Latinské štvorce

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

LATINSKÉ ŠTVORCE

38

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JURAJ BOSÁK

Latinské štvorce

PRAHA 1976
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali: RNDr. Emil Calda, RNDr. Miloš Franek

PREDSLOV

Knižka, ktorá sa dostáva do rúk čitateľa, podáva populárny výklad základov teórie latinských štvorcov. Je písaná tak, aby ju bez ťažkostí mohol čítať študent gymnázia (ktorému je pôvodne určená), ale aby v nej našiel niečo nového aj profesionálny matematik, ktorý nie je špecialistom v kombinatorike (kam možno teóriu latinských štvorcov zaradiť).

Hlavné výsledky sú zhrnuté do 17 teorém (hlavných viet), z ktorých 10 je uvedených aj s dôkazmi. Dôkazy ostatných (teorémy 2, 4, 10—12, 14, 17) nebolo možné v knihe tohto druhu uviesť, lebo aj keď ich znenie je zväčša veľmi jednoduché a zrozumiteľné, ich dôkazy sú obťažné alebo zdĺhavé. Okrem toho sú v texte uvedené bez dôkazu ešte niektoré ďalšie výsledky, ktoré by mohli čitateľa zaujímať, napr. údaje o počte latinských štvorcov rádu menšieho než 10.

Pre obmedzený rozsah knihy som vybral tie partie, ktoré sa mi zdali z hľadiska čitateľa najdôležitejšie. Sú však známe aj ďalšie zaujímavé súvislosti teórie latinských štvorcov, na ktoré sa v knihe neušlo miesta. Mám na mysli hlavne ich vzťah k iným kombinatorickým štruktúram (ako sú konečné projektívne roviny, magické štvorce, blokové plány) a k algebraickým štruktúram (najmä ku grupám a kvázigrupám). Nedostalo sa miesta ani na skúmanie špeciálnych druhov (napr. diagonálnych latinských štvorcov a na výklad základných kombinatorických princípov (princíp inklúzie a exklúzie, metóda vytvárajúcich funkcií, systém rôznych reprezentantov), pomocou ktorých by bolo možné vykonať niektoré z vynechaných dôkazov. Pokročilejší čitateľ, ktorý by sa zaujímal o tieto otázky, nájde ich podrobný výklad v literatúre, ktorej zoznam je uvedený na konci knihy. Z týchto diel treba osobitne upozorniť na monografiu J. Dénesa a A. D. Keedwella [2] o latinských štvorcoch, ktorá zhrnuje prakticky všetky dôležité údaje o latinských štvorcoch, dovtedy roztrúsené v literatúre, a tým vykonala neoceniteľné služby aj autorovi tejto knižky.

Na konci každej zo šiestich kapitol sú cvičenia; ich výsledky sú uvedené súborne na konci knihy. Pre ľahšiu orientáciu čitateľa je tu aj abecedne usporiadaný register, v ktorom sú uvedené najdôležitejšie pojmy a mená vyskytujúce sa v texte.

Považujem si za svoju milú povinnosť poďakovať sa RNDr. Milošovi Franekovi za veľmi starostlivé prečítanie rukopisu a mnohé cenné pripomienky, ktoré značne prispeli k zlepšeniu tejto publikácie.

Bratislava marec 1975.

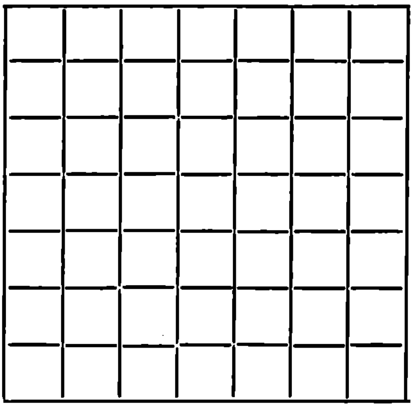
Autor

I. kapitola

LATINSKÉ ŠTVORCE
alebo
MALÁ EXKURZIA DO POĽNOHOSPODÁRSTVA

Predstavme si, že máme na poli štvorcového tvaru vyskúšať 7 druhov pšenice a určiť, ktorý druh dá najväčšiu úrodu. Pri experimente môžeme postupovať takto: rozdelíme pole na 49 štvorčekov (štvorcových parciel) rozložených do 7 riadkov a 7 stĺpcov, ako je znázornené schémou (1):

(1)



Položme si úlohu zasiať na každý zo 49 štvorčekov v (1) jeden zo 7 druhov pšenice tak, aby v každom riadku i stĺpci boli všetky štvorčeky obsiate rôznymi druhmi pšenice. To možno urobiť ľahko: ak označíme 7 druhov pšenice znakmi *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* a *g*, jeden z možných plánov osevu je znázornený schémou (2):

(2)

f	*b*	*g*	*a*	*d*	*e*	*c*
a	*c*	*f*	*e*	*g*	*d*	*b*
e	*g*	*d*	*f*	*c*	*b*	*a*
b	*a*	*c*	*g*	*e*	*f*	*d*
g	*f*	*a*	*d*	*b*	*c*	*e*
c	*d*	*e*	*b*	*f*	*a*	*g*
d	*e*	*b*	*c*	*a*	*g*	*f*

Keď pšenica vyrastie, zistíme úrody na každej zo 49 parciel, spočítame úrodu každého zo 7 druhov pšenice osobitne, prípadne použijeme aj hlbšie štatistické metódy, ktoré nám pomôžu urobiť vyhodnotenie experimentu.

Podobným spôsobom môžeme usporiadať pokus, ak máme síce len jeden druh rastliny (napr. zemiakov), ale máme vyhodnotiť vplyv 7 rôznych druhov hnojenia.

Schémy toho tvaru, ako napr. (2), sa nazývajú *latinské štvorce*. Ich názov pochádza z toho, že prvky sú označené písmenami latinskej abecedy na rozdiel od tzv. *grécko-latinských štvorcov* (s ktorými sa zoznámime v VI. kapitole), ktoré obsahujú grécke i latinské písmená. Poznamenajme však hneď, že používanie latinských (resp. gréckych) písmen je nepodstatné — problém by sa totiž vôbec nezmenil, keby sme do štvorčekov mali vpisovať číslice alebo iné symboly, alebo keby sme mali štvorčeky napr. zafarbiť rôznymi farbami zodpovedajúcimi v nejakom zmysle písmenám. Namiesto písmen budeme najčastejšie používať prirodzené čísla (v danom prípade 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7). Takisto nie je potrebné kresliť štvorec a štvorečky, na ktoré je štvorec rozdelený. Obyčajne budeme túto „kostru" vynechávať a len okraje štvorca označíme hranatými zátvorkami. Ak teda v latinskom štvorci (2) namiesto a (resp. b, c, d, e, f, g) píšeme všade 1 (resp. 2, 3, 4, 5, 6, 7), môžeme ho zapísať aj v tvare (3):

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Výhoda metódy latinského štvorca je v tom, že podstatne obmedzuje vplyv rozdielnych podmienok (pôdných i poveternostných), ktoré môžu existovať v jednotlivých riadkoch alebo stĺpcoch, a tak pri minimálnom počte pokusov dáva maximálne informácie.

Latinský štvorec (2), resp. (3) sa skladá zo $7^2 = 49$ štvorčekov; hovoríme, že je to latinský štvorec rádu 7. Všeobecne môžeme skúmať latinské štvorce rádu n, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo. Napr.

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

je latinský štvorec rádu 5.

Teraz si pojem latinského štvorca trochu spresníme. Nech je dané prirodzené číslo n a množina M, ktorá má práve n prvkov (pre určitosť si môžeme predstaviť, že sa skladá z prvých n prirodzených čísel, t.j. $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; to však nie je podstatné).

Latinským štvorcom nad množinou M nazývame štvorcovú schému A tvaru

$$
\begin{bmatrix}
A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) & \ldots & A(1,n) \\
A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) & \ldots & A(2,n) \\
A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) & \ldots & A(3,n) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A(n,1) & A(n,2) & A(n,3) & \ldots & A(n,n)
\end{bmatrix} \tag{5}
$$

skladajúcu sa z n^2 členov (každý člen $A(i, j)$, kde $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$, je prvkom množiny M), ktoré sú usporiadané do n riadkov a n stĺpcov, pričom platí:

1. V každom riadku sú všetky členy navzájom rôzne.
2. V každom stĺpci sú všetky členy navzájom rôzne.

Z uvedených dvoch podmienok vyplýva (keďže v množine M máme len n rôznych prvkov), že v každom riadku (a podobne v každom stĺpci) sa vyskytujú všetky prvky množiny M (každý práve raz).

Poznamenajme ešte to, čo čitateľ už asi sám zistil: znak i v označení člena $A(i, j)$ znamená poradové číslo riadku, znak j — poradové číslo stĺpca. Člen $A(i, j)$ teda leží v i-tom riadku a j-tom stĺpci latinského štvorca A.

Číslo n (počet prvkov množiny M) nazývame *rádom latinského štvorca A*. Stručne povedané, *latinským štvorcom rádu n* nazývame štvorcovú schému, ktorá má n riadkov a n stĺpcov vytvorených len pomocou n daných prvkov, pričom každý riadok i stĺpec obsahuje všetkých n prvkov.

Ďalším spresnením a zovšeobecnením pojmu latinského štvorca sa budeme zaoberať v II. kapitole.

Metóda latinských štvorcov má širšie použitie, než by sa na prvý pohľad zdalo. Riadky a stĺpce v danom experimente nemusia totiž znamenať poľnohospodárske parcely, ba dokonca vôbec nemusia predstavovať geometrické útvary, ale ľubovoľné činitele (faktory), ktorých vplyv chceme zistiť. Napr. ak chceme zistiť vplyv 7 spôsobov kŕmenia (ktoré označíme *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*) na dojivosť kráv, rozdelíme kravy do 7 rovnako veľkých stád zodpovedajúcich stĺpcom latinského štvorca a experiment rozdelíme na 7 období zodpovedajúcich riadkom latinského štvorca (2). Napr. v prvom období bude mať prvé stádo krmivo *f*, druhé stádo krmivo *b*, tretie — *g* atď. Vyhodnotenie pokusu možno urobiť podobne ako v predošlých prípadoch.

Čitateľ sa zaiste nechá ľahko presvedčiť o tom, že skutočnosť, že všetky doterajšie príklady sme vzali z poľnohospodárstva, je čisto náhodná a že práve tak by sme mohli vybrať príklady z iných odvetví. Uveďme ešte jeden príklad celkom iného druhu a z inej oblasti — z *teórie kódovania*.

Predstavme si, že treba dopraviť správu z jedného miesta na druhé, nemožno ju však preniesť v pôvodnom tvare, ale treba ju najprv zakódovať (zašifrovať). Dôvodom nemusí byť vždy len potreba utajenia obsahu správy, ale aj napr. schopnosť technického zariadenia vysielať len obmedzený počet znakov (tak pri telegrafe máme len dva znaky, bodku a čiarku). Preto každé písmeno správy nahradíme jeho *kódom* (tzv. *kódovým slovom*), t.j. konečnou postupnosťou (skupinou) písmen. Tieto kódy môžeme utvoriť mnohými spôsobmi. Ukážme si jeden z nich, pri ktorom sa používa latinský štvorec, napr. (4). Kódy budú tieto:

a = 111	b = 122	c = 133	d = 144	e = 155
f = 212	g = 223	h = 234	i = 245	j = 251
k = 313	l = 324	m = 335	n = 341	o = 352
p = 414	q = 425	r = 431	s = 442	t = 453
u = 515	v = 521	x = 532	y = 543	z = 554

Utvorili sme ich z latinského štvorca (4) tak, že pred každý člen latinského štvorca sme napísali poradové číslo riadku a stĺpca. Napr. v druhom riadku a štvrtom stĺpci je 5, čím vznikol kód (kódové slovo) 245. Týmto kódom sme priradili písmená (v danom príklade v abecednom poriadku, ale to je nepodstatné). Napr. slovo „algebra" vyzerá zakódované takto:

111 324 223 155 122 431 111

Náš kód má jednu dôležitú výhodu: sám „objavuje" chybu! Ak sa totiž v niektorom kódovom slove raz pomýlime, napr. namiesto 431 napíšeme 531, ihneď zistíme, že je tam chyba — jednoducho z toho dôvodu, že 531 nie je kódom žiadneho písmena. Preto sa môžeme pokúsiť chybu opraviť, čo sa spravidla ľahko podarí.

Dá sa dokázať, že z ľubovoľného latinského štvorca môžeme uvedeným spôsobom vytvoriť *kód objavujúci chybu*; vyplýva to zo základných vlastností latinského štvorca.

Ak použijeme latinský štvorec väčšieho rádu (napr. 7), môžeme zakódovať väčší počet písmen alebo iných znakov (napr. i písmená s mäkčeňmi a dĺžňami, číslice, bodku, čiarku, vykričník a pod.).

Existujú aj dokonalejšie kódy než kódy objavujúce chybu, a to *kódy opravujúce chybu*, pri ktorých pri jednej chybe v kódovom slove nielen objavíme, že sa chyba stala, ale jednoznačne určíme, ako vyzeralo pôvodné kódové slovo; teda kód vie chybu automaticky „opraviť". Horeuvedený kód, utvorený pomocou latinského štvorca (4) takýmto nie je, lebo napr. jednou chybou v kódovom slove môže vzniknúť skupina 531, a nedá sa zistiť (bez dodania ďalšej informácie, napr. zo zmyslu celej správy), či pôvodné kódové slovo bolo 431 (=r), 521 (=v) alebo 532 (=x).

Poznáme aj kódy objavujúce alebo opravujúce viac než jednu chybu v jednom kódovom slove. Tieto prednosti sú však obyčajne draho zaplatené tým, že sa neúmerne zväčšuje počet použitých znakov alebo rozsah správy, čo má za následok časové alebo hospodárske straty.

Teraz sa budeme venovať rozboru niektorých matematických problémov, ktoré pri štúdiu latinských štvorcov vznikajú.

Naše úlohy, ktorými sme sa na začiatku zaoberali, sme redukovali na utvorenie latinského štvorca rádu 7, t.j. vpísanie symbolov a, b, c, d, e, f, g (resp. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) do štvorčekov schémy (1) (do každého štvorčeka po jednom symbole) tak, aby riadky i stĺpce tvorené štvorčekmi obsahovali vždy rôzne symboly. Táto úloha má, ako neskôr uvidíme, obrovský počet riešení; latinský štvorec (2) resp. (3) predstavuje len jedno z nich.

Nech je dané prirodzené číslo n. Vzniká otázka, koľko existuje latinských štvorcov rádu n nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$, t.j. zložených z čísel $1, 2, \ldots, n$. Označme tento počet znakom L_n. Pre $n = 1$, 2 a 3 je jednoduché nájsť všetky takéto latinské štvorce. Sú to:

(6) $n = 1$: $[1]$

$$n = 2: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$n = 3$: $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&2\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{bmatrix}$

Pri konštrukcii latinských štvorcov rádu 3 si stačí uvedomiť, že prvý riadok možno zvoliť 6 spôsobmi; pri každej z týchto volieb prvý člen druhého riadku možno zvoliť dvoma spôsobmi. Zvyšok štvorca je jednoznačne určený. Teda $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $L_3 = 12$. Pre výpočet čísla L_n pri väčšom n je vhodné urobiť niektoré zjednodušenia.

