uzlové body a neobsahují žádný uzlový bod jako svůj vnitřní bod. Oblastmi této representace budou území jednotlivých států, případně i moře. Vyloučíme případy, kdy území některého státu sestává z několika částí oddělených mořem nebo územím jiného státu (například USA s Aljaškou), dále ostrovní státy a státy obklopené ze všech stran územím jediného jiného státu (San Marino, Vatikán, Lesotho). Ostrovní státy a státy typu San Marina vylučujeme proto, abychom skutečně dostali rovinnou representaci grafu. Při samotném barvení nám tyto státy nebudou dělat potíže; ostrovní stát lze vybarvit libovolnou barvou jinou než ta, kterou je vybarveno moře, a podobně to lze provést i se státy obklopenými územím jediného jiného státu. Pokud bychom připouštěli státy sestávající z několika oddělených území, dostali bychom určité zobecnění problému čtyř barev, o kterém se ještě zmíníme.

Graf G, jehož representací $\mathscr{R}(G)$ je naše mapa, zřejmě neobsahuje acyklické hrany; takováto hrana by představovala úsek hranice jistého státu se sebou samým, což v zeměpise nemá smysl. Hranice každé oblasti je kružnice nebo se skládá z několika kružnic (příkladem oblastí, jejíž hranice se skládá z několika kružnic, by na zeměkouli bylo moře).

Můžeme tedy sestrojit k této representaci duální graf, jak jsme o tom mluvili v kapitole IV. V tomto grafu uzly jsou jednotlivé státy a dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, sousedí-li spolu odpovídající státy. Přesně vzato, může to být vlastně multigraf, jak bylo také v kapitole IV poznamenáno. Nevyloučili jsme totiž možnost, že v původním grafu (mapě) existují dvojice oblastí takové, že existují dvě různé hrany, které jsou s oběma incidentní. Na zeměkouli takovéto dvojice jsou například Francie — moře nebo Indie — Čína. Pro naše další úvahy to však není podstatné, můžeme předpokládat, že i takovéto dvojice států jsou spojeny jedinou hranou a že tedy jde skutečně o graf, nikoliv o multigraf. Jak jsme ukázali v kapitole IV, tento graf je rovinný. Připomeňme si ještě obrázek II.5. Místo oblastí nyní barvíme uzly, a to tak, aby dva uzly spojené hranou měly různou barvu. S tím už jsme se setkali v kapitole II, když jsme mluvili o chromatickém čísle grafu. Nyní tedy chápeme, proč se užívá v teorii grafů termínu barva; je to termín, který vznikl právě v souvislosti s naším problémem. Jde nám o to, jaké maximální chromatické číslo může mít rovinný graf. Toto číslo nemůže být menší než čtyři, protože K_4 je rovinný graf a $\chi(K_4) = 4$.

Dosud se nepodařilo najít rovinný graf o chromatickém čísle větším než čtyři. Byla tedy vyslovena domněnka (neboli hypotéza).

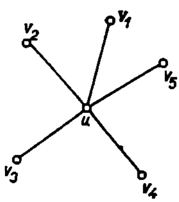
Domněnka o čtyřech barvách. *Pro každý rovinný graf G je $\chi(G) \leqq 4$.*

Toto tvrzení není věta. V matematice můžeme označit jako větu pouze takové tvrzení, které bylo dokázáno. Zde tomu tak není, proto mluvíme o domněnce; je to tvrzení, o němž se vědci domnívají, že by mohlo platit.

Lze však dokázat trochu slabší tvrzení.

Věta VI.1. *Nechť G je rovinný graf. Pak* $\chi(G) \leqq 5$.

Důkaz. Budiž n počet uzlů grafu G; použijeme matematické indukce podle n. Je-li $n \leqq 5$, pak tvrzení zřejmě platí. Nechť nyní $k \geqq 6$ a předpokládejme, že věta platí pro všechny grafy o n uzlech, kde $n \leqq k - 1$. Mějme nyní graf G, pro nějž $n = k$. Podle věty V.7 existuje v grafu G alespoň jeden uzel u takový, že $\varrho_G(u) \leqq 5$. Budiž G' graf vzniklý z G odstraněním uzlu u. Graf G' má $k - 1$ uzlů, tedy podle indukčního předpokladu existuje přípustné obarvení jeho uzlů pěti barvami. Je-li $\varrho_G(u) \leqq 4$, pak přípustné obarvení uzlů grafu G pěti barvami dostaneme tak, že všechny uzly různé od u obarvíme tak, abychom dostali přípustné obarvení grafu G' pěti barvami, a uzel u obarvíme barvou různou od barev uzlů, které jsou s ním v grafu G spojeny hranami; protože tyto uzly jsou nejvýše čtyři, takováto barva existuje. Je-li $\varrho_G(u) = 5$, ale alespoň dva uzly spojené s uzlem u v grafu G jsou v přípustném obarvení grafu G' pěti barvami obarveny stejnou barvou, postupujeme obdobně. Zbývá tedy už jen případ, kdy $\varrho_G(u) = 5$ a uzly v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 spojené hranami s uzlem u v grafu G jsou v přípustném obarvení grafu G' pěti barvami obarveny navzájem různými barvami $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ (uzel v_i je obarven barvou β_i pro $i = 1, \ldots, 5$). Označení uzlů $v_1, \ldots, v_5$ volíme tak, aby v určité rovinné representaci $\mathscr{R}(G)$ grafu G hrany $uv_1, \ldots, uv_5$ následovaly za sebou v tomto pořadí, jdeme-li okolo uzlového bodu odpovídajícího uzlu u; je to znázorněno na obrázku VI.1. Jsou-li nyní i a j dvě různá čísla z čísel 1, 2, 3, 4, 5, pak podgraf grafu G' složený ze všech uzlů obarvených barvami β_i a β_j a ze všech hran spojujících dvojice těchto uzlů budeme označovat G'_{ij}. Uzly v_1 a v_3 jsou uzly grafu G'_{13}. Jestliže leží v různých komponentách tohoto grafu, vezmeme komponentu grafu G'_{13} obsahující uzel v_3 a změníme dané přípustné obarvení grafu G' pěti barvami tak, že uzly této komponenty, které měly barvu β_1,



Obr. VI.1

budou mít barvu β_3 a uzly, které měly barvu β_3, budou mít barvu β_1. Snadno bychom dokázali, že dostaneme opět přípustné obarvení grafu G' pěti barvami. V tomto obarvení uzly v_1 a v_3 mají stejnou barvu β_1 a žádný z uzlů $v', \ldots, v_5$ nemá barvu β_3. Tedy můžeme obarvit uzel u barvou β_3 a dostaneme tak přípustné obarvení grafu G pěti barvami. Jestliže v_1 a v_3 leží v téže komponentě grafu G'_{13}, pak existuje cesta C z v_1 do v_3 ležící v G'_{13}. Každá cesta z v_2 do v_4 v grafu G' musí mít společný uzel s cestou C (jinak by oblouk odpovídající některé její hraně protínal v rovinné representaci grafu G oblouk odpovídající některé z hran uv_1, uv_3). Každá takováto cesta tedy obsahuje uzel obarvený barvou β_1 nebo β_3, a tedy neleží celá v grafu G'_{24}. Znamená to, že uzly v_2 a v_4 leží v různých komponentách grafu G'_{24}. Vezmeme komponentu grafu G'_{24} obsahující uzel v_4 a změníme přípustné obarvení grafu G' tak, že uzly této komponenty, které měly barvu β_2, budou mít barvu β_4 a uzly, které měly barvu β_4, budou mít barvu β_2. Dostaneme přípustné obarvení grafu G' pěti barvami, v němž v_2 a v_4 mají tutéž barvu β_2 a žádný z uzlů $v_1, \ldots, v_5$ nemá barvu β_4. Obarvíme uzel u barvou β_4, čímž dostaneme přípustné obarvení grafu G pěti barvami.

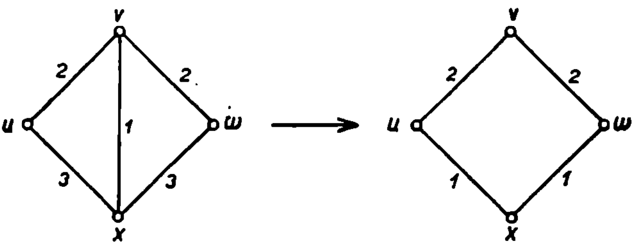
Tuto větu dokázal P. J. Heawood na konci minulého století.

Podle věty V.3 každý rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech je podgrafem některého grafu triangulace s touž množinou uzlů. Lze-li tento graf triangulace přípustně obarvit čtyřmi barvami, bude toto obarvení přípustným obarvením i pro původní graf. Podaří-li se tedy dokázat, že každý graf triangulace má chromatické číslo menší nebo rovné čtyřem, bude to dokázáno pro všechny rovinné grafy a problém čtyř barev bude vyřešen.

Při zkoumání grafů triangulací se může uplatnit následující věta, kterou dokázal P. G. Tait. Mluví se v ní o barvení hran. Obarvit hrany nějakého grafu znamená (podobně jako při barvení uzlů) každé hraně tohoto grafu přiřadit prvek nějaké množiny, jejíž prvky nazýváme barvami.

Věta VI.2. *Nechť G je graf triangulace. Pak $\chi(G) \leqq 4$ právě tehdy, lze-li hrany grafu G obarvit třemi barvami tak, aby libovolné dvě hrany incidentní s touž oblastí grafu G měly různé barvy.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\chi(G) \leqq 4$. Existuje tedy přípustné obarvení uzlů grafu G čtyřmi barvami $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Budeme barvit hrany grafu G třemi barvami $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Barvou γ_1 obarvíme každou hranu, která spojuje uzly obarvené barvami β_1, β_2 nebo barvami β_3, β_4. Barvou γ_2 obarvíme každou hranu spojující uzly obarvené barvami β_1, β_3 nebo β_2, β_4. Konečně barvou γ_3 obarvíme každou hranu spojující uzly obarvené barvami β_1, β_4 nebo β_2, β_3. Takto každá hrana grafu G bude obarvena právě jednou z barev $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Nechť nyní f je oblast grafu G, nechť u, v, w jsou uzly incidentní s oblastí f. Uzly u, v, w mají různé barvy v přípustném obarvení uzlů grafu G, protože každé dva z nich jsou spojeny hranou. Je-li u obarven barvou β_1, v barvou β_2 a w barvou β_3, pak hrana uv je obarvena barvou γ_1, hrana vw barvou γ_3 a hrana uw barvou γ_2, tedy tyto tři hrany mají různé barvy. Takto bychom mohli probrat všechny možnosti obarvení uzlů u, v, w a viděli bychom, že vždy hrany uv, vw, uw mají různé barvy. (Můžete si to provést jako cvičení.) Tím máme dokázánu jednu část věty; je-li $\chi(G) \leqq 4$, pak lze hrany obarvit určeným způsobem. Nyní budeme naopak předpokládat, že existuje obarvení hran grafu G třemi barvami splňující danou podmínku. Budiž G_1 graf získaný z G odstraněním všech hran obar-