Nazvime latinský štvorec rádu n *redukovaným*, ak je latinským štvorcom nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ a ak v jeho prvom riadku i prvom stĺpci sú čísla umiestnené v prirodzenom poradí: $1, 2, 3, \ldots, n$. Napr. latinský štvorec (4) je redukovaný, zatiaľ čo (3) nie. Zrejme redukovaných latinských štvorcov rádu n pri veľkom n je podstatne menej než všetkých latinských štvorcov rádu n nad $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Označme počet redukovaných latinských štvorcov rádu n znakom R_n. Ľahko zistíme, že $R_1 = R_2 = R_3 = 1$. Určme R_4. Za tým účelom napíšme schému

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & A(2,2) & A(2,3) & A(2,4)\\ 3 & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4)\\ 4 & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4)\end{bmatrix} \tag{7}$$

Aby schéma (7) bola latinským štvorcom, musí sa $A(2, 2)$ rovnať 1, 3 alebo 4. Ak $A(2, 2) = 1$, tak zrejme $A(2, 4) = A(4, 2) = 3$, $A(2, 3) = A(3, 2) = 4$ a zvyšok schémy možno dvojakým spôsobom doplniť na latinský štvorec:

(8)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

alebo

(9)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ak $A(2, 3) = 3$, tak postupne dostávame: $A(2, 4) = A(4, 2) = 1$, $A(2, 3) = A(3, 2) = 4$, $A(3, 4) = A(4, 3) = 2$, $A(3, 3) = 1$, $A(4, 4) = 3$, t.j. dostávame latinský štvorec

(10)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Podobne pre $A(2, 2) = 4$ dostávame jediný latinský štvorec

(11)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teda $R_4 = 4$.

Hodnoty R_n sú stále v centre pozornosti kombinatorikov. Napriek tomu doteraz nebol nájdený všeobecný vzorec pre R_n, ba čo viac, čísla R_n sú známe len pre $n < 10$. Sú to:

(12)
$$R_1 = 1,$$
$$R_2 = 1,$$
$$R_3 = 1,$$

$$
\begin{aligned}
R_4 &= 4,\\
R_5 &= 56,\\
R_6 &= 9\,408,\\
R_7 &= 16\,942\,080,\\
R_8 &= 535\,281\,401\,856,\\
R_9 &= 377\,597\,570\,964\,258\,816.
\end{aligned}
$$

Pre $n \leq 5$ tieto hodnoty určil už r. 1782 L. Euler, ktorý sa bezúspešne pokúšal vypočítať aj R_6. Túto hodnotu vypočítal až M. Frolov r. 1890; uvádza aj hodnotu $R_7 = 221\,276\,160$, ktorá je však nesprávna. Túto správne vypočítal až A. Sade r. 1948; R_8 bolo určené M. B. Wellsom r. 1967. Poslednú známu hodnotu R_9 vypočítali S. E. Bammel a J. Rothstein r. 1974 s použitím samočinných počítačov. Vidíme, že redukovaných latinských štvorcov rádu 9 je viac ako tretina trilióna.

Vzniká otázka, ako možno pomocou počtu R_n redukovaných latinských štvorcov rádu n vyjadriť počet L_n všetkých latinských štvorcov nad $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tento vzťah je jednoduchý:

Teoréma 1 (P. A. MacMahon 1915). *Nech n je prirodzené číslo, L_n — počet latinských štvorcov nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ a R_n — počet redukovaných latinských štvorcov rádu n. Potom platí:*

$$L_n = n!(n-1)!R_n \,. \tag{13}$$

Poznámka: Ak n je prirodzené číslo, znak $n!$ (čítaj: *n-faktoriál*) označuje súčin všetkých prirodzených čísel od 1 do n, tj. $n! = 1.2.3 \ldots n$. Ďalej sa ukazuje výhodným položiť $0! = 1$. Pre porozumenie nasledujúcemu dôkazu je dobré vedieť, že pre každé prirodzené n sa

$n!$ rovná počtu permutácií (alebo tiež počtu poradí) *n-prvkovej množiny* (tj. množiny, ktorá má práve n prvkov).

Prv než teorému 1 dokážeme, všimnime si, že všetkých 12 latinských štvorcov rádu 3 zo (6) môžeme získať z prvého *permutovaním* (postupným vymieňaním) riadkov a permutovaním stĺpcov. Napr. výmenou 2. a 3. stĺpca vznikne druhý latinský štvorec rádu 3 zo (6); ak v tomto vymeníme 1. a 3. riadok, dostaneme posledný z týchto latinských štvorcov a pod. V dôkaze teorémy zavedieme do týchto výmien (permutácií) riadkov a stĺpcov prehľadný systém.

Dôkaz teorémy 1. Zrejme z ľubovoľného redukovaného latinského štvorca A rádu n možno utvoriť $n!(n - 1)!$ latinských štvorcov nad $\{1, 2, \ldots, n\}$ nasledujúcim spôsobom: najprv permutujeme (t.j. poprehadzujeme) medzi sebou riadky štvorca A (to možno urobiť $n!$ spôsobmi) a potom — ponechajúc prvý stĺpec na mieste — permutujeme zvyšných $n - 1$ stĺpcov (čo možno urobiť $(n - 1)!$ spôsobmi). Zrejme dostaneme $n!(n - 1)!$ rôznych latinských štvorcov (líšia sa prinajmenej buď v prvom stĺpci alebo v prvom riadku). Preto stačí dokázať, že ľubovoľný latinský štvorec C nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ možno získať uvedeným spôsobom práve z jedného redukovaného latinského štvorca A rádu n. Aby sme sa o tom presvedčili, sledujme premiestňovanie ľubovoľného člena $A(i, j)$ pri uvedených permutáciách. Po permutovaní riadkov v A vznikne istý latinský štvorec B. Nech sa prvý riadok v A stane r-tým riadkom v B a i-tý riadok v A s-tým riadkom v B. Potom platí:

$$B(r, 1) = 1\,, \qquad B(r, j) = j\,,$$
$$B(s, 1) = i\,, \qquad B(s, j) = A(i, j)\,.$$

Po permutácii stĺpcov latinského štvorca B (pričom prvý stĺpec ostáva na mieste) vznikne latinský štvorec C. Nech sa j-tý stĺpec v B stane t-tým stĺpcom v C. Potom platí:

$$\begin{aligned} C(r, 1) &= 1\,, \qquad & C(r, t) &= j\,, \\ C(s, 1) &= i\,, \qquad & C(s, t) &= A(i, j)\,. \end{aligned}$$

Teda vidíme, že člen $A(i, j)$ možno na základe latinského štvorca C vypočítať takto: Nájdeme prirodzené čísla r, s, t tak, aby platilo $C(r, 1) = 1$, $C(s, 1) = i$, $C(r, t) = j$. Potom platí $C(s, t) = A(i, j)$. Zrejme čísla r, s, t sú jednoznačne určené. Preto aj $A(i, j) = C(s, t)$ je jednoznačne určené; keďže úvaha platila pre ľubovoľné $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, je aj redukovaný latinský štvorec A určený jednoznačne. Tým je dôkaz teorémy skončený.

Príklad. Podľa teorémy 1 dostávame:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1!0!R_1 = 1.1.1 = 1\,, \\ L_2 &= 2!1!R_2 = 2.1.1 = 2\,, \\ L_3 &= 3!2!R_3 = 6.2.1 = 12\,, \\ L_4 &= 4!3!R_4 = 24.6.4 = 576\,, \\ L_5 &= 5!4!R_5 = 120.24.56 = 161\,280 \end{aligned}$$

atď. Teda už latinských štvorcov rádu 5 (nad pevne zvolenou 5-prvkovou množinou) je viac než stotisíc.

Cvičenia

1. Zistite, koľkými spôsobmi možno doplniť nasledujúce schémy na latinský štvorec:

a) $\begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & 2 & . \\ . & . & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & . & 3 & . \\ . & . & 2 & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & . & 2 \\ 3 & . & . & . \\ . & . & 4 & . \end{bmatrix}$

2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $R_n \neq 0$ (t. j. existuje aspoň jeden redukovaný latinský štvorec rádu n).

3. Koľko existuje latinských štvorcov rádu 6 nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

II. kapitola

LATINSKÉ PRAVOUHOLNÍKY
alebo
O PRÁŠKOCH NA SPANIE

Predstavme si, že máme k dispozícii veľký počet ľudí trpiacich nespavosťou a že vo výskume bolo pripravených 7 druhov prášku na spanie, ktorý sú tieto osoby ochotné na sebe vyskúšať. Vzniká otázka, akým spôsobom máme usporiadať experiment. Jedna z možností je táto:

Rozdelíme ľudí do 7 približne rovnakých skupín a experiment rozvrhneme do 7 časových období (napr. týždňov) s použitím latinského štvorca (3). Obdobia budú zodpovedať riadkom, skupiny osôb stĺpcom a prášky členom latinského štvorca. Napr. v prvom týždni 1. skupina bude užívať prášok číslo 6, 2. skupina prášok č. 2 atď., v zhode s prvým riadkom latinského štvorca (3). V druhom týždni vymeníme prášky, ktoré majú používať jednotlivé skupiny podľa druhého riadku latinského štvorca: 1. skupina bude skúšať prášok č. 1, 2. skupina prášok č. 3 atď. Po siedmich týždňoch budeme mať dostatok materiálu na to, aby sme zistili, ktorý prášok priniesol najlepšie výsledky.

Môže sa však stať, že experiment budeme musieť prerušiť už po 6. týždni. V tomto prípade priebeh pokusu bude zodpovedať schéme

$$(14)\qquad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

ktorú dostaneme z latinského štvorca (3) vynechaním posledného riadku. Keďže má obdĺžnikový tvar, 6 riadkov a 7 stĺpcov, hovoríme jej *latinský obdĺžnik* typu 6×7 (nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

Menej spoľahlivé výsledky dostávame, ak experiment musíme skončiť už po troch týždňoch, podľa latinského obdĺžnika typu 3×7:

$$(15) \qquad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Príčinou nespoľahlivosti nie je len malý počet riadkov (teda týždňov), ale aj ich nevhodná skladba; napr. v 1. a 4. stĺpci sú tie isté prvky 1, 5, 6, t. j. prvá a štvrtá skupina osôb skúša tie isté prášky. Tento druhý nedostatok sa dá odstrániť tým, že si zvolíme latinský obdĺžnik, ktorý takúto nevýhodu nemá, napr.

$$(16) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

ktorého stĺpce majú tú zaujímavú vlastnosť, že obsahujú všetky dvojice utvorené z prvkov 1, 2, ..., 7 (tzv. *kombinácie* druhej triedy zo siedmich prvkov), a to každú práve raz (zatiaľ, čo latinský obdĺžnik (15) obsahuje napr. dvojicu $\{2, 3\}$ dvakrát — v 2. a 7. stĺpci, zato napr. dvojicu $\{1, 4\}$ ani raz v niektorom stĺpci) — je to tzv. *steinerovský systém trojíc* zo 7 prvkov, pomenovaný podľa nemeckého geometra Jakoba Steinera (1796—1863), ktorý sa r. 1853 takýmito systémami zaoberal.

Niekedy budeme potrebovať aj spoločný názov pre latinské štvorce a latinské obdĺžniky. V zhode s geometrickým názvoslovím budeme ich volať *latinské pravouholníky.*

Aby sme mohli pojem latinského pravouholníka presne definovať, povieme si najprv niekoľko základných poznatkov z teórie matíc. Potom budeme môcť dať presnejší význam takým pojmom, ktoré sme doteraz „ilegálne" používali, napr. riadok a stĺpec; slovo „schéma" budeme môcť nahradiť presnejším výrazom „matica". Aby čitateľ mal už vopred predstavu o tom, čo chceme definovať, uvedieme príklady matíc:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & -6 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 3{,}14 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a \\ d \end{bmatrix}$$

Prvá matica má typ 2×3, druhá 3×3, tretia 5×1 (pokúste sa na tomto základe definovať, čo budeme rozumieť pod typom matice!). Formálne tieto matice vyzerajú ako tabuľky, ale nebudeme ich definovať ako tabuľky, lež ako funkcie (zobrazenia), ktoré usporiadaným dvojiciam (o ktorých sa neskôr ukáže, že označujú poradové číslo riadku a stĺpca) priraďujú nejaké prvky, ktoré sú na tom-ktorom mieste. Napr. prvá z horeuvedených matíc priraďuje usporiadanej dvojici [2, 1] číslo 5 (lebo v prvej matici je v 2. riadku a 1. stĺpci číslo 5), druhá matica prvok 1 a tretia prvok b.

Teraz môžeme vysloviť definíciu matice:

Nech sú dané prirodzené čísla m, n a množina M. *Maticou typu* $m \times n$ *nad množinou* M rozumieme funkciu A, ktorá každej takej usporiadanej dvojici $[i, j]$ prirodzených čísel, že $i \leq m$, $j \leq n$, priraďuje prvok množiny M. Tento prvok budeme označovať znakom $A(i, j)$. Maticu A budeme zapisovať takto:

$$(17) \qquad A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \dots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \dots & A(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(m,1) & A(m,2) & \dots & A(m,n) \end{bmatrix}$$

Ak $m \neq n$, matica A sa nazýva *obdĺžniková matica (typu $m \times n$)*. Ak $m = n$, matica A sa nazýva *štvorcová matica (rádu n)*. Prvky $A(i, j)$, priradené usporiadaným dvojiciam $[i, j]$, sa nazývajú *členy matice A*.
Napr.

$$(18) \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

je obdĺžniková matica typu 3×4 nad množinou $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ — nie je dôležité, že niektoré prvky množiny M (a to 2 a 10) nie sú členmi matice A. (Pochopiteľne, za množinu M by sme mohli vziať tiež napr. množinu $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ alebo hoci aj množinu všetkých reálnych čísel.) Členy $A(1, 1)$, $A(2, 3)$ a $A(3, 1)$ sa rovnajú 3 atď.

Uveďme pre informáciu čitateľa ešte niekoľko poznámok, ktoré mu môžu byť užitočné pri štúdiu ďalšej literatúry:

1. V literatúre sa často pri zapisovaní matíc v tvare (17) namiesto hranatých zátvoriek [ ] používajú okrúhle zátvorky ( ) alebo dvojité čiary $\| \; \|$.

2. Je samozrejmé, že ak maticu označíme znakom B, jej členy budeme označovať symbolmi $B(i, j)$. V literatúre namiesto $A(i, j)$, $B(i, j)$ a pod. sa často používa $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ atď.

3. Namiesto slova „rád" (štvorcovej matice) sa používa aj „stupeň". Namiesto „člen matice" sa často hovorí jednoducho „prvok matice".