Obr. VI.2

vených barvou γ_1 a G_2 graf získaný z G odstraněním všech hran obarvených barvou γ_2. Každá oblast rovinné representace grafu G_1 vznikne ze dvou oblastí representace grafu G incidentních s touž hranou obarvenou barvou γ_1 tím, že se oblouk odpovídající této hraně odstraní (viz obrázek VI.2). Tedy každá oblast takovéto representace grafu G_1 má stupeň 4. Budiž nyní K kružnice v grafu G; dokážeme, že její délka k je číslo sudé. Budiž G_1' podgraf grafu G sestávající ze všech uzlů a hran kružnice K a ze všech uzlů a hran takových, že uzlové body a oblouky jim odpovídající v některé takovéto rovinné representaci $\mathscr{R}(G_1)$ grafu G_1 leží uvnitř uzavřené křivky odpovídající kružnici K. Je-li $k = 4$, je k sudé. Předpokládejme tedy $k \neq 4$. Budiž p počet oblastí grafu G_1'. Graf G_1' obsahuje jednu oblast stupně k (oblast vně kružnice K) a $p - 1$ oblastí stupně 4. Sečteme-li stupně všech oblastí, dostaneme dvojnásobek počtu hran. Součet těchto stupňů je $4(p - 1) + k$, a tedy počet hran je $2(p - 1) + \frac{1}{2}k$. Aby toto číslo bylo celé, musí být k sudé. Protože K byla libovolně zvolená kružnice v grafu G_1, mají všechny kružnice v tomto grafu sudé délky a podle věty II.10 graf G_1 je sudý, tedy $\chi(G_1) = 2$. Znamená to, že existuje přípustné obarvení uzlů grafu G_1 dvěma barvami δ_1 a δ_2. Podobně ovšem můžeme dokázat, že i graf G_2 je sudý a že existuje přípustné obarvení uzlů tohoto grafu dvěma barvami ε_1 a ε_2. Nyní v grafu G obarvíme uzel

barvou β_1, je-li obarven barvou δ_1 v grafu G_1 a barvou ε_1 v grafu G_1,

barvou β_2, je-li obarven barvou δ_1 v grafu G_1 a barvou ε_2 v grafu G_2,

barvou β_3, je-li obarven barvou δ_2 v grafu G_1 a barvou ε_1 v grafu G_2,

barvou β_4, je-li obarven barvou δ_2 v grafu G_1 a barvou ε_2 v grafu G_2.
Toto obarvení je přípustné, protože dva uzly spojené hranou jsou obarveny různými barvami alespoň v jednom z grafů G_1, G_2, a tedy jsou obarveny různými barvami i v grafu G.

Uvedeme ještě Hadwigerovu domněnku. Pokud by se podařilo tuto domněnku dokázat, byla by tím dokázána i domněnka o čtyřech barvách. Nejprve však uvedeme definici.

Definice VI.1. Nechť G je graf, nechť u a v jsou uzly grafu G spojené hranou h. Odstraňme uzly u a v z grafu G, přidejme k němu nový uzel w a spojme jej hranami se všemi uzly, které byly v grafu G spojeny hranami s uzlem u nebo s uzlem v. O grafu takto získaném říkáme, že vznikl z grafu G *kontrakcí hrany h*.

Slovo kontrakce znamená stažení. Můžeme si ji představit tak, že oblouk znázorňující hranu h se zkrátí (stáhne) na jediný bod a tento bod pak znázorňuje nový uzel w.
Nyní vyslovíme domněnku.

Hadwigerova domněnka. *Nechť G je souvislý graf, $\chi(G) = n$. Pak postupnými kontrakcemi hran lze z grafu G získat úplný graf K_n.*

Kontrakcí hrany rovinného grafu vznikne rovněž rovinný graf. Je-li Hadwigerova domněnka pravdivá, pak z každého souvislého rovinného grafu o chromatickém čísle větším než čtyři lze postupnými kontrakcemi hran získat nerovinný graf, tedy každý graf o chromatickém čísle větším než čtyři je nerovinný.

Platí dále věta, kterou nebudeme dokazovat.

Věta* VI.3. *Nechť G je rovinný graf o n uzlech,* $n \leqq 51$. *Pak* $\chi(G) \leqq 4$.

Tuto větu dokázal E. Strömquist; před ním J. Mayer dokázal toto tvrzení pro $n \leqq 47$.

Pokud tedy domněnka o čtyřech barvách neplatí, nebude tak snadné dokázat to uvedením příkladu rovinného grafu o chromatickém čísle větším než čtyři; takovýto graf musí mít více než 51 uzlů.

Zkoumají se samozřejmě i chromatická čísla grafů, k nimž existují representace na jiných plochách, než je rovina nebo kulová plocha. Pro takzvané orientovatelné plochy se definuje rod plochy. Nebudeme uvádět definici tohoto pojmu, řekneme si pouze, že kulová plocha je orientovatelná a její rod je roven nule. Dále se definuje chromatické číslo takovéto plochy jako maximální chromatické číslo grafu, k němuž na této ploše existuje representace. Pro plochy rodu většího než nula existuje Heawoodův vzorec, který vyjadřuje toto chromatické číslo v závislosti na rodu plochy. Kdybychom do tohoto vzorce za rod plochy dosadili nulu (tedy rod kulové plochy), vyšla by nám pro chromatické číslo hodnota 4. Háček je v tom, že vzorec byl dokázán za předpokladu, že rod plochy je větší než nula, tedy pro rod plochy rovný nule jej nelze použít. Je tu však zajímavý paradox, že problém, který je vyřešen pro složité plochy, nebyl dosud vyřešen pro plochu nejjednodušší.

Problém čtyř barev lze také zobecnit tak, že se uvažuje opět přípustné barvení mapy a připouští se, aby území jednoho státu sestávalo z několika oddělených oblastí (jako například výše zmíněné USA s Aljaškou); počet těchto oblastí u téhož státu se při tom určitým způsobem omezí, například se požaduje, aby nebyly více než dvě nebo více než tři.

Lze také zkoumat případ, kdy každý stát na určité planetě má své „kosmické území" na jiné planetě. Hledá se nejmenší počet barev, kterým lze obarvit mapy obou planet tak, aby území téhož státu na různých planetách bylo obarveno touž barvou a aby opět státy, které spolu sousedí (na kterékoliv z obou planet) byly zbarveny různými barvami. Domněnka praví, že k tomu stačí osm barev. Zde můžeme opět uvažovat barvení uzlů dvou příslušných duálních grafů. Ztotožníme-li uzel jednoho grafu odpovídající území na jedné planetě s uzlem druhého grafu odpovídajícím území téhož státu na druhé planetě (provedeme to pro všechny státy), pak dostaneme takzvaný biplanární graf. Je to graf, který je sjednocením dvou rovinných (cizím slovem planárních) grafů o téže množině uzlů. Problém lze tedy formulovat tak, že hledáme maximální chromatické číslo biplanárního grafu.

Zkoumání biplanárních grafů má význam v moderní elektrotechnice. Často se užívá takzvaných tištěných obvodů; elektrický obvod je tvořen tenkými vrstvami vodivé látky na nevodivé podložce. Pokud jsou všechny vrstvy na jedné straně podložky, musí být graf tohoto obvodu rovinný; vrstvy totiž nejsou izolované. Pokud by vodivé vrstvy byly na obou stranách nevodivé destičky, stačilo by, aby tento graf byl biplanární; vyjádřil by se jako sjednocení dvou rovinných grafů o téže množině uzlů a obvody odpovídající těmto grafům by se umístily na různých stranách destičky.

V této knížce se zabýváme pouze konečnými grafy.

Přesto vás může napadnout otázka, zda by nemohlo platit, že každý konečný rovinný graf má chromatické číslo menší nebo rovné čtyřem, ale nekonečný rovinný graf může mít chromatické číslo větší. Že tomu tak není, zaručuje věta, kterou dokázali P. Erdős a N. G. de Bruijn. Uvedeme ji bez důkazu.

Věta VI.4. *Nechť G je nekonečný graf. Pak existuje konečný podgraf G_0 grafu G takový, že $\chi(G_0) = \chi(G)$.*

Pokud by existoval nekonečný rovinný graf o chromatickém čísle větším než čtyři, existoval by jeho konečný podgraf o stejném chromatickém čísle a byl by to samozřejmě také rovinný graf. Při řešení problému čtyř barev tedy stačí se omezit na konečné grafy.

Problém čtyř barev tedy zůstává nerozřešen. Celkem se dá říci, že to ani tak nevadí. Chceme-li barvit mapy, není tak obtížné si opatřit pět barev, abychom měli jistotu, že se nám to vždy podaří. A na další vývoj teorie grafů by řešení tohoto problému asi také nemělo podstatný vliv. Problém tu však je a už sama skutečnost, že takovýto poměrně jednoduše formulovaný problém už přes sto let odolává pokusům o řešení, přitahuje k němu neustále zájem matematiků, a to profesionálů i amatérů.

Teď asi čekáte, že vás budu varovat, abyste se o jeho řešení nepokoušeli, že je to zbytečná ztráta času. A přece vás varovat nebudu, naopak vás budu nabádat k tomu, abyste se o to pokusili. Nečekejte samozřejmě rychlý úspěch, ale také nebuďte malomyslní. Není vyloučeno, že problém čtyř barev rozřeší někdo, kdo není zrovna odborníkem v teorii grafů; dá se totiž čekat, že k dokázání nebo vyvrácení hypotézy o čtyřech barvách bude třeba užít zcela originálního postupu a při hledání tohoto postupu může být možná i výhodné, nemá-li člověk v hlavě zafixovány obvyklé postupy důkazů v teorii grafů, které by ho zaváděly nesprávným směrem. V každém případě to bude velmi užitečné cvičení, při němž vniknete do teorie grafů, naučíte se uvažovat nad smyslem jejích definic a vět a přinutíte se číst další literaturu, třeba i v cizích jazycích. Proto za touto kapitolou nebudou uvedena žádná další cvičení; problém čtyř barev vás zaměstná dostatečně. Hlavně nepropadněte tomuto problému jako nějakému narkotiku; pamatujte stále, že jsou i jiné důležité věci, například škola. A také se předčasně nechlubte, bude-li se vám zdát, že jste problém čtyř barev vyřešili; zdání v tomto případě často klame, jak mohou dosvědčit recenzenti matematických vědeckých časopisů, kteří občas dostávají různá nesprávná řešení tohoto problému. V matematice je důležité být kritický ke svým výsledkům, každý krok důkazu kontrolovat; i tomu se musíte naučit. A zaujme-li vás teorie grafů tak, že se jí v budoucnu budete věnovat, pak vaše trápení s problémem čtyř barev rozhodně nebude neužitečné.