Ako sme už predtým poznamenali, riadky a stĺpce môžu byť definované bez použitia trochu nejasného pojmu „schémy“. Napr. i-tým *riadkom matice* (17) budeme rozumieť funkciu, ktorá sa dostane z funkcie A zúžením jej definičného oboru na usporiadané dvojice $[i, j]$, kde na prvom mieste stojí (pevne zvolený) prvok $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Podobne možno definovať j-tý *stĺpec matice* A. Napr. druhý riadok matice (18) je funkcia, ktorá priraďuje usporiadanej dvojici

$$\begin{aligned}&[2, 1] \text{ číslo } 1,\\ &[2, 2] \text{ číslo } 1,\\ &[2, 3] \text{ číslo } 3,\\ &[2, 4] \text{ číslo } 4\end{aligned}$$

a inde nie je definovaná.

Teraz už môžeme pristúpiť k definícii latinského pravouholníka.

Nech sú dané prirodzené čísla m, n a množina M, ktorá má práve n prvkov (skrátene: *n-prvková množina*). *Latinským pravouholníkom typu $m \times n$ nad množinou M* rozumieme maticu A typu $m \times n$ nad množinou M, pričom platí:

1. v žiadnom riadku matice A nie je ten istý prvok priradený rôznym usporiadaným dvojiciam;
2. v žiadnom stĺpci matice A nie je ten istý prvok priradený rôznym usporiadaným dvojiciam.

Podmienku 1 (resp. 2) možno stručne vyjadriť takto: každý riadok (resp. stĺpec) matice A je prostá funkcia.

V prípade $m < n$ latinský pravouholník typu $m \times n$ nazývame *latinským obdĺžnikom*. V prípade $m = n$ ho nazývame *latinským štvorcom rádu n* (čím spresňujeme definíciu z I. kapitoly). Ľahko vidieť, že nemôže existovať latinský pravouholník typu $m \times n$, kde $m > n$; takýto pravouholník by musel obsahovať stĺpce zložené z m členov, čo je nemožné, lebo k dispozícii máme len n prvkov množiny M, takže stĺpce nemôžu obsahovať viac než n navzájom rôznych prvkov množiny M.

Latinský pravouholník typu $1 \times n$ (teda s jediným riadkom) jednoznačne odpovedá *poradiu* prvkov vybraných po jednom z množiny M. Keďže M má práve n prvkov, existuje práve $n!$ latinských pravouholníkov typu $1 \times n$ nad množinou M.

Jestvuje jednoduchá metóda ako zostrojiť latinský obdĺžnik typu $m \times n$ (pri $m < n$): najprv zostrojíme latinský štvorec rádu n a použijeme m jeho riadkov (ostatné riadky vynecháme). Možno však namietnuť, že táto metóda príliš pripomína známu metódu, ako chytiť leva (chytiť tri levy a dva vypustiť...). Preto sa zaoberajme radšej obrátenou otázkou: kedy latinské obdĺžniky možno pridaním ďalších riadkov doplniť na latinské štvorce? Dá sa dokázať prekvapujúci fakt, že to ide vždy. Dokonca platí:

Teoréma 2. *Ku každému latinskému obdĺžniku typu* $m \times n$ *možno aspoň* $(n - m)!$ *spôsobmi pridať ďalší riadok tak, aby vznikol latinský pravouholník typu* $(m + 1) \times \times n$.

Dôkaz je pomerne náročný, preto ho vynechávame. Čitateľ ho nájde napr. v knihe M. Halla [3], teoréma 5.1.5. Uvedieme však niektoré dôsledky tejto teorémy a dokážeme ich za predpokladu, že teoréma platí.

Dôsledok 1. *Nech* p, q, n *sú také prirodzené čísla, že* $1 \leq p < q \leq n$. *Potom platí: Každý latinský pravouholník typu* $p \times n$ *možno aspoň*

$$(n - p)!(n - p - 1)!(n - p - 2)! \dots$$
$$\dots (n - q + 2)!(n - q + 1)!$$

spôsobmi doplniť na latinský pravouholník typu $q \times n$. *Špeciálne, každý latinský pravouholník typu* $p \times n$ *možno aspoň*

$$(n - p)!(n - p - 1)!(n - p - 2)!\ldots 2!1!$$

spôsobmi doplniť na latinský štvorec rádu n.

Dôkaz. Prvé tvrdenie vyplýva z teorémy 2 jej $(q - p)$-násobným použitím, a to pre $m = p$, $p + 1$, $p + 2$, $\ldots$, $q - 2$, $q - 1$. Druhé tvrdenie vyplýva z prvého pre $q = n$.

Dôsledok 2. *Pre ľubovoľné také prirodzené čísla* m, n, *že* $m \leq n$, *existuje aspoň*

$$n!(n - 1)!(n - 2)!\ldots(n - m + 2)!(n - m + 1)!$$

latinských pravouholníkov typu $m \times n$ *nad množinou* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dôkaz. Pre $m = 1$ tvrdenie platí, lebo existuje presne $n!$ latinských pravouholníkov typu $1 \times n$ nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ak $m \geq 2$, podľa dôsledku 1 pre $p = 1$, $q = m$ každý z $n!$ latinských pravouholníkov typu $1 \times n$ nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ možno aspoň

$$(n - 1)!(n - 2)!\ldots(n - m + 2)!(n - m + 1)!$$

spôsobmi doplniť na latinský pravouholník typu $m \times n$. Z toho vyplýva naše tvrdenie.

Dôsledok 3. (M. Hall 1948). *Pre ľubovoľné prirodzené číslo* n *existuje aspoň* $n!\,(n - 1)!(n - 2)!\ldots 2!1!$ *latinských štvorcov rádu* n *nad množinou* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z dôsledku 2, ak položíme $m = n$.

Dôsledok 4. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n o počte L_n latinských štvorcov rádu n nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí:*

$$n(n-1)^2 (n-2)^3 (n-3)^4 \ldots 3^{n-2} 2^{n-1} 1^n \leq L_n \leq$$
$$\leq n(n-1)^3 (n-2)^5 (n-3)^7 \ldots 3^{2n-5} 2^{2n-3} 1^{2n-1}.$$

Dôkaz. Dolný odhad (t. j. prvá nerovnosť) je len iným spôsobom prepísaný dôsledok 3. Horný odhad ľahko dokážeme, ak latinský štvorec tvoríme postupne po riadkoch a pri napísaní každého člena ohraničíme zhora počet možností, ktorými to možno urobiť; nakoniec počet týchto možností vynásobíme.

Latinský pravouholník typu $m \times n$ nazývame *normalizovaný*, ak jeho prvý riadok je

$$[1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n];$$

ak okrem toho jeho prvý stĺpec je

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ldots \\ m \end{bmatrix}$$

latinský pravouholník nazývame *redukovaný*. Napr. latinský obdĺžnik typu 2×4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

je normalizovaný, ale nie je redukovaný.

Teoréma 3. *Nech m a n sú prirodzené čísla, $m \leq n$. Nech $R(m, n)$ označuje počet redukovaných, $N(m, n)$ — počet normalizovaných a $L(m, n)$ — počet všetkých latin-*

ských pravouholníkov typu $m \times n$ nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$. Potom platí:

$$(19) \qquad L(m, n) = n!N(m, n) ,$$

$$(20) \qquad N(m, n) = \frac{(n-1)!}{(n-m)!} R(m, n) ,$$

$$(21) \qquad L(m, n) = \frac{n!\,(n-1)!}{(n-m)!} R(m, n).$$

Poznámka. Z (21) pri $m = n$ dostávame tvrdenie teorémy 1.

Dôkaz teorémy 3. Z každého normalizovaného latinského pravouholníka typu $m \times n$ môžeme permutáciou jeho stĺpcov utvoriť $n!$ rôznych latinských pravouholníkov rovnakého typu, pričom z rôznych normalizovaných latinských pravouholníkov zrejme vzniknú opäť rôzne latinské pravouholníky. Zrejme každý latinský pravouholník môže vzniknúť permutáciou stĺpcov práve z jedného normalizovaného latinského pravouholníka. Preto platí (19).

Keďže z (19) a (20) vyplýva (21), stačí dokázať (20). Zrejme (20) platí v prípade $m = 1$. Preto predpokladajme, že $m \geq 2$.

Z každého redukovaného latinského pravouholníka A typu $m \times n$ môžeme dostať

$$(22) \quad (n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{(n-1)!}{(n-m)!}$$

normalizovaných latinských pravouholníkov typu $m \times n$ takto:

Zvolíme usporiadanú skupinu $[k_2, k_3, \ldots, k_m]$ $m - 1$ rôznych čísel vybraných z čísel $2, 3, \ldots, n$ (to je tzv.

variácia ($m - 1$)-ej triedy z prvkov $2, 3, \ldots, n$ bez opakovania). Zrejme k_2 možno zvoliť $n - 1$ spôsobmi, k_3 $n - 2$ spôsobmi, atď. až k_m možno zvoliť $n - m + 1$ spôsobmi, takže celú usporiadanú skupinu možno zvoliť počtom spôsobov (22). Utvorme poradie $[k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}, \ldots, k_n]$ čísel $1, 2, \ldots, n$ takto: položme $k_1 = 1$; k_2 až k_m ponechajme ako doteraz; za k_{m+1} až k_n zvoľme ostatné z čísel $1, 2, \ldots, n$, v poradí od najmenšieho po najväčšie. Nahraďme teraz v A všetky dvojky číslom k_2, trojky číslom k_3 atď., až všetky čísla n číslom k_n. Dostaneme nový latinský pravouholník. Vhodnou permutáciou jeho stĺpcov vznikne normalizovaný latinský pravouholník. Ľahko zistíme, že týmto postupom vznikne každý latinský pravouholník typu $m \times n$ nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ práve z jedného redukovaného (spätný postup je totiž jednoznačný). To dokazuje teorému.

Zrejme platí pre ľubovoľné prirodzené čísla m a n:

$R(m, n) = 0$, ak $m > n$,

$R(n, n) = R_n$ (počet redukovaných latinských štvorcov rádu n),

$R(1, n) = 1$.

Ľahko sa tiež zistí, že pre $n > 1$ platí:

$$R(n - 1, n) = R_n .$$

Vzhľadom na (20) miesto vzorcov pre $R(m, n)$, stačí nájsť vzorce pre $N(m, n)$. V ďalších dvoch kapitolách uvedieme vzorce pre $N(2, n)$ a $N(3, n)$. Podľa (20) platí

$$R(2, n) = \frac{N(2, n)}{n - 1},$$

$$R(3, n) = \frac{N(3, n)}{(n - 1)(n - 2)},$$

takže potom budeme mať vlastne aj vzorce pre $R(2, n)$ a $R(3, n)$.

Značnú pozornosť pri výskume latinských pravouholníkov venovali matematici otázke, kedy možno danú maticu A typu $r \times s$ rozšíriť pridaním ďalších riadkov a stĺpcov na latinský štvorec predpísaného rádu n. Zrejme nutnou podmienkou je to, aby boli splnené obidva body z definície latinského pravouholníka. To však ešte nestačí. Napr. ľahko zistíme, že maticu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

nielen, že nemožno rozšíriť na latinský štvorec rádu 4 (čo je samozrejmé, lebo obsahuje 5 rôznych členov) ale ani na latinský štvorec rádu 5 a 6. Možno ju však rozšíriť na latinský štvorec rádu 7, napr. takto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Všeobecné kritérium pre „vnorenie“ matíc do latinských štvorcov predpísaného rádu vyzerá takto:

Teoréma 4. (H. J. Ryser 1951). *Nech sú dané prirodzené čísla r, s, n (pričom $r \leq n$, $s \leq n$) a matica A typu $r \times s$ nad n-prvkovou množinou $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Nech žiaden riadok ani stĺpec matice A neobsahuje dva rovnaké* *prvky ako členy. Pre* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *označme znakom* $V(i)$ *počet výskytov prvku* p_i *v matici* A. *Potom platí: Maticu* A *možno pridaním ďalších riadkov a stĺpcov doplniť na latinský štvorec rádu* n, *práve vtedy, keď*

$$V(i) \geq r + s - n \tag{23}$$

pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dôkaz vynecháme, ukážeme si však použitie teorémy na horeuvedenom príklade, kde bolo $r = 3$, $s = 4$. Ak položíme $n = 5$, dostávame:

$$\begin{aligned} r + s - n &= 2, \\ V(1) &= 3, \\ V(2) &= 3, \\ V(3) &= 3, \\ V(4) &= 2, \\ V(5) &= 1. \end{aligned}$$

Podmienka (23) teda nie je splnená pre $i = 5$.
Ak položíme $n = 6$, máme:

$$\begin{aligned} r + s - n &= 1, \\ V(6) &= 0. \end{aligned}$$

Teda (23) nie je splnené pre $i = 6$.

Konečne, ak položíme $n = 7$, platí

$$r + s - n = 0,$$

takže (23) je zrejme splnené pre každé $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Uveďme niektoré dôsledky teorémy 4:

Dôsledok 1 (M. Hall 1945). *Každý latinský obdĺžnik typu* $m \times n$ *(kde* $m < n$*) možno doplniť na latinský štvorec rádu* n.

D ô k a z. Stačí v teoréme 4 položiť $r = m$, $s = n$ a uvážiť, že podmienka (23) má tvar $V(i) \geq m$, čo je zrejme splnené, lebo platí dokonca $V(i) = m$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Tento dôsledok nám však hovorí menej, než vieme z dôsledku 1 teorémy 2 — tam sme mali odhadnutý aj počet spôsobov doplnení na latinský štvorec. Zaujímavejší je ďalší dôsledok:

Dôsledok 2. *Nech sú dané prirodzené čísla r, s, n, pričom $r + s \leq n$. Potom platí: Každá matica typu $r \times s$ (špeciálne každá štvorcová matica rádu k, kde $2k \leq n$) nad n-prvkovou množinou neobsahujúca riadok ani stĺpec s dvoma rovnakými členmi sa dá rozšíriť na latinský štvorec rádu n.*

D ô k a z. Pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je podmienka (23) splnená, lebo $V(i) \geq 0 \geq r + s - n$.

P o z n á m k a. V dôsledku 2 môžeme dokonca predpokladať, že daná matica je neúplná, t.j. niektoré jej členy chýbajú (nie sú definované). Stačí ju totiž doplniť ľubovoľným spôsobom tak, aby sme pritom použili len prvky danej n-prvkovej množiny a nenarušili podmienku, že žiaden riadok ani stĺpec neobsahuje dva rovnaké členy (ľahko zistíme, že to vždy ide) a úloha je prevedená na prípad uvedený v dôsledku 2. Zdá sa, že takýto výsledok (v prípade štvorcových matíc) uvádza ako prvý T. E v a n s r. 1960.

Dôsledok 3. *Nech k a n sú prirodzené čísla, pričom $k < n$. Latinský štvorec rádu k možno rozšíriť na latinský štvorec rádu n práve vtedy, keď $n \geq 2k$.*

D ô k a z. Ak $n \geq 2k$, tak podľa dôsledku 2 latinský štvorec rádu k možno rozšíriť na latinský štvorec rádu n.

Obrátene, nech latinský štvorec A rádu k možno rozšíriť na latinský štvorec B rádu n nad množinou $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Keďže $k < n$, existuje člen p_i matice B, ktorý sa nevyskytuje v matici A. Podľa teorémy 4 platí:

$$0 = V(i) \geq k + k - n = 2k - n,$$

odkiaľ $n \geq 2k$.