Dodatek při korektuře: Jak uvádí „Mathematics Calendar 1977“, američtí matematikové W. Haken a K. Appel v červenci 1976 oznámili. že se jim podařilo dokázat domněnku o čtyřech barvách. Nalezli konečný (ale značně vysoký) počet rovinných grafů, o nichž dokázali, že lze-li tyto grafy přípustně obarvit čtyřmi barvami, lze tak obarvit všechny rovinné grafy. Obarvení zmíněných grafů nalezli pomocí samočinného počítače. Problém čtyř barev je tedy rozřešen, nicméně i nadále se matematikové mohou snažit o nalezení nějakého elegantnějšího důkazu.

VII. KAPITOLA

VNĚJŠKOVĚ ROVINNÉ GRAFY

V této kapitole budeme mluvit o jisté speciální třídě rovinných grafů, a to o tzv. vnějškově rovinných grafech.

Definice VII.1. Nechť G je rovinný graf. Existuje-li rovinná representace $\mathscr{R}(G)$ grafu G, v níž některá oblast je incidentní se všemi uzly grafu, graf G se nazývá *vnějškově rovinný*.

Termín „vnějškově rovinný graf“ nezní příliš pěkně, ale zatím nebyl nalezen termín vhodnější. Vyjadřuje skutečnost, že rovinnou representaci takového grafu lze nakreslit tak, aby všechny uzlové body byly na hranici její vnější oblasti (oblasti, jejíž obsah je nekonečný).

Uvedeme si některé vlastnosti těchto grafů. Nejprve však budeme definovat další pojem.

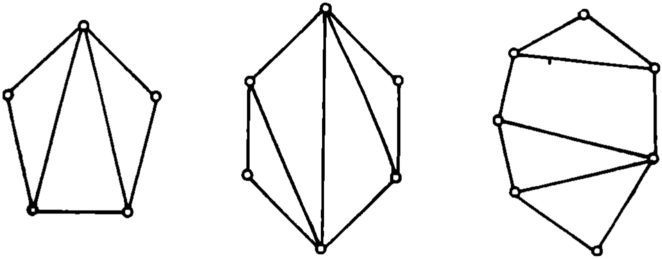
Definice VII.2. Kružnice v grafu G se nazývá *Hamiltonova kružnice*, jestliže obsahuje všechny uzly grafu G.

Nyní uvedeme větu.

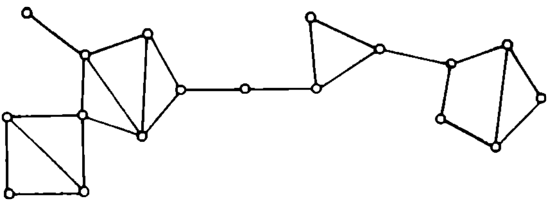
Věta VII.1. *Nechť G je vnějškově rovinný graf, $\omega(G) \geqq 2$. Pak graf G obsahuje Hamiltonovu kružnici.*

Tvrzení plyne přímo z definice VII.1 a z věty IV.2.

Na obrázku VII.1 vidíme rovinné representace několika vnějškově rovinných grafů, jejichž uzlový stupeň souvislosti je větší nebo roven dvěma. Je nyní zřejmé, že každá takováto representace může být nakreslena jako mnohoúhelník s některými úhlopříčkami. Příklad rovinné representace grafu o uzlovém stupni souvislosti rovném jedné je na obrázku VII.2.



Obr. VII.1



Obr. VII.2

Věta VII.2. *Budiž G rovinný graf. Budiž $\tilde{G}$ graf vzniklý z G přidáním nového uzlu x a spojením tohoto uzlu hranami se všemi uzly grafu G. Graf G je vnějškově rovinný právě tehdy, je-li graf $\tilde{G}$ rovinný.*

Důkaz. Nechť G je vnějškově rovinný, nechť $\mathscr{R}(G)$ je jeho rovinná representace, v níž existuje oblast f incidentní se všemi uzly grafu G. Za uzlový bod odpovídající uzlu x zvolíme některý vnitřní bod oblasti f. Tento bod lze spojit oblouky se všemi uzlovými body representace $\mathscr{R}(G)$ tak, že vnitřní body těchto oblouků leží v oblasti f. Dostaneme tak rovinnou representaci grafu $\tilde{G}$ a graf $\tilde{G}$ je tedy rovinný. Nyní předpokládejme, že $\tilde{G}$ je rovinný graf. Budiž $\mathscr{R}(\tilde{G})$ jeho rovinná representace. Rovinnou representaci $\mathscr{R}(G)$ grafu G dostaneme z $\mathscr{R}(\tilde{G})$ odstraněním uzlového bodu odpovídajícího uzlu x a všech oblouků odpovídajících hranám incidentním s x. Takto vznikne oblast, jejíž body jsou všechny body oblastí incidentních s x, bod odpovídající uzlu x a vnitřní body všech oblouků odpovídajících hranám incidentním s x. Tato oblast je oblastí representace $\mathscr{R}(G)$ incidentní se všemi uzly grafu G. Tedy graf G je vnějškově rovinný.

Tato věta nám umožní dokázat analogii věty Kuratowského pro vnějškově rovinné grafy.

Věta VII.3. *Graf G je vnějškově rovinný právě tehdy, neobsahuje-li jako podgraf graf K_4 nebo $K_{2,3}$ nebo graf získaný z některého z těchto grafů postupným půlením hran.*

Důkaz. Sestrojme ke grafu G graf $\tilde{G}$ z věty VII.2. Obsahuje-li G jako podgraf graf K_4 nebo graf získaný z něho postupným půlením hran, pak $\tilde{G}$ obsahuje jako podgraf graf K_5 nebo graf z něho získaný postupným půlením hran. Tento graf se skládá ze zmíněného podgrafu grafu G, z uzlu x a z hran spojujících uzel x s uzly tohoto podgrafu, které mají stupeň 3. Pak graf $\tilde{G}$ není rovinný a podle věty VII.2 graf G není vnějškově rovinný. Podobně obsahuje-li G jako podgraf graf $K_{2,3}$ nebo graf získaný z něho postupným půlením hran, obsahuje $\tilde{G}$ jako podgraf graf $K_{3,3}$ nebo graf z něho získaný postupným půlením hran a také není rovinný, tedy G není vnějškově rovinný. Nyní předpokládejme, že G neobsahuje jako podgraf graf K_4 ani $K_{2,3}$ ani graf vzniklý z některého z těchto grafů postupným půlením hran. Pokud by G nebyl vnějškově rovinný, graf $\tilde{G}$ by nebyl rovinný a obsahoval by jako podgraf graf K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo graf vzniklý z některého z těchto grafů postupným půlením hran. Potom by však G obsahoval podgraf získaný z některého takového podgrafu odstraněním jednoho uzlu. Snadno dokážeme, že takovýto graf obsahuje jako podgraf K_4 nebo $K_{2,3}$ nebo graf získaný z některého z nich postupným půlením hran. Tento graf by byl také podgrafem grafu G, což by byl spor s předpokladem.

Věta VII.4. *Budiž G vnějškově rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech. Pak existuje vnějškově rovinný graf G' o stejné množině uzlů jako graf G takový, že existuje jeho rovinná representace $\mathcal{R}(G')$, v níž všechny oblasti kromě jedné mají stupeň 3. Počet hran grafu G' je $2n - 3$, počet oblastí libovolné jeho rovinné representace je $n - 1$.*

Důkaz. Použijeme opět grafu $\tilde{G}$ z věty VII.2. Podle věty V.3 existuje graf triangulace $\tilde{G}'$ o stejné množině uzlů jako $\tilde{G}$. V libovolné representaci $\mathcal{R}(\tilde{G}')$ grafu $\tilde{G}'$ všechny oblasti mají stupeň 3. Počet uzlů grafu $\tilde{G}'$ je $n + 1$, počet jeho hran je $3(n + 1) - 6 = 3n - 3$, počet oblastí jeho rovinné representace je $2(n + 1) - 4 =$

$= 2n - 2$. Graf G' bude graf vzniklý z $\tilde{G}'$ odstraněním uzlu x. Všechny oblasti grafu G' mají stupeň 3 kromě jedné, která je incidentní se všemi uzly grafu G' a jejíž stupeň je tedy n. Odstraněním uzlu x z grafu $\tilde{G}'$ se počet hran zmenší o n, tedy G' obsahuje $2n - 3$ hrany. Z Eulerova vzorce bychom určili počet oblastí libovolné rovinné representace grafu G'; je to $n - 1$.

Grafům popsaným v této větě budeme říkat maximální vnějškově rovinné grafy.

Analogicky jako větu V.4 bychom dokázali následující větu.

Věta VII.5. *Maximální počet hran vnějškově rovinného grafu o n uzlech je $2n - 3$, maximální počet oblastí libovolné jeho rovinné representace je $n - 1$.*

V kapitole V jsme poznali, že každý rovinný graf obsahuje alespoň jeden uzel stupně menšího než šest. Podobnou větu lze dokázat i pro vnějškově rovinné grafy.

Věta VII.6. *Nechť G je vnějškově rovinný graf. Pak v grafu G existuje uzel u, pro nějž $\varrho_G(u) \leqq 2$.*

Důkaz. Věta zřejmě platí pro grafy o méně než čtyřech uzlech. Podle věty VII.4 každý vnějškově rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech lze přidáváním hran doplnit na maximální vnějškově rovinný graf o stejné množině uzlů. Proto stačí, dokážeme-li tvrzení pro maximální vnějškově rovinné grafy; pak bude platit pro všechny vnějškově rovinné grafy. Je-li G maximální vnějškově rovinný graf, pak $\omega(G) \geqq 2$, protože pro odpovídající graf $\tilde{G}$

(vzniklý přidáním jediného uzlu) je $\omega(\tilde{G}) \geqq 3$. Mějme nyní rovinnou representaci grafu G, v níž existuje oblast f incidentní se všemi uzly grafu G. Podle věty VII.1 hranicí této oblasti je Hamiltonova kružnice K. Protože $n \geqq 4$, zřejmě existují hrany grafu G nepatřící kružnici K. Budiž d nejmenší vzdálenost dvou uzlů spojených takovouto hranou na kružnici K (to jest délka nejkratší možné cesty, která spojuje takovéto dva uzly a je podgrafem kružnice K). Kdyby bylo $d \geqq 3$, tato nejkratší cesta spolu s hranou spojující zmíněné uzly by tvořila kružnici, která by byla hranicí oblasti stupně většího než 3 a různá od f (žádné dva uzly této kružnice by nebyly spojeny hranou nepatřící této kružnici, protože jinak by tato cesta nebyla nejkratší cestou dané vlastnosti). Je tedy $d = 2$ a existují uzly u, v, w tak, že uv a vw jsou hrany kružnice K a uw je hrana grafu G nepatřící do K. Uzel v nemůže být spojen hranou s uzlem grafu G různým od u a w, protože oblouk odpovídající takové hraně by protínal oblouk odpovídající hraně uw nebo by procházel oblastí f, což nelze. Tedy $\varrho_G(v) = 2$.

Z této věty a z věty II.6 plyne důsledek analogický větě V.8.

Věta VII.7. *Nechť G je vnějškově rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech. Pak $\omega(G) \leqq 2$.*

Pomocí věty VII.6 můžeme dokázat i větu o chromatickém čísle vnějškově rovinného grafu.

Věta VII.8. *Nechť G je vnějškově rovinný graf. Pak $\chi(G) \leqq 3$.*

Důkaz. Budeme větu dokazovat matematickou indukcí podle počtu uzlů grafu G. Je-li tento počet menší nebo roven třem, věta zřejmě platí. Budiž k přirozené číslo, $k \geqq 4$, a předpokládejme, že věta platí pro všechny vnějškově rovinné grafy o $k - 1$ uzlech. Nechť počet uzlů grafu G je k. Podle věty VII.6 existuje uzel v grafu G takový, že $\varrho_G(v) \leqq 2$. Budiž G' graf získaný z G odstraněním uzlu v. Graf G' je zřejmě vnějškově rovinný graf a má $k - 1$ uzlů. Existuje tedy přípustné obarvení uzlů grafu G' třemi barvami. Protože $\varrho_G(v) \leqq 2$, existuje mezi těmito třemi barvami alespoň jedna, kterou není obarven žádný z uzlů, jež jsou v G spojeny hranami s uzlem v. Touto barvou obarvíme uzel v a získáme tak přípustné obarvení grafu G třemi barvami.

Cvičení

1. Nakreslete maximální vnějškově rovinný graf o 10 uzlech.

2. Je-li G rovinný graf o n uzlech a obsahuje-li tento graf uzel stupně $n - 1$, pak $\chi(G) \leqq 4$. Dokažte.

3. Dokažte, že maximální vnějškově rovinný graf o $n \leqq 4$ uzlech má uzlový stupeň souvislosti rovný dvěma.

4. Nakreslete vnějškově rovinný graf o 8 uzlech, který je sudý a má tu vlastnost, že přidáním libovolné hrany z něho vznikne graf, který buď není sudý, nebo není vnějškově rovinný.

5. Dokažte, že vnějškově rovinný sudý graf o lichém počtu uzlů má uzlový stupeň souvislosti nejvýše 1.

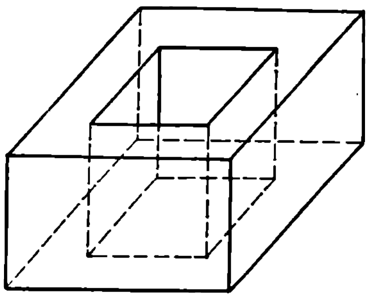
VIII. KAPITOLA

KONVEXNÍ MNOHOSTĚNY

S rovinnými grafy souvisí i teorie mnohostěnů (polyedrů). Mnohostěn je vlastně analogie mnohoúhelníka v třírozměrném prostoru. Znáte krychli, kvádr, hranol a jehlan; všechna tato tělesa patří mezi mnohostěny, a to tzv. mnohostěny konvexní. Uvedeme definici konvexní množiny.

Definice VIII.1. *Konvexní množina* v euklidovském prostoru je množina bodů v tomto prostoru, která má tu vlastnost, že patří-li dva různé body A a B do této množiny, patří do ní všechny body úsečky AB.

Konvexní množinou je například přímka, polopřímka, úsečka, rovina, kruh, koule. Všechny mnohostěny, kte-



Obr. VIII.1

rými se budeme zabývat, budou rovněž konvexními množinami a budeme jim tedy říkat konvexní mnohostěny. Nekonvexními mnohostěny se zabývat nebudeme. Uvedeme pouze příklad nekonvexního mnohostěnu, abyste si dovedli takový mnohostěn představit; je na obrázku VIII.1.

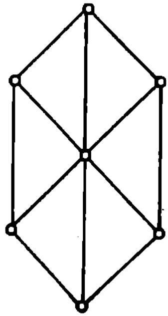
Konvexní mnohostěn lze definovat jako průnik určitých poloprostorů. Tuto definici uvádět nebudeme, pouze si popíšeme, jak takový mnohostěn vypadá.

Povrch konvexního mnohostěnu se skládá z mnohoúhelníků, kterým říkáme stěny mnohostěnu. Strany těchto mnohoúhelníků jsou hrany mnohostěnu; každá hrana náleží právě dvěma stěnám. Vrcholy stěn se nazývají vrcholy mnohostěnu; v každém vrcholu se stýká několik hran a několik stěn; vždy nejméně tři.

Vidíme, že hrany a vrcholy mnohostěnu mají podobné vlastnosti jako hrany a uzly grafu. Každá hrana mnohostěnu spojuje dva vrcholy podobně jako každá hrana grafu spojuje dva uzly. Každé dva vrcholy mnohostěnu jsou spojeny nejvýše jednou hranou podobně jako každé dva uzly grafu. Žádná hrana mnohostěnu nespojuje vrchol se sebou samým stejně jako žádná hrana grafu nespojuje uzel se sebou samým. Je proto účelné zavést pojem grafu mnohostěnu.

Definice VIII.2. Nechť $\boldsymbol{M}$ je mnohostěn. *Grafem mnohostěnu* $\boldsymbol{M}$ nazýváme graf $G(\boldsymbol{M})$, jehož množinou uzlů je množina vrcholů mnohostěnu $\boldsymbol{M}$ a jehož množinou hran je množina hran mnohostěnu $\boldsymbol{M}$, přičemž hrana h grafu $G(\boldsymbol{M})$ spojuje uzly u a v právě tehdy, spojuje-li odpovídající vrcholy mnohostěnu $\boldsymbol{M}$.

Na obrázku VIII.2 vidíme graf šestibokého jehlanu. Graf mnohostěnu je definován pro všechny mnohostěny, nikoliv pouze pro konvexní. Pro konvexní mnohostěny však platí důležitá věta, kterou dokázali E. Steinitz a H. Rademacher.



Obr. VIII.2

Věta VIII.1. *Graf G je grafem konvexního mnohostěnu právě tehdy, je-li rovinný a* $\omega(G) \geqq 3$.

Nebudeme tuto větu dokazovat, ale ukážeme si názornou ilustraci. Představme si, že bychom vyrobili gumový model konvexního mnohostěnu. Jednotlivé stěny bychom vyřezali z plátu gumy a jejich hrany mezi sebou slepili. Potom bychom hustilkou tento model nafoukli podobně jako fotbalový míč. Při dostatečně silném nafouknutí by model nabyl tvaru koule. Na povrchu této koule by ovšem byla patrná místa, kde jsme slepovali hrany. Vznikla by nám tak representace grafu mnohostěnu na kulové ploše. A existuje-li takováto representace, existuje podle věty IV.8 i rovinná representace tohoto grafu a jde tedy o graf rovinný.

Máme-li naopak rovinný graf o uzlovém stupni souvislosti větším nebo rovném třem, můžeme sestrojit jeho representaci na kulové ploše. Uzlové body této representace jsou vrcholy konvexního mnohostěnu, kterému je tato kulová plocha opsána. Hrany tohoto mnohostěnu jsou příslušné tětivy kulové plochy. Daný graf je potom grafem tohoto mnohostěnu.

Je-li graf G rovinný a $\omega(G) \geqq 3$, víme, že můžeme definovat oblasti grafu. Lze dokázat, že je-li G grafem konvexního mnohostěnu M, pak jeho oblasti vzájemně jednoznačně odpovídají stěnám mnohostěnu M. Hrana nebo uzel incidentní s určitou oblastí grafu G je hranou nebo vrcholem příslušné stěny mnohostěnu M.

Eulerův vzorec (věta IV.8) tedy platí i tehdy, když místo rovinného grafu uvažujeme konvexní mnohostěn; n značí počet jeho vrcholů, m počet hran, p počet stěn. Však původně také tento vzorec byl formulován pro konvexní mnohostěny, nikoliv pro grafy.

Znáte jistě pravidelné konvexní mnohoúhelníky. Je-li n přirozené číslo větší než dvě, pak vždy existuje konvexní n-úhelník, jehož všechny strany jsou shodné úsečky a všechny úhly jsou shodné; říkáme mu pravidelný. (Místo „pravidelný trojúhelník" říkáme „rovnostranný trojúhelník", místo „pravidelný čtyřúhelník" říkáme „čtverec".) Analogií tohoto pojmu v třírozměrném prostoru je pravidelný konvexní mnohostěn.

Definice VIII.3. *Pravidelný konvexní mnohostěn* je takový konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné konvexní mnohoúhelníky a v němž z každého vrcholu vychází tentýž počet hran.

Čekali bychom, že zase pro každé přirozené $n \geqq 4$ bude existovat pravidelný konvexní n-stěn. Zde však analogie vede ke klamným závěrům, jak uvidíme.

Uvažujme, jak bude vypadat graf $G(\boldsymbol{M})$ pravidelného konvexního mnohostěnu $\boldsymbol{M}$. Z definice VIII.3 vyplývá, že to bude pravidelný graf, to jest všechny jeho uzly budou míst stejný stupeň r. Dále i stupně všech oblastí budou stejné; označme s stupeň oblasti v tomto grafu. Jaké mohou být hodnoty r? Musí být $r \geqq 3$, protože $\omega(G(\boldsymbol{M})) \geqq 3$. Podle věty V.7 musí být $r \leqq 5$; přicházejí tedy v úvahu pouze tři čísla 3, 4 a 5. Abychom prozkoumali možné hodnoty s, uvážíme, že ke grafu $G(\boldsymbol{M})$ existuje duální graf $G^*(\boldsymbol{M})$, který je rovinným pravidelným grafem stupně s. Provedeme-li pro tento duální graf tutéž úvahu, kterou jsme provedli pro graf $G(\boldsymbol{M})$, zjistíme, že s může rovněž nabývat pouze hodnot 3, 4 a 5.

Budiž nyní n počet uzlů, m počet hran a p počet oblastí grafu $G(\boldsymbol{M})$. Poněvadž $G(\boldsymbol{M})$ je pravidelný graf stupně r, je

$$m = \frac{1}{2} nr .$$

Počet hran grafu $G(\boldsymbol{M})$ je však také roven počtu hran duálního grafu $G^*(\boldsymbol{M})$. Graf $G^*(\boldsymbol{M})$ je pravidelný graf stupně s a obsahuje p uzlů, tedy

$$m = \frac{1}{2} ps .$$

Z těchto dvou rovnic dostáváme

$$p = nr/s.$$

Dosaďme do Eulerova vzorce; dostaneme

$$n - \frac{1}{2} nr + nr/s = 2$$

a z toho

$$n = \frac{4s}{2r + 2s - rs} .$$

Sestavíme si tabulku hodnot n pro různé hodnoty r a s. Pro dané r a s je v příslušném políčku tabulky odpovídající hodnota n, pokud je to přirozené číslo; v opačném případě je tam pomlčka.

r \ s	3	4	5
3	4	8	20
4	6	—	—
5	12	—	—

Vidíme tedy, že je celkem pět možných dvojic [r, s], a to [3, 3], [3, 4], [3, 5], 4, 3], [5, 3]. Samozřejmě pro každou z těchto dvojic je jednoznačně určen počet uzlů, hran a oblastí příslušného grafu, tedy počet vrcholů, hran a stěn příslušného mnohostěnu. Máme tedy pět možností:

(1) Mnohostěn má 4 vrcholy, 6 hran a 4 stěny. Stěny mnohostěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, z každého vrcholu vycházejí 3 hrany.