Cvičenia

4. Koľkými spôsobmi možno doplniť nasledujúce latinské obdĺžniky na latinské štvorce rádu 4?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

5. Uveďte príklad latinského obdĺžnika typu 4×6, ktorý možno 8 spôsobmi doplniť na latinský štvorec rádu 6.

6. Dokážte (napr. pre $i = 1$), že podmienka $V(i) \geq r + s - n$ v teoréme 4 je nutná; inými slovami, ak maticu typu $r \times s$ nad n-prvkovou množinou $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ možno rozšíriť na latinský štvorec rádu n, tak $V(1) \geq r + s - n$.

III. kapitola

LATINSKÉ PRAVOUHOLNÍKY TYPU $2 \times n$

alebo

AKO NEZASIELAŤ LISTY

S latinskými pravouholníkmi typu $2 \times n$ tesne súvisí *úloha o stretnutiach*, známa pod francúzskym názvom „le problème des rencontres". Uveďme ju v nasledujúcom tvare:

Koľkými spôsobmi možno vložiť n listov do n obálok s adresami (každý list do jednej obálky) tak, aby žiaden list nebol v správnej obálke? (Tohto činu sa vraj raz dopustila istá roztržitá sekretárka, ktorá tým spôsobila svojmu šéfovi veľa nepríjemností...)

Aby sme mohli náš problém pohodlnejšie vyšetrovať, očíslujeme listy i obálky číslami od 1 do n tak, aby list a obálka, ktoré k sebe partia. mali rovnaké čísla. Ďalej označme počet riešení našej úlohy znakom D_n.

Rozdelenie listov do obálok môžeme znázorniť pomocou latinského pravouholníka typu $2 \times n$, kde v prvom riadku sú čísla listov a pod každým z nich je napísané číslo obálky, do ktorej bol list vložený. Zrejme môžeme predpokladať, že čísla listov sú v prirodzenom poradí od 1 do n, t. j. že latinský pravouholník je normalizovaný. Napr. latinský pravouholník

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

znázorňuje situáciu s 5 listami a 5 obálkami, keď prvý list je umiestnený v tretej obálke, druhý v piatej atď.

Z tejto reprezentácie problému vyplýva, že počet D_n

jeho riešení sa rovná počtu normalizovaných latinských pravouholníkov typu $2 \times n$. Teda pre každé prirodzené číslo n platí $D_n = N(2, n)$.

Ako uvidíme, bude pre nás výhodné definovať D_n aj pre $n = 0$, a to takto: $D_0 = 1$. Prvýkrát využijeme výhodu tejto dohody ihneď:

Teoréma 5 (L. Euler 1811). *Pre každé prirodzené číslo n platí:*

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}) . \tag{24}$$

Dôkaz. Najprv dokážeme vzťah (24) pre $n = 1$ a $n = 2$. Preto vypočítajme D_n pre $n < 4$. Pred chvíľou sme položili

$$D_0 = 1 . \tag{25}$$

Ďalej zrejme

$$D_1 = 0 , \tag{26}$$

lebo neexistuje latinský pravouholník typu 2×1. Ďalej existuje práve jeden normalizovaný latinský pravouholník typu 2×2, a to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teda

$$D_2 = 1 . \tag{27}$$

Existujú práve dva normalizované latinské pravouholníky typu 2×3, a to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Teda

$$D_3 = 2 . \tag{28}$$

Z rovností (25)—(28) ľahko overíme, že

$$D_2 = 1(D_1 + D_0)$$
$$D_3 = 2(D_2 + D_1),$$

teda vzťah (24) platí pre $n = 1$ a $n = 2$.

Nech je dané prirodzené číslo $n \geq 3$. Zvoľme prirodzené čísla j a k tak, aby bolo $j \leq n$ a $k \leq n$. Nech

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & n-1 & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{j-1} & p_{j+1} & \dots & p_{n-1} & p_n \end{bmatrix}$$

je latinský pravouholník typu $2 \times (n - 1)$ nad množinou $\{1, 2, 3, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n - 1, n\}$. Pravouholníku P priraďme normalizovaný latinský pravouholník

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n-1 & n & n+1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{j-1} & n+1 & p_{j+1} & \dots & p_{n-1} & p_n & j \end{bmatrix}$$

typu $2 \times (n + 1)$. Číslo j sme mohli zvoliť n spôsobmi a pri každej voľbe čísla j sme mohli pravouholník P zvoliť D_{n-1} spôsobmi (okolnosť, že prvok j je v P vynechaný a namiesto neho n pridaný, je nepodstatná; počet latinských pravouholníkov typu $2 \times (n - 1)$ s pevne zvoleným prvým riadkom zrejme nezávisí od jeho prvkov — len od ich počtu). Vidíme, že existuje práve nD_{n-1} pravouholníkov P, a teda aj P' zostrojených uvedeným spôsobom (ľahko sa presvedčíme, že všetky sú navzájom rôzne).

Ďalej nech

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_{k-1} & q_k & q_{k+1} & \dots & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}$$

je normalizovaný latinský pravouholník typu $2 \times n$. Priraďme mu (a číslu k) normalizovaný latinský pravouholník

$$Q' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n & n+1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_{k-1} & n+1 & q_{k+1} & \dots & q_{n-1} & q_n & q_k \end{bmatrix}$$

typu $2 \times (n + 1)$. Číslo k možno zvoliť n spôsobmi, pravouholník Q možno zvoliť D_n spôsobmi. Teda Q' možno vybrať nD_n spôsobmi. (Opäť sa ľahko zistí, že všetky takto získané pravouholníky Q' sú navzájom rôzne.)

Každý pravouholník Q' je rôzny od každého pravouholníka P'. Keby sa totiž rovnali, museli by sa rovnať ich posledné stĺpce, teda aj

$$j = q_k \,. \tag{28}$$

Ďalej by sa museli rovnať tie stĺpce v P' a Q', ktoré majú v druhom riadku $n + 1$, teda

$$j = k \,. \tag{29}$$

Zo vzťahov (28) a (29) vyplýva

$$q_k = k \,.$$

To je však nemožné, lebo potom by Q obsahovalo v k-tom stĺpci dva rovnaké prvky, čo odporuje definícii latinského pravouholníka.

Tak sme zostrojili

$$nD_{n-1} + nD_n = n(D_n + D_{n-1})$$

rôznych normalizovaných latinských pravouholníkov typu $2 \times (n + 1)$. Aby sme teorému dokázali, stačí ukázať, že ľubovoľný normalizovaný latinský pravouholník

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} \end{bmatrix}$$

typu $2 \times (n + 1)$ sa rovná niektorému z pravouholníkov P' alebo Q'. To je však jednoduché. V druhom riadku pravouholníka S sa totiž niektorý z prvkov $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}$ musí rovnať číslu $n + 1$. Keďže S je latinský pravouholník, nemôže $s_{n+1} = n + 1$. Preto niektorý $s_k = n + 1$, kde $1 \leq k \leq n$. Potom S má tvar

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n-1 & n & n+1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{k-1} & n+1 & s_{k+1} & \ldots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} \end{bmatrix}$$

Ak $s_{n+1} = k$, tak sa zrejme S rovná niektorému z pravouholníkov P'. V opačnom prípade sa S rovná jednému z pravouholníkov Q'. Tým je teoréma dokázaná.

Poznámka. Teoréma 5 nám umožňuje postupne vypočítavať hodnoty D_n, ak vychádzame z $D_0 = 1$ a $D_1 = 0$. Tak dostávame

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 + D_0 = 0 + 1 = 1, \\ D_3 &= 2(D_2 + D_1) = 2(1 + 0) = 2, \\ D_4 &= 3(D_3 + D_2) = 3(2 + 1) = 9, \\ D_5 &= 4(D_4 + D_3) = 4(9 + 2) = 44 \end{aligned}$$

atď.

Teoréma 5 ukazovala, ako možno vypočítať hodnotu D_{n+1} pomocou dvoch predchádzajúcich hodnôt D_n a D_{n-1}. Ukážeme si teraz, že na výpočet D_{n+1} nám stačí poznať D_n, alebo, čo je vlastne to isté, na výpočet D_n stačí D_{n-1}.

Teoréma 6 (L. Euler 1811). *Pre každé prirodzené číslo n platí*

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n. \tag{30}$$

Dôkaz vzorca (30) vykonáme indukciou. Pre $n = 1$ (30) platí, lebo

$$1 . D_0 + (-1)^1 = 1 . 1 + (-1) = 0 = D_1.$$

Predpokladajme, že je dané prirodzené číslo k a že (30) platí pre $n = k$, t. j.

$$D_k = kD_{k-1} + (-1)^k.$$

Dokážeme, že potom (30) platí aj pre $n = k + 1$. Pritom použijeme teorému 5:

$$D_{k+1} = kD_k + kD_{k-1} = kD_k + D_k - (-1)^k = \\ = (k + 1)\, D_k + (-1)^{k+1},$$

čo sme mali dokázať.

Vzorec (30) nám umožňuje veľmi pohodlne postupne vypočítavať čísla $D_1, D_2, D_3, \ldots$ pomocou predchádzajúcich, pričom kladieme $D_0 = 1$. Tak dostávame

$$\begin{aligned} D_6 &= 6 . D_5 + 1 = 6 . 44 + 1 = 265, \\ D_7 &= 7 . D_6 - 1 = 7 . 265 - 1 = 1854, \\ D_8 &= 8 . D_7 + 1 = 8 . 1854 + 1 = 14\,833, \\ D_9 &= 9 . D_8 - 1 = 9 . 14\,833 - 1 = 133\,496. \\ D_{10} &= 10 . D_9 + 1 = 10 . 133\,496 + 1 = 1\,334\,961 \end{aligned}$$

atď. Existuje však aj veľmi zaujímavý vzorec pre D_n, ktorým nevypočítavame tieto hodnoty rekurentne (t.j. pomocou predchádzajúcich), ale priamo. Uvedieme ho vo forme ďalšej teorémy.

Teoréma 7 (J. J. Weyrauch 1872). *Pre každé celé nezáporné číslo n platí:*

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \tag{31}$$

Dôkaz vykonáme indukciou vzhľadom na n. Vzorec (31) platí pre $n = 0$:

$$0!\,\frac{1}{0!} = 1 . \frac{1}{1} = 1 = D_0.$$

Predpokladajme, že je dané celé nezáporné číslo k a že vzťah (31) platí pre $n = k$, t.j.

$$D_k = k!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right).$$

Dokážeme, že (31) platí aj pre $n = k + 1$. Podľa teorémy 6 platí:

$$D_{k+1} = (k + 1)\, D_k + (-1)^{k+1} =$$

$$= (k + 1)\, k!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right) +$$

$$+ (-1)^{k+1} = (k + 1)!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots +\right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{1}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{1}{(k + 1)!}\right),$$

čo bolo treba dokázať.

P r í k l a d. Určme počet normalizovaných, redukovaných a všetkých latinských obdĺžnikov typu 2×6 nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Riešenie: Podľa (31) dostávame:

$$N(2, 6) = D_6 = 6!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6!}\right) = 265\,.$$

Podľa (20) z teorémy 3 máme:

$$N(2, 6) = \frac{5!}{4!} R(2, 6) = 5R(2, 6),$$

teda

$$R(2, 6) = \frac{N(2, 6)}{5} = \frac{265}{5} = 53.$$

Podľa (19) z teorémy 3 dostaneme:

$$L(2, 6) = 6!\, N(2, 6) = 720 . 265 = 190\,800.$$

Zo vzorca (31) z teorémy 7 možno odvodiť zaujímavý fakt, že číslo $D_n = N(2, n)$ sa približne rovná číslu $n!$E, kde

$$\mathrm{E} = 0{,}367\,879\,441\,171\,442\,321\,595\,5\ldots;$$

presnejšie, číslo $n!$E sa líši od D_n menej než o $(n + 1)^{-1}$. Preto číslo D_n možno vypočítať tak, že vypočítame súčin $n!$E (pričom číslo E zaokrúhlime tak, aby malo za desatinnou čiarkou o 1 desatinné miesto viac než má číslo $n!$ číslic a nájdeme celé číslo, ktoré je najbližšie k $n!$E. Toto číslo bude práve D_n. Napr.

$$5!\mathrm{E} \doteq 120 . 0{,}3679 = 44{,}148 \doteq 44;$$

teda $D_5 = N(2, 5) = 44$.

$$10!\mathrm{E} \doteq 3\,628\,800 . 0{,}367\,879\,44 = 1\,334\,960{,}911\,872 \doteq \doteq 1\,334\,961;$$

teda $D_{10} = N(2, 10) = 1\,334\,961$.

Kto pozná základy teórie nekonečných radov, ľahko odhalí podstatu tejto podivuhodnej metódy. Spočíva v tom, že nekonečný rad

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots$$

má súčet $\mathrm{E} = \mathrm{e}^{-1}$, kde

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\ldots$$

je základ tzv. prirodzených logaritmov.

Číslo $E = 0,367\,879\ldots$ má v úlohe o stretnutiach tento význam: predstavuje približnú hodnotu pravdepodobnosti udalosti, že pri náhodnom rozdelení listov do obálok všetky budú v nesprávnych obálkach. Je pozoruhodné, že táto pravdepodobnosť sa len veľmi málo mení s číslom n (počtom listov i obálok) a už od $n = 4$ sa stále pohybuje okolo 37 %. Napr. ak by sme 100 sekretárok nechali potme roztriediť listy (každej aspoň štyri) do rovnakého počtu obálok s adresami, môžeme očakávať, že asi 37 sekretárok dá všetky listy do nesprávnej obálky!

Úlohu o stretnutiach (le problème des rencontres) možno zovšeobecniť takto:

Dané je prirodzené číslo n a celé číslo k, pričom $0 \leq k \leq n$. Treba určiť počet $d_{n,k}$ spôsobov, ako možno vložiť n listov do n obálok s adresami (každý list do jednej obálky) tak, aby práve k listov bolo v nesprávnej obálke.

Zrejme pôvodný problém dostaneme pre $k = n$, takže $d_{n,n} = D_n$.

Čitateľ, ktorý chce porozumieť nasledujúcemu riešeniu tejto úlohy, by mal vedieť, že číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

udáva počet spôsobov, ktorými možno vybrať k prvkov (bez ohľadu na ich poradie) z n daných prvkov — sú to tzv. *kombinácie* k-tej triedy z n prvkov (bez opakovania). Číslo $\binom{n}{k}$ (čítaj n nad k) sa nazýva *kombinačné číslo* alebo *binomický koeficient.*

Teoréma 8. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n a celé číslo k, pričom $0 \leq k \leq n$, platí:*

$$(32) \qquad d_{n,k} = \binom{n}{k} D_k.$$

D ô k a z. Vyberme z n listov k listov, ktoré majú byť v nesprávnych obálkach. To možno urobiť $\binom{n}{k}$ spôsobmi. Ostatných $n - k$ listov dajme do správnych obálok; to možno urobiť jediným spôsobom. Ostatne nám k listov a k obálok. Tie možno rozmiestniť D_k spôsobmi. Celkový počet možností dostaneme vynásobením týchto čísel, z čoho vyplýva (32).