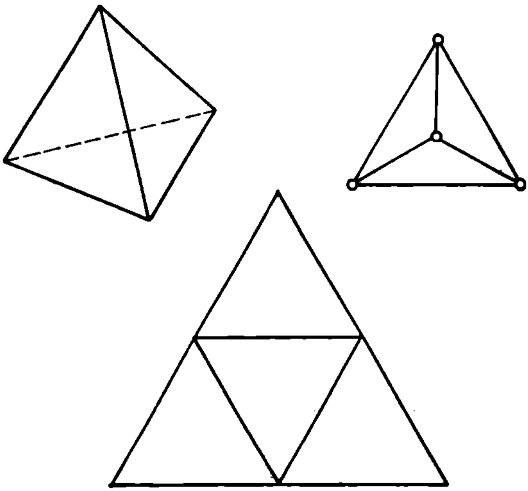
(2) Mnohostěn má 8 vrcholů, 12 hran a 6 stěn. Stěny mnohostěnu jsou čtverce, z každého vrcholu vycházejí 3 hrany.

(3) Mnohostěn má 20 vrcholů, 30 hran a 12 stěn. Stěny mnohostěnu jsou pravidelné pětiúhelníky, z každého vrcholu vycházejí 3 hrany.

(4) Mnohostěn má 6 vrcholů, 12 hran a 8 stěn. Stěny mnohostěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, z každého vrcholu vycházejí 4 hrany.

(5) Mnohostěn má 12 vrcholů, 30 hran a 20 stěn. Stěny mnohostěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, z každého vrcholu vychází 5 hran.

Tím jsme ovšem nedokázali, že takovéto pravidelné konvexní mnohostěny existují; dokázali jsme pouze, že neexistují žádné jiné. Ony však existují; znal je už starořecký filosof Platón, proto se jim někdy říká také platónovská tělesa a jejich grafům platónovské grafy.

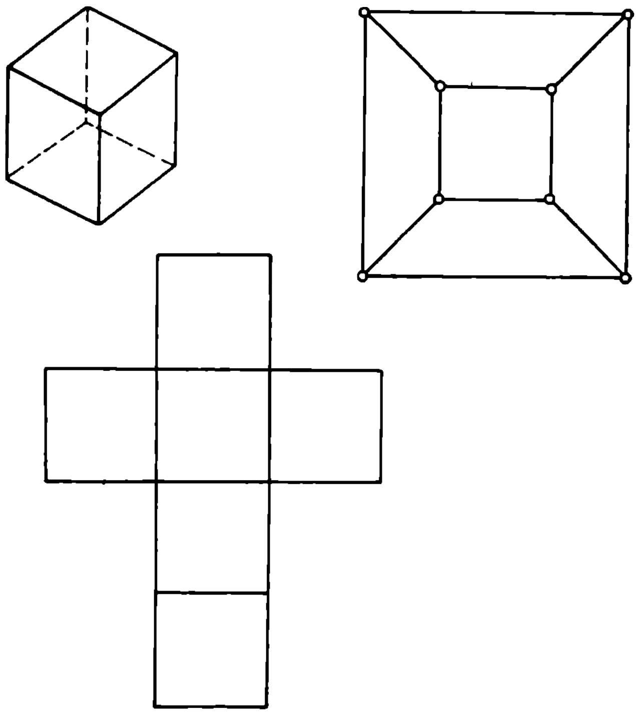


Obr. VIII.3

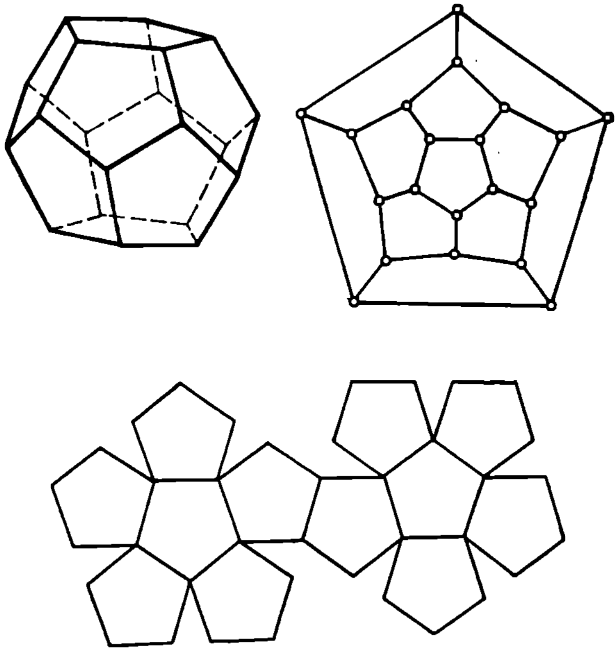
Pravidelný konvexní mnohostěn s vlastností (1) je pravidelný čtyřstěn (tetraedr), s vlastností (2) pravidelný šestistěn (hexaedr), častěji nazývaný krychle, s vlastností (3) pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr), s vlastností (4) pravidelný osmistěn (oktaedr) a s vlastností (5) pravidelný dvacetistěn (ikosaedr). Jsou to jediné pravidelné konvexní mnohostěny, více jich neexistuje.

Na obrázcích VIII.3 až VIII.7 jsou tyto mnohostěny nakresleny v pořadí, v jakém byly popsány (čtyřstěn, krychle, dvanáctistěn, osmistěn, dvacetistěn). Na každém z těchto obrázků je obraz příslušného mnohostěnu, jeho graf a rozvinutí jeho povrchu do roviny.

Všimněme si ještě duálních grafů ke grafům pravidelných konvexních mnohostěnů. Duální graf ke grafu



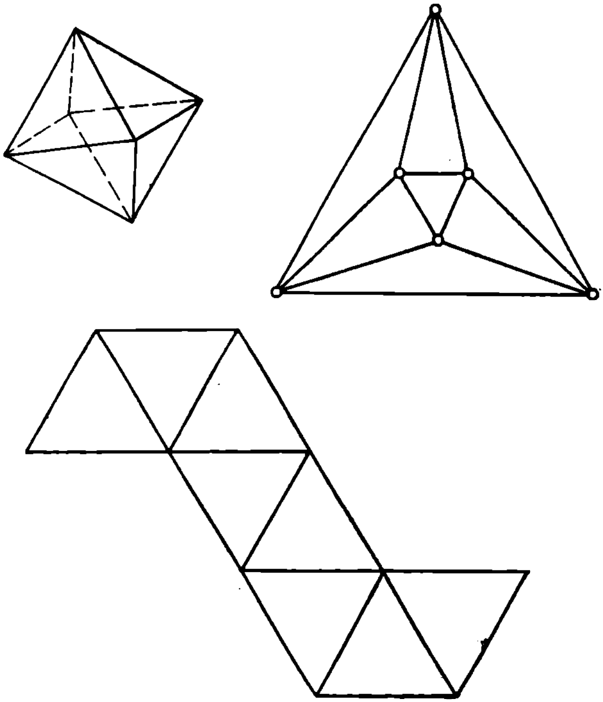
Obr. VIII.4



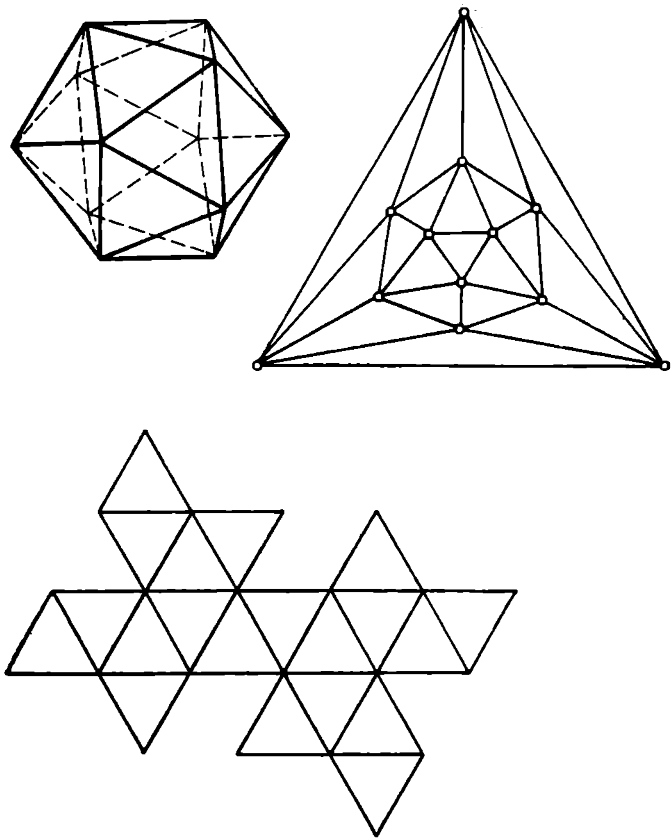
Obr. VIII.5

pravidelného čtyřstěnu je opět graf pravidelného čtyřstěnu (je to úplný graf K_4), duální graf ke grafu krychle je graf pravidelného osmistěnu, duální graf ke grafu pravidelného dvanáctistěnu je graf pravidelného dvacetistěnu, duální graf ke grafu pravidelného osmistěnu je graf krychle a duální graf ke grafu pravidelného dvacetistěnu je graf pravidelného dvanáctistěnu.

Tato dualita se však netýká jen grafů, ale v jistém smyslu i mnohostěnů samotných. Stěny těchto mnohostěnů jsou pravidelné konvexní mnohoúhelníky, každé z nich lze tedy opsat kružnici. Nyní ke každému pravidelnému konvexnímu mnohostěnu existuje pravidelný konvexní mnohostěn, jehož graf je duální ke grafu původního mnohostěnu a jehož vrcholy jsou středy stěn původního mnohostěnu. Říkáme, že pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě, že krychle a pravidelný osmistěn

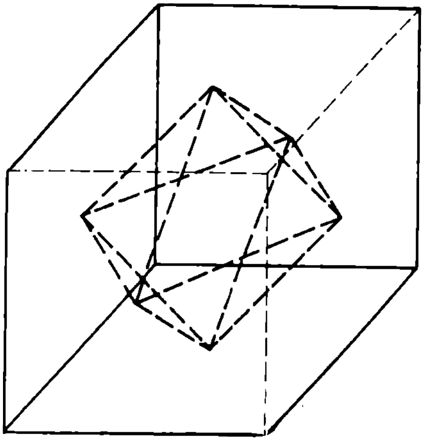


Obr. VIII.6



Obr. VIII.7

jsou k sobě navzájem duální a pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn jsou rovněž k sobě navzájem duální. Na obrázku VIII.8 vidíme krychli a pravidelný osmistěn, jehož vrcholy jsou středy stěn krychle.