Dôsledok. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n a celé číslo k, pričom $0 \leq k \leq n$, platí:*

$$(33) \quad d_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right).$$

D ô k a z. Použijeme najprv teorému 8, potom teorému 7:

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} D_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right) = \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right).$$

P r í k l a d. 5 listov možno rozdeliť do 5 obálok tak, aby boli všetky v nesprávnych obálkach,

$$d_{5,5} = D_5 = 44$$

spôsobmi. Ak majú byť len 4 listy v nesprávnych obálkach, je počet spôsobov podľa (33):

$$d_{5,4} = \frac{5!}{1!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 45.$$

Podobne vypočítame

$$\begin{aligned} d_{5,3} &= 20, \\ d_{5,2} &= 10, \\ d_{5,1} &= 0, \\ d_{5,0} &= 1. \end{aligned}$$

Pre kontrolu vypočítajme počet všetkých možných rozmiestnení 5 listov do 5 obálok! Je to

$$\begin{aligned} &d_{5,5} + d_{5,4} + d_{5,3} + d_{5,2} + d_{5,1} + d_{5,0} = \\ &= 44 + 45 + 20 + 10 + 0 + 1 = 120 = 5!, \end{aligned}$$

čo súhlasí.

Poznámka. Pochopiteľne, keby sme chceli vypočítať počet $D_{n,k}$ spôsobov, ako možno vložiť n listov do n obálok s adresami tak, aby práve k listov bolo v správnej obálke, stačí uvážiť, že $D_{n,k} = d_{n,n-k}$, takže z (32) vyplýva:

$$(34) \qquad D_{n,k} = d_{n,n-k} = \binom{n}{n-k} D_{n-k} = \binom{n}{k} D_{n-k},$$

keďže

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}. \text{ Špeciálne } D_{n,0} = d_{n,n} = D_n.$$

Ďalej z (33) dostaneme

$$(35) \qquad D_{n,k} = d_{n,n-k} =$$
$$= \frac{n!}{k!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right).$$

Cvičenia

7. Absolventi gymnázia usporiadali desať rokov po maturite stretnutie, na ktoré prišlo 20 bývalých spolužiakov aj so svojimi manželkami. Koľkými spôsobmi možno ich zoradiť do 20 tanečných párov tak, aby nikto netancoval so svojou vlastnou manželkou?

8. (Pokračovanie predošlého cvičenia.) Na stretnutí bol usporiadaný aj srdiečkový tanec, pri ktorom boli tanečné páry vyžrebované. Aká je pravdepodobnosť, že v tomto tanci a) netancoval žiaden manželský pár; b) tancoval práve jeden; c) práve dva; d) práve tri; e) viac než tri manželské páry?

9. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť 8 veží na šachovnicu tak, aby v každom rade i stĺpci bola jediná veža? b) Ako sa zmení počet riešení, ak naviac požadujeme, aby na „čiernej" diagonále a1—h8 nebola žiadna veža?

10. Z príkladu za dôsledkom teorémy 8 vidno, že $D_5 = d_{5,5} = 44$, $D_{5,1} = d_{5,4} = 45$. Ako možno tento výsledok zovšeobecniť?

11. Nájdite rekurentný vzťah medzi $R(2, n + 1)$ a $R(2, n)$.

IV. kapitola

LATINSKÉ PRAVOUHOLNÍKY TYPU 3 × n
alebo
AKO ROZSADIŤ HOSTÍ PRI STOLE

S latinskými pravouholníkmi typu $3 \times n$ súvisí nasledujúca *úloha o hosťoch* známa pod francúzskym názvom „le problème des ménages“:

Dané je prirodzené číslo $n \geq 2$. Na večierok bolo pozvaných n manželských párov. Koľkorakým spôsobom možno týchto $2n$ hostí posadiť okolo okrúhleho stola s $2n$ stoličkami tak, aby sa muži a ženy pravidelne striedali a aby žiaden muž nesedel vedľa svojej manželky?

Ľahko zistíme, že pre $n = 2$ úloha nemá riešenie a pre $n = 3$ má práve 12 riešení, z ktorých každé je určené už rozsadením mužov. Ak sú muži označení A, B, C a ich manželky v danom poradí a, b, c, sú to tieto rozsadenia:

$$\begin{array}{cccccc}
A & A & B & B & C & C \\
b\ \ c & c\ \ b & a\ \ c & c\ \ a & a\ \ b & b\ \ a \\
C\ B & B\ C & C\ A & A\ C & B\ A & A\ B \\
a & a & b & b & c & c
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
b & c & a & c & a & b \\
C\ A & B\ A & C\ B & A\ B & B\ C & A\ C \\
a\ \ c & a\ \ b & b\ \ c & b\ \ a & c\ \ b & c\ \ a \\
B & C & A & C & A & B
\end{array}$$

Prv, než sa zoznámime s riešením úlohy o hosťoch, zavedieme jeden pomocný pojem: Latinský pravouholník typu $3 \times n$ nazveme *silne normalizovaný*, ak má tvar

$$(36) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{n-1} & z_n \end{bmatrix}$$

Ďalej pre $n \geq 2$ označme znakom U_n počet silne normalizovaných latinských pravouholníkov typu $3 \times n$. Keďže neexistuje latinský pravouholník typu 3×2, platí $U_2 = 0$, Ďalej existuje jediný silne normalizovaný latinský pravouholník typu 3×3, a to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a práve dva typu 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Teda $U_3 = 1$, $U_4 = 2$. Ako neskôr uvidíme, bude výhodné položiť $U_0 = 1$, $U_1 = -1$, aj keď tieto čísla nemajú priamy súvis s počtom silne normalizovaných latinských pravouholníkov. Teraz už môžeme vysloviť teorému:

Teoréma 9. *Pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí: Úloha o hosťoch má práve*

$$2n!U_n$$

riešení, kde U_n je počet silne normalizovaných latinských pravouholníkov typu $3 \times n$.

Dôkaz. Aby sme si úlohu o hosťoch zjednodušili, predpokladajme, že stoličky uložené okolo stola sú striedavo hnedé a čierne a že muži sú už určitým spôsobom rozsadení. Zrejme buď všetci sedia na hnedých stoličkách (a takéto rozsadenie možno urobiť $n!$ spôsobmi) alebo všetci na čiernych stoličkách (opäť je $n!$ spôsobov). Celkový počet rozsadení mužov je

$$n! + n! = 2n!$$

Ak majú muži pevne určené miesta, pre n žien ostáva n stoličiek, ktoré môžu byť obsadené v podstate $n!$ spôsobmi. V danej úlohe však ich počet zmenšuje podmienka, že manželia nemajú sedieť vedľa seba. Aby sme mohli tieto možnosti rozobrať, očíslujme mužov, tak ako sedia vedľa seba, číslami $1, 2, \ldots, n$ (pričom číslovanie môžeme začať od ktoréhokoľvek muža a okolo stola postupujeme napr. v smere hodinových ručičiek). Očíslujme voľné stoličky pri stole taktiež $1, 2, \ldots, n$, a to tak, aby po pravej strane muža s číslom i bola vždy voľná stolička číslo i (pre $i = 1, 2, \ldots, n$). Nakoniec očíslujme ženy rovnakými číslami ako majú ich manželia.

Podľa podmienok úlohy na voľnú stoličku s číslom 1 si nesmie sadnúť žena s číslom 1 ani s číslom n, na stoličku 2 žena 2 ani žena 1 atď., až na miesto n si nesmie sadnúť žena n ani žena $n - 1$. Predpokladajme, že v súlade s týmito pravidlami si na stoličku 1 sadne žena, ktorú označíme z_1, na stoličku 2 si sadne žena z_2 atď. až na stoličku n si sadne žena z_n.

Ľahko sa presvedčíme, že potom (36) je silne normalizovaný latinský pravouholník typu $3 \times n$. Žena z_1 totiž sedí vedľa mužov 1 a n, teda nesmie mať číslo 1 ani n. Podobne žena z_2 sediaca medzi mužmi 2 a 1 nesmie mať číslo 2 ani 1 atď. To je však práve podmienka, aby žiaden stĺpec matice (36) neobsahoval dva rovnaké členy. Ďalšie podmienky, aby (36) bol silne normalizovaný latinský pravouholník, sú zrejme splnené.

Obrátene, každému silne normalizovanému latinskému pravouholníku typu $3 \times n$ zodpovedá riešenie našej úlohy (pri danom rozsadení mužov). Keďže týchto sme mohli rozsadiť $2n!$ spôsobmi, je počet riešení úlohy o hosťoch daný číslom $2n!U_n$, čo sme mali dokázať.

Ukážeme si, akým spôsobom možno vypočítať čísla U_n:

Teoréma 10 (J. Touchard 1934, I. Kaplansky 1943). *Pre každé prirodzené číslo n platí:*

$$U_n = 2n\left(\frac{1.2\ldots(2n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} - \frac{2.3\ldots(2n-2)}{n(n+1)\ldots(2n-2)} + \right.$$
$$+ \frac{3.4\ldots(2n-3)}{(n-1)n\ldots(2n-4)} - \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)\ldots(2n-k)}{(n-k+2)(n-k+3)\ldots(2n-2k+2)} +$$
$$\left. + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{(n-1)n(n+1)}{3.4} + (-1)^{n-1}\frac{n}{2}\right) + 2(-1)^n.$$

Dôkaz nevykonáme, keďže je zdĺhavý a pomerne obťažný.

Príklad. Riešte úlohu o hosťoch pre 5 manželských párov. Riešenie: Podľa teorémy 10

$$U_5 = 10\left(\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{6.7.8.9.10} - \frac{2.3.4.5.6.7.8}{5.6.7.8} + \right.$$
$$\left. + \frac{3.4.5.6.7}{4.5.6} - \frac{4.5.6}{3.4} + \frac{5}{2}\right) - 2 =$$
$$= 10\left(12 - 24 + 21 - 10 + \frac{5}{2}\right) - 2 = 13.$$

Podľa teorémy 9 úloha o hosťoch má

$$2.5!.U_5 = 2.120.13 = 3\,120$$

riešení.

Aj pri výpočte čísel U_n možno s výhodou použiť rekurentný vzťah:

Teoréma 11 (A. Cayley 1878). *Pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ platí:*

$$U_n = nU_{n-1} + \frac{nU_{n-2} + 4(-1)^{n+1}}{n-2},$$

pričom $U_1 = -1$, $U_2 = 0$.

Dôkaz pre jeho komplikovanosť opäť vynechávame.

S použitím teorémy 11 ľahko môžeme postupne vypočítavať čísla U_3, U_4, U_5, ..., vychádzajúc z hodnôt $U_1 = -1$, $U_2 = 0$:

$$U_3 = 3U_2 + \frac{3U_1 + 4}{1} = 1,$$

$$U_4 = 4U_3 + \frac{4U_2 - 4}{2} = 2,$$

$$U_5 = 5U_4 + \frac{5U_3 + 4}{3} = 13,$$

$$U_6 = 6U_5 + \frac{6U_4 - 4}{4} = 80,$$

$$U_7 = 7U_6 + \frac{7U_5 + 4}{5} = 579,$$

$$U_8 = 8U_7 + \frac{8U_6 - 4}{6} = 4738,$$

$$U_9 = 9U_8 + \frac{9U_7 + 4}{7} = 43\,387,$$

$$U_{10} = 10U_9 + \frac{10U_8 - 4}{8} = 439\,792$$

atď.

Zhrňme čísla D_n známe z úlohy o stretnutiach a čísla U_n z úlohy o hosťoch do tabuľky:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1854	14 833	133 496	1 334 961
U_n	1	–1	0	1	2	13	80	579	4738	43 387	439 792

Čísla U_n (pre $n \geq 2$) vyjadrujú počet silne normalizovaných latinských pravouholníkov typu $3 \times n$. Pomocou čísel D_n a U_n však možno vyjadriť aj počet $N(3, n)$ všetkých normalizovaných latinských pravouholníkov typu $3 \times n$:

Teoréma 12 (J. Riordan 1944). *Pre každé prirodzené číslo n platí:*

$$N(3, n) = \binom{n}{0} D_n D_0 U_n + \binom{n}{1} D_{n-1} D_1 U_{n-2} +$$
$$+ \binom{n}{2} D_{n-2} D_2 U_{n-4} + \ldots + \binom{n}{m} D_{n-m} D_m U_{n-2m},$$

kde m je najväčšie z celých čísel x, ktoré spĺňajú vzťah $x \leq \frac{n}{2}$.

Poznámka. Číslo m sa nazýva *„celá časť"* čísla $\frac{n}{2}$ a označuje sa symbolom $\left[\frac{n}{2}\right]$.

D ô k a z teorémy 12 zasa vynecháme pre jeho obťažnosť.

J. R i o r d a n r. 1945—46 dokázal, že pre veľké n sa $N(3, n)$ približne rovná číslu $(n!)^2 e^{-3}$, kde $e = 2{,}718\ldots$. Tento výsledok zovšeobecnili P. E r d ö s a I. K a p l a n s k y r. 1946 a K. Y a m a m o t o 1951 a ukázali, že počet $N(m, n)$ normalizovaných latinských pravouholníkov typu $m \times n$ sa približne rovná číslu

$$(n!)^{m-1} e^{-\binom{m}{2}},$$

čiže počet $L(m, n)$ všetkých latinských pravouholníkov typu $m \times n$ nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa približne rovná číslu

$$(n!)^m e^{-\binom{m}{2}},$$

ak m je „malé" vzhľadom na n; zhruba povedané, ak $m < \sqrt[3]{n}$.

Pre $m = 2$ dostávame výsledok, ktorý sme už spomínali v III. kapitole: číslo $N(2, n) = D_n$ sa približne rovná $n!e^{-1}$, teda $L(2, n)$ sa približne rovná $(n!)^2 e^{-1}$.

Príklad. Určete počet normalizovaných latinských pravouholníkov typu 3×7.

Riešenie:

$$N(3, 7) = \binom{7}{0} D_7 D_0 U_7 + \binom{7}{1} D_6 D_1 U_5 + \binom{7}{2} D_5 D_2 U_3 +$$

$$+ \binom{7}{3} D_4 D_3 U_1 = 1.1\,854.1.579 + 7.265.0.13 +$$

$$+ 21.44.1.1 + 35.9.2.(-1) = 1\,073\,760\,.$$

Keby sme použili Riordanov odhad, dostali by sme

$$N(3, 7) \doteq (7!)^2 e^{-3} \doteq 25\,401\,600 . 0{,}049\,787\,067 \doteq$$
$$\doteq 1\,264\,671 .$$

Pomerne veľká odchýlka od správneho výsledku neprekvapuje, keďže $m = 3$ nie je „malé“ v porovnaní s $n = 7$; dokonca neplatí ani podmienka $m < \sqrt[3]{n}$.