Obr. VIII.8

Na závěr uvedeme ještě, že každému pravidelnému konvexnímu mnohostěnu lze opsat i vepsat kulovou plochu. Středy obou těchto ploch splývají. Kulová plocha vepsaná se dotýká stěn mnohostěnu v jejich středech.

Cvičení

1. Slepte si z papíru modely pravidelných konvexních mnohostěnů.

2. Uveďte příklad konvexního mnohostěnu, který není pravidelný, ale všechny jeho stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky.

3. Určete chromatická čísla grafů pravidelných konvexních mnohostěnů.

4. Odvoďte vzorec pro poloměr kulové plochy opsané a vepsané pravidelnému čtyřstěnu, krychli a pravidelnému osmistěnu, je-li dána délka hrany.

5. Odvoďte vzorce pro objemy těchto mnohostěnů, je-li dána délka hrany (použijte výsledku cvičení 4).

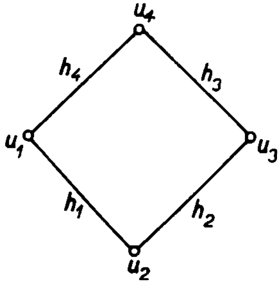
6. Je-li dána délka hrany pravidelného čtyřstěnu, určete délku hrany pravidelného čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou středy stěn původního čtyřstěnu.

7. Totéž pro krychli a pravidelný osmistěn.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

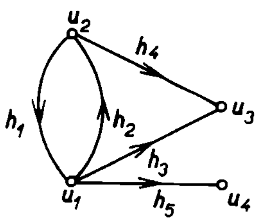
I. KAPITOLA

1. Graf G je na obrázku IX.1.



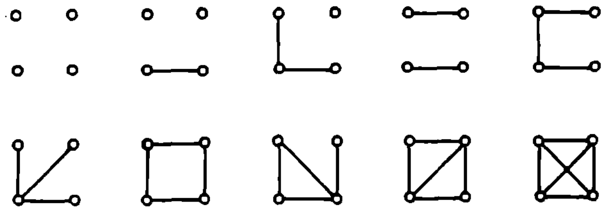
Obr. IX.1

2. Graf G je na obrázku IX.2.



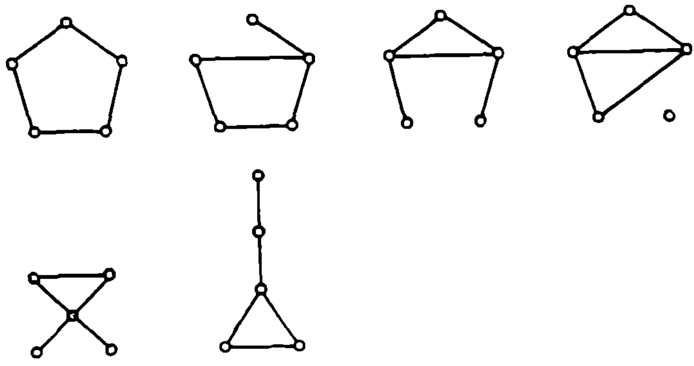
Obr. IX.2

3. Tyto grafy jsou na obrázku IX.3.



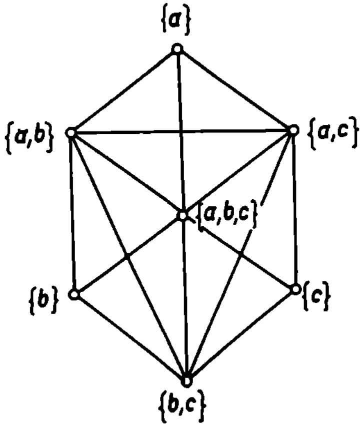
Obr. IX.3

4. Tyto grafy jsou na obrázku IX.4.



Obr. IX.4

5. Tento graf je na obrázku IX.5.



Obr. IX.5

II. KAPITOLA

1. Podle věty II.1 je počet uzlů lichého stupně v grafu vždy sudý. Ve zmíněném grafu by muselo být 35 uzlů stupně 5, tedy takovýto graf neexistuje.

2. Nechť cesta C je $u = u_0, h_1, u_1, \ldots, h_k, u_k = v$. Předpokládejme, že existují uzly u_i, u_j cesty C, které jsou spojeny hranou nepatřící do C; můžeme předpokládat, že $i < j$. Pak $j \neq i + 1$, protože jinak by hrana u_iu_j patřila do C. Odstraníme-li z cesty C uzly $u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}$ a hrany $h_{i+1}, \ldots, h_j$ a přidáme-li hranu u_iu_j, dostaneme cestu délky $k + i - j$, což je číslo menší než k. Došli jsme ke sporu s předpokladem, že $d(u, v) = k$.

3. Nechť $d(u, v)$ a $d(v, w)$ jsou konečná čísla. Existuje cesta C_1 délky $d(u, v)$ z u do v a cesta C_2 délky $d(v, w)$ z v do w. Napíšeme-li uzly a hrany cesty C_1 v příslušném pořadí a za ně uzly a hrany cesty C_2 rovněž v příslušném pořadí, dostaneme spojení uzlů u a w, které má $d(u, v) + d(v, w)$ hran. Postupujeme-li jako v důkaze věty II.2, dostaneme cestu z u do w délky, která nemůže být větší než $d(u, v) + d(v, w)$. Je tedy $d(u, v) + d(v, w) \geqq d(v, w)$. Je-li $d(u, v) = \infty$, nebo $d(v, w) = \infty$, pak je součet $d(u, v) + d(v, w)$ také nekonečný a $d(v, w)$ nemůže být větší než tento součet. Analogické tvrzení v geometrii je tvrzení o tom, že součet délek dvou stran trojúhelníka je větší než délka třetí strany (odtud název trojúhelníková nerovnost). Obecně pro libovolné tři body A, B, C je součet vzdáleností AB a BC větší nebo roven vzdálenosti AC (rovnost může nastat, pokud body A, B C leží v přímce).

4. Nechť h je hrana grafu G s koncovými uzly u a v. Nechť G' je graf vzniklý z grafu G odstraněním hrany h. Je-li $\omega(G') \geqq \omega(G)$, pak tvrzení platí. Předpokládejme $\omega(G') < \omega(G)$. Budiž R řez grafu G' o $\omega(G')$ uzlech. Budiž G_0 graf vzniklý z G odstraněním řezu R a G_0' graf vzniklý z G' odstraněním řezu R. Graf G_0' je souvislý, protože $\omega(G') < \omega(G)$. Graf G' je nesouvislý, protože R je řez grafu G'. Graf G_0' vznikne z G_0 odstraněním hrany h. Graf G_0' má tedy právě dvě komponenty C_1 a C_2 a uzly u a v leží v různých komponentách tohoto grafu. (Žádný z nich nepatří do R, jinak by R byl řezem i v grafu G.) Kdyby každá z komponent C_1, C_2 obsahovala pouze jediný uzel, znamenalo by to, že $\omega(G') = n - 2$, kde n je počet uzlů grafu G. Pak by nemohlo být $\omega(G') < \omega(G)$, protože uzlový stupeň souvislosti grafu, který není úplný, nemůže být větší než $n - 2$. Alespoň jedna z komponent C_1, C_2 tedy obsahuje alespoň dva uzly. Je-li C_1 takováto komponenta, pak odstraněním uzlu u z G_0 dostaneme nesouvislý graf; tento graf však vznikne také odstraněním množiny $R \cup \{v\}$ z G. Tato množina

má $\omega(G') + 1$ uzlů, tedy $\omega(G) \leqq \omega(G') + 1$ a z toho $\omega(G') \geqq \geqq \omega(G) - 1$. Je-li C_2 komponenta obsahující alespoň dva uzly, provedeme tutéž úvahu pro uzel v.

5. Nechť G je strom, nechť u je jeden jeho uzel. Zvolme hranu h incidentní s u a označme u_1 její koncový uzel různý od u. Má-li uzel u_1 stupeň 1, získali jsme již jeden uzel stupně 1. V opačném případě zvolíme hranu h_2 incidentní s u_1 a různou od h_1 a její koncový uzel různý od u_1 označíme u_2. Takto pokračujeme dále a získáváme tak postupně uzly $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Při tomto postupu se žádný uzel nemůže opakovat, protože to by znamenalo, že existuje kružnice v G. Nelze takto postupovat do nekonečna, protože G má konečný počet uzlů. Tedy po konečném počtu kroků musíme dostat uzel stupně 1. Vyjdeme-li nyní z tohoto uzlu a postupujeme opět popsaným způsobem, musíme dojít do některého dalšího uzlu stupně 1.

6. Nechť h je most v grafu G, nechť u a v jsou koncové uzly hrany h. Podle věty II.3 odstraněním hrany h z grafu G vznikne graf G', v němž uzly u a v spolu nesouvisí. Graf G' je tedy nesouvislý. Budiž C_1 komponenta grafu G' obsahující uzel u a C_2 komponenta grafu G' obsahující uzel v. Protože h je most, žádný z uzlů u, v nemá stupeň 1 a každá z komponent C_1, C_2 tedy obsahuje alespoň jeden uzel různý od u a v. Budiž G_1' graf vzniklý z G odstraněním uzlu u; tento graf je rovněž nesouvislý, protože v něm žádný uzel grafu C_1 různý od u nesouvisí se žádným uzlem grafu C_2. Graf G_1' však vznikne i z grafu G odstraněním uzlu u (při jeho odstranění se odstraní i hrana h) a tedy u je artikulací grafu G. Podobně bychom dokázali, že i v je artikulací grafu G.

7. Uzly každé komponenty grafu můžeme obarvit přípustným způsobem zcela nezávisle na obarvení uzlů ostatních komponent, protože žádná hrana nespojuje uzly dvou různých komponent. Je-li tedy k největší z chromatických čísel jednot-

livých komponent grafu, lze uzly každé komponenty přípustným způsobem obarvit k barvami. Zároveň samozřejmě nelze tento graf obarvit přípustným způsobem méně než k barvami, protože pak by žádná z komponent nemohla mít chromatické číslo k.

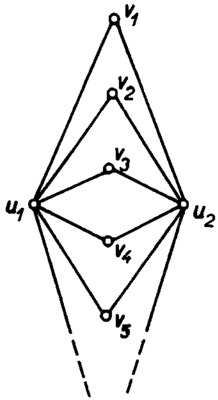
8. Nechť G je graf a nechť h je hrana grafu G s koncovými uzly u a v. Nechť G' je graf vzniklý z G odstraněním hrany h. Nechť $\chi(G')$ je chromatické číslo grafu G'. Existuje přípustné obarvení grafu G' používající $\chi(G')$ barev. Mají-li uzly u a v v tomto obarvení různou barvu, je toto obarvení také přípustným obarvením grafu G. Mají-li uzly u a v stejnou barvu, můžeme graf G obarvit přípustným způsobem $\chi(G') + 1$ barvami tak, že všechny uzly kromě v obarvíme tak jako ve zmíněném přípustném obarvení grafu G' a uzel v obarvíme barvou různou od barev všech ostatních uzlů. V obou případech máme tedy $\chi(G \leqq \chi(G') + 1$ a tedy $\chi(G') \geqq \chi(G) - 1$.