Na základe doterajších výsledkov z I.—IV. kapitoly môžeme vypočítať hodnoty $N(m, n)$ pre $m \leq 7$, $n \leq 7$, ktoré sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

n	1	2	3	4	5	6	7
$N(1, n)$	1	1	1	1	1	1	1
$N(2, n)$	0	1	2	9	44	265	1 854
$N(3, n)$	0	0	2	24	552	21 280	1 073 760
$N(4, n)$	0	0	0	24	1 344		
$N(5, n)$	0	0	0	0	1 344	1 128 960	
$N(6, n)$	0	0	0	0	0	1 128 960	12 198 297 600
$N(7, n)$	0	0	0	0	0	0	12 198 297 600

Napr. $N(6, 6)$ sme vypočítali pomocou (20) a (12) takto:

$$N(6,6) = \frac{5!}{0!} R(6, 6) = 120 R_6 = 120 . 9\,408 = 1\,128\,960.$$

Ak použijeme vzťah (20) z teorémy 3, môžeme z predchádzajúcej tabuľky vypočítať príslušné hodnoty $R(m, n)$, t. j. počty redukovaných latinských pravouholníkov typu $m \times n$. Takýmto spôsobom môžeme vypočítať hodnoty z nasledujúcej tabuľky:

n	1	2	3	4	5	6	7
$R(1, n)$	1	1	1	1	1	1	1
$R(2, n)$	0	1	1	3	11	53	309
$R(3, n)$	0	0	1	4	46	1 064	35 792
$R(4, n)$	0	0	0	4	56		
$R(5, n)$	0	0	0	0	56	9 408	
$R(6, n)$	0	0	0	0	0	9 408	16 942 080
$R(7, n)$	0	0	0	0	0	0	16 942 080

Cvičenia

12. Nájdite všetky riešenia úlohy o hosťoch pre $n = 5$ pri pevnom rozsadení mužov.

13. Vypočítajte číslo $N(3, 8)$.

14. Zostrojte tabuľku hodnôt $L(m, n)$ pre $m \leq 6$, $n \leq 6$, $[m, n] \neq [4, 6]$.

15. Vypočítajte čísla $R(2, n)$ a $R(3, n)$ pre $n \leq 10$.

V. kapitola

GRÉCKO-LATINSKÉ ŠTVORCE
alebo
AKO 36 OFICIEROV NESPLNILO ROZKAZ

Stalo sa to vraj niekedy v 18. storočí. Na slávnosti malo nastúpiť 36 dôstojníkov (vtedy ich ešte volali oficiermi) povyberaných zo šiestich plukov, a to tak, aby z každého pluku bolo vybraných 6 oficierov rôznych hodností (v dnešnej terminológii by to bol plukovník, podplukovník, major, nadporučík, poručík a podporučík). Oficieri mali utvoriť štvorec zložený zo 6 radov po 6 oficieroch, a to tak, aby v každom rade i zástupe (matematik by povedal: v každom riadku a stĺpci) bolo po 1 oficierovi z každého pluku i z každej hodnosti. Oficieri však nesplnili rozkaz — jednoducho sa im nepodarilo vymyslieť spôsob nástupu.

Generál, ktorý slávnosť organizoval, sa nahneval a zo slávnosti odvolal všetkých oficierov šiesteho pluku a všetkých podporučíkov. Potom už oficieri vedeli nastúpiť predpísaným spôsobom. Ak označíme plukovníkov písmenom *a*, podplukovníkov — *b*, majorov — *c*, nadporučíkov — *d*, poručíkov — *e* a pluky označíme gréckymi písmenami $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, nástupový tvar vyzeral takto:

$$(37) \qquad \begin{bmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma & d\delta & e\varepsilon \\ b\varepsilon & c\alpha & d\beta & e\gamma & a\delta \\ c\delta & d\varepsilon & e\alpha & a\beta & b\gamma \\ d\gamma & e\delta & a\varepsilon & b\alpha & c\beta \\ e\beta & a\gamma & b\delta & c\varepsilon & d\alpha \end{bmatrix}$$

(Symbol $b\varepsilon$ značí podplukovníka z 5. pluku, $c\alpha$ majora z 1. pluku a pod.) Generál bol tento raz spokojný. Nebol však spokojný jeden z najgeniálnejších matematikov, L. Euler, ktorý sa okolo r. 1779 začal *úlohou o 36 oficieroch* zaoberať a dospel k názoru, že je neriešiteľná; toto sa však podarilo dokázať až r. 1900 G. Tarrymu.

Čitateľ, ktorý si prečítal prvé dve kapitoly tejto knihy, sa zaiste nebude čudovať tomu, že tento útvar sa nazýva *grécko-latinský štvorec* (vyskytujú sa v ňom grécke i latinské písmená) rádu 5 (má 5 riadkov a 5 stĺpcov). Nebude sa čudovať ani tomu, že sme okraje štvorca označili hranatými zátvorkami. Ide znovu o maticu; jej členmi sú v tomto prípade dvojice písmen (jedno latinské a jedno grécke). Namiesto matice (37) by sme však mohli napísať aj dve matice

$$(38) \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \delta & \varepsilon & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \alpha \end{bmatrix}$$

ktoré sú latinskými štvorcami (hoci členy druhého sú označené gréckymi písmenami), a to takými, že na zodpovedajúcich si miestach oboch matíc sa postupne vystriedajú všetky dvojice zložené z jedného z latinských písmen a, b, c, d, e a z jedného z gréckych písmen α, β, γ, δ, ε. (Takéto dva latinské štvorce budeme nazývať *ortogonálne*.)

Situácia by sa však podstatne nezmenila, keby sme aj v druhom štvorci použili latinské písmená a, b, c, d, e alebo keby sme na označenie členov v obidvoch latinských štvorcoch použili číslice, ako to obyčajne budeme robiť.

Vidíme, že pojem grécko-latinského štvorca môžeme previesť na pojem dvoch ortogonálnych latinských štvorcov, ktorý si teraz budeme presne definovať:

Latinské štvorce A a B rádu n nazývame *ortogonálne*, ak n^2 usporiadaných dvojíc $[A(i, j), B(i, j)]$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, je navzájom rôznych (takže sú to všetky usporiadané dvojice $[a, b]$, kde $a \in M_A$, $b \in M_B$, pričom M_A a M_B sú množiny, nad ktorými sú dané latinské štvorce A a B).

Ako sme videli, možno predpokladať, že obidva latinské štvorce sú nad tou istou množinou. Napr. latinské štvorce (38) po zmene označenia môžeme uvažovať nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a zapísať takto:

$$(39) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Čitateľ, ktorý si pozorne prezrie ortogonálne latinské štvorce (39), ľahko nájde pravidlo, pomocou ktorého sme ich zostavili a zistí, že tento „trik“ možno použiť pri ľubovoľnom nepárnom ráde:

Teoréma 13 (L. Euler 1782). *Pre každé nepárne prirodzené číslo n existujú dva ortogonálne latinské štvorce rádu n.*

Dôkaz vykonáme tak, že dva ortogonálne latinské štvorce A_1 a A_2 priamo zostrojíme tým, že definujeme ich členy v i-tom riadku a j-tom stĺpci ($i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$):

$$A_1(i, j) = \begin{cases} i + j - 1, \text{ ak } i + j - 1 \leq n, \\ i + j - 1 - n, \text{ ak } i + j - 1 > n. \end{cases}$$

$$A_2(i, j) = \begin{cases} i - j + 1, \text{ ak } i - j + 1 > 0, \\ i - j + 1 + n, \text{ ak } i - j + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Postupne sa ľahko presvedčíme, že platí:

1. Všetky členy $A_1(i, j)$ aj $A_2(i, j)$ sú celé čísla.
2. Pre každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ máme $1 \leq A_1(i, j) \leq n$, $1 \leq A_2(i, j) \leq n$.
3. A_1 a A_2 sú latinské štvorce.
4. Latinské štvorce A_1 a A_2 sú ortogonálne.

Odporúčama čitateľovi, aby si podrobne vykonal tieto štyri body dôkazu.

Podstatne ťažšia je otázka, či platí obdobná teoréma pre párne rády. Experimentálne zistíme ľahko len to, že neexistujú dva ortogonálne latinské štvorce rádu 2, ale existujú pre rád 4, napr. tieto:

$$(40) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ako sme už povedali, dva ortogonálne latinské štvorce rádu 6 neexistujú, ale dôkaz tohto tvrdenia je obťažný. Euler sám dokázal, že existujú dva ortogonálne latinské štvorce ľubovoľného rádu $4k$ (kde k je prirodzené číslo) a vyslovil hypotézu, že neexistujú dva ortogonálne latinské štvorce žiadneho rádu $4k - 2$ (kde k je opäť prirodzené číslo). Ako vieme, hypotéza platí pre $k = 1$ a $k = 2$. R. 1958 však R. C. Bose a S. S. Shrikhande zostrojili dva ortogonálne latinské štvorce rádu 22 a o rok neskôr E. T. Parker zostrojil ortogonálne latinské štvorce rádu 10, čím bola Eulerova hypotéza vyvrátená pre $k = 6$ a $k = 3$. Dnes už vieme, že táto hypotéza neplatí pre žiadne $k > 2$ a spoločným úsilím mnohých matematikov sa podarilo prísť k nasledujúcemu výsledku, ktorému by sa asi Euler veľmi začudoval:

Teoréma 14 (R. C. Bose, S. S. Shrikhande, E. T. Parker 1960). *Dva ortogonálne latinské štvorce rádu n existujú práve vtedy, keď $n \neq 2$ a $n \neq 6$.*

Dôkaz tu nemôžeme uviesť pre jeho veľkú obťažnosť.

Ako sme spomínali v I. kapitole, latinské štvorce nám umožňujú robiť experimenty, pri ktorých sú poľnohospodárske pozemky usporiadané vo dvoch smeroch a do úvahy sa berie ešte ďalšia skutočnosť — znak (napr. druh pšenice alebo druh hnojenia). Môžeme však robiť aj pokusy, ktoré nemajú nič spoločného s geometrickými štvorcami, pri ktorých sa daný súbor (napr. kravy, pri ktorých zisťujeme dojivosť) triedi súčasne podľa troch znakov (napr. stáda, do ktorých sú kravy rozdelené, obdobia, v ktorých sa experimenty robia a druh krmiva, ktoré kravy dostávajú). Podobne môžeme využiť aj grécko-latinské štvorce pri poľnohospodárskych pokusoch na štvorcových parcelách, pričom skúmame súčasne dva ďalšie znaky (napr. odrodu rastliny i druh hnojenia) alebo pri pokusoch bez názornej geometrickej interpretácie, kde daný súbor (napríklad žiakov skúmaných so zreteľom na študijné výsledky) triedime súčasne podľa štyroch znakov (napr. obdobie, trieda a rôzne metodiky vyučovania jazykov v dvoch jazykoch). Vzniká otázka, či možno počet znakov takýmto spôsobom ešte zväčšovať. Odpoveď je vo všeobecnosti kladná, ak pri každom znaku rozdelíme súbor na rovnaký a vhodne zvolený počet skupín (napr. 5, keď je možné skúmať súbor až podľa 6 znakov). K tomu však potrebujeme pojem navzájom ortogonálnych latinských štvorcov.

Nech je k prirodzené číslo. Hovoríme, že latinské štvorce $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sú *navzájom ortogonálne*, ak pre ľubovoľné také prirodzené čísla p, q, že $1 \leq p < q \leq n$ platí: latinské štvorce A_p a A_q sú ortogonálne. Napr. latinské štvorce

$$(41) \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

rádu 5 sú navzájom ortogonálne, ako sa čitateľ ľahko presvedčí. Keď chceme, môžeme ich napísať aj vo forme jedinej matice

$$\begin{bmatrix} 1111 & 2222 & 3333 & 4444 & 5555 \\ 2345 & 3451 & 4512 & 5123 & 1234 \\ 3524 & 4135 & 5241 & 1352 & 2413 \\ 4253 & 5314 & 1425 & 2531 & 3142 \\ 5432 & 1543 & 2154 & 3215 & 4321 \end{bmatrix}$$

Z teorémy 14 vieme, že pre každé prirodzené číslo n rôzne od 2 a od 6 existujú aspoň dva ortogonálne latinské štvorce. V poslednom čase sa veľa úsilia venovalo určeniu maximálneho počtu $N(n)$ navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n. Z teorémy 14 vieme, že

$N(2) = N(6) = 1$ a $N(n) \geq 2$ pre $n \neq 2$, $n \neq 6$. Z existencie navzájom ortogonálnych latinských štvorcov (41) vyplýva, že $N(5) \geq 4$. V skutočnosti platí $N(5) = 4$, čo vyplýva z nasledujúceho výsledku:

Teoréma 15. *Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ platí $N(n) \leq n - 1$, t. j. neexistuje viac než $n - 1$ navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n.*

Poznámka. Teoréma neplatí pre $n = 1$, lebo ľubovoľné dva latinské štvorce rádu 1 sú ortogonálne, takže môžeme utvoriť ľubovoľne mnoho navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu 1. Túto skutočnosť môžeme symbolicky vyjadriť takto: $N(1) = \infty$ (čítaj: hodnota $N(1)$ je nekonečná).

Dôkaz teorémy 15. Predpokladajme, že je dané prirodzené číslo k a navzájom ortogonálne latinské štvorce $A_1, A_2, \ldots, A_k$ rádu $n > 1$. Treba dokázať, že $k \leq n - 1$.

Najprv dané latinské štvorce „normalizujeme". Ak $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$, nahraďme v latinskom štvorci A_s všetky členy, ktoré sa rovnajú členu $A_s(1, 1)$, číslom 1, všetky členy rovnajúce sa členu $A_s(1, 2)$ číslom 2, atď. až všetky členy rovnajúce sa členu $A_s(1, n)$ nahradíme číslom n. Tým vznikne z každého A_s normalizovaný latinský štvorec rádu n, ktorý označíme znakom B_s (pre $s = 1, 2, \ldots, n$).

Latinské štvorce $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sú navzájom ortogonálne. Keby totiž dva z nich, povedzme B_s a B_t ($1 \leq s < t \leq k$) neboli ortogonálne, vznikli by z členov na dvoch rôznych odpovedajúcich si miestach v B_s a B_t dve rovnaké usporiadané dvojice, t. j. $[B_s(i, j), B_t(i, j)] = [B_s(I, J), B_t(I, J)]$ pre nejaké $i, j, I, J \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pričom $[i, j] \neq [I, J]$. V tom prípade by však aj v pôvodných latinských štvorcoch $[A_s(i, j), A_t(i, j)]$ a $[A_s(I, J), A_t(I, J)]$ boli rovnaké usporiadané dvojice, t. j. A_s a A_t by neboli ortogonálne, čo je spor s predpokladom.

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ sú teda normalizované navzájom ortogonálne latinské štvorce. Keďže $n > 1$, existujú v týchto latinských štvorcoch druhé riadky a v nich prvé členy $B_1(2, 1), B_2(2, 1), \ldots, B_k(2, 1)$. Tieto členy sú rôzne od 1, lebo číslo 1 je nad nimi (sú to normalizované latinské štvorce!). Ďalej tieto členy sú navzájom rôzne, pretože, vzhľadom na ortogonálnosť a normalizovanosť, rovnosť odpovedajúcich si členov môže nastať len v prvom riadku. Zistili sme teda, že členy $B_1(2, 1), B_2(2, 1), \ldots, B_k(2, 1)$ sú navzájom rôzne a každý z nich sa rovná niektorému z čísel $2, 3, \ldots, n$. Keďže týchto čísel je len $n - 1$, musí byť $k \leq n - 1$, čo sme mali dokázať.