9. Nechť G je souvislý graf o n uzlech a $n - 1$ hranách. Předpokládejme, že G není stromem. Pak v G existuje hrana h, jejímž odstraněním z G vznikne souvislý graf G' (viz důkaz věty II.8). Graf G' má n uzlů a $n - 2$ hran. Protože je souvislý, existuje v něm podle věty II.8 jeho kostra. Tato kostra má $n - 1$ hran, tedy více než graf G', což je spor.

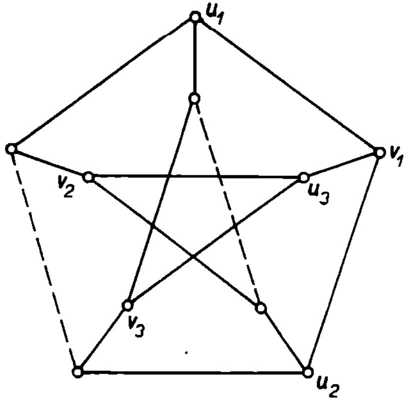
III. KAPITOLA

1. Řešení je na obrázku IX.6.

2. Řešení je znázorněno na obrázku IX.7. Vynecháním hran znázorněných čárkovaně dostaneme z Petersenova grafu graf, který je subdivisí grafu $K_{3,3}$. Uzly odpovídající uzlům grafu $K_{3,3}$ jsou značeny u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3. Dvojice $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_1\}$, $\{u_3, v_1\}$, $\{u_3, v_2\}$, $\{u_3, v_3\}$ jsou v této subdivisi přímo



Obr. IX.6



Obr. IX.7

spojeny hranou; ostatní dvojice jsou spojeny cestami délky 2 vzniklými rozpůlením hran.

3. Každá subdivise grafu K_5 nebo $K_{3,3}$ obsahuje více než jednu kružnici. Tedy graf obsahující nejvýše jednu kružnici nemůže takovouto subdivisi obsahovat a je rovinný.

4. Stačí vzít graf K_5 nebo $K_{3,3}$ a n-krát provést rozpůlení hrany.

IV. KAPITOLA

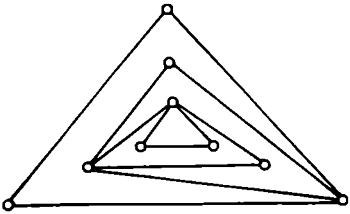
1. Řešení je na obrázku IX.8.

2. Příklad takové representace je na obrázku IX.9. Takováto representace má vždy 2 oblasti. Příslušný graf má tentýž počet hran jako uzlů.

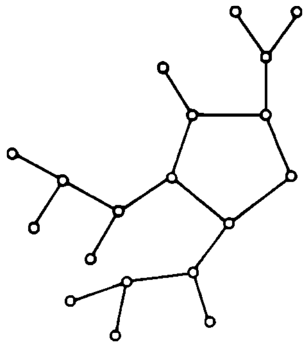
3. Řešení je na obrázku IX.10.

4. Pravidelný graf stupně 4 o n uzlech má $2n$ hran, tedy jeho rovinná representace má podle Eulerova vzorce $n + 2$ oblasti.

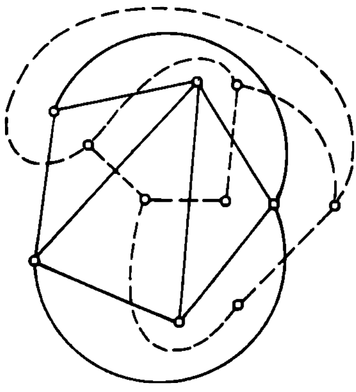
5. Je to opět kolo o témž počtu uzlů.



Obr. IX.8

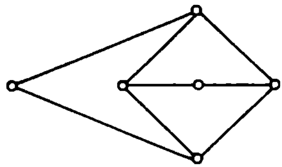


Obr. IX.9



Obr. IX.10

6. Řešení je na obrázku IX.11.



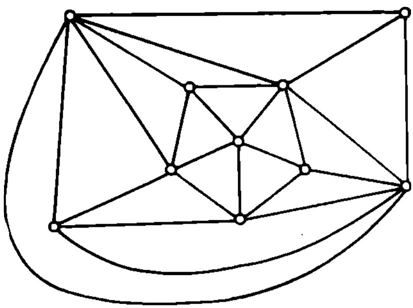
Obr. IX.11

7. Do Eulerova vzorce dosadíme $p = n$, $m = 30$. Dostaneme $n = 16$.

V. KAPITOLA

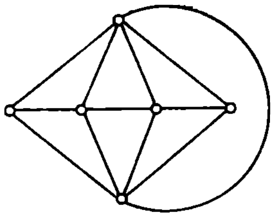
1. Triangulace v geodézii znamená rozdělení nějaké části terénu na nepřekrývající se trojúhelníky. Kdyby byla provedena pro celou zeměkouli vcelku (včetně moře), představovala by triangulaci kulové plochy a ta by se dala promítnout na rovinu jakožto triangulace roviny.

2. Příklad takové triangulace je na obrázku IX.12.



Obr. IX.12

3. Příklad takové triangulace je na obrázku IX.13.



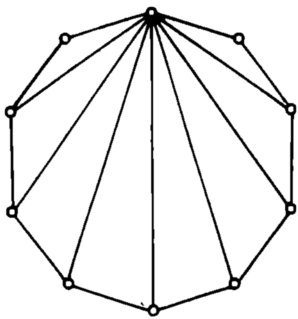
Obr. IX.13

4. Je to pravidelný graf stupně 3.

5. Není to pravda. Neplatí to například tehdy, je-li G graf $K_{3,3}$.

VII. KAPITOLA

1. Příklad takového grafu je na obrázku IX.14.

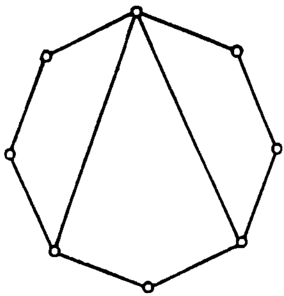


Obr. IX.14

2. Nechť u je uzel grafu G stupně $n - 1$. Nechť G' je graf vzniklý z grafu G odstraněním uzlu u. Podle věty VII.3 je graf G' vnějškově rovinný a lze tedy jeho uzly obarvit přípustným způsobem třemi barvami. Obarvíme-li nyní uzel u čtvrtou barvou, dostáváme přípustné obarvení grafu G čtyřmi barvami.

3. Nechť G je maximální vnějškově rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech. Podle věty VII.8 je $\omega(G) \leqq 2$. Sestrojme nyní graf $\tilde{G}$ z věty VII.3. Jak jsme poznali v důkazu věty VII.5, graf $\tilde{G}$ je grafem triangulace. Kdyby bylo $\omega(G) \leqq 1$, znamenalo by to, že graf vzniklý z G odstraněním nejvýše jednoho uzlu je nesouvislý. Takovýto graf však vznikne z grafu $\tilde{G}$ odstraněním nejvýše dvou uzlů (existuje uzel, jehož odstraněním z $\tilde{G}$ vznikne G), což je spor s tím, že podle věty V.2 je $\omega(\tilde{G}) \geqq 3$.

4. Příklad takového grafu je na obrázku IX.15.



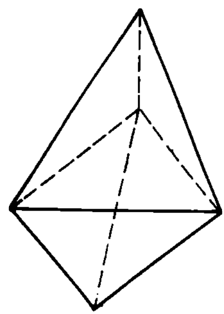
Obr. IX.15

5. Nechť G je takovýto graf. Kdyby bylo $\omega(G) \geqq 2$, pak by podle věty VII.1 hranicí každé oblasti rovinné representace tohoto grafu byla uzavřena křivka odpovídající některé kruž-

nici grafu G. Tedy oblast této representace incidentní se všemi uzly by musela mít jako svou hranici Hamiltonovu kružnici grafu G a tato kružnice by měla lichou délku, protože počet uzlů grafu G je lichý. To však není možné, protože G je sudý graf a nemůže tedy obsahovat kružnici liché délky.

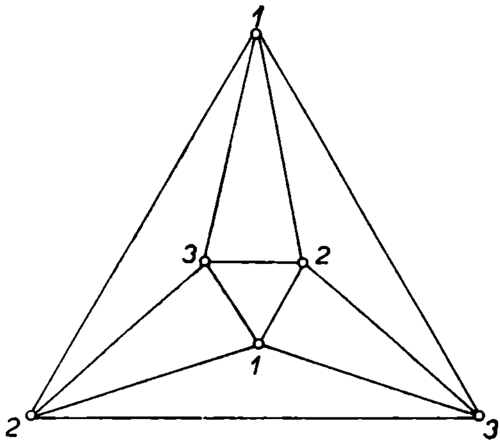
VIII. KAPITOLA

2. Příklad takového mnohostěnu je na obr. IX.16.

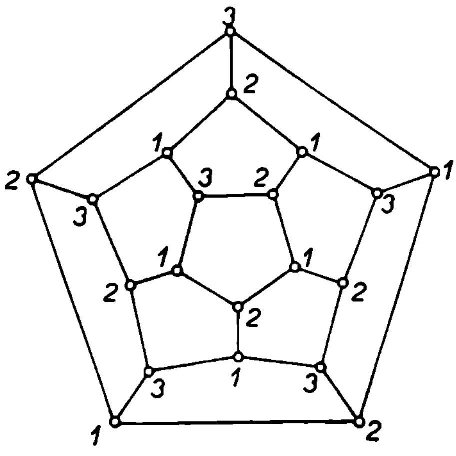


Obr. IX.16

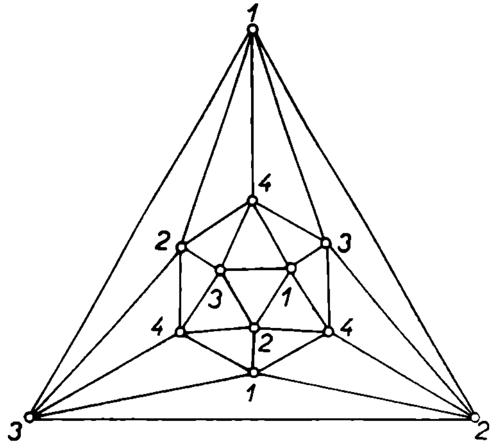
3. Chromatické číslo grafu pravidelného čtyřstěnu je 4, poněvadž je to úplný graf o čtyřech uzlech. Graf krychle je sudý, tedy jeho chromatické číslo je 2. Graf pravidelného osmistěnu a graf pravidelného dvanáctistěnu mají chromatické číslo 3; příslušná přípustná obarvení jsou na obrázcích IX.17 a IX.18 (menší chromatické číslo mít nemohou, protože obsahují kružnice liché délky). Přípustné obarvení grafu pravidelného dvacetistěnu čtyřmi barvami je na obrázku



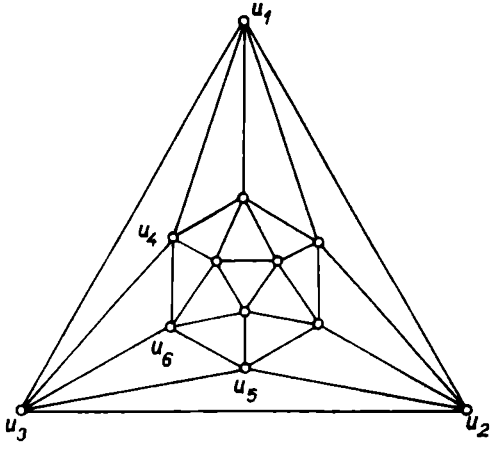
Obr. IX.17



Obr. IX.18



Obr. IX.19



Obr. IX.20

IX.19. Na obrázku IX.20 je opět graf pravidelného dvacetistěnu, u něhož některé uzly jsou označeny $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Kdybychom chtěli uzly tohoto grafu obarvit přípustným způsobem třemi barvami, musel by mít u_4 stejnou barvu jako u_2 a u_5 stejnou barvu jako u_1; uzly u_1, u_2, u_3 by musely být obarveny navzájem různými barvami. Uzel u_6 by pak byl spojen hranami s uzly tří různých barev, tedy by už nemohl být obarven žádnou z těchto barev. Proto chromatické číslo tohoto grafu je 4.

4. Vrcholy pravidelného čtyřstěnu označme A, B, C, D. Střed S kulové plochy opsané i kulové plochy vepsané pravidelnému čtyřstěnu $ABCD$ leží zřejmě na libovolné výšce čtyřstěnu, to jest na úsečce spojující vrchol čtyřstěnu s těžištěm protilehlé stěny. Mějme tedy výšku z vrcholu A. Těžiště stěny BCD označme T; tato výška je tedy úsečka AT. Zřejmě poloměr kulové plochy opsané $r = AS$, poloměr kulové plochy vepsané $\varrho = ST$, tedy $AT = r + \varrho$. Trojúhelník ABT je pravoúhlý. Je-li a délka hrany čtyřstěnu $ABCD$, je $AB = a$, $BT = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$ (dvě třetiny délky těžnice rovnostranného trojúhelníka). Odtud z Pythagorovy věty dostáváme $AT = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$. Pravidelný čtyřstěn $ABCD$ lze rozložit na čtyři nepřekrývající se shodné čtyřstěny $ABCS$, $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$; objem každého z nich je čtvrtinou objemu čtyřstěnu $ABCD$. Čtyřstěny $ABCD$, $BCDS$ lze považovat za trojboké jehlany o společné podstatě BCD a o výškách AT, ST. Protože objem čtyřstěnu $BCDS$ je čtvrtinou objemu čtyřstěnu $ABCD$, je $\varrho = AS = \frac{1}{4} AT = \frac{1}{12} a \sqrt{6}$. Potom $r = AT - \varrho = \frac{1}{4} a \sqrt{6}$. Poloměr kulové plochy vepsané krychli o hraně

délky a je zřejmě $1/2\, a$ a poloměr kulové plochy opsané je roven polovině délky tělesové úhlopříčky, tedy $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$. Pro výpočet poloměru kulové plochy vepsané pravidelnému osmistěnu o hraně délky a použijeme řezu rovinou, která je rovinou souměrnosti některé hrany tělesa. Tento řez je kosočtverec o délce strany $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$ (výška rovnostranného trojúhelníka) a o jedné úhlopříčce délky a. Snadno zjistíme, že poloměr kulové plochy vepsané tělesu je roven poloměru kružnice vepsané tomuto kosočtverci a tedy $\varrho = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$. Pro výpočet poloměru kulové plochy opsané pravidelnému osmistěnu použijeme řezu rovinou vedenou třemi vrcholy neležícími v jedné stěně. Tento řez je čtverec o délce strany a. Poloměr kulové plochy opsané tělesu je roven poloměru kružnice opsané tomuto čtverci a tedy $r = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$.

5. Objem pravidelného čtyřstěnu o hraně délky a vypočteme jako objem trojbokého jehlanu. Obsah stěny je $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, výška je $\frac{1}{3} a \sqrt{6}$ (viz cvičení 4), tedy $V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$. Objem krychle o hraně délky a je a^3. Pravidelný osmistěn lze rozložit na osm nepřekrývajících se shodných čtyřstěnů takových, že jedna stěna každého z nich je stěnou osmistěnu a vrchol k ní protilehlý je střed kulové plochy opsané i kulové plochy vepsané S. Objem kteréhokoliv z nich dostaneme jako objem trojbokého jehlanu o podstavě obsahu $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ a výšce $\frac{1}{6} a \sqrt{6}$. Je to tedy $\frac{1}{24} a^3 \sqrt{2}$. Objem pravidelného osmistěnu je osminásobkem tohoto výrazu, tedy $\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.

6. Nechť a je délka hrany původního čtyřstěnu, b délka hrany nového čtyřstěnu. Kulová plocha opsaná novému čtyřstěnu je vepsána původnímu, máme tedy $\frac{1}{4} b \sqrt{6} = \frac{1}{12} a \sqrt{6}$ a z toho $b = \frac{1}{3} a$.

7. Podobnou úvahou zjistíme, že délka hrany pravidelného osmistěnu, jehož vrcholy jsou středy stěn dané krychle, je rovna $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$, kde a je délka hrany krychle.

REJSTŘÍK POUŽITÝCH SYMBOLŮ

$C(u)$	komponenta grafu obsahující uzel u
$d(u, v)$	vzdálenost uzlů u a v v grafu
$F(G)$	množina oblastí grafu G
G^*	duální graf ke grafu G
$\widetilde{G}$	graf vzniklý z grafu G přidáním nového uzlu a spojením tohoto uzlu hranami se všemi uzly grafu G
$G(\boldsymbol{M})$	graf mnohostěnu $\boldsymbol{M}$
$S(u)$	množina uzlů souvisících s uzlem u v grafu
$\varrho_G(u)$, $\varrho(u)$	stupeň uzlu v grafu G
$\chi(G)$	chromatické číslo grafu G
$\omega(G)$	uzlový stupeň souvislosti grafu G
$\mathscr{R}(G)$	rovinná representace grafu G

LITERATURA

[1] C. Berge: Théorie des graphes et ses applications. Paris 1958. Ruský překlad: Теория графов и ее применения. Москва 1962.

[2] G. A. Dirac, N. D. Stojaković: Problem četiri boje. Beograd 1966.

[3] J. B. Dynkin, V. A. Uspenskij: Matematické besedy. Praha 1955.

[4] F. Harary: Graph Theory. Reading — Menlo Park — — London — Don Mills 1969. Ruský překlad: Теория графов. Москва 1973.

[5] S. Horák: Mnohostěny. (Škola mladých matematiků 27.) Praha 1970.

[6] O. Ore: Theory of Graphs. Providence 1962. Ruský překlad: Теория графов. Москва 1968.

[7] O. Ore: Graphs and Their Uses. New York — Toronto 1963. Ruský překlad: Графы и их применения. Москва 1965.

[8] G. Ringel: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin 1959.

[9] J. Sedláček: Kombinatorika v teorii a praxi. Praha 1964.

[10] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом: Избранные задачи и теоремы элементарной математики, том 3. Москва 1954.

[11] M. Wenninger: Polyhedron Models. Cambridge 1971. Ruský překlad: Модели многогранников. Москва 1974.

OBSAH

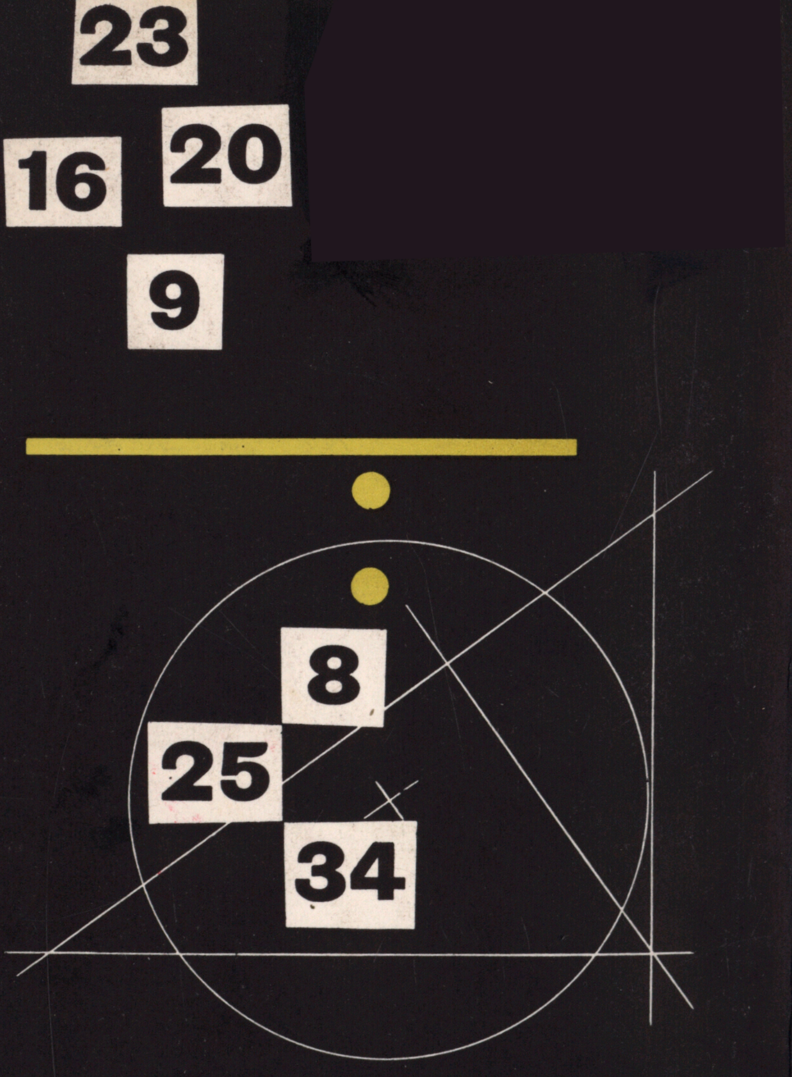
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

BOHDAN ZELINKA

Rovinné grafy

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Publikace číslo 3830
Edice Škola mladých matematiků, svazek 41
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
4,12 AA, 5,41 VA, 136 stran
Náklad 6000 výtisků, 1. vydání
Praha 1977, 508/21/82.5
23-086-77 03/2

Cena brožovaného výtisku Kčs 7,—



[redacted]

23-086-77
03/2
Cena brož.
Kčs 7,—