Môžeme sa opýtať, pre ktoré n sa dosahuje horný odhad z teorémy 15, t. j. kedy platí $N(n) = n - 1$? (Vtedy hovoríme, že príslušné navzájom ortogonálne latinské štvorce tvoria *kompletnú sústavu.*) Lahko zistíme, že to platí pre $n = 2, 3, 4$ a 5. Overme si to:

Zrejme $N(2) = 1$. Teoréma 13 nám poskytuje dva ortogonálne latinské štvorce rádu 3, napr.

$$(42) \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

takže $N(3) = 2$. Lahko zostrojíme 3 navzájom ortogonálne latinské štvorce rádu 4, napr. takto:

$$(43) \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

teda $N(4) = 3$. Rovnosť $N(5) = 4$ vyplýva z toho, že latinské štvorce (41) sú navzájom ortogonálne.

Rovnosť $N(n) = n - 1$ však neplatí všeobecne. Už vieme, že neplatí pre $n = 6$ (lebo $N(6) = 1$). Je dokázané, že neplatí v mnohých prípadoch, napr. pre $n = 6$, 14, 21, 22, 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, 62, 66, 69, 70, 77, 78, 86, 93, 94, ... Je ďalej veľká skupina hodnôt n, o ktorých nie je dosiaľ rozhodnuté, či rovnosť $N(n) = n - 1$ platí alebo nie. Sú to napr. hodnoty $n = 10$, 12, 15, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 35, 36, 39, 40, 44, 45, 48, 50, 51, 52, 55, 56, 58, 60, 63, 65, 68, 72, 74, 75, 76, 80, 82, 84, 85, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 98, 99, 100, ...

Uveďme, čo je známe o $N(n)$ pre $n \leq 30$ (ak nie je známa presná hodnota, uvádzame celý interval možností):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$N(n)$	∞	1	2	3	4	1	6	7	8	2 až 9	10	5 až 11	12	2 až 10

n	15	16	17	18	19	20	21	22
$N(n)$	3 až 14	15	16	2 až 17	18	3 až 19	4 až 17	2 až 18

n	23	24	25	26	27	28	29	30
$N(n)$	22	3 až 23	24	2 až 25	26	3 až 27	28	2 až 26

Ako vidno, ostáva ešte veľa otvorených otázok, pokiaľ ide o čísla $N(n)$. V posledných rokoch bolo však v tomto smere dosiahnutých veľa čiastkových výsledkov. Uveďme z nich najdôležitejšie:

Z teorémy 14 vyplýva, že ak $n \geq 7$, tak $N(n) \geq 2$. Ďalej platí:

1. Ak $n \geq 43$, tak $N(n) \geq 3$ (C. C. Shih 1965, R. M. Wilson 1974).

2. Ak $n \geq 53$, tak $N(n) \geq 4$ (R. Guérin 1966).
3. Ak $n \geq 63$, tak $N(n) \geq 5$ (H. Hanani 1970).
4. Ak $n \geq 91$, tak $N(n) \geq 6$ (R. M. Wilson 1974).
5. Existuje také prirodzené číslo k, že pre všetky $n \geq k$ platí $N(n) \geq \sqrt[17]{n}$ (R. M. Wilson 1974).
6. Ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2$ (kde k je prirodzené číslo) a ak sa n nedá napísať v tvare $n = a^2 + b^2$, kde a, b sú celé čísla, tak $N(n) \neq n - 1$. (R. H. Bruck a H. J. Ryser 1949).
7. Ak $N(n) \neq n - 1$, $n \neq 1$, tak $N(n) < n - 1 - \sqrt[4]{2n}$ (R. H. Bruck 1963).
8. Ak $n = p^\alpha q^\beta \dots r^\gamma$ je kanonický rozklad prirodzeného čísla $n > 1$ na prvočísla, tak $N(n) \geq \min \{p^\alpha, q^\beta, \dots, r^\gamma\} - 1$ (H. F. MacNeish 1922).

Dôležitý je najmä posledný výsledok, ktorý (ak berieme do úvahy teorému 15) je zovšeobecnením nasledujúceho tvrdenia: Ak je n prirodzenou mocninou prvočísla, tak $N(n) = n - 1$ (a teda existuje kompletná sústava navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n).

Veľkú pozornosť matematikov budí najmä najmenší otvorený prípad $n = 10$. Je možné, že existuje 9 navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu 10. Zatiaľ sa však nikomu nepodarilo nájsť ani tri, hoci pri výskume boli použité i samočinné počítače.

Cvičenia

16. Možno usporiadať do 4 radov po 4 kartách esá, kráľov, horníky a dolníky zo všetkých 4 farieb (červene, zelene, žalude, gule) tak, aby v každom vodorovnom i zvislom rade bolo po jednej karte z každej hodnoty i z každej farby?

17. Nájdite všetky normalizované latinské štvorce ortogonálne k latinskému štvorcu a) (8); b) (9); c) (10); d) (11).

18. Pokúste sa zovšeobecniť konštrukciu latinských štvorcov (41) a tým dokázať: pre každé prvočíslo n existuje $n - 1$ (teda kompletná sústava) navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n.

VI. kapitola

ROOMOVSKÉ ŠTVORCE
alebo
HRÁME BRIDŽ

Vráťme sa teraz na začiatok knihy a položme si úlohu vyplniť prázdnu tabuľku (1) z I. kapitoly číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8 tak, aby sa v každom riadku i stĺpci tabuľky vyskytovalo každé z čísel 1, 2, ..., 8, a to práve raz. Na prvý pohľad by sa zdalo, že úloha je neriešiteľná, lebo tabuľka (1) má len 7.7 = 49 štvorčekov. No úloha sa predsa len dá vyriešiť, ak pripustíme, aby v niektorých štvorčekoch boli napísané dve čísla:

(44)

6	2	7	1	4	5,8	3
1	3	6	5,8	7	4	2
5	7,8	4	6	3	2	1
2	1	3	7	5	6	4,8
7	6	1	4	2,8	3	5
3	4	5,8	2	6	1	7
4,8	5	2	3	1	7	6

Toto riešenie sme dostali z latinského štvorca (3) tým, že sme do niektorých štvorčekov zapísali ešte ďalšie číslo 8.

Ak dovolíme aj to, aby niektoré štvorčeky boli prázdne, môžeme sa zaobísť bez štvorčekov vyplnených jediným číslom:

(45)

8,1	5,6	2,4		3,7		
	8,2	6,7	3,5		4,1	
		8,3	7,1	4,6		5,2
6,3			8,4	1,2	5,7	
	7,4			8,5	2,3	6,1
7,2		1,5			8,6	3,4
4,5	1,3		2,6			8,7

Je zrejmé, že tabuľku (45) môžeme považovať za štvorcovú maticu rádu 7, v ktorej každý člen je buď prázdna množina (t.j. množina, ktorá nemá žiaden prvok) alebo 2-prvková množina (t.j. množina, ktorá má práve dva prvky). Ak urobíme zjednotenie členov (teda príslušných množín) z ľubovoľného riadku alebo stĺpca matice (45), dostaneme vždy množinu $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$.

Matica (45) má však ešte ďalšiu zaujímavú vlastnosť: Uvažujme, koľko dvojíc rôznych prvkov (teda 2-prvkových množín) možno utvoriť z prvkov $1, 2, 3, \ldots, 8$. Ako vieme z III. kapitoly, takýchto dvojíc je

$$\binom{8}{2} = \frac{8.7}{1.2} = 28 .$$

Ak dobre preskúmame maticu (45), zistíme, že každá z týchto 28 dvojíc sa tu vyskytuje práve raz. Napr. dvojica $\{2, 5\}$, alebo, čo je to isté, $\{5, 2\}$, sa vyskytuje v 3. riadku a 7. stĺpci a inde sa už nevyskytuje.

Zdalo by sa, že útvary podobného druhu ako je matica (45) nemôžu mať vážne aplikácie a hodia sa azda len na rozptýlenie znudených matematikov. Skutočnosť je však trochu iná, o čom svedčí už i fakt, že roomovské (vyslov „rúmovské") štvorce (lebo tak sa tieto matice nazývajú) boli objavené až dvakrát, vždy v súvislosti s témou vzdialenou od štúdia latinských štvorcov. Svoje meno dostali podľa austrálskeho matematika T. G. Rooma, ktorý k nim dospel r. 1955 pri štúdiu istého problému z algebraickej geometrie. No nebol to prvý objav roomovských štvorcov, lebo ich fakticky študovali už r. 1897 v súvislosti s organizáciou turnajov v kartovej hre zvanej „bridž" (z anglického slova „bridge" = = most). Prv než si o tom pohovoríme podrobnejšie, povedzme si definíciu roomovského štvorca.

Nech je dané prirodzené číslo k a množina M, ktorá má práve $2k$ prvkov. Označme znakom $P(M)$ množinu všetkých podmnožín množiny M. *Roomovským štvorcom rádu* $2k - 1$ *nad* M nazývame štvorcovú maticu A rádu $2k - 1$ nad množinou $P(M)$, o ktorej platí:

1. Každý člen matice A je buď prázdnou množinou alebo 2-prvkovou podmnožinou množiny M.
2. Pre ľubovoľný riadok (i stĺpec) matice A platí: zjednotením všetkých členov z tohto riadku (resp. stĺpca) je množina M.
3. Každá 2-prvková podmnožina množiny M sa vyskytuje práve raz ako člen matice A.

V tejto definícii sme použili frázu, že matica A je nad množinou $P(M)$. To znamená, že členmi matice A sú podmnožiny množiny M (a nie samotné prvky množiny M, ako to bolo pri latinských štvorcoch). Pre zjednodušenie zápisu roomovských štvorcov pri 2-prvkových množinách $\{x, y\}$ niekedy vynechávame zátvorky $\{ \}$. Okolnosť, že určitý člen roomovského štvorca je prázdna množina $\emptyset$, možno naznačiť aj tak (ako sme to robili dosiaľ), že príslušné miesto v štvorci ponecháme prázdne. Tieto dohody sú výhodné najmä vtedy, keď roomovský štvorec nezapisujeme tak, ako sme zapisovali matice (napr. v hranatých zátvorkách), ale keď nakreslíme štvorec aj so všetkými štvorčekmi.

Ľahko si overíme, že matica (45) spĺňa pri $k = 4$ a $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$ všetky podmienky uvedenej definície, teda je roomovským štvorcom rádu 7 nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Voľne možno povedať, že *roomovský štvorec rádu* $2k - 1$ je štvorcová schéma zložená z $2k - 1$ riadkov a $2k - 1$ stĺpcov vyplnená pomocou $2k$ daných prvkov, a to tak, aby každé miesto schémy bolo buď prázdne, alebo obsadené dvoma prvkami, pričom každý riadok i stĺpec obsahuje všetkých $2k$ prvkov a každá dvojica daných $2k$ prvkov sa v schéme vyskytuje práve raz.

Poznamenejme, že niektorí autori roomovský štvorec rádu $2k - 1$ nazývajú i roomovským štvorcom rádu $2k$ (podľa počtu použitých prvkov namiesto počtu riadkov a stĺpcov). Napr. (45) je v tomto zmysle nielen roomovským štvorcom rádu 7, ale i rádu 8.

Teoréma 16. *Nech je A roomovský štvorec rádu $2k - 1$ nad množinou M. Potom pre každý riadok (resp. stĺpec) R matice A platí:*

4. *Každý prvok množiny M sa vyskytuje práve v jednom člene riadku (resp. stĺpca) R.*
5. *Riadok (resp. stĺpec) R obsahuje k dvojíc a $k - 1$ ďalších členov, ktorými sú prázdne množiny.*

Dôkaz urobíme len pre riadky (pre stĺpce je obdobný). Z 2. podmienky definície roomovského štvorca vyplýva, že každý prvok množiny M sa vyskytuje v každom riadku matice A aspoň raz. Keďže množina M má $2k$ prvkov, musí každý riadok obsahovať aspoň k dvojíc. Keby niektorý riadok obsahoval viac než k dvojíc, bol by celkový počet dvojíc (v $2k - 1$ riadkoch roomovského štvorca) väčší než $k(2k - 1)$. To však nie je možné, pretože z $2k$-prvkovej množiny sa dá utvoriť len

$$\binom{2k}{2} = \frac{2k.(2k - 1)}{1.2} = k(2k - 1)$$

dvojíc. Preto každý riadok musí obsahovať presne k dvojíc. Keďže v každom riadku musia byť, ako už vieme, zastúpené všetky prvky množiny M, môže sa tam každý vyskytovať len raz. Ďalej vieme, že v riadku je presne k dvojíc. Zvyšujúcich

$$(2k - 1) - k = k - 1$$

členov sa preto musí rovnať prázdnej množine.

Ake vráťme sa k bridžu. V tejto hre, ktorá svojou intelektuálnou úrovňou a bohatstvom kombinácií býva porovnávaná so šachom, hrajú 4 hráči rozsadení okolo stola a každý z nich dostane pri rozdaní 13 kariet. Hráči sa označujú pomocou svetových strán: N (z anglického north = sever), E (east = východ), S (south = juh) a W (west = západ). Hráči sediaci oproti sebe (napr. N—S) tvoria tzv. linku a spolupracujú oproti druhej linke (E—W), t. j. ide vlastne o zápas dvoch dvojíc.

Na tomto mieste nemáme možnosť vykladať pravidlá tejto zaujímavej hry; obmedzíme sa však na konštatovanie, že v tejto tradičnej spoločenskej forme výsledok hry je značne ovplyvnený rozdaním kariet. Pravé hodnoty bridžu sa zreteľne uplatnia až v súťažnom bridži, pri ktorom sa eliminujú výhody, ktoré získajú hráči rozdaním kariet, takže tam „dobré" karty už prestávajú byť výhodou.

Spomeňme len jednu formu súťažného bridžu, a to súťaž dvojíc. Predstavme si napr., že do súťaže sa prihlásilo 8 dvojíc (t. j. 16 hráčov). Usporiadateľ môže zorganizovať súťaž nasledujúcim spôsobom: Pre hru pripraví 7 stolov; na každý stôl položí škatuľu so 4 priehradkami označenými N, E, S a W po 13 kartách. Každá škatuľa obsahuje pevné rozdanie kariet, ktoré sa po každej hre obnoví a ostáva na tomto stole; naproti tomu dvojice hráčov postupne vystriedajú všetky stoly (a teda všetky rozdania). Dvojiciam sa žrebom pridelia čísla 1, 2, ..., 8 a turnaj sa môže hrať na základe roomovského štvorca (45), v ktorom riadky označujú kolá a stĺpce označujú stoly (rozdania). Napr. v prvom kole sa stretnú dvojice 8—1 pri prvom stole, 5—6 pri druhom, 2—4 pri treťom a 3—7 pri piatom; štvrtý, šiesty a siedmy stôl ostanú prázdne. Dvojice hráčov, ktorých číslo je uvedené na prvom mieste v štvorčeku (v prvom kole 8, 5, 2 a 3) obsadia linku N—S, druhé dvojice obsadia linku E—W. Po skončení celého turnaja sa porovnajú výsledky, ktoré dosiahli dvojice hráčov s tým istým rozdaním (napr. na prvom stole dvojice linky N—S, tj. 8, 6, 7 a 4). Za najhorší výsledok na stole sa neudelí žiaden bod, za lepšie výsledky vždy o 2 body viac (teda najlepšia dvojica na prvom stole na linke N—S dostane 6 bodov a na linke E—W taktiež 6 bodov). Body získané tou-ktorou dvojicou na jednotlivých stoloch sa sčitujú a víťazom turnaja sa stáva dvojica hráčov s najvyšším počtom bodov.

Pokúsme sa preložiť do „bridžového jazyka“ vlastnosti 1—5 z definície roomovského štvorca a z teorémy 16. Roomovský štvorec rádu $2k - 1$ zodpovedá bridžovému turnaju $2k$ dvojíc, ktorý sa hrá na $2k - 1$ stoloch a skladá sa z $2k - 1$ kôl, pričom platí:

1. Celý turnaj sa skladá zo zápasov vždy dvoch dvojíc.
2. Ľubovoľná dvojica hrá v každom kole (resp. na každom stole) aspoň raz.
3. Ľubovoľné dve dvojice hráčov sa stretnú v turnaji práve raz.
4. Ľubovoľná dvojica hrá v každom kole (resp. na každom stole) práve raz.
5. V každom kole sa hrá práve na k stoloch (resp. na každom stole sa hrá práve v k kolách).

Uvedené vlastnosti sa ukazujú ako veľmi vhodné pre organizovanie bridžových turnajov. Vzniká otázka, pri akom počte dvojíc hráčov možno takýmto spôsobom zorganizovať bridžový turnaj. Inými slovami, pre ktoré prirodzené čísla k existuje aspoň jeden roomovský štvorec rádu $2k - 1$. Túto otázku sa podarilo vyriešiť až pomerne nedávno:

Teoréma 17 (W. D. Wallis 1973). *Nech je k prirodzené číslo. Roomovský štvorec rádu $2k - 1$ existuje práve vtedy, keď $k \neq 2$ a $k \neq 3$.*

Dôkaz pre jeho komplikovanosť vynechávame.

Z teorémy 17 vyplýva, že pre každý párny počet $2k$ dvojíc hráčov väčší než 6 možno zorganizovať bridžový turnaj pomocou roomovského štvorca rádu $2k - 1$. Pri nepárnom počte $2k - 1$ dvojíc (kde $k \geq 4$) možno použiť taktiež roomovský štvorec rádu $2k - 1$ s tým, že sa vynechajú dvojice, v ktorých sa vyskytuje pevne zvolený prvok (napr. $2k$). Počet stolov a kôl $(2k - 1)$ ostane nezmenený. Malé zmeny nastanú vo vlastnostiach 2, 4 a 5. Napr. v každom kole bude mať jedna dvojica „voľno" a pri každom stole (rozdaní) sa vystriedajú všetky dvojice hráčov okrem jednej.

Cvičenia

19. Nájdite aspoň jeden roomovský štvorec rádu 9 (t. j. zostavte hrací plán pre bridžový turnaj 10 dvojíc — označte ich 0, 1, 2, ..., 9).

20. Dokážte, že neexistuje roomovský štvorec rádu 3.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) 1. b) 0. c) 2.

2. Stačí v schéme (5) definovať (pre $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$):

$$A(i, j) = \begin{cases} i + j - 1, \text{ ak } i + j - 1 \leq n; \\ i + j - 1 - n, \text{ ak } i + j - 1 > n. \end{cases}$$

Pre $n = 5$ dostávame latinský štvorec (4).

3. $L_6 = 6!5!\, R_6 = 720.120.9\,408 = 812\,851\,200$.

4. a) 2. b) 4.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Označme znakom $V'(1)$ počet výskytov prvku p_1 v prvých r riadkoch a posledných $n - s$ stĺpcoch latinského štvorca B rádu n, ktorý vznikol rozšírením danej matice A. Označme ďalej znakom $V''(1)$ počet výskytov prvku p_1 v posledných $n - r$ riadkoch a prvých s stĺpcoch v B. Zrejme $V(1) + V'(1) + V''(1) \leq n$, $V(1) + V'(1) = r$, $V(1) + V''(1) = s$, odkiaľ $V(1) = (V(1) + V'(1)) + (V(1) + V''(1)) - (V(1) + V'(1) + V''(1)) \geq r + s - n$.

7. Hľadaný počet je $D_{20} = N(2, 20) \doteq 20!\mathrm{E} \doteq 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 . 0{,}367\,879\,441\,171\,442\,321\,60 \doteq 895\,014\,631\,192\,902\,120{,}965$, takže

$D_{20} = 895\,014\,631\,192\,902\,121$. Teda na zostavenie 20 „nemanželských“ párov je skoro trilión možností.

8. Pravdepodobnosť sa približne rovná číslu a) E = $= 0{,}367\,879\ldots$; b) E; c) $\frac{1}{2}$E; d) $\frac{1}{6}$E; e) $1 - \frac{8}{3}$E. V percentách je to približne a) 36,8 %; b) 36,8 %; c) 18,4 %; d) 6,1 %; e) 1,9 %. Pre dôkaz stačí uvážiť, že pravdepodobnosť stretnutia práve k z daných n párov je $D_{n,k}/n!$, čo sa podľa (34) rovná

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right),$$

a to sa zasa približne rovná číslu $E/k!$ (ak $n \geq 9$). Teda výsledok cvičenia by sa podstatne nezmenil, keby sme počet 20 manželských párov nahradili ľubovoľným iným počtom $n \geq 9$. Je prekvapujúce, že napr. aj pri stotisíc pároch pravdepodobnosť, že sa stretne viac manželských párov než 3, je menšia než 2 %.

9. Výsledky: a) $8! = 40\,320$. b) $D_8 = 14\,833$. Dôkazy: Ak použijeme algebraickú šachovú notáciu, pri ktorej a, b, ..., h sú stĺpce šachovnice a 1, 2, ..., 8 sú jej rady (matematik by asi povedal riadky), každé riešenie úlohy a) možno vyjadriť v tvare matice

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{g} & \mathrm{h} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \end{bmatrix},$$

kde $[p_1, p_2, \ldots, p_8]$ je poradie prvkov 1, 2, ... 8, ktorých je 8! Ak aj stĺpce označíme 1, 2, ..., 8, každé riešenie úlohy b) možno vyjadriť v tvare normalizovaného latinského obdĺžnika typu 2×8:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \end{bmatrix}.$$

Ich počet je $N(2, 8) = D_8$.

10. Pre každé prirodzené číslo n platí $D_n - D_{n,1} = (-1)^n$. Aby sme to dokázali, stačí použiť (34) a (30):

$$D_n - D_{n,1} = D_n - nD_{n-1} = nD_{n-1} + (-1)^n - nD_{n-1} = \\ = (-1)^n.$$

11. Pre každé prirodzené číslo n platí

$$R(2, n + 1) = nR(2, n) - \frac{R(2, n) + (-1)^n}{n}.$$

Dokáže sa to zo vzťahov (20) a (30).

12. Označme mužov A, B, C, D, E a ich manželky (v danom poradí) a, b, c, d, e. Ak muži sedia okolo stola v základnom poradí $ABCDE$ (v smere hodinových ručičiek), ich manželky môžu byť rozsadené ľubovoľným z nasledujúcich 13 poradí (taktiež v smere hodinových ručičiek), začínajúc od miesta medzi mužmi A a B: *caebd*, *cdeab*, *ceabd*, *cebad*, *daebc*, *daecb*, *deabc*, *deacb*, *debac*, *eabcd*, *edabc*, *edacb*, *edbac*.

13. $$N(3, 8) = D_8D_0U_8 + \binom{8}{1}D_7D_1U_6 + \binom{8}{2}D_6D_2U_4 + \\ + \binom{8}{3}D_5D_3U_2 + \binom{8}{4}D_4D_4U_0 = 70\,299\,264\,.$$

14.

n	1	2	3	4	5	6
$L(1, n)$	1	2	6	24	120	720
$L(2, n)$	0	2	12	216	5 280	190 800
$L(3, n)$	0	0	12	576	66 240	15 321 600
$L(4, n)$	0	0	0	576	161 280	
$L(5, n)$	0	0	0	0	161 280	812 851 200
$L(6, n)$	0	0	0	0	0	812 851 200

15.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(2,n)$	0	1	1	3	11	53	309	2 119	16 687	148 329
$R(3,n)$	0	0	1	4	46	1 064	35 792	1 673 792	103 443 808	8 154 999 232

16. Áno. Stačí použiť ľubovoľný grécko-latinský štvorec rádu 4.

17. a) Latinské štvorce A_2 a A_3 zo (43). b), c), d) Neexistujú (dokonca ani nenormalizované!).

18. Definujme latinské štvorce $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_{n-1}$ rádu n takto:

$$A_k(i, j) \equiv ki + j - k \pmod{n},$$
$$A_k(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

pre

$$i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$j = 1, 2, \ldots, n;$$
$$k = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

(Pre $n = 5$ a $n = 3$ dostávame latinské štvorce (41) resp. (42)).

Poznamenajme, že ak a, b sú celé čísla a n je prirodzené číslo, tak zápis $a \equiv b \pmod{n}$ (čítaj: a je *kongruentné* s b modulo n) znamená, že čísla a, b majú ten istý zvyšok pri delení číslom n. Inými slovami, $a = b + mn$ pre nejaké celé číslo m.

Ľahko sa zistí, že všetky členy v každom riadku ľubovoľnej z týchto matíc A_k sú navzájom rôzne. Z podmienky, že n je prvočíslo, vyplýva, že to isté platí aj pre stĺpce, t. j. sú to latinské štvorce, a že tieto sú navzájom ortogonálne. Podrobný dôkaz tu neuvádzame, ľahko si ho však doplní každý čitateľ, ktorý ovláda základy teórie čísel (počítanie s kongruenciami).

19. Napr.

0,1	4,5			3,9	2,7			6,8
7,9	0,2	5,6			4,1	3,8		
	8,1	0,3	6,7			5,2	4,9	
		9,2	0,4	7,8			6,3	5,1
6,2			1,3	0,5	8,9			7,4
8,5	7,3			2,4	0,6	9,1		
	9,6	8,4			3,5	0,7	1,2	
		1,7	9,5			4,6	0,8	2,3
3,4			2,8	1,6			5,7	0,9

20. Nech existuje roomovský štvorec rádu 3 nad množinou M. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Nech dvojica $\{1, 2\}$ sa nachádza v i-tom riadku a j-tom stĺpci. V i-tom riadku musí byť ešte jedna dvojica, a to $\{3, 4\}$. V j-tom stĺpci musí byť takisto ešte jedna dvojica, a to $\{3, 4\}$. To je však nemožné, lebo dvojica $\{3, 4\}$ by bola v roomovskom štvorci dvakrát.

LITERATÚRA

[1] L. Comtet: *Analyse combinatoire II*, Presses Universitaires de France, Paris 1970.

[2] J. Dénes, A. D. Keedwell: *Latin squares and their applications*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1974.

[3] M. Hall (M. Choll): *Kombinatorika*, Mir, Moskva 1970 (preklad z angličtiny).

[4] J. Kaucký: *Kombinatorické identity*, Veda, Bratislava 1975.

[5] J. H. van Lint: *Combinatorial theory seminar Eindhoven University of Technology*, Springer, Berlin 1974.

[6] E. Netto: *Lehrbuch der Combinatorik*, Chelsea, New York 1927.

[7] D. Raghavarao: *Constructions and combinatorial problems in design of experiments*, Wiley, New York 1971.

[8] J. Riordan (Dž. Riordan): *Vvedenie v kombinatornyj analiz*, IL, Moskva 1963 (preklad z angličtiny).

[9] K. A. Rybnikov: *Vvedenie v kombinatornyj analiz*, Izdateľstvo Moskovskogo universiteta, Moskva 1972.

[10] H. J. Ryser (G. Dž. Rajzer): *Kombinatornaja matematika*, Mir, Moskva 1966 (preklad z angličtiny).

[11] T. Šalát a kolektív: *Malá encyklopédia matematiky*, Obzor, Bratislava 1967.

REGISTER

OBSAH

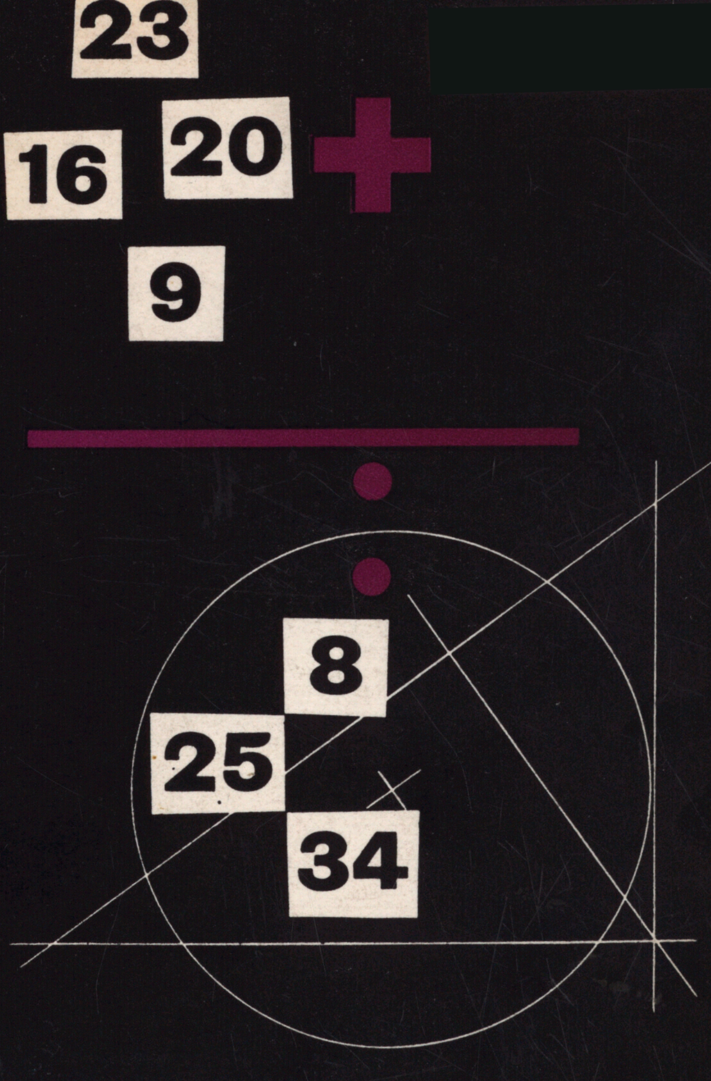
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JURAJ BOSÁK

Latinské štvorce

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jiří Příbramský
Odpovědný redaktor Jiří Sixta
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 3718
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 38
Vytiskl MÍR, novinářské závody n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
3,20 AA. 3,54 VA. 88 stran
Náklad 5.500 výtisků. První vydání
Praha 1976. 508/21/82.5
23-111-76 03/2 Cena brož. výt. Kčs 6,—

[redacted]



23-111-76
03/2
Cena brož.
Kčs 6,